Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 51

Übungsaufgaben

Aufgabe 51.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $P \in M$ ein Punkt und es sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng wachsende Funktion. Zeige, dass f in P genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn $h \circ f$ ein lokales Maximum in P besitzt.

Aufgabe 51.2. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 51.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 51.4. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 51.5. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt $P \in G$ mit $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 51.6. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 51.7. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\operatorname{Grad} f(P)$ ist.

Aufgabe 51.8. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe 51.9.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

Aufgabe 51.10. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.11. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 51.12. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + \sin(y) - xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.
(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten $\tilde{G}$ von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.

(3) Zeige, dass $\tilde{G}$ die orthogonale Projektion von G auf E ist.

Aufgabe 51.13. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

Aufgabe 51.14. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 51.5.

Abbildungsverzeichnis