Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Entwerfe einen Termstammbamm für den Term

$$f\alpha\alpha g x \alpha c_2 f \beta g y \alpha c_1 g f z \beta g c_1 f c_1$$

wie in Beispiel 6.7.

Aufgabe 6.2. Wir betrachten die arithmetische Grundtermmenge, die aus den Konstanten 0 und 1, den Variablen x_n, $n \in \mathbb{N}$, dem einstelligen Funktionssymbol N und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen α und μ besteht. Entscheide, ob die folgenden Wörter über diesem Termalphabet Terme sind oder nicht.

(1) $NNNNNNN01$,
(2) $NNNNNNx_1NNNNNNNNNNNx_2$,
(3) $\alpha NNNNNN0NNNNNNNNNNN1$,
(4) $NNN\mu NNN\mu 0NNNNNNNNNNNN1$,
(5) $\mu\alpha\mu\alpha\mu\alpha 0101010$,
(6) $\alpha\alpha\alpha N x_1 N x_2 x_3 x_4 x_3$.

Schreibe diejenigen Wörter, die Terme sind, mit Klammern, $'$, $+$ und $\cdot$.

Aufgabe 6.3.*

Es seien x, y, z, w Variablen und V ein zweistelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Wörter sind Terme?

(1) $VxyzVVw$,
(2) $VVxyVzw$,
(3) $VVxyzVw$,
(4) $VxVyVzw$,
(5) $xVyVzVw$,
(6) $VVVxyzw$,
(7) $VxyVVzw$,
(8) $VVxVyzw$,
(9) $VxyVzw$,
(10) $VxVyzVw$,
(11) $VxVVyzw$,

(12) $VxyVzVw$.

AUFGABE 6.4. Erläutere den Unterschied zwischen $G = (V, K, F_n, n \in \mathbb{N}_+)$ und $A = V \cup K \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} F_n$ in Definition 6.6.

AUFGABE 6.5. Es sei V eine Variablenmenge, K eine Konstantenmenge und F eine Menge aus Funktionssymbolen (mit einer gewissen Stelligkeit). Es sei

$$A = V \cup K \cup F$$

das zugehörige Alphabet. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Alphabet nicht leer sei. Zeige, dass es nichtleere Wörter über A gibt, die keine Terme sind.

AUFGABE 6.6. Es sei G eine Grundtermmenge und $t \in T(G)$ ein G-Term. Es sei u das am weitesten links stehende Symbol von t und v das am weitesten rechts stehende Symbol von t. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Wenn u eine Variable oder eine Konstante ist, so ist $t = u$.
(2) v ist eine Variable oder eine Konstante.
(3) Wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist $t_1 t_2$ kein Term.

AUFGABE 6.7. Es sei G eine Grundtermmenge und t ein G-Term. Es sei n die Gesamtzahl der Variablen und Konstanten in t, wobei mehrfaches Vorkommen auch mehrfach gezählt wird. Es sei k die Summe über alle Stelligkeiten der in t vorkommenden Funktionssymbole, wobei wiederum mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach gezählt werden.

(1) Bestimme n und k im Term

$$ggxyhfxfzgyfy\,,$$

wobei f einstellig, g zweistellig und h dreistellig sei.
(2) Es sei t weder eine Variable noch eine Konstante. Zeige $k \geq n$.
(3) Zeige, dass die Differenz $n - k$ beliebig groß sein kann.

AUFGABE 6.8. Diskutiere, ob es sich bei

$$n!,\ \binom{n}{k},\ \pi,\ e^u, x^y,\ 5^x,\ \sqrt{x},\ \heartsuit$$

um Terme handelt.

AUFGABE 6.9. Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und x, y Variablen. Formuliere das Kommutativgesetz (für f) als eine Allaussage mit Hilfe der Identität von zwei Termen.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Variablenmenge. Eine Grundtermmenge G sei durch K als Konstantenmenge, V als Variablenmenge und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ festgelegt. In welcher Beziehung steht die Termmenge $T(G)$ zum Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 6.11. Es sei T die Termmenge zur Konstantenmenge $\{0, 1\}$, zur Variablenmenge $x_i, i \in I$ und zur zweistelligen Funktionssymbolmenge $\{+, \cdot\}$. Definiere eine natürliche Abbildung von T in den Polynomring $\mathbb{Z}[x_i : i \in I]$. Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv? Was ist das Bild?

Aufgabe 6.12. Für Punkte A, B, C in der Ebene bedeute $R(A, B, C)$ die Rechtwinkligkeit des durch A, B, C gegebenen Dreiecks an der Ecke A und $S(A, B, C)$ die pythagoreische Längenbeziehung. Betrachte die beiden formalen Aussagen

$$\forall A \forall B \forall C (R(A, B, C) \longrightarrow S(A, B, C))$$

und

$$\forall A \forall B \forall C R(A, B, C) \longrightarrow \forall A \forall B \forall C S(A, B, C) \,.$$

Welche ist (sind) eine Formalisierung des Satzes von Pythagoras, welche ist (sind) wahr?

Aufgabe 6.13. Formuliere mit arithmetischen Grundsymbolen, Gleichheit, Quantoren und Junktoren die Eigenschaft (das Prädikat) einer natürlichen Zahl, gerade oder ungerade zu sein. Formuliere ebenso die Aussage, dass jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist. Formuliere ferner die Aussage, dass zu jeder natürlichen Zahl n die Zahl $n^2 - n$ gerade ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.14. (3 Punkte)

Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\text{Abb}\,(M \times N, L) \text{ und } \text{Abb}\,(M, \text{Abb}\,(N, L)) \,.$$

Aufgabe 6.15. (2 Punkte)

Eine Grundtermmenge sei durch die Variablenmenge $V = \{x, y, z\}$, eine Konstantenmenge $K = \{c_1, c_2\}$, die einstelligen Funktionssymbole $F_1 = \{f, g\}$ und die zweistelligen Funktionssymbole $F_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gegeben. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$gf\beta\beta\alpha fxy\gamma c_1 zggc_2 \,.$$

Aufgabe 6.16. (2 Punkte)

Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und x, y, z Variablen. Formuliere das Assoziativgesetz (für f) als eine Allaussage mit Hilfe der Identität von zwei Termen.

Aufgabe 6.17. (3 Punkte)

Eine Grundtermmenge G sei durch eine einelementige Konstantenmenge $K = \{c\}$, eine leere Variablenmenge und eine einelementige einstellige Funktionssymbolmenge
$$F_1 = \{f\}$$
gegeben. Zeige durch Induktion, dass es eine bijektive Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow T(G)$$
mit $\varphi(0) = c$ und $\varphi(n+1) = f\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 6.18. (5 Punkte)

Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck im $\mathbb{R}^2$ gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Tipp: Verwende, dass $\sqrt{3}$ irrational ist und den Satz des Pythagoras.