Prof. Dr. H. Brenner **Universität Osnabrück WiSe 2025-26**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. In der linearen Algebra geht es oft um lineare Gleichungssysteme. Welche nichtlinearen Gleichungen bzw. Gleichungssysteme treten in der linearen Algebra auf?

Aufgabe 1.2. Skizziere im $\mathbb{R}^2$ die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(1) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,
(2) $x^2 + xy + y^2 = 0$,
(3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
(4) $x^2 + y^2 = 0$,
(5) $x^2 + y^3 = 0$,
(6) $x^3 - y^5 = 0$,
(7) $x^2 - x^3 = 0$,
(8) $x^3 + y^3 = 1$,
(9) $x^4 + y^4 = 1$,
(10) $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$.

Aufgabe 1.3. Berechne den Durchschnitt der Kurven aus Aufgabe 1.2 mit den folgenden Geraden.

(1) $x = 0$,
(2) $y = 0$,
(3) $x = 1$,
(4) $y = -2$,
(5) $x = y$,
(6) $x = -y$,
(7) $2x - 3y + 4 = 0$.

Aufgabe 1.4.*

(1) Finde eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0.$$

(2) Zeige, dass
$$\left(\frac{383}{1000}, \frac{129}{100}\right)$$
eine Lösung für die Gleichung
$$x^2 - y^3 + 2 = 0$$
ist.

Aufgabe 1.5.*

Finde auf der ebenen algebraischen Kurve
$$V(X^3 - Y^3 + 4X^2 - 2XY + Y + 3) \subset \mathbb{C}^2$$
einen Punkt.

Aufgabe 1.6. Es sei K ein Körper. Das Bild der durch
$$K \longrightarrow K^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right),$$
definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in K^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 1.7. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2 - t + 2,\ t^2 - 3\right).$$
Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.8. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^3 - 1,\ t^2 - 1\right).$$
Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.9. Wir betrachten die Kurve
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

(a) Zeige, dass die Bildpunkte (x, y) der Kurve die Gleichung
$$y^2 = x^2 + x^3$$
erfüllen.

(b) Zeige, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

(c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 1.10. Diskutiere den Zusammenhang zwischen ebenen algebraischen Kurven und dem Satz über implizite Funktionen.

Aufgabe 1.11. Es sei $K = \mathbb{Z}/(7)$. Bestimme alle Punkte in $K^2 = K \times K$, die auf der Kurve liegen, die durch die Gleichung

$$X^2Y + 2Y^3 + 3Y^2 = 0$$

gegeben ist. Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 1.12.*

Finde eine Gerade $G \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, die die Kurve

$$C = V(X^3 + Y^3 + 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

in genau einem Punkt schneidet.

Aufgabe 1.13.*

Zeige, dass die Neilsche Parabel

$$C = V\big(Y^2 - X^3\big) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

jede Gerade durch den Punkt $P = (1,1) \in C$ in mindestens einem weiteren Punkt trifft.

Aufgabe 1.14.*

Begründe analytisch, dass es einen reellen Schnittpunkt des Einheitskreises $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Neilschen Parabel $V(y^2 - x^3)$ gibt und bestimme numerisch die reelle x-Koordinate eines solchen Schnittpunktes mit einem Fehler $\leq 0,1$.

Aufgabe 1.15. Betrachte Gleichungen der Form

$$y^2 = G(x) \text{ mit } G(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

über $\mathbb{R}$. Skizziere die verschiedenen Lösungsmengen für die Koeffizienten $a, b, c \in \{1, -1, 0\}$.

Die folgende Aussage folgt über Lemma 1.3 auch aus Satz 6.1.

Aufgabe 1.16. Es sei K ein Körper und es sei

$$K \longrightarrow K^2,\, t \longmapsto (P(t), Q(t)),$$

eine durch zwei Polynome $P(t), Q(t) \in K[t]$ gegebene Abbildung. Es sei B das Bild dieser Abbildung und es sei $G \subseteq K^2$ eine Gerade. Zeige, dass $B \subseteq G$ ist oder dass der Durchschnitt $B \cap G$ endlich ist.

Aufgabe 1.17. Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y\,.$$

Aufgabe 1.18. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2\,.$$

Aufgabe 1.19. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ integer ist.

Aufgabe 1.20.*

Es sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 1.21.*

Es sei K ein Körper. Zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) K ist algebraisch abgeschlossen.
(2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 1.22. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimme in $K[X]$ die irreduziblen Polynome.

Aufgabe 1.23. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.24. (2 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6\,.$$

Aufgabe 1.25. (5 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{F}_3[X]$ alle normierten irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 1.26. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 1.27. (5 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{C}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ t \longmapsto \left(t^3 - t^2 + 4t + 3,\ -t^2 + 5t - 1\right).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.28. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Abbildungsverzeichnis