Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 58

Übungsaufgaben

Aufgabe 58.1. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f\colon \mathbb{R} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^i y^j.$$

Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_a^b x^i y^j \, dy\,.$$

Berechne $\varphi'(x)$ auf zwei unterschiedliche Weisen.

Aufgabe 58.2. Bestätige Satz 58.2 für die Funktion

$$f\colon [1, 2] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x) \longmapsto e^{xt}.$$

Aufgabe 58.3. Sei

$$f(x, y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y\ .$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0, \pi]$ über $x \in [0, 1]$ und zum Parameter $x \in [0, 1]$ über $y \in [0, \pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

Die Himmelsscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

Aufgabe 58.4. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\} .$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

Aufgabe 58.5. Zeige, dass eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 58.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann ein (nichtleeres) Intervall ist, wenn T sternförmig ist.

Aufgabe 58.7. Es seien $P_1, \ldots, P_k$ $(k \geq 1)$ endlich viele Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ nicht sternförmig ist.

Aufgabe 58.8. Man gebe ein Beispiel für eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 58.9. Man gebe ein Beispiel für eine offene, sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 58.10. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^2 + y^4)^2}, \frac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 58.11. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^3 + y^3)^2}, \frac{8xy^3}{(x^3 + y^3)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 58.12. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x \, , \, - \sin x \,) ,$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G.

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

Aufgabe 58.13. Es sei

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

Aufgabe 58.14. Berechne zum Vektorfeld

$$G\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^3 - z^2,\ \frac{xy}{z},\ \frac{z}{x^2y}\right)$$

die Rotation.

Aufgabe 58.15.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$G(x,y) = (y, -x^3)$$

Zeige auf zweifache Weise, dass G kein Gradientenfeld ist.

(1) Mit der Integrabilitätsbedingung.
(2) Mit Wegintegralen.

Aufgabe 58.16.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (y - \cos(x+z),\ x,\ 2z - \cos(x+z)).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

AUFGABE 58.17.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z,\ xe^{xy} - 2yz,\ \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 58.18. (3 Punkte)

Bestimme, ob zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

der Subgraph und ob der Epigraph sternförmig ist.

AUFGABE 58.19. (6 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Teilmenge. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ sternförmig ist.

AUFGABE 58.20. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(ye^z - 3x^2z,\ xe^z + 2yz,\ xye^z + y^2 - x^3 \right),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

AUFGABE 58.21. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \neq 0,\ z > 0 \right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{e^{3x} - z}{y},\ \frac{\cos x}{z^2},\ \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Nebra Scheibe.jpg , Autor = Benutzer Dbachmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1