國民高等學校適用

因式分解法

(附問題解答)

Won

新京書店發行

國民高等學校適用

因式分解法

附問題解答

新京書店發行

康德八年六月一日印刷
康德八年六月三十日發行

因式分解法

▲定價壹圓五角▼

新京市東長春大街一一三ノ三二番
編輯人　于化坤

新京市西長春大街八ノ一番
發行人　顏心栽

新京市東長春大街一一四ノ一番
印刷人　房日新

新京市東長春大街一一四ノ一番
印刷所　東亞印書局

新京市西長春大街八ノ一番
發行所　圖書出版　新京書店出版部
振替新京三八三二番

△各埠各大書店均有代售▽

因式分解法

目　次

因式分解法　第二種

緒　言

學代數認爲最困難部分者,厥爲因式分解,因其分解之法,原無一定方式,因題制宜臨式應變,不若他種方法,之易於有遵循也。然于茫茫途中,亦不無同法之可歸納者,茲就平日教學之所得,與參考其他因式分解專書,略分下列各種方法,每種各舉例題解式,及練習題與解法之暗示,對于每種方法之理論探討,量中學生程度之能理解者,盡量採納之,想對于攻斯學者,尚能有補于萬一也。

編者識於新京

因式分解法第一種

利用乘法結果之因式分解法

定義　化一整式爲多整式之積者,名曰因式分解。

注　意

因式分解原爲乘法之逆,故可利用乘法之一切結果,而探求分解之法,茲分下列六項而研究之。

1. 提公因式法　(利用分配定律)

$Lx+Mx+Nx=(L+M+N)x$

各項有相同因式,即提出括弧之外,括弧內整理之,惟須注意符號之變化,有時括弧內再以以上方法分解之者。

例 1. $ax+bx-x=x(a+b-1)$.

注意. 此結果勿誤作 $x(a+b)$.

例 2. $2a^3b^2x+2a^2b^3y-6a^2b^2cz=2a^2b^2(ax+2by-3cz)$.

〔問1〕 下列諸式,試分解其因式:

（一） $7a^6-21a^4$. （二） $-x^3y-2x^2y^2$,

（三） $27x^3y^5+54x^5y^3-81x^2y^6$.

例 3. $3a(x+y)-4b(x+y)(x-y)+c(x+y)^2$.

$$=(x+y)\{3a-4b(x-y)+c(x+y)\}$$

$$=(x+y)\{3a-(4b-c)x+(4b+c)y\}.$$

（整理上大括弧）

例 4. $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)$

$$=(x-y)(a-b)$$

注意 $y-x=-(x-y)$, 故第二因式爲$(a-b)$, 勿誤作 $(a+b)$

〔問2〕 下列諸式, 試分解其因數:

（一） $a(x-y)+bc(x-y)$.

（二） $(a+b)(x+y)^2-(a+b)^2(x+y)$.

（三） $x(x-y)-y(y-x)$.

（四） $ax^2(b-c)-bx(c-b)$.

（五） $(x+y)(a+b-c)-(x-y)(-a-b+c)$.

三,四,五三題須注意符號變化,

2. 二項式之平方

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)改b爲$-b$,可得(2),故(2)與(1)之道理相同,不必另記

二項式之平方,等於各項之平方與其積二倍之和。

公式練習運算

〔問3〕 求下列諸式之平方:

$2x+5,\quad 3x-2y,\quad -ax+by,\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3},\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}.$

〔問4〕 若$x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b,$

則 $x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$

試證明之。

〔問5〕 試取$a+b$或$a-b$等爲一項;依上公式,

求 $a+b+c,\quad a-b+c,\quad a+b-c,\quad -a+b+c$及

$a-b-c$之平方,

〔問6〕 依前題方法,作$a+b+c+d$之平方,且推及凡多

項式之平方,考究其作法。 此題注意結果

又其逆爲 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

利用以上二式以分解因式,

例 1. $4a^6+12a^3b^2+9b^4$

$$=(2a^3)^2+2(2a^3)(3b^2)+(3b^2)^2=(2a^3+3b^2)^2.$$

〔問7〕 下列諸式, 爲若何之平方?

（一） $a^2+10ab+25b^2$ （二）$4a^2-12ab+9b^2$.

（三） $1-8x+16x^2$. （四） $16a^4x^4+8a^2x^3+x^2$.

（五） $\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{ab}{2}+\dfrac{9b^2}{16}$. （六） $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-2$.

（七） $2xy-x^2-y^2$ （八） $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}$.

例 2. $2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4$分解其因式。

解 各項中$2ab^2$爲公共之因式。

$$2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4=2ab^2(a^2+2ab+b^2)=2ab^2(a+b)^2$$

〔問8〕 試就下列諸式, 分解其因式:

（一） $3a^3b^3-6a^2b^4+3ab^5$.

（二） $20a^5b^2-60a^4b^3+45a^3b^4$.

〔問9〕 下列二式, 爲若何之平方。

（一） $9x^4+25(y+z)^2-30(y+z)x^2$.

（二） $(x-y)^2-6(x-y)(y-z)+9(y-z)^2$.

例 3. $a^2+4b^2+9c^2-12bc+6ca-4ab$爲若何之平方?

解 所設之式, 依a整頓之,

$$a^2-2a(2b-3c)+(4b^2-12bc+9c^2)$$

$=a^2-2a(2b-3c)+(2b-3c)^2$

$=\{a-(2b-3c)\}^2=(a-2b+3c)^2.$

注意3c變號

〔問10〕 下列各式，爲若何之平方？

（一） $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$〔參照問5〕。

（二） $a^2+4b^2+9c^2-12bc-6ca+4ab.$

（三） $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz.$

例 4. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$爲若何之平方？

解 以$3x^2$爲$2x^2+x^2$將所設之式變之如次：

$x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1$

$=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2=(x^2+x+1)^2$

〔問11〕 下列三式。爲若何之平方？

（一） $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$

（二） $x^4+2x^3-x^2-2x+1.$

（三） $x^4+4x^3+10x^2+12x+9.$

〔問12〕 試求下列三式之平方根：

（一） $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$〔參照問5〕.

（二） $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz.$

（三） $x^4-2x^3-x^2+2x+1.$

前法之推究，須利用以下之配成平方.

定義. 等於某有理式之平方者，其式稱之為完全平方式，或簡稱之為完全平方.

某式補以適當之項，俾成為完全平方者，特稱之為配成方平.

例如x^2+8x以4^2即16加之，

則為x^2+8x+4^2即配成$(x+4)^2$平方

又 x^2-7x以$\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即$\frac{49}{4}$加之，

則為$x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即配成$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$平方

推之 x^2+px以$\left(\frac{p}{2}\right)^2$加之

則為 $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$，即配成$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$平方

是欲使 x^2+px之式成為完全平方者，以 x 之係數折半自乘以加之可也.

〔問13〕 試就下列諸式，配成平方：

$$x^2-6x,\quad x^2+7x,\quad x^2+\frac{b}{a}x,\quad x^2-2(a-b)x.$$

又例 x^2+y^2 以 $2xy$ 加減，即配成平方。又 $16x^2+25y^2$ 以 $2\sqrt{16x^2}\sqrt{25y^2}$ 即 $2\times4x\times5y$ 即 $40xy$ 加減，即配成 $(4x+5y)^2$ 或 $(4x-5y)^2$ 之平方.

推之A^2+B^2以$2AB$加減，即配成$(A+B)^2$或$(A-B)^2$之平方.

〔問14〕　下列諸式，配成平方。

$$4a^2-9b^2,\quad x^4+y^4,\quad x^8+y^8,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}.$$

注意．由上法所得之完全平方式其與所設之原式不相等可知。

前法之推究②

二次三項式為完全平方之條件．

二次三項式x^2+px+q若為完全平方，則依第 2 節公式(1)必為$px=2x\sqrt{q}$.

兩邊以x除之，且各自乘，

$$p^2=4q\quad \therefore\ q=\frac{p^2}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

此條件備，則此三項式之為完全平方明矣。

故二次三項式x^2+px+q^2若為完全平方，其必備之條件為

$$p^2=4q。$$

又三項式 ax^2+bx+c，此條件由 $bx=2\sqrt{a}x\sqrt{c}$ 知必為

$$b^2=4ac。$$

注意．依上條件。

$$x^2+px+q=0\quad 及\quad ax^2+bx+c=0$$

兩二次方程式之根，係與等根之條件相同。

例　$x^2+mx+121$若為完全平方，其m之值若何。

解　因$m^2=4\times 121$故$m=\pm 22$

讀者試自驗之。

〔問15〕 下列諸式若爲完全平方，其p之值若何?

$x^2-px+64,\quad x^2-12x+p,\quad 4x^4+px^2y+9y^2.$

〔問16〕 $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$若爲完全平方，

則$9a^2+14ab+9b^2=0$，試證之。

〔問17〕 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$若爲完全平方，則得式如次，試證明之。

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

3. 二數和與差之積.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

二數和與差之積。等於二數平方之差。

例 1. $(2a+b^2)(2a-b^2)=4a^2-b^4.$

〔問18〕 下列諸式，試求其積:

$(2x+3y)(2x-3y),(-x-y)(x-y),\left(\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{5}b\right)\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{3}{5}b\right)$

例 2. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)$

$$-ab\}=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

〔問19〕 $a^2+ab-2b^2$以$a^2-ab+2b^2$乘之。

〔問20〕 $(8x^3+8x^2+4x+1)(8x^3-8x^2+4x-1)$求積。

〔問21〕 $\left(\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)\left(\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{1}{6}xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)$求積。

〔問22〕 下列各式, 試求其積:

(一) $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$.

(二) $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$.

*(三) $\left(x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)$.

*(四) $(e^{-x}+e^x)(e^{-x}-e^x)+(e^x+e^{-x})^2$

例 3. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{b^2+2bc+c^2-a^2\}\{a^2-b^2+2bc-c^2\}$

$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$

$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

$=4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$

$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$,

〔問23〕 下列各式, 試求其積:

(一) $(ax+by+cz)(ax-by+cz)(ax+by-cz)(-ax+by+cz)$.

(二) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$.

利用上式以分解因式.

即利用前節之逆。二數平方之差，等於二數和與差之積也。

如　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

解 1.　$81a^8-16b^4=(9a^4)^2-(4b^2)^2$

$$=(9a^4+4b^2)(9a^4-4b^2)=(9a^4+4b^2)\{(3a^2)^2-(2b)^2\}$$

$$=(9a^4+4b^2)(3a^2+2b)(3a^2-2b).$$

依上公式，凡如 $\underline{a^{2m}-b^{2n}}$ 之式，皆得利用之，以分解其因式。

◎　初學者可略之，如三四兩題。

〔問24〕　下列諸式，試分解其因數：

（一）$9x^2-25y^4$.　（二）a^8-b^8.　（三）$625x^4-256y^4$.

（四）$\dfrac{a^4}{81}-\dfrac{b^4}{16}$.　（五）$x^5-x$　（六）$a^2-b^2-(a^2-b^2)^2$.

〔問25〕　$x^4-\dfrac{1}{x^4}$ 以 $x+\dfrac{1}{x}$ 除之。

注意.　依本章開始所述。整式之因式分解，其各因式以在於整式之範圍內爲限。

例如 $a-b$ 雖可化爲 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$，然此二式非有理式。故 $a-b$ 不能分解其因式。

又如 $a^2-3b^2=(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)$，其右邊之式含無理式，故 a^2-3b^2 亦不能分解其因式。

然若某式須化爲二以上之式（含無理數與否不論）之積，此或屬於除法之事，與上所言爲另一問題。

例如$a-b$以$\sqrt{a}-\sqrt{b}$除之。

因$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$,故得商$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

以上各種理論,希學者詳細玩味。

例 2. $(a+b)^2-(a+c)^2$分解其因式。

解 $(a+b)^2-(a+c)^2=(a+b+a+c)(a+b-a-c)$

$$=(2a+b+c)(b-c).$$

〔問26〕 下列諸式,試分解其因式:

（一）$(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$.

（二）$(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2$.

（三）$(x^2+y^2)^4-x^4y^4$.

（四）$(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3$.

例 3. $a^2-2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$分解其因式。

解 $a^2-2ab+b^2-c^2-2cd-d^2=a^2-2ab+b^2-(c^2+2c$

$d+d^2)=(a-b)^2-(c+d)^2=(a-b+c+d)(a-b$

$-c-d)$.

注意變號

〔問27〕 下列二式,試分解其因式:

（一）$a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$.

（二）$2x-1-x^2+x^4$.

〔問28〕 $x^2-y^2-z^2+2yz$,以$y-z-x$除之。

又$a^2b^2+2abc^2-a^2c^2-b^2c^2$，以$ab-bc+ca$除之。

〔問29〕　下列二式，分解其因式。

（一）$4(xy-ab)^2-(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$.

（二）$4a^2-(1+a^2-b^2)^2$.

例 4.　$a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab$，分解其因式。

解　先就a項整理之。

$$a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$$

$$=a^2-4ab+4b^2-b^2+2bc-c^2$$〔參照第2節前半〕

$$=(a-2b)^2-(b-c)^2=(a-2b+b-c)$$

$$(a-2b-b+c)=(a-b-c)(a-3b+c).$$

〔問30〕　下列三式，試分解其因式：

（一）$x^2-y^2-3z^2-2xz-4yz$.

（二）$a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$

（三）$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

〔參照第2節推究1〕

例 5.　x^4+4x^2+16，分解其因式。

解　$x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2$〔參照第2節後半〕

$$=(x^2+4)^2-(2x)^2=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4).$$

〔問31〕　下列諸式，試分解其因式：

（一）x^4-16x^2+36.　　（二）$x^4+x^2y^2+y^4$.

（三）$x^4+4x^2y^2+16y^4$.　　（四）$x^8+x^4y^4+y^8$.

（五）$a^2+a^2r^2+a^2r^4$.

〔問32〕 x^4-13x^2+36, 以 x^2+5x+6 除之。

〔問33〕 x^2+xy+y^2, 以 $x+\sqrt{xy}+y$ 除之。〔參照例1注意〕

〔問34〕 若數係數許用無理數，試就下列各式分解其因數：

（一）a^4+b^4.　　（二）x^4+36y^4.

（三）$a^4-a^2b^2+b^4$.　　（四）$x^4+7x^2y^2+25y^4$.

注意. 以上例3至例5係就所試之式先化爲二式之平方差，而本節之公式適用之，按此方法應用甚廣。

4. 二次三項式 x^2+px+q 視察的因式分解法.

但 p 及 q 係不含 x 者，

以二次三項式 x^2+px+q

與公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 之右邊相比較，

$p=a+b, q=ab$ 由此以定 a 及 b，即可將此三項式分解爲

$(x+a)(x+b)$

蓋先就末項 q 分解爲二因數，使其和等於 p。此當於 q 之分解悉心探索者也

例 1. x^2+5x+6 分解其因數。

解　依本例，分解6即q爲二因數，而二因數之和須等於5即p。

$$q=a\times b \qquad\qquad a+b=p.$$

$$6=2\times 3, \qquad\qquad 2+3=5$$

故　$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

注意　分解q爲二因數，其法雖有幾通，就中二因數之和等於p，則祇一通，即如本例末項，6之因數分解法，其因數以整數之範圍爲限，計共有1×6，$(-1)\times(-6)$，2×3，$(-2)\times(-3)$四通，就中二因數之和等於5，則祇2×3一通。學者宜練習純熟，俾一通即知其和合於p，而因以分解q也。

例 2.　$x^2-6x-91$分解其因數。

解　$$q=\quad a\times b \qquad\qquad a+b\quad p$$

$$-91=-13\times 7, \qquad -13+7=-6$$

$$x^2-6x-91=(x-13)(x+7).$$

例 3.　$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$，分解其因數

解　$$-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right), \qquad \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

例 4.　$a^2-8a+12$分解其因數。

解　$$12=(-2)\times(-6), \qquad -2+(-6)=-8$$

$$a^2-8a+12=(a-2)(a-6).$$

注意 1, q為正數而p亦為正者, q得二正數之分解;若p為負則q得二負數之分解;又q為負數, q得一正, 一負二數之分解;其中絕對值大者之符號, 與p之符號同。

〔問35〕 下列諸式, 試分解其因式:

(一) $x^2+19x+60.$ (二) $x^2-29+100.$

(三) $x^2+9x-36.$ (四) $x^2-5x-84.$

(五) $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}.$ (六) $x^2+30x-1296.$

注意 2. 聯立方程式$x+y=p$, $xy=q$由視察而得解, 其解法若不難, 即p與q均為簡單之數, 且有$a+b=p$及$ab=q$之條件而a與b之值遂均為有理數, 且由視察而為顯明易見者, 是固用上法為有效, 甚簡便也。如其不然, 毋用此法, 蓋如上問題(六)學者深感困難可知矣。

例 5. $x^2+4xy-12y^2$分解其因式。

解 依本例, 以$4y$為p, 以$-12y^2$為q。

$$-12y^2=6y\times(-2y),\quad 6y+(-2y)=4y$$

$$x^2+4xy-12y^2=(x+6y)(x-2y).$$

〔問36〕 下列諸式, 試分解其因式:

(一) $a^2+27ab+50b^2.$ (二) $x^2-29xy+100y^2$

（三）$a^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)ab+b^2$,　　（四）$x^2+10xy-39y^2$.

〔問37〕　下列諸式，試分解其因式：

（一）$a^3+3a^2b+2ab^2$.　　（二）$a^4+4a^3b+3a^2b^2$.

（三）$x^2+2ax+a^2-b^2$.　　（四）$x^2-ax+bx-ab$.

〔問38〕　以x^2視如x。

試分解x^4-10x^2+9之因式：

例 6.　$(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$，分解其因數。

解　令$x^2+x=X$

則　$X^2-14X+24=(X-12)(X-2$

故$(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=(x^2+x-12)(x^2+x-2)$

$$=(x+4)(x-3)(x+2)(x-1).$$

〔問39〕　下列諸式，試分解其因式：

（一）$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.

（二）$(x^2-2x+3)^2-13(x^2-2x+3)+22$.

（三）$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

（四）$(x+y)^2-8(x+y)(y+z)+15(y+z)^2$.

例 7.　$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$，分解其因式。

解　因$(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$,　$(x-3)(x-5)$

$=x^2-8x+15$,　　故化所設之式如次。

$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-9=(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+96$仍依前例。

$$(x^2-8x+16)(x^2-8x+6)=(x-4)^2(x^2-8x+6)$$

注意．所設之式有四因數，分為二組，於其各組之積含x項相同者細勘之，即知與前例為同類之問題云。

〔問40〕 下列諸式，試分解其因式：

（一）$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12.$

（二）$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24.$

（三）$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$

（四）$x(x-1)(x-2)(x-3)+120.$

〔問41〕 $(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)+a^4$為完全平方，試證之。

〔問42〕 下列諸式，分解其因式：

（一）$x^2+x-132.$ （二）$x^6-14x^4y^2-95x^2y^4.$

（三）$x^2+2xy+\frac{15}{16}y^2,$ （四）$x^2-x+\frac{2}{9}.$

（五）$x^4-8x^2y+15y^2.$ （六）$272-xy^2-x^2y^4.$

（七）$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280.$

（八）$x^2-2xy+y^2-9x+9y+14.$

5．二次三項式 ax^2+bx+c 視察的因式分解法．

但a,b,c係不含x者。

試分解三項式ax^2+bx+c爲$lx+m, l'x+m'$模形之二因數，即得公式如次：

$$(lx+m)(l'x+m')=ll'x^2+(lm'+l'm)x+mm'$$

乃與此公式之右邊相比較，知由ax^2所分解之二因數爲lx及$l'x$，又c爲m及m'，

$$ax^2\left\{\begin{array}{ccc} lx & bx & m \\ & & \\ l'x & & m' \end{array}\right\}c$$

如圖分列之，其四隅二組之積之和$lm'x+l'mx$即等於bx，乃於ax^2及c研求其因數之分解可也。

例 1.　$6x^2+11x+3$，分解其因數。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} lx & bx & m \end{array} \\ \begin{array}{c} ax^2 \\ 6x^2 \end{array} & \left\{\begin{array}{ccc} 2x & 11x & 3 \\ & & \\ yx & & m' \\ 3x & & 1 \end{array}\right\}\begin{array}{c} c \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$$ax^2=lx\times l'x\quad c=m\times m'$$
$$6x^2=2x\times 3x, 3=3\times 1$$
$$lm'x+l'mx=bx$$
$$2x+9x=11x$$

$$Rx^2+bx+c=(lx+m)(l'x+m')$$

$$6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1).$$

注意 1.　ax^2及c之因數分解有幾通，即l, l'及m, m'之組合亦有幾通，然其中$lm'+l'm$與b相等之組合則祇一通，即如本例$6x^2$之分解法共有$6x\times x$, $(-6x)\times(-x)$, $2x\times 3x$及$(-3x)\times(-2x)$四通。又3之分解法共有3×1, $(-3)\times(-1$二通。〔此外若許用分數，雙方尚有幾通〕。故由雙方取一組。

雖亦有幾通，而由其四隅所組合者之積之和與 $11x$ 相等，則祇一通。學者宜練習純熟，俾於其聯組適合之處，可期捷速解決也。

例 2. $4x^2+4x-15$ 分解其因數。

解　$4x^2=2x\times2x$,　$-15=-3\times5$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -3 \\ & \times & \\ 2x & & 5 \end{array}$$

$2x\times5+2x\times(-3)=4x$

$4x^2+4x-15=(2x-3)(2x+5)$.

例 3. $9x^2+8xy-y^2$ 分解其因數。

解

$$\begin{array}{ccc} 9x & & -y \\ & \times & \\ x & & y \end{array}$$

配置如左。

$9x^2+8xy-y^2=(9x-y)(x+y)$

〔問43〕 下列諸式，試分解其因數：

(一) $6x^2-19x+15$.　(二) $2x^2+7x-39$.

(三) $5x^2-33x+48$.　(四) $8x^4-27x^2y^2+9y^4$.

(五) $12x^2-37x-144$.　(六) $18a^2+21ax-9x^2$.

(七) $42x^2-13xy-42y^2$.　(八) $45x^2+56x-45$.

(九) $12x^2-83x+143$.　(十) $10x^4-53x^3y+63x^2y^2$.

(十一) $2(x+y)^2-7(x+y)(a+b)+3(a+b)^2$.

注意 2. 誠於前節注意2所述，本節之方法亦然。a 及 a

爲簡單之數，且其合於條件，覺 ax^2 及 c 之因數分解不甚困難者，固爲有效而簡便者也，如非然者，則以用次節之方法爲便.

注意 3. 上例方法，須學者多演習題，將此法練習十分純熟，分解 a, c 之因數，配合成 b, 以不費時間，方爲合適，若費許多時間，反不若用次法爲便.

6. 二次三項式一般分解法.

前法，是探試之方法，非一般之方法也。

今述一般之方法如次，設例說明之。

I. x^2+6x-7 分解其因式。

$$x^2+6x-7=x^2+6x+3^2-3^2-7 \text{〔參照第2節前半〕}$$

$$=(x+3)^2-16=(x+3+4)(x+3-4)$$

$$=(x+7)(x-1).$$

II. $x^2-29x+100$ 分解其因式。

$$x^2-29x+100=x^2-29x+\left(\frac{29}{2}\right)^2-\left(\frac{29}{2}\right)^2+100$$

$$=\left(x-\frac{29}{2}\right)^2-\frac{441}{4}=\left(x-\frac{29}{2}\right)^2-\left(\frac{21}{2}\right)^2$$

$$=\left(x-\frac{29}{2}+\frac{21}{2}\right)\left(x-\frac{29}{2}-\frac{21}{2}\right)=(x-4)(x-25).$$

〔問46〕 試依上法，分解下列二式之因式：

（一） $x^2-6x-40$. （二） $x^2+13x-230$.

*Ⅲ　x^2+px+q分解其因式。

$$x^2+px+q=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right).$$

注意 1.　$x^2+px+q=0$.　特稱爲二次方程式P形。

注意 2.　此結果，依Ⅰ及Ⅱ，代入p及q之值，確仍與Ⅰ及Ⅱ之結果相符合。

Ⅳ.　$6x^2+11x+3$分解其因數〔前節例1〕.

$$6x^2+11x+3=6\left\{x^2+\frac{11}{6}x+\frac{3}{6}\right\}$$

$$=6\left\{x^2+\frac{11}{6}x+\left(\frac{11}{12}\right)^2-\left(\frac{11}{12}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=6\left\{\left(x+\frac{11}{12}\right)^2-\frac{49}{144}\right\}$$

$$=6\left\{\left(x+\frac{11}{12}\right)^2-\left(\frac{7}{12}\right)^2\right\}$$

$$=6\left\{\left(x+\frac{11}{12}+\frac{7}{12}\right)\left(x+\frac{11}{12}-\frac{7}{12}\right)\right\}$$

$$=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x+3)(3x+1).$$

〔問17〕 試依上法，分解$5x^2+32x-21$之因數。

***V.** ax^2+bx+c分解其因數。

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{a^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

注意 1. $ax^2+bx+c=0$ 特稱爲二次方程a形

注意 2.

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

以上二式，係二次三項式分解一般之公式，如能將此二式記憶，直接代入之可也。

*注意 3. 上式之$p-4q$或 b^2-4ac 爲完全平方，則能分解

爲二個一次因式，以分解因式限于整式故也。

注意 4. 若許用無理數及虛數，則二次三項式ax^2+bx+c無論如何能化爲一次式之積可知矣。

例如$2x^2-6x+3=2\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(2x-3-\sqrt{3})(2x-3+\sqrt{3})$.

及$x^2+2x+4=(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3})$是也。

*注意 5. 前項諸種之性質，與一元二次方程式根之諸性質完全相同。茲附記之，以便學者參考。

僅就$ax^2+bx+c=0$之形討論之

$b^2=4ac$ 則$x=\frac{-b}{2a}$兩根相同.

$b^2>4ac$ 則兩根異而爲實數.

$\left\{\begin{array}{l}\text{若}b^2-4ac\text{爲完全平方，則根爲有理數.}\\ \text{若}b^2-4ac\text{不爲完全平方，則根爲無理數.}\end{array}\right.$

$b^2<4ac$則爲虛根.

綜觀以上，得知二項式之根之形狀性質等，依b^2-4ac而定，故名b^2-4ac爲判別式。

〔問48〕 依上法，分解下列三式之因數。

(一) $x^2-31x+240$.　　(二) $24x^2-49xy-40y^2$.

(三) $12x^2-37x-144$〔問 46 之(五)〕.

*〔問49〕 依上注意 1，分解下列諸式之因數，判別其所分解之因數，含無理數與否?抑含虛數與否?

（一）$x^2+22x-203$. （二）$2x^2-52x+338$,

（三）$5x^2-3x-7$. （四）$x^2+12x+37$.

下列例題係利用第 2 節，將所設之式化爲二式之平方差，乃適用第3節之方法。$-a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

*例. $a^2-12b^2-8c^2+20bc-2ac+4ab$分解其因數。

〔參照第7節例4及問32〕

解 先依a冪順次整列之。

$$a^2+2(2b-c)a-12b^2+20bc-8c^2$$

$$=a^2+2(2b-c)a+(2b-c)^2-(2b-c)^2-12b^2+20bc-8c^2$$

$$=(a+2b-c)^2-(16b^2-24bc+9c^2)$$

$$=(a+2b-c)^2-(4b-3c)^2$$

$$=(a+6b-4c)(a-2b+2c).$$

*〔問50〕 試分解下列二式之因數

（一）$x^4-2a^2x^2-2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2$.

（二）$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$〔問 32 之 (三)〕.

*〔(問)51〕 下列之式，試依a整列，分解其因數。

（一）$x^4-5x^2-6ax-a^2+4$.

（二）$x^4+x^2-2ax+1-a^2$.

附二次三項式因式分解法與一元二次方程式解法之關係.

x之二次三項式，其一般之形按之上所云者。

如 ax^2+bx+c ………………………………(1)

以此式等於零。

即 $ax^2+bx+c=0$ ………………………………(2)

是爲一元二次方程式一般之形。

但 a, b, c 爲不含 x 且 a 不等於零者也。

依前節所說明。

如 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

依(2)式。

$$a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0 \cdots\cdots(3)$$

故若 $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$,

$$\therefore\ x=-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

或 $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$,

$$\therefore\ x=-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

③ 之右邊爲零，則左邊必爲零，但 $a\pm0$ 必也括孤內之式爲零。

即　$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ 或 $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故一元二次方程式有二根，且不能多於二根以外，其根之公式如次。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

今以α及β表二根，則(2)之左邊。

為　$a(x-\alpha)(x-\beta)$

故二次三項式ax^2+bx+c

恆以$a(x-\alpha)(x-\beta)$表之。

但α及β係表此三項式等於零之二次方程式之二根。

於此利用之，其二次三項式ax^2+bx+c恆藉以分解其因數。

即先將所設之三項式等於零，求此方程式之二根，（由根之公式）乃將所求得之二根，各與x相消，即得二式以與三項式中x^2之係數合併而作其積，即得分解其因數。

例 1.　$x^2-12x-133$分解其因數。

解　先就$x^2-12x-133=0$解之。

得　$x=6\pm\sqrt{36+133}=6\pm13=19$或$-7$

故 $x^2-12x-133=(x-19)(x+7)$.

例 2. $6x^2-7x-3$分解其因數。

解 先就$6x^2-7x-3=0$解之。

得 $x=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{12}=\frac{7\pm11}{12}=\frac{3}{2}$或$-\frac{1}{3}$

故 $6x^2-7x-3=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-3)(3x+1)$.

注意 1. x^2之係數須乘之勿忘。

注意 2. 前述之視察的分解法皆探試之方法，若係數非簡單者，成功甚難，本節之方法係機械的方法，如上所揭之計算，果實行之，必可成功。

〔問52〕 下列諸式，試分解其因數。

（一） $x^2+30x-1296$.　　（二） $x^2-223x+12432$.

（三） $6x^2-73x-703$.　　（四） $15x^2-\frac{9}{25}x-\frac{35}{156}$

〔問53〕 許用無理數及虛數，試分解下列諸式之因數。

（一） x^2-4x-9.　　（二） x^2+2x+3.

（三） $9x^2-12x-17$.　　（四） $3x^2-7x+15$.

利用分解因式，以解方程式。

解方程式，雖係此書範圍以外之事，但利用因式分解而解方程式，乃代數學常用之法則，并藉此可利用練習分解因式諸法，故附記之。

前節係由一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之解法，因以分解三項式 ax^2+bx+6 之因數。

逆之，則 ax^2+bx+c 由視察而分解爲一次因數，因命各因數各等於零，而遂求得方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根。

〔問54〕 $(ax-b)(bx-a)=0$ 試解之.

例 1. $x^2-3x+2=0$ 試解之。

解 由視察法分解左邊，即化所設之方程式。

爲 $(x-1)(x-2)=0$

由是 $x-1=0$ 則 $x=1$，及 $x-2=0$ 則 $x=2$，即1及2爲所求之根。

〔問55〕 下列各方程式，試解之。

（一） $x^2-7x+10=0$.　　（二） $x^2+6x-27=0$.

例 2. $3x^2-4x-32=0$，試解之。

解 左邊分解因數。

$$(x-4)(3x+8)=0$$

由是 $x-4=0$，則 $x=4$，及 $3x+8=0$，則 $x=-\frac{8}{3}$ 即 4 及 $-\frac{8}{3}$ 爲所求之根。

故凡方程式。

爲 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots=0$ 者。

左邊之各因數，令各等於零，即可求得其根。

〔第四章問50〕

例 3. $x^2=9$, 試解之。

解 此亦可兩邊直接開方，或將所設之方程式，化之如次。

$$x^2-9=0 \qquad 即 \qquad (x-3)(x+3)=0$$

乃由$x-3=0$及$x+3=0$得二根3及-3

例 4. $x^2-ax=0$, 試解之。

解 此方程式可化之如次。

$x(x-a)=0$其所求之根由$x=0$及$x-a=0$得$x=a$。

例 5. $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0$, 試解之。

解 $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2$

$=(x^2-a^2)(a^2x^2-1)$

$=(x-a)(x+a)(ax-1)(ax+1)$

故所設之方程式，可化之如次:

$$(x-a)(x+a)(ax-1)(ax+1)=0$$

$$\therefore x=a, \quad -a, \quad \frac{1}{a} \quad 及 \quad -\frac{1}{a}.$$

〔問56〕 下列各方程式試解之:

(一) $x^2-1=0.$ (二) $x^2=(a-b)^2$

(三) $x^2-5x=0.$ (四) $3x^2+7x=0.$

(五) $x^2-3x-10=0.$ (六) $15x^2+x-6=0.$

（七）$4x+3=x(x+2)$.　　（八）$x^2-ax-bx+ab=0$.

（九）$bcx^2+(b^2+c^2)x+bc=0$.

（十）$x^4-13x^2+36=0$.

（十一）$(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a2)(x^2+x+1)$.

（十二）$a(x^2+1)=x(a^2+1)$.

（十三）$(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$.

注意. 如上所述，二次三項式之因數分解與一元二次方程式之解法，各互相通，故三項式之因數分解困難者，利用方程式之解法。

又方程式$ax^2+bx+c=0$之左邊分解因數容易者，利用分解，俾易得其解法。

7. 二項式之立方.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ……………………(1)

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ……………………(2)

(1)改b為$-b$,則即可得(2)。

〔問57〕 試作下列諸式之立方。

（一）$2a+3b$.　（二）$2a-3b$.　*（三）$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}$

例.　$8x^3+12x^2+6x+1$

$=(2x)^3+3(2x)^2\times1+3(2x)\times1^2+1^3=(2x+1)^3$.

〔問58〕 試化下列二式為立方：

（一）$a^3x^3-3a^2x^2y^2+3axy^4-y^6$.

（二）$64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$.

*〔問59〕 $\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}-3\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3$,試證之。

〔問60〕 求$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$與$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$之積。

〔問61〕 $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y)$求等數。

〔問62〕 下列之公式,試證明之。

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)$$
$$+6abc=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$$

利用上式結果,以分解因式.

前式之逆爲 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$…………(1)

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$…………(2)

此二公式,(2)亦含於(1)之中。

〔問63〕 求下列二式之商:

（一）$(x^3+a^3)\div(x+a)$.　（二）$(x^3-a^3)\div(x-a)$.

〔問64〕 下列諸式,試分解其因式:

（一）$x^3\pm 8y^3$.　（二）a^6-b^6.　（三）$a^{12}-b^{12}$.

〔問65〕 下列二式,試分解其因式:

（一）x^6-28x^3+27.　（二）$x^6-7x^3y^3-8y^6$.

(一) (二) 先用6節法，再用本節分解之.

〔問66〕　$2a-3b$與$4a^2+6ab+9b^2$之積若何?

*〔問67〕　$a^{-1}-1$ 以 $a^{-\frac{1}{2}}-1$ 除之，其商若何?

〔問68〕　$a+b=-p$, $ab=q$, 求a^3+b^3之值。

例.　$(a^2-bc)^3+27b^3c^3=(a^2-bc)^3+(3bc)^3$

$$=(a^2-bc+3bc)[(a^2-bc)^2-(a^2-bc)(3bc)+(3bc)^2]$$

$$=(a^2+2bc)(a^4-5a^2bc+13b^2c^2)$$

〔問69〕　下列諸式，試分解其因數:

(一) $(x^2-yz)^3+8y^3z^3$.　　(二) $(3x-4y)^3-(4x+3y)^3$.

(三) $(x^2+xy+y^2)^3-(x^2-xy+y^2)^3$.

〔問70〕　$(x+y)^3+z^3$以$x+y+z$除之，其商若何?

〔問71〕　$(a-c)^3-(b-d)^3$以$a-b-c+d$除之。

〔問72〕　試以$2(x^2+y^2)$除$(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$.

8.　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)$

$\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$之應用.

例 1.　$a^3-8b^3+c^3+6abc=a^3+(-2b)^3+c^3-3a(-2b)c$

$$=(a-2b+c)(a^2+4b^2+c^2+2bc-ca+2ab).$$

〔問73〕　下列二式，試分解其因數:

(一) $x^3+y^3+3xy-1$. (二) $27a^3-8b^3-27c^3-54abc$.

〔問74〕　$x^3+y^3-z^3+3xyz$以$x+y-z$除之。

〔問75〕 $(a^3-8b^3-6ab-1)\div(a-2b-1)$，求商。

〔問76〕 試以$a^2+4b^2+9c^2-2ab-3ca-6bc$除

$$a^3+8b^3+27c^3-18abc,\text{ 其商若何?}$$

例 2. 設$a+b=1$，則$a^3+b^3+3ab=1$，試證之。

解 $a^3+b^3-1+3ab=(a+b-1)(a^2+b^2+1+b+a-ab)$

因 $a+b=1$故$a+b-1=0$

故 $a^3+b^3-1+3ab=0 \quad \therefore \quad a^3+b^3+3ab=1.$

〔問77〕 設$x+y+z=0$.

則 $x^3+y^3+z^3=3xyz$，試證之。

〔問78〕 設$3x=a+b+c$

則$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$，試證之。

〔問79〕 下列之等式，求證。

$$(y-z)^3+(x-y)^3-3(x-y)(y-z)(z-x)=(x-z)^3.$$

9. <u>將所設之式，分其項為幾羣，於各羣之因數相同者研究之，恆得藉以分解其因數。</u>

注意. 此法不規則學者經驗不多，對於此法決不能運用自如。

例 1. $x^3-2x^2-3x+6=(x^3-2x^2)-(3x-6)$

$$=x^2(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x^2-3).$$

〔問80〕 下列各式,試分解其因數:

(一) x^3-2x^2+2x-4, (二) $a^2b^2-a^2-b^2+1$.

(三) $x^3-4x^2-9x+36$. (四) $2x^3-3x^2-2x+3$.

(五) $x^6-x^4-2x^3+2x^2+5x-5$.

〔問81〕 $(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)\div(x^2+xy+y^2)$, 求商。

例 2. $a^2-b^2+ac+bc=(a+b)(a-b)+c(a+b)$

$$=(a+b)(a-b+c).$$

〔問82〕 下列各式,試分解其因數:

(一) $x^2-y^2-xz+yz$. (二) $x^2-y^2+xz-yz$.

(三) $a^3-b^3-a^2b+ab^2$. (四) $a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2$

(五) $a^4+c^3b+b^3c+a^3c$.

(六) $x^3p^2-8y^3p^2-4x^3q^2+32y^3q^2$.

〔問83〕 $4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6$以x^2-a^2除之。

例 3. $a^2+2ab-ac-3b^2+bc=(a^2+2ab-3b^2)-(ac-bc)$

$$=(a-b)(a+3b)-c(a-b)=(a-b)(a+3b-c).$$

〔問84〕 下列各式,試分解其因式:

(一) $x^2-xy+3xz-2y^2+3yz$.

(二) $a^2-3ab-5ac+2b^2+10bc$.

(三) $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$.

（四）$x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

（五）$x^2-y^2-z^2+x+y-z+2yz$.

（六）$x^4+x^2z^2-y^2z^2-y^4$. 〔與前問四比較〕。

例 4. x^3-2x^2+3x-2分解其因式。

解　分$-2x^2$爲$-x^2$與$-x^2$二項，又分$3x$爲x與$2x$二項。

$$x^3-2x^2+3x-2=x^3-x^2-x^2+x+2x-2$$

$$=x^2(x-1)-x(x-1)+2(x-1)=(x-1)(x^2-x+2).$$

〔問85〕　下列各式，試分解其因式。

〔參照第四章40節例3〕

（一）x^3-2x^2-x+2.　　（二）$x^3-6x^2+11x-6$.

（三）$x^3-6x^2y+3xy^2+10y^3$.

（四）$x^4+2x^3+4x^2+2x+3$.

注意　本章第2節，於各項公共之因數括出之，本節所示者，則將所設之式，先依第2節化之，乃適用本節之方法。

例 5. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$　〔參照問65〕

$$=(a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)$$

$$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$$

$$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$

$$=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2+ab$$

$$+ac+a^2-b^2+bc-c^2)$$

$$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

〔問86〕　下列各式，試分解其因式：

（一）$(a^2+b^2+c^2)^3-(a^6+b^6+c^6)$

（二）$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$　〔問96，第四章第40節〕

（三）$(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3+(a+b)^3$

（四）$(x-x^2)^3+(x^2-1)^3+(1-x)^3$

前節之續，適用前節方法者，又可將所設之式依某字之爲一次者，以含此字與不含此字者分別列之，奏效必多。即依a一次之式，以$Ma+N$之形化之，M, N之公共因數括出之，然若M, N無公共因數者，此法即無效。

例 1.　$ab+bc+cd+da$分解其因數。

解　以含a與不含a之項分別列之。

$$ab+da+bc+cd=a(b+d)+c(b+d)=(b+d)(a+c).$$

依 b, c, d 分類者亦同。

〔問87〕　下列各式，試分解其因數。

（一）$ac+bd-ab-bc$.　（二）$ac-bd+bc-ad$.

（三）$1+a-ax-x^2$　（四）$am^2+bn^2+an^2+bm^2$.

（五）$ax^2+1+(a+1)x$.　（六）$ab-bc-cd+da$.

（七）$x^2+(a+b+c)x+ab+ac$,

（八）$ax^3+x+a+1$.　（九）$1+ax-x^2-ax^3$.

（一）$x^3+px^2+px+p-1$.（二）$x^4+a^3x+x^3y+a^3y$.

（三）$ax+by+cz+bx+cy+az+cx+ay+bz$.

例 2. $x^3-a^2x^2-b^2x+a^2b^2$分解其因數。

解　令 $a^2=a'$ 將所設之式改之如次：

$x^3-a'x^2-b^2x+a'b^2$乃依a'一次式，用前例之方法。

$$x^3-b^2x-a'x^2+a'b^2=x(x^2-b^2)-a'(x^2-b^2)$$

$$=(x-a')(x^2-b^2)=(x-a^2)(x+b)(x-b).$$

注意. 以含b^2與否分別列之，亦同。

〔問88〕 下列各式，試分解其因數。

（一）$a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2+c^4$.（二）$a^4-a^2c^2-b^4+b^2c^2$.

（三）$(2a^2+3y^2)x+(2x^2+3a^2)y$.

〔問89〕 以含ab與否分別列之，分解下列二式之因數。

（一）$a^3-a^2b+ab^2-b^3$.

（二）$a^3b+a^2+ab^3-ab+b^2-1$.

注意. 讀本節後，更取前節例 2，例 3 及問 85，87 回顧之，獲益必多。

*10. 於第 9 節所說明之方法，如遇所設之式，有一因數已知者，則即依所知之因數，分其式之項爲幾羣，而致其研究，以分解因數可也。

例 1. 已知$x+10$爲$2x^3+9x^2-131x-210$之一因數，分解

此式之因數。

解 $2x^3+9x^2-131x-210$

$$=2x^3+20x^2-11x^2-110x-21x-210$$

$$=2x^2(x+10)-11x(x+10)-21(x+10)$$

$$=(x+10)(2x^2-11x+21)$$

注意. 或就所設之式,以 $x+10$ 除得其他之因數為 $2x^2-11x+21$ 亦可。

〔問90〕 已知 $x-y$ 為一因數,試求下列各式中其他之因數:

$$14x^3+23x^2y-32xy^2-7y^3.$$

〔問91〕 已知 $x+y+a$ 為 $x^3+y^3-3axy-a^2(x+y)$ 之一因數,求其他之因數。

〔問92〕 $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^2(x+a)$ 以 $(a+b)(x+a)$ 除之。

例 2. 已知 $b-c$ 為一因數,分解下式之因數:

〔第四章問34.〕

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$

$$=a^2(b-c)+b^2c-bc^2-ab^2+ac^2$$

$$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$$

$$=(b-c)\{a^2+bc-c(b+c)\}$$

$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c).$$

〔問93〕 已知$a-b$爲一因數，試分解下列二式之因數。

〔第四章問 34, 47〕.

（一） $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$,

（二） $(a+b)^3-(b-c)^3+(c-a)^3$. 〔問89(二)〕,

〔問94〕 已知$a+b$爲一因數，試分解下列二式之因數。:

〔第四章問11, 35, 47〕

（一） $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$.

（二） $(a+b)^3+(b+c)^3-(c-a)^3$.

〔問95〕 已知$a-b$, $b-c$爲二因數，試分解下式之因數:

〔第四章問34,47〕.

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

〔問96〕 $(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=(b+c)(c+a)$
$(a+b)$，試證之。

例 3. 已知x^2+x+2爲一因數，分解下式之因數:

$$x^4-x^3-3x^2-7x-6$$

解 $x^4-x^3-3x^2-7x-6$

$$=x^4+x^3+2x^2$$

$$-2x^3-2x^2-4x$$

$$-3x^2-3x-6$$

$$=x^2(x^2+x+2)-2x(x^2+x+2)-3(x^2+x+2)$$

$$=(x^2+x+2)(x^2-2x-3)=(x^2+x+2)(x+1)(x-3).$$

〔問97〕　已知x^2-x+2為一因數，試分解下式之因數：

$$x^4+x^3-3x^2+7x-6$$

注意1.　就所設之式之一因數，視察之而即能得其分解者，於第四種說明之。

注意2.　本節方法，非因式分解法之正法，特殊問題，特殊分解耳。

練　習　問　題　I.

1.　試化下列各式為平方：

（一）　$-81x^2+180x-100.$

（二）　$-9x^2-42xy-49y^2.$

（三）　$x^2(a-b)^2-4(a-b)xy+4y^2.$

（四）　$-(a+b)^2x^2+2(a^2-b^2)xy-(a-b)^2y^2.$

（五）　$16x^6-8x^4y^2+x^2y^4.$

2.　下列各式，試分解其因數：

（一）$81a^4b^4-x^4.$　　　　（二）$3a^2b^2-12a^4.$

3.（一）$x^2+6xy+9y^2-4.$

（二）$a^6+2x^5+x^4-a^2-2a-1$.

（三）$x^4-x^2-9-2a^2x^2+a^4+6x$.

4.（一）$(1+y)^2-2x^2(1-y^2)+x^4(1-y)^2$.

（二）$x^4+20x^3+99x^2+8x-16$.

5.（一）x^4+4.　　（二）a^4-23a^2+1.

（三）$x^4-7x^2y^2+y^4$.　　（四）$25x^4+39x^2y^2+16y^4$.

6.（一）$x^2-20x+75$,　　（二）$a^2-32a-105$.

（三）$n^2-3n-180$.　　（四）$x^2-52x-116$.

7.（一）$x^2+2xy+\frac{3}{4}y^2$.　　（二）$a^4-\frac{5}{6}a^3b-\frac{1}{6}a^2b^2$.

（三）$x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)x+1$.　（四）$x^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)xy-y^2$.

8.（一）$x^2-(a-3b)x-3ab$.　（二）$x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.

（三）$x^3-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$.

（四）$x^4+4abx^2-(a^2-b^2)^2$.

（五）$x^2+(a+b+c)x+ab+bc$.　　〔問90(七)〕.

9.（一）$(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$.　　〔第四章問38〕.

（二）$(a^2+a+1)(a^2+a+2)-12$.

（三）$x(x+1)(x+2)(x+3)-24$.

（四）$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

（五）$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^3$.

10.（一）$10x^2+13xy-3y^2$.　（二）$15x^2+4x-35$.

（三）$30x^2+xy-20y^2$.　（四）$42x^2-113xy+35y^2$.

（五）$99x^2-4xy-143y^2$.　（六）$-187d^2-6cd+c^2$.

（七）$50x^2y^2-5xy-1$.

11.（一）$9a^6-10a^4b^2+a^2b^4$.　（二）$24x^{10}y-3x^2y^5-6x^6y^3$.

（三）$12a^5b-2a^4b^2-24a^3b^3$.

12.（一）$x\quad -7x+3y-21$.　（二）$a^2b^2c^2-a^2c-b^2c+$

（三）$acx^2+(bc+ad)xy+bdy^2$.

13.（一）$ax^2-by^2-(a-b)xy$.

（二）$ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy$.

14.（一）$12(a+b)^2-(a^2-b^2)-6(a-b)^2$.

（二）$9(a^2+6a+1)^2+9(a^2+6a+1)(a^2+1)-10(a^2+1)^2$.

15.（一）x^6+y^6.　（二）x^9-y^9.　（三）$x^{12}+y^{12}$.

16.（一）$ax^3+2ax^6+ax^9$.

（二）$x^6+(m^3+n^3)x^3+m^3n^3$.

17.（一）$a^3-8b^3+c^3+6abc$.　（二）$a^3-8b^3-18ab-27$.

（三）$x^3+y^3+3xy-1$.

18.（一）$2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a+b)^4(a-b)^2$.

（二）$x^3+ax^2-a^2x-a^3$.

（三）$x^6+y^6+2x^4y^2+2x^2y^4$.

（四）$(x^2+y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)-(x^8+x^4y^4+y^8)$.

（五）$x^6-y^6+8z(x^3+y^3)\left(z^2+\frac{3}{4}xy\right)$.

19.（一）$x^9-64x^3-x^6+64$.

（二）$x^3-(1+p+p^2)x^2+(p+p^2+p^3)x-p^3$.

（三）$(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)$.

20.（一）$ax^3+x+a+1$.　　（二）$ax^3+bx+a+b$.

21.（一）$ax+by+cy-ay-cx-bx$.

（二）$a^2x+b^2y+abx+aby+ac+bc$.

（三）$2x^2+xy+7x+3y+3$.

（四）$xy^2-2xy-y^2+x+2y-1$.

22.（一）$a(a+c)-b(b+c)$.　　（二）$1+(b-a^2)x^2-abx^3$.

23.（一）$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$.

（二）$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

*24. 已知$a+b$爲一因數，試分解下列二式之因數：

（一）$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)$.

（二）$c(a^2-ac-bc)+b(b^2-a^2+ac)$.

*25. 已知$x+1$及$x+3$爲其因數，試分解下式之因數。

$x^4+5x^3+8x^2+7x+3$

*26. 已知x^3+y^3爲$x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$之因數，且就上式以$x^2+xy+y^2$與$x^2-xy+y^2$之積除之，得商若何?

因式分解第二種

利用剩餘定理以分解因式.

前述之因式分解法,乃式之簡單者,可利用之,若複雜者,(即高於二次式者,)雖運用如何巧妙,然亦有不能分解者,徒費心思,無補實際,有時一題逾三二小時,而不能分解之,此等困難,初學因式分解者,大抵有同感焉,惟利用剩餘定理,則前之困難之點,可迎刄而解之矣,前爲剩餘定理之原理,及證明,述之於下。

1. 除數,(式)被除數,(式)商數,(式)餘數,(式)之關係列下。

$$\frac{\text{被除數(式)}}{\text{除　數(式)}}=\text{商數(式)}+\frac{\text{餘數(式)}}{\text{除數(式)}}$$

即被除數(式)＝商數(式)×除數(式)＋ 餘數(式)餘式之次數,較除式之次數爲低,若除式爲一次式,則餘式即不含未知數。

例　如 $4x^3-5x^2-x+6$ 以 $x-2$ 除之,如式演算,得商 $4x^2+3x+5$,剩餘16

$$(4x^2+3x+5)(x-2)+16=4x^3-bx^2-x+6.$$

故凡多項式 A 以他之多項式 B 除之,得商 Q,剩餘 R。

則 $$A=B\times Q+R$$

若B爲某文字之一次式，則R不含此文字。

（注意） 前式兩邊未知數，代以同值，兩邊相等，以左右兩邊，形異而質同故也。

例如上例，若$x=1$

則$A=4x^3-5x^2-x+6=4-5-1+6=4$，

$BQ+R=(x-2)(4x^2+3x+5)+16=(1-2)(4+3+5)$
$+16=-1\times12+16=4$

2.剩餘定理

先舉例題以解釋之.

$$\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x-1}=x^3+x^2-8x-4+\frac{8}{x-1}$$

即餘數爲 8.

但$x^4-9x^2+4x+12$中x代1，其結果爲$1-9+4+12=8$.

由此可知，用一次二項式（如$x-a$）除多項式，其剩餘等於以a代入此多項式之未知數，所得之值，此定理謂之剩餘定理。

理論證明

設多項式爲A，商爲x，剩餘爲R，除式爲$x-a$.

由前述 得$\dfrac{A}{x-a}=Q+\dfrac{R}{x-a}$

即$A=Q(x-a)+R$．以$x=a$代入兩邊，

則A式代入後所得之值，與右邊代入後所得之值必等。（理見前）

但$Q(x-a)+R=Q(a-a)+R=0+R=R$.

∴A式以$x=a$代入之，其值爲R，而R乃A式以$x-a$除之，所得之剩餘，故如定理所云。

系1. $x+a=x-(-a)$故除數爲$x+a$求剩餘者，其A中之x以$-a$代之，又除數爲x者，x以0代之可也

例如　$\dfrac{x^3+2x^2-3x+8}{x+1}=x^2+x-4+\dfrac{12}{x+1}$

但　x^3+2x^2-3x+8中x代以-1.

得　$-1+2+3+8=12$.

〔問1〕　x^3-7x^2+5x-6以$x-3$除之，求剩餘，且依普通除法檢驗之。

〔問2〕　$2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$以$x+1$除之，求剩餘。

〔問3〕　$7x^5+6x^3-2x+17$以x除之，求剩餘。

〔問4〕　除數爲$ax-b$者，其A中之x以$\dfrac{b}{a}$代之，求證。又凡能使除數爲零之x之值代入A中之x者，試併舉以證。

系2. 若R爲0，即表示A式中能被$x-a$除盡，亦

即A式中有$x-a$一因式

故試驗某式有否$x-a$之因式，即於某式中，未知數代以a，而觀其值爲零與否也。

例 $\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}=x^2-x+2$

$\therefore$ $x^3-2x^2+3x-2=(x^2-x+2)(x-1)$原式有$x-1$因式.

但 x^3-2x^2+3x-2中$x=1$得$1-2-3-2=0$.

由系2知x^3-2x^2+3x-2有$x-1$一因式。

注意. 本系有補於因式分解處太多，學者應十分純熟。

〔問5〕 $2x^3-5x^2+4$以$x-2$除之適盡，求證。

〔問6〕 $3x^5+x^3-3x+1$以$x+1$除之適盡，求證。

〔問7〕 $x+10$爲$2x^3+9x^2-131x-210$之一因數，求證。

〔問8〕 $x^2(b+c-x)+b^2(c+x-b)+c^2(x+b-c)$

$-(b+c-x)(c+x-b)(x+b-c)$

以x除之適盡，求證。

系3. 應用此定理證明某式有否某式，(其形如$a\pm b$, $b\pm c$, $c\pm d$ ……)爲因式，亦可照上法應用之

如試驗有否$a-b$之因式，即$a=b$代入原式，觀其等零與否爲斷。試驗$a+b$則$a=-b$，餘類推。

例 證$b-c$為$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$之因式。

解 所設之式，作為 b 之整式。

則於此式內之 b，以 c 代之，此式即化之如次：

$$c^2(c-a)+c^2(a-c)=c^2(c-a)-c^2(c-a)\text{即}0.$$

故此式以 $b-c$ 除之適盡。

換言之，$b-c$ 為此式之一因數。

〔問9〕 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$以$a-b$ 或 $b-c$除之，皆能適盡，求證。

〔問10〕 $a+b$為以下二式之一因數，求證。

（一） $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc.$

（二） $(a+b)^3+(b+c)^3-(c-a)^3.$

〔問11〕 $4(x^2+xy+y^2)^3-(x-y)^2(x+2y)^2(2x+y)^2$ 以 x 或 y 或$x+y$除之，皆能適盡，求證。

〔問12〕 設 $(x+y)^n-x^n-y^n$，若n為奇數，則以 $x+y$ 除之必可適盡，求證。

〔問13〕 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$ 以 $x+y+z$ 除之適盡，求證。

系4. 應用此定理可以決定式中某項之文字係數

例 1. x^3-2x^2+mx-2有$x-1$一因式求m值.

∴ x^3-2x^2+mx-2有$x-1$之因式 ∴ 原式$x=1$必為零

即$1-2+m-2=0$ ∴ $m=4-1=3$.

即原式$=x^3-2x^2+3x-2$.

例 2. x^3+ax^2+bx+6 中有 $x-2$, 及 $x-3$ 之因式求 a, b 之值.

∴ 有$x-2$之因式 ∴ $2^3+a\times2^2+b\times2+6=0$

即 $8+4a+2b+6=0$

即 $4a+2b=-14$即$2a+b=-7$①

∴ 有$x-3$之因式 ∴ $3^3+a\times3^2+b\times3+6=0$

即 $27+9a+3b+6=0$

即 $9a+3b=-33$即$3a+b=-11$②

解①與②得$a=-4$, $b=1$

∴ 原式等 x^3-4x^2+x+6

〔問14〕 決定下列各題文字係數之值

1. $x^2-ax+12$　　$x-3$為其因式

2. $13x^4+mx^3+x+6$,　　$x+1$為其因式

3. $4x^3+8x^2-5x-m$,　　$2x+3$為其因式

注意此題x代何值.

4. $2x^2-3ax-3a^2$　　$x-1$為其因式

5. $2x^3+mx^2+nx+2$,　　$x-2$, $x-1$爲其因式

6. $ax^3+bx^2+32x+15$,　　$2x-3$, $3x+1$爲其因式

7. x^2+px+q　以$x-1$除之剩6　$x+1$除之剩2

8. px^3+qx^2+qx+p,　$x+1$,　$x-1$均能除盡之, p, q, 有何關係

注意.　本題8, 係決定文字係數關係之題, 亦應用本定理, 以尋找其關係。

系5.　應用剩餘定理可演下列問題

注意.　此類問題, 與分解因式, 似乎無關, 惟以其必須利用剩餘定理, 故附入之。

例 1.　x^3+px^2+qx+1 與 x^3+qx^2+px+1 若有一次式公因式.

則 $p+q+z=0$試證之。

證　設一次公因式爲$x-a$.

則 $a^3+pa^2+qa+1=0$①　$a^3+qa^2+pa+1=0$②

①－②　$(p-q)a^2+(q-p)a=0$

即 $(p-q)a^2-(p-q)a=0$　即$(p-q)(\ ^2-a)=0$

即 $(p-q)a(a-1)=0$　∴ $p=q$, $a=0$, $a=1$.

若$p=q$ 則原式相同,　$a=0$ 即原式公因式爲x, 然原式無公因式爲x, (∴各式均有常數項1)

$\therefore$ 以上均不合理，故 $a-1$ 必爲零，$\therefore$ $a=1$.

即 $x-1$ 爲原式之公因式。

$x=1$ 代入 $a^3+pa^2+qa+1=0$ 或 $a^3+qa^2+pa+1=0$ 中

得　$p+q+2=0$.

例 2.　ax^2+bx+c 與 $a'x^2+b'x+c$ 有 $x-f$ 之因式

求證 $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$

證. 以 $x=f$ 代入原二式，得

$$af^2-bf+c=0 \text{①} \qquad a'f-b'f+c'=0 \text{②}$$

①$\times b'$　$ab'f^2-bb'f+b'c=0$　③

②$\times b$　$a'bf^2-bb'f+bc'=0$　④

④−③　$(a'b-ab')f^2=-bc'+b'c$　$\therefore$ $f^2=\dfrac{-bc'+b'c}{a'b-ab'}$

同理 得 $f=\dfrac{ca'-c'a}{-ab'+a'b}$

即 $\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\dfrac{c'a-ca'}{ab'-a'b}\right)^2$ 上下均以負一乘之.

$\therefore$ $(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(c'a-ca')^2$

〔問15〕　x^3-x-a 與 x^2+x-a 如有一次之公約數，其 a 之值若何？但 a 不爲零。

〔問16〕　$x^3-ax^2+19x-a-4$ 與 $x^3-(a+1)x^2+23x-a-7$ 如有一次之公約數，其 a 之值若何？

〔問17〕　x^2+qx+1 與 x^3+px^2+qx+1 如有 $x+c$ 之公約數，

則$(p-1)^2-q(p-1)+1=0$，求證。

〔問18〕　ax^3+bx+c，$a'x^3+b'x+c'$如有一次之公約數，則

$(ac'-a'c)^3=(bc'-b'c)(ab'-a'b)^2$，求證。

系6. 應用剩餘定理，判斷$x\pm a$在何種情形下，為 $x^n\pm a^n$之一因式。

I. x^n-a^n，若$x=a$，則此式為零。(n為奇，偶均可)

故x^n-a^n恆得以$x-a$除盡。由除法

得$\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}\cdots\cdots(1)$

II. x^n-a^n，若$x=-a$，n為偶數者為零，n為奇數，則為$-2a^n$.

故x^n-a^n以n為偶數者為限，得以$x+a$除盡，由除法

得$\dfrac{x^n-a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots-a^{n-1}\cdots\cdots(2)$

III. x^n+a^n，若$x=a$，則此式之值為$2a^n$

故x^n+a^n決不能以$x-a$除盡。

IV. x^n+a^n，若$x=-a$，n為奇數者為零，n為偶數者則為$2a^n$.

故x^n+a^n以n為奇數者為限，得以$x+a$除盡，

由除法得

則$\dfrac{x^n+a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots+a^{n-1}\cdots\cdots(3)$

總上以觀可歸納如下.

n, 爲奇偶均可, x^n-a^n有$x-a$之因式。

n, 爲偶數, x^n-a^n有$x+a$之因式。

n, 無論爲奇爲偶, x^n+a^n不能有$x-a$之因式。

n, 爲奇數, x^n+a^n有$x+a$之因式。

例如x^2-a^2及x^4-a^4等以$x-a$或$x+a$除之, 皆可適盡, 又x^3+a^3以$x+a$除之適盡, 固爲讀者所已知矣。

〔問19〕 x^5-y^5以$x-y$除之, 又x^5-1以$x-1$除之, 各求其商。

〔問20〕 $7^{2n+1}+1$以8除之適盡, 求證, 但n爲正整數。

〔問21〕 設n爲正整數, 則$1-(3+x)^n$必可以$2+x$整除之, 求證。

〔問22〕 $\dfrac{x^7+1}{x+1}-\dfrac{x^6-1}{x-1}+\dfrac{x^5+1}{x+1}-\dfrac{x^4-1}{x-1}+\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{x-1}$

試化爲整式。

〔問23〕 試就下式證明之, 但勿用乘法。

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$$
$$=a^{31}+a^{30}b+a^{29}b^2+\cdots\cdots\cdots+ab^{30}+b^{31}。$$

注意. 以上問題非因式分解問題, 練習前述公式應用而已。

系7. x之整多項式A於其中x以a, b, c等代之適

等於零者，A必能以$(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots$除之適盡.

但$a\neq b\neq c\neq\cdots\cdots$諸因式之數，不大於$A$之次數。

逆定理亦眞。

例 1. $x^4-11x^3+41x^2-61x+30$, $x=1$, $x=2$, $x=3$.

此式爲零，由除法得

$$\frac{x^4-11x^3+41x^2-61x+30}{(x-1)(x-2)(x-3)}=x-5.$$

例 2. 求$x^3-6x^2+11x-6$, x^3-7x-6均爲零x之值若何.

二式均爲零之x之值，即二式公因式等於零之x之值也。亦即二式$H,C,F,$之公因式也。(有時即爲二式之$H,C,F,$)

如上二式之$H,C,F,$爲$x-3$. $\therefore x=3$爲上二式均爲零x之值。 注意 有時爲二值三值等等。

例 3. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-8x^2+17x-10$均爲零，x之值爲何?

求二式之$H,C,F,$爲$(x-1)(x-2)$

$\therefore$ $x=1$, $x=2$, 即爲所求值。

〔問24〕 下列各式，以$(b-c)(c-a)(a-b)$除之，皆能適盡，求證。

(一) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. 〔第37節例1〕

（二）$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.　　〔同上問10〕

（三）$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.　　〔第一章問96〕

〔問25〕 下列諸式，以 $(b+c)(c+a)(a+b)$除之．皆能適盡，求證：

（一）$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$.

〔第37節問11〕

（二）$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.　　〔第六章問9〕

（三）$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$.　　〔同上問10〕

（四）$(a+b+c)^n-a^n-b^n-c^n$. 但 n 爲奇數。

〔問26〕 下列諸式，以abc除之，皆能適盡，求證：

（一）$(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3$

$-(a+b-c)^3$,　　〔練習IV.2〕

（二）$(a+b+c)^n-(-a+b+c)^n-(a-b+c)^n$

$-(a+b-c)^n$. 但 n 爲奇數。

（三）$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$

$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.〔練習VI.3〕

〔問27〕 $3x^3-2x^2-7x-2$以$(x+1)(x-2)$除之適盡，求證，且求其商。

〔問28〕 $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$ 以 $(x-1)(x+1)(x+3)$除之適盡，求證，且求其商。

〔問29〕 $3x^4+5x^3-13x^2-20x+4$ 以 x^2-4除之適盡，求證。

〔問30〕 p與q應爲何值，其x^6+px+q 以 x^2+4x+3除之乃能適盡。

〔問31〕 $x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ 以 $(x^2-1)(x+2)$除之適盡者，其a, b, c 之值若何?

〔問32〕 $2x^2-5x+2$, $x^3+4x^2-4x-16$兩式皆等於零，其 x 之值若何?

*〔問33〕 下列二式，皆等於零，其 x 之值若何?

$$9x^3-8-22x,\qquad 2-11x^2+6x^3$$

*〔問34〕 x^3-2x+1, x^3+2x^2-1 皆等於零，求x之值至小數點以下二位而止。

*〔問35〕 $x^3+2x^2+9=0$, $x^3-4x+15=0$ 二方程式，求公共之根。

〔問36〕 下列二式，若一等於零，一不等於零，其 x 之值若何?

$$x^3+2x^2-5x+2,\qquad x^3+x^2-8x+4.$$

3. 依剩餘定理分解因式.

照剩餘定理得知，某式有否某一次式之因式，(如 $x\pm a$ 即某式未知數代以$\mp a$爲零與否以爲斷. 因此較難之因式

分解問題，可利用此法以減低原式之次數，逐次利用本定理，可減低至二次式，或較易分解之式。

例 1. 分$x^4-9x^2+4x+12$為因式.

〔解〕 令$x=-3$,

$$原式=(-3)^4-9(-3)^2+4(-3)+12=0;$$

$\therefore$ $x+3$ 是一因式.

由除法得$\dfrac{x^4-9x^2+4x+12}{x+3}=x^3-3x^2+4$

$$\therefore \quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x^3-3x^2+4)$$

又 $x=2$,

$$x^3-3x^2+4=2^3-3\times 2^2+4=0;$$

$\therefore$ $x-2$ 是一因式.

由除法得$\dfrac{x^3-3x^2+4}{x-2}=x^2-x-2$

$$\therefore \quad x^3-3x^2+4=(x-2)(x^2-x-2)$$

$$=(x-2)(x+1)(x-2)$$

$$\therefore \quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x+1)(x-2)^2$$

注意 x^2-x-2易於分解

例 2. 分$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$為因式（此類問題後有詳論）

原式令$b=c$, $c=a$, $a=b$均為零，$\therefore$原式有$(b-c)(c-a)$

$(a-b)$ 之因式。

∴ 原式爲三次式，因式亦爲三次式。

∴ 原式 $=K(b-c)(c-a)(a-b)$

比較相同項係數，得 $K=3.$

∴ 原式 $=3(b-c)(c-a)(a-b)$

注意 1. 分解因式乃形異而質同，故同類項係數必等。

注意 2. 原式爲三次，分解後，次數亦不能多於三次，或小於三次。

根據以上兩點，∴原式 $=K(b-c)(c-a)(a-b)$

注意 3. 比較係數，實際算法如下。

取原式 $-b^2c$ 之係數觀之。

原式 $=b^3-3b^2c+3bc^2-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3+a^3$

$-3a^2b+3ab^2-b^3-b^2c$ 之係數爲3.

因式 $K(b-c)(c-a)(a-b)=\cdots\cdots\cdots-kb^2c+\cdots\cdots\cdots$

∴ $k=3.$

比較 $bc^2,\ c^2a,\ ca^2\cdots\cdots\cdots$ 均可

注意 4. 應用剩除定理，以分解因式，較麻煩者，爲行除法一層。茲舉綜合除法法以解決之。惟其原理出本書範圍以外，故略之。學生記其方法而已。

如上題 $x^4-9x^2+4x+12$ 以 $x+3$ 除之

第一　僅寫係數，缺項以0補之。

$$\begin{array}{r|l} 1+0-9+4+12 & -3 \\ -3+9+0-12 & \\ \hline 1-3+0+4+0 & \end{array}$$

第二　常數寫於係數列之右，
正則寫負，負則寫正。

第三　首項置於横綫下，
首項係數必須爲1，不爲一者，須變之，即首項係是何數，即以何數除各項。

第四　以 $1\times(-3)$ 置於横綫上第二項.

第五　行加法即以 $0+(-3)$ 寫於横綫下。

第六　如第四，再行乘法，依此演至最後，相加爲 0，即無餘式。

第七　商爲 x^3-3x^2+4。

（∴四次式被一次式除餘式當然爲三次也。）

注意 5.　用剩餘定理時，其所代之值，以原式常數項之因數爲宜。照注意 4.知因式常數必爲原式常數之因數。如原式常數爲 12，所代之值以 $\pm1,\pm12,\pm2,\pm6,\pm3,\pm4$ 即可，其他數不與也。

〔問37〕　下列諸式試分解其因數：

（一）$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

（二）$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$.

（三）$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

〔問38〕 $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$試分解其因數。

〔問39〕 下列諸式，試分解其因數。

（一） $x^3-5x^2+13x-14$,

（二） $x^3-5x^2-46x-40$.

（三） $x^4-6x^3+11x^2-6x$.

*〔問40〕 試就下列各方程式解之。

（一） $x^3-7x+6=0$,

（二） $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

（三） $x^4-5a^3+20x-16=0$.

*〔問41〕 $x^5-10x^2+15x-6=0$ 試解之，但此方程式有三等根，須備列之。

40，41二題必先分解，然後求根，故列入之。

練 習 問 題 II.

1. $2x^4-5x^3+21x-30$ 以 $x-2$, $x+2$ 及 $2x+3$ 除之求各剩餘。

2. x^4-2x^3+4x+1以$x+3$除之，求剩餘。

3. $6x^3+x^2+4x+6$以$3x+2$除之，求剩餘。

4. x^3+2x^2加何數，始能以$x+3$除之適盡?

5. $a^4-3a^3b+2a^2b^2-b^4$以$a^2-ab+2b^2$除之，求剩餘。

6. $x^5-5xy^4+4y^5$ 及 $x^n+x^{n-m}y^m$以$x-y$除之，求各剩餘。

7. $(x-1)(x+5)(x-7)(x+2)-70$以x除之適盡，求證。

8. $(x+a)^3+(y-a)^3$以$x+y$除之適盡，求證。

9. 下列之式，以$x+2$除之適盡，其k之值若何?

（一）x^3+6x^2+4x+k. （二）$2x^3+3x^2-4x+k$.

10. $a^4+ka^2b^2+b^4$以a^2-ab+b^2除之適盡，其k之值若何?

11. $13x^2-5mx-2$與mx^5+x+6各以$x-2$除之，得相等之剩餘，問m之值若何?

12. $x^3+mx^2+nx+12$, $x^3-nx^2+mx+12$ 如有 $x-2$ 之公約數，其m及n之值各若何?

13. $x^3+3px+2r$與x^2+p如有x一次之公約數，則 $p^3+r^2=0$，求證。

14. $32x^{10}+243$以$2x^2+3$除之適盡，求證，併求其商。

15. 若m為偶數，則 x^m-a^m以x^2-a^2 除之，必能適盡，求證。

16. 若m為n之倍數，則x^m-a^m必可以x^n-a^n除盡，求證。

17. 若n為任意之正整數，則

（一）$5^{2n}-1$ 以 24 除之適盡。

（二）$999^{2n+1}+1$ 以 1000 除之適盡，求證。

18. 下列三式以 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 除之適盡，求證。

（一）$(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$.

（二）$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$.

（三）$(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$.

19. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2$

$$+abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$$

以 $(b+c)(c+a)(a+b)$ 除之適盡，求證。

20. 下列三式以 xyz 除之適盡，求證。

（一）$x(x+y)(x+z)+y(y+z)(y+x)+z(z+x)(z+y)$

$$-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

（二）$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4$.

（三）$(x+y+z)^5-(y+z)^5-(z+x)^5-(x+y)^5$.

21. 若 n 爲奇數，則

（一）$x^n-y^n-(x-y)^n$ 以 $xy(x-y)$ 除之適盡。

（二）$(x+y)^n-x^n-y^n$ 以 $xy(x+y)$ 除之適盡，求證。

22. mx^3+nx^2+nx+m 以 x^2-1 除之適盡，其 m 與 n 之間關係若何?

23. $x^4+4x^3-5x^2-36x-36$ 以 x^2-x-6 除之適盡，求證。

24. $mx^3+11x^2+3nx-9$ 以 $6x^2-7x-3$ 除之適盡，其 m 及

n之值各若何?

25. $x^{n+1}-x^n-x+3$以x^2-2x+1除之適盡，求證，但n爲正整數。

26. $x^4-ax^3-abx^2-ab^2x-2ab^3$ 以 $x-a-b$ 除之適盡，則 $b=0$ 或 $a=b$，求證。

27. $(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})$

$$=a^{63}-a^{62}b+a^{61}b^2-\cdots\cdots\cdots+ab^{62}-b^{63}$$

*28. 下列各式，試分解其因數：

（一）$x^3+4x^2-7x-10$.

（二）$x^4-11x^3+41x^2-61x+30$.

（三）$x^4+2x^3-13x^2-14x+24$.

因式分解法第三種

利用求最高公因式之因式分解法。

求某二式或多式之最高公因式，方法很多，(另有專法)然其最要之原則，亦不外分解因式而已。故求最高公因式之方法，及最高公因式之一切性質。亦爲研求分解因式者之不可不知，故本章先就最高公因式之一切求法及性質，詳爲論之。而因式分解之方法，自蘊於其中矣。

又最低公倍式之求法，亦有用先求最高公因式之方法者，(見本章後部)因此與因式分解方法，亦不無關係。以其性質聯密，故併記之。藉收一貫之效焉。

A 約式高式 (H.C.F)

1. 定義 約式 倍式

若整式D對於整式A而能整除者，D爲A之約式，逆之，則A爲D之倍式

例如$x+a$爲x^2-a^2之約式，逆之，則x^2-a^2爲$x+a$之倍式。

注意. 約式及倍式，皆指整式而言。

2. 約式之性質.

(I). D爲A之約式，D亦爲mA之約式，(但m爲任意之數

或整式。)

證$A=a\cdot D$(但a爲某數或整式。)

則$mA=ma\cdot D$(其ma固爲某數或整式者也。)

(II). <u>D爲A之約式且爲B之約式，D亦必爲$mA+nB$及$mA-nB$之約式。</u>

(但m及n爲任意之數或整式。)

證$A=a\cdot D$, $B=b\cdot D$(但a及b爲某數或整式。)

則
$$mA+nB=maD+nbD=(ma+nb)D.$$
$$mA-nB=maD-nbD=(ma-nb)D.$$

($ma+nb$及$ma-nb$固爲某數或整式者也。)

〔問1〕 二奇數之和及差，必爲偶數，試證之。

〔問2〕 連續二奇數立方之差，必爲偶數，惟非4所能整除，試證之。

3. 公約式 最高公約式

定義. 一整式爲二整式以上之約式者，此式爲諸式之公約式。

例如 a, b, ab 及 a^2b 皆爲a^2b^2c, a^3bc^2及a^4b^3之公約式，又如$x+1$, $x-1$, 及x^2-1皆爲x^4-1, 及$(x-1)(x+1)^2$之公約式。

公約式中次數之最大者,(即最高次之式)稱最高公因式

如上第一例a^2b爲a^2b^2c, a^3bc^2, a^4b^3之最高公約式,第二例x^2-1爲x^4-1, $(x-1)(x+1)^2$之最高公約式。

注意. 算術最大公約數,爲公約數中之最大者,然在代數學則於其式之數值,全置不論,惟取其次數之最大即最高次之式,以爲最高公約式云。

如 第一例$a<1$, $b<1$則最高公約式,其值反小。

第二例$x<1$其結果亦然。

4. 最高公約式求法

a. 單項式之最高公約式

由視察法即可。

例1. $a^2b^3xy^2$, $a^2b^3x^3$求最高公約式。

解 其各因數之次數高者,a爲二次,b爲三次,x爲一次,故a^2b^3x爲所求之最高公約式.

注意. 所設之式無公共因式者,此等之式無公約式。

〔問3〕 ax^3y^2z, $bx^2y^2z^5$, cxy^2z^3,求最高公約式。

例2. $10x^2yz^3$, $-15xy^2z^2$, $20x^2y^2z^2$,求最高公約式。

解 本例所設各式皆有數係數,其絕對值之最大公約數爲5,故$5xyz^2$爲所求之最高公約式。

〔問4〕 下列二組之式，試各求其最高公約式。

（一）$15a^3b^3$，$20a^2b^2cd^2$，$30ab^2d^3$.

（二）$9x^2y^2z$，$-3xy^3z^2$，$27x^3yz^3$.

【法則】 求單項式之最高公約式者，就所設各式，作其公共文字因數之積，而取其指數之最小者記之，且求所設各式數係數之最大公約數，爲其數係數.

〔問5〕 下列各組之式，試各求其最高公約式：

（一）$9a^2b^3x^4y^5$．　$-8ax^2y^6z^2$，　$12ab^2x^3y^4z$.

（二）$3a^2bc^3$，　$21a^2b^2cd$，　$-15ab^2c^3d$.

例3.　$x^2y(x-a)^3(x-b)^2$，　$xy^2z(x-a)^2(x-b)^2$，

$-5yz^2(x-a)(x-b)^3(x-c)$求最高公約式。

解　以$x-a$，$x-b$，$x-c$視如單項式，即得$y(x-a)(x-b)^2$爲所求之最高公約式。

〔問6〕 下列各組之式，試各求其最高公約式：

（一）$3ab(a+b)^2$，　$2(a-b)(a+b)^3$.

（二）$(x-a)(x+b)^3$，　$(x-a)^2(x+b)^4$，　$(x-a)^3(x+b)^2$.

（三）$6x^2y^2(x-m)^3(x-n)^2$，　$9x^2y(x-m)^3(x-p)^2$，

$12xy^2z(x-m)^2(x-p)$.

b. 多項式之最高公因式

用簡單分解因式法即可。

例 4. $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b+3a^2b^2$ 求最高公約式。

解 $a^3+3a^2b+2ab^2=a(a^2+3ab+2b^2)=a(a+b)$

$(a+2b)$,

$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a^2+4ab+3b^2)=a^2(a+b)$

$(a+3b)$.

如是則所求之最高公約式爲 $a(a+b)$

注意. 本題應用前述分解因式方法。

〔問7〕 下列各組之式,試各求其最高公約式:

(一) $8x^3+1$, $16x^4+4x^2+1$.

(二) $3x^4+8x^3+4x^2, 3x^5+11x^4+6x^3, 3x^4-16x^3-12x$

(三) $7x^2+20x-3$, $5x^2+16x+3$, $x^3+3x^2+5x+15$

(四) x^3-1, x^4+x^2+1, x^3+2x^2+2x+1.

(五) x^4-16a^4, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$,

$2x^3-4ax^2+8a^2x-16a^3$.

例 5. $x^2-7x+10$, $4x^3+15x-62$, 求最大公約數。

解 $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$, 今以 $x-2$ 及 $x-5$ 試除第二式,則 $x-2$ 受除,而 $x-5$ 不受除,故 $x-2$ 即所求之最高公約式。

注意. 所設之式中有一容易分解因式者，依此方法為便，又依此例若第二式以 $x-5$ 除之亦盡者，則 $(x-2)(x-5)$ 為所求之最高公約式。

〔問8〕 下列各組之式，試各求其最高公約式：

（一） $2a^2+3a-2$， $4a^3+16a^2-19a+5$.

（二） x^2-4x+3， $4x^3-9x^2-15x+18$.

（三） $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$， $4x^2y-5xy^2+y^3$.

c. 輾轉相除法

此法係應用於二多項式之不易分解因式者，舉例如下。

例 1. 求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之最高公約式。

運算

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3+x^2-2 & x^3+2x^2-3 & 1 \\
 & x^3+\ \ x^2-2 & \\ \hline
x^2-1 & x^3+x^2\qquad -2 & x+1. \\
 & x^3-x & \\ \hline
 & x^2+x-2 & \\
 & x^2\qquad -1 & \\ \hline
 & x-1 &
\end{array}
$$

答：$x-1$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-1 & x^2\qquad -1 & x+1. \\
 & x^2-x & \\ \hline
 & x-1 & \\
 & x-1 & \\ \hline
\end{array}
$$

注意. 此第三次除算可從略，蓋 x^2-1 之能以 $x-1$ 除盡，固甚明顯也。

【法則】依所設二式中同一文字之降冪〔或昇冪〕順次整列之，以次數較低者（同次者不拘）爲除數除之，如有剩餘，則以此剩餘除除數，如又有剩餘，則以此剩餘除前之剩餘（即今所用以爲除數者），如是輾轉相除至無剩餘而止，其最後所用以爲除數者，即所求之約數。

注意. 依上法，設剩餘之式，不含其所整列之文字，則此二式爲無含此文字之公約式。

又二式之中有一式可以整除他式者，此式即所求之最高公約式明矣。

法則之證明. 欲證明上法者，二式以A，B表之，先就A以B除之，其運算之途徑如次。

$$
\begin{array}{lllll}
B) & A & (Q & & \\
 & \underline{BQ} & & & \\
 & C) & B & (R & \\
 & & \underline{CR} & & \\
 & & D) & C & (S \\
 & & & \underline{DS} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

如是則$A-BQ=C$

是A與B之公約數，亦C之約數。　〔第2節11〕

因之A與B之公約數，亦B與C之公約數。

又
$$BQ+C=A$$

是B與C之公約數，亦A之約數。

因之B與C之公約數，亦A與B之公約數。

即A，B之公約數皆B，C之公約數，且其逆B，C之公約數，皆A，B之公約數，故A與B之公約數，全同於B與C之公約數。

因之A與B之最大公約數，即B與C之最大公約數，依同理，B與C之最大公約數，即C與D之最大公約數。

故若C以D除之適盡者，C與D之最大公約數即為D，而A與B之最大公約數即所求之最大公約數者，D即為其最後所用以為除數者也，此固由輾轉相除而得者，足為法則之證明云。

例2.　求$2x^3-5x^2+4x-1$與$2x^4+x^3-9x^2+8x-2$之最高公約式。

運算.
$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
2x^3-5x^2+4x-1 & 2x^4 & +\ x^3 & -\ 9x^2 & +\ 8x & -2 & x+3. \\
 & 2x^4 & -5x^3 & +\ 4x^2 & -\ x & & \\
\hline
 & & 6x^3 & -13x^2 & +\ 9x & -2 & \\
 & & 6x^3 & -15x^2 & +12x & -3 & \\
\hline
 & & & 2x^2 & -\ 3x & +1 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2-3x+1 & 2x^3-5x^2+4x-1\ (x-1. \\
 & 2x^3-3x^2+\ \ x \\
\hline
 & -2x^2+3x-1 \\
 & -2x^2+3x-1 \\
\hline
\end{array}
$$

答:$2x^2-3x+1$.

以上運算之法，改之如下式爲便。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 2x^3-5x^2+4x-1 & 2x^4+\ x^3-\ 9x^2+\ 8x-2 & \\
x & 2x^3-3x^2+\ \ x & 2x^4-5x^3+\ 4x^2-\ \ \ x & x \\
\hline
 & -2x^2+3x-1 & 6x^3-13x^2+\ 9x-2 & \\
-1 & -2x^2+3x-1 & 6x^3-15x^2+12x-3 & 3 \\
\hline
 & & 2x^2-\ 3x+1 & \\
\end{array}
$$

〔問9〕 下列各組之式，試各求其最大公約數：

（一）x^2-4x+3, $4x^3-9x^2-15x+18$. 〔問8之(二)〕

（二）$6x^3-2x^2-13x-6$, $12x^3-x^2-30x-16$.

（三）x^3+3x^2-4, x^3+2x^2-x-

注意 1. 本法爲簡便起見，如有單項公約式者，可先提出之，然後再照本法求之。求得之後，與前單項公約式相乘，即可矣。

例如求 $2a^2x^4+2a^2x^3-4a^2x$, $8ab^2x^6+16ab^2x^5-24ab^2x^3$ 之最高公約式，先將兩式之單項因式 $2a^2x$ 及 $8ab^2x^3$ 剔去之，求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之最大公約數，〔前節例1〕得 $x-1$ 以與單項因數之最大公約數 $2ax$ 相乘得 $2ax(x-1)$ 即所求之最高公約式。

注意 2. 在計算中，其除數有可以某數（或式）除盡者，去其因數以行除算可也。

例 1. 求 $x^3-4a^2x+15a^3$ 與 $x^4+a^2x^2+25a^4$ 之最高公約式。

運算.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & x^3 \qquad\qquad -4a^2x+15a^3 & x^4+\ a^2x^2 \qquad\qquad +26a^4 & \\
x & x^3-3ax^2+5a^2x & x^4-4a^2x^2+15a^3x & x \\
\hline
 & \quad 3ax^2-9a^2x+15a^3 & 5a^2)5a^2x^2-15a^3x+25a^4 & \\
3a & \quad 3ax^2-9a^2x+15a^3 & \text{答}\quad \underline{\underline{x^2-3ax+5a^2}} & \\
\hline
\end{array}
$$

注意 3. 如上運算，其第二除數之單項因數 $5a^2$ 竟棄去之，此無非如 (1) 所述者之一而已。

注意 4. 上法互除，較前法簡便，學者可熟練之。

〔問10〕 下列各組之式，求最高公約式。

（一）$30x^5-5x^4-175x^3$， $42x^5-49x^4-224x^3+210x^2$.

（二）$2x^6-2x^4+x^3+3x^2-6x$， $4x^4-2x^3+3x-9$.

（三）$3x^3+5x^2-15x+4$， $6x^3+27x^2+21x-9$.

注意 5. 為避免分數係數起見，故從下例運算可也。

例 2. 求 $3x^3-14x^2-12x+35$ 與 $2x^3-13x^2+17x-10$ 之最高公約式。

解 此若依式行算其商必有分數係數，計算甚為繁雜，故於第一式以 2 乘之，運算如下：

	$6x^3-28x^2-24x+70$	$2x^3-13x^2+17x-10$	$\times 11$
3	$6x^3-39x^2+51x-30$	$22x^3-143x^2+187x-110$	
	$11x^2-75x+100$	$22x^3-150x^2+200x$	$2x$
$11x$	$11x^2-55x$	$7x^2-13x-110$	
	$-20x+100$	$77x^2-143x-1210$	$\times 11$
-20	$-20x+100$	$77x^2-525x+700$	
		$382)382x-1910$	
		答:$x-5$	

〔問11〕 下列各組之式，試各求其最高公約式。

（一） $2x^4+9x^3+14x+3$，$3x^4+14x^3+9x+2$.

（二） $3x^3-11x^2+16x-30$，$4x^3-15x^2+10x-3$.

例 3. 求$20x^4+x^2-1$與$25x^4+5x^3-x-1$之最高公約式。

解 第二式以 4 乘之，運算如下：

	$20x^4+x^2-1$	$100x^4+20x^3-4x-4$	5
x	$20x^4-5x^3-4x^2+x$	$100x^4+5x^2-5$	
	$5x^3+5x^2-x-1$	$20x^3-5x^2-4x+1$	4
x	$5x^3-x$	$20x^3+20x^2-4x-4$	
	$5x^2-1$	$-5)-25x^2+5$	
	$5x^2-1$		
		答：$5x^2-1$	

又所設二式之項，依x之昇冪順次列之，且變其符號，運算如下：

	$1-x^2-20x^4$	$1+x-5x^2-25x^4$	
1	$1+x-5x^2-5x^3$	$1-x^2-20x^4$	1
	$-x+4x^2+5x^3-20x^4$	$x)x+x^2-5x^3-5x^4$	
$-x$	$-x-x^2+5x^3+5x^4$	$1+x-5x^2-5x^3$	
	$5x^2)5x^2-25x^4$	$1-5x^2$	1
		$x-5x^3$	
	答：$1-5x^2$	$x-5x^3$	

此較上所述者爲直捷，故凡求多項式之最高公約式者，當於其文字所在，將從降冪以列之，抑從昇冪以列之，加意審定也.

〔問12〕　下列各組之式求最高公約式：

（一）$4x^4+9x^3+2x^2-2x-4$，$3x^3+5x^2-x+2$.

（二）$11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4$，$13x^4+10ax^3-2a^2x^2-a^4$.

（三）$2x^4-7x^3-4x^2+x-4$，$3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$.

（四）$a^3-a^2b+ab^2+14b^3$，$4a^3+3a^2b-9ab^2+2b^3$.

（五）$4x^4+2x^3-2x^2-4x$，$3ax^4-2ax^3+ax^2-2ax$.

d. 簡便法. 所設二式之和或差，易以分解因數者，即從其因數以求最高公約式可也。

例　$2x^4-4x^3y-2x^2y^2+5xy^3-2y^4$,

$2x^4-5x^3y+x^2y^2$ [illegible] xy^3-2y^4 求最高公約式。

解　求所設二式之差。

$$x^3y-3x^2y^2+2xy^3=xy(x-y)(x-2y)$$

此二式之公約數，亦此差之約數。　　〔第20節(II)〕

故此二式之公約數不出 x, y, $x-y$ 及 $x-2y$ 之外，然 x 及 y 明明非此二式之公約數，故以 $x-y$ 及 $x-2y$ 試除各式，其 $x-y$ 不受除。

而 $x-2y$ 除兩式均適盡，故 $x-2y$ 爲所求之最高公約式。

注意. 若 $x-y$, $x-2y$ 雙方皆受除,則其最高公約式爲 $(x-y)(x-2y)$ 明矣。

〔問13〕 下列各組之式,求最高公約式:

(一) $11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4$, $13x^4-10ax^3-2a^2x^2-a^4$. 〔前問(二)〕

(二) $6x^4-x^3y-3x^2y^2+3xy^3-y^4$,

$9x^4-3x^3y-2x^2y^2+3xy^3-y^4$.

(三) $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$, $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$.

(四) $3x^4+x^3+6x^2+4x+3$, $x^4+2x^3+2x^2+3x+1$.

5. 二式與其最高公因式之關係.

(I) 二式各以其最高公約式除之,所得兩商,必無公約式。

例如 $4a^3b^2cx^5y^4$, $6a^2b^3c^2x^5y^5$ 之最高公約式爲$2a^2b^2cx^5y^5$ 以除兩式,所得之商爲 $2ay$ 及 $3bcx$ 固無公約式也。

又如 x^3+x^2-2, x^3+2x^2-3 之最高公約式爲 $x-1$〔第24節例1.〕以除兩式,所得之商爲x^2+2x+2 及 x^2+3x-3 固無公約式也。

故凡 A, B 二式之最高公因式 G 如 $A\div G=a$, $B\div G=b$ 者,其 a 與 b 必無公約數,何者?若 a, b 有c爲其公約式,則

$$a=mc,\qquad b=nc$$

$$A=Ga=Gmc,\qquad B=Gb=Gnc,$$

是 A, B 尙有比其最高公約式 G 更高次之式如 Gc 者之公約式矣。

(Ⅱ) 二式之公約式，皆其最高公約式之約式。

例如 $$a^3+3a^2b+2ab^2=a(a+b)(a+2b)$$

與 $$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a+b)(a+3b)$$

其公約式爲 a, $a+b$ 及 $a(a+b)$ 皆其最高公約式 $a(a+b)$ 之約式。

〔問14〕 試就下列二式，列舉其公約式。

$$6a^2b(x-y)^2, \qquad 9ab^3(x^2-y^2).$$

附註 1. 三多項式之最高公約式求法.

求二式以上的 H. C. F. 時，先求兩式的 H. C. F.，再求這個 H. C. F. 和第三式的 H. C. F.. 照這樣一直做下去，最後求得的 H. C. F.，就是各式的 H. C. F..

例. 求 $2x^3+3x^2-2x-3$, $3x^3+2x^2-3x-2$, $5x^3-4x-1$ 之 H.C.F.

解 先求得第一第二兩式之 H.C.F. x^2-1.

次以 x^2-1 與第三式求得其 H.C.F. $x-1$ 即合所求。

四多項式以上之 H.C.F. 求法準此。

〔問15〕 試就下列各組之式，求其 $H.C.F.$

（一）$3x^3-4x^2-5x+2$，$6x^3-17x^2+11x-2$，

$3x^3-x^2-12x+4$.

（二）x^3+2x^2-4x+1，$x^5+5x^4-7x^3-11x^2+2x+10$，

x^6-3x^3-5x+7.

注意. 初選二式，以取低次者爲便。

附註 2. 二式含有公約式之條件.

例 1. x^2+px+q，$x^2+p'x+q'$ 之 $H.C.F$ 爲 $x+a$ 則 $a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$ 求證。

解 因 $x+a$ 爲所設二式之公約式，亦其差

$$x^2+px+q-(x^2+p'x+q')=(p-p')x+q-q'$$
$$=(p-p')\left(x+\frac{q-q'}{p-p'}\right)$$

之約式，然 $p-p'$ 爲不含 x 者。

故以 $x+a$ 除 $x+\dfrac{q-q'}{p-p'}$ 必可得整除。

故不能不爲 $a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$

例 2. x^2+px+q 與 $x^2+p'x+q'$ 二式，若 $x+a$ 爲其公約式。

則 $(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2$ 求證。

解 先依例 1，得 $a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$ ………………………(1)

次 $x+a$ 亦 $q'(x^2+px+q)-q(x^2+q'x+q')$

$$=x\{(q'-q)x+(pq'-p'q)\}=(q'-q)x\left(x+\frac{pq'-p'q}{q'-q}\right)$$

之約式，故仍依例1。

得 $$a-\frac{pq'-p'q}{q'-q}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

乃依(1)及(2)

$$\frac{q-q'}{p-p'}=\frac{pq'-p'q}{q'-q}$$

因之 $$(q-q')^2=(p-p')(p'q-pq').$$

〔問16〕 ax^2+bx+c 與 $a'x^2+b'x+c'$ 二式，若 $x+f$ 爲其公約式。

則 $$(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$$

試證之。

*〔問17〕 $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ 二方程式，設有一根爲公共者其係數間之關係若何?

〔問18〕 設 ax^2+bx+c, cx^2+bx+a 之 $H.C.F$ 爲 x 一次之式，則 $a\pm b+c=0$，試證之。

練習問題 III.

下列各組之式，試各求其 $H.C.F.$

1. (一) $35a^2b^3x^3y^4$, $49a^2b^4x^4y^3$.

(二) $8a^2b^3c^2x^5yz^3,\ 12a^4bcx^2y^3,\ 16a^3c^3x^2\ {}^4.$

(三) $15a^3b^3,\ 20a^2b^3cd^2,\ 30ab^2d^3.$

2\. (一) $xy(x-y)^2(x+2y),\ x^2(x^2-y^2)(x+3y),\ x^3(x^4-y^4).$

(二) $x^2y(x-a)^3(x+b)^2,\ 3xy^2z(x^2-a^2)^2(x^2-b^2).$

3\. (一) $16x^2-1,\ x-4x^2,\ 1-8x+16x^2,\ 24x^3y-6x^2y.$

(二) $12x^2-x-20,\ 15x^2-38x+24,\ 21x^2-52x+32.$

(三) $21x^4+8x^3-45x^2,\ 42x^5-82x^4+36x^3.$

4\. (一) $x^2-4x+3,\ 4x^3-9x^2-15x+18.$

(二) $4x^3-22x^2+21x+12,\ x^2-6x+8.$

5\. (一) $x^3-2x+1,\ x^3+2x^2-1.$

(二) $6x^3-17x^2+11x-2,\ 3x^3-x^2-12x+4.$

(三) $2a^3-9a^2b+9ab^2-7b^3,\ 4a^3-20a^2b+20ab^2$
$-16b^3.$

(四) $x^4-8x^3+19x^2-14x+3,\ x^4-25x^2+30x-9.$

(五) $x^4+x^2-4x-3,\ x^6+3x^4-x^3-3x^2-12x-7.$

(六) $x^5+2x^4-5x^2-7x+3,\ 3x^6-3x^4-18x^3+x^2$
$+2x+3.$

(七) $4x^4-10x-56+26x^3+41x^2,$
$3x^4-14x+20x^3+32x^2-57.$

(八) $24x^4y+72x^3y^2-6x^2y^3 90-xy^4,$

$6x^4y^2+13x^3y^3-4x^2y^4-15xy^5$.

6. (一) x^3+3px^2-x-3p, $px^3-3(1+3p)x+3+8p$.

(二) $3x^2+(4a+2b)x+2ab+a^2$,

$x^3+(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x-a^2b$.

7. $2x^4-3x^3-3x^2+4$, $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$.

8. (一) x^3-x^2-4x+4, x^3+4x^2+x-6, $x^3+3x^2-4x-12$

$2x^4+2x^3-20x^2-8x+48$.

(二) $6x^3-2x^2+7x-3$, $3x^3+2x^2-5x+1$

$5x^5+3x^3-x^2+1$.

*9. 設 x^2-px+q, x^2-qx+p 之公約式, 爲 x 一次之式, 則 $p+q+1=0$, 試證之。

*10. 設 x^2+ax+1 x^2-bx-1 之公約式, 爲 x 一次之式, 則 $a^2-b^2=4$, 試證之。

B. 倍式最低公倍式.

1, 定義. 公倍式. 最小公倍式.

一整式爲二以上整式之倍式者，此式爲彼諸式之公倍式，其公倍式中次數最低者爲最低公倍式.

例如 abx^2, ab^2x 之公倍式爲 ab^2x^2 及以任意之整式乘 ab^2x^2 者, 但 ab^2x^2 爲其最低公倍式。

又如 x^2-a^2 及以任意之整式乘 x^2-a^2 者, 皆 $x+a$ 與 $x-a$ 二式之公倍式, 但 x^2-a^2 爲其最低公倍式。

注意 1. 若干式之公倍式, 無窮而其最低公倍式僅一.

注意 2. 在算 內, 最小公倍數係公倍數中之最小者, [illegible] 數值, 全置不論, 惟論其次數爲最低云

注意 3. 次數低, [illegible] 未必小, 如上例 $b<1$, 或 $x<1$, 則 ab^2x^2, 其值較 ab^3x^3, ab^4x^4……較大, 以代數中僅論次數而不論其值故也。

2. L. C. M. 之一般性質

(1) 若干式之公倍式, 皆爲其 L.C.M. 之公倍式。

證 $A=aD$. $B=bD$ $\therefore$ abD^3 或 a^2bD^3 …………

均爲 A, B 之倍式

但 $A.B.$ 之 $L.C.M.$ 爲 $abD.$

$\therefore$ $abD^2, a^2bD^3, \cdots\cdots$ 均爲 abD 之倍式

3. $L.C.M$ 之求法

a. 單項式之求法,

由視察法可求

例 1. $a^3b^2cx, a^2b^3c^4y^3$, 求 $L.C.M.$

解 其次數至低者, ab 及 y 爲三次, c 爲四次, x 爲一次,

故 $a^3b^3c^4xy^3$ 即所求之 $L.C.M.$

例 2. $8a^2b^3x^4z^2, 12a^3c^2yz^3, 20b^2c^3x^2y^4$ 求 $L.C.M.$

解 先求得數係數之最小公倍數爲 120.

照上法, 得 $120a^3b^3c^3x^4y^4z^3$ 即所求之 $L.C.M.$

法則 先把各式分解成質因式, 將各不同因式連乘, 每一因式的指數, 是各式中之最大者, 有數字係數時, 再求各數字之最小公倍, 與已求得者, 聯乘之即可

注意 1. 所設之式, 無公約式者, 其 $L.C.M.$ 即其相乘之積。

〔問1〕 下列各組之式, 試各求其 $L.C.M.$

（一）a^3b^2, a^2b^3.

（二）ab^3, a^2bc, abc^3.

（三）$ab^2cx^4, a^4bc^2x^3, a^3b^2cx^2$.

（四）$a^m b^n c^p, a^n b^p c^m, a^p b^m c^n$.

但 m,n,p 爲正整數，而 $m>n>p$.

〔問2〕 下列各組之式，試各求其 L.C.M.

（一）$9x^2y, 6x^2y^2, 12xyz$.

（二）$6a^3b^2c, 4b^3c^2d, 9cd^3b^2$.

例 3. $(a+b)(x-a)^3(x+b)^2, (a+b)(x-a)^2(x+b)^2,$

$(a-b)(x-a)^2(x-b)^2$ 求最小公倍數。

解 以 $a+b, x-a, x+b$ 視如單項式。

得 $(a+b)(a-b)(x-a)^3(x+b)^2(x-b)^2$

即 $(a^2-b^2)(x-a)^3(x^2-b^2)^2$ 爲所求之 L.C.M.

〔問3〕 下列各組之式，試各求其 L.C.M.

（一）$(x+a)^3(x-b)^3, 3(x+a)^2(x+b)^2$.

（二）$3x^2, 5(a^2-ab), b-a$.

（三）$(a-b)(b-c), (b-c)(c-a), (c-a)(c-b)$.

（四）$(a-b)(a-c)(x-a), (b-c)(b-a)(x-b),$

$(c-a)(c-b)(x-c)$.

b. 二多項式之求法 （易分解因式者）

例 $x^2-3x+2, x^2-5x+6, x^2-4x+3$ 求 $L.C.M.$

解 $\because x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

照前問題3.或例3.求法，得知$L.C.M$爲$(x-1)(x-2)(x-3)$.

〔問4〕 下列各組之式，求$L.C.M.$

（一）$x^3-x, 1-x^3, x^3+1.$

（二）$x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4.$

（三）$a^6+b^6, a^8+a^4b^4+b^8, a^6-b^6.$

（四）$6x^2-13x+6, 3x^2+13x-10, 2x^2+7x-15.$

（五）$x^2+(a+b)x+ab, x^2+(b+c)x+bc, x^2+(c+a)x+ca.$

（六）$x^2-x-12, 9x^2-3x-20, 5-3x.$

（七）$(x+3y)^2, x^2-xy-12y^2, 3x-12y.$

（八）$ax^2+2a^2x+a^3, 2ax^3-4a^2x-6a^3, 3(ax+a^2)^2.$

32. 二多項式之求法2.（不易分解因式者）

先求兩式之$H.C.F.$以$H.C.F.$,除兩式之積，其商是此兩式之$L.C.M.$

證，今以$A,B,$表二式A,B之$H.C.F$爲$G.$

則 $A=Ga,\ B=Gb$〔a,b 係整式〕

此a與b必無公約式，故依前節方法，其 $L.C.M$

為 $$Gab=Ab=Ba$$

即 $$A\times(B\div G)=B\times(A\div G)=Gab.$$

例. $x^3+x^2-2,\ x^3+2x-3$ 求最小公倍數。

解 先求得此兩式之 $H.C.F$ 為 $x-1$ 以 $x-1$ 除第一式（第二式亦可）得商 x^2+2x+2 以 x^3+2x-3 乘之即得 $L.C.M.$

如 $$(x^3+2x-3)(x^2+2x+2)$$

〔問5〕 下列各題之 $L.C.M.$

（一）$x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1.$

（二）$6x^3-11x^2y+2y^3,\ 9x^3-22xy^2-8y^3.$

（三）$x^4-11x^2+49,\ 7x^4-40x^3+75x^2-40x+7.$

（四）$6a^3+26x^2+25a-7,\ 2a^2+4a-1.$

（五）$x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2,\ x^4-4x+3.$

c. 三以上多項式之 $L.C.M.$

求二式以上之 $L.C.M.$ 時，先求兩式之 $L.C.M.$ 與第三式再求其 $L.C.M.$。依此做法最後求得之 $L.C.M.$，即應求之 $L.C.M.$。

例　$A=x^4-x^2-4x+4$, $B=x^3+4x^2+x-6$,

$C=x^3+3x^2-4x-12$, 求最低公倍式。

解　先求A與B之$H.C.F$爲x^2+x-2.

故其最低公倍式爲$(x^2+x-2)(x-2)(x+3)$.

次以此最低公倍式與C求最高公約式爲$(x+2)(x-2)(x+3)$

故其最低公倍式即所要之最低公倍式如次:

$$(x-1)(x+2)(x-2)x+3)$$

〔問6〕　下列各組之式，試各求其最低公倍式:

(一)　$3x^3+x^2-8x+4$, $3x^3+7x^2-4$, $x^3+6x^2+11x+6$.

(二)　x^3-x^2-4x+4, x^3+4x^2+x-6, $x^3+3x^2-4x-12$, $2x^4+2x^3-20x^2-8x+48$.

4.　二式之$H.C.F$與$L.C.M$之關係.二式之$H.C.F$與$L.C.M$相乘之積,等於二式相乘之積.

證,設A,B二式之$H.C.F$爲G,$L.C.M$爲L.

則　$A=aG$,　$B=bG$　$L=abG$

$\therefore L\times G=abG\times G=A\times B$

例1.　設二式之$H.C.F$爲$x+2$, $L.C.M$爲$x^3+2x^2-9x-18$其一式爲x^2+5x+6求他式.

解　二式之積爲$(x+2)(x^3+2x^2-9x-18)$

所求之式，爲以x^2+5x+6除之所得之商。

即 $(x^3+2x^2-9x-18)\div(x+3)$ 即 x^2-x-6.

$\therefore$ 其他一式爲x^2-x-6.

另法．x^2+5x+6以$x+2$除再以其商除其 $L.C.M.$亦得所求之式如下：

$$\frac{x^2+5x+6}{x+2}=x+3 \qquad \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x+3}=x^2-x-6$$

〔問7〕 設二式之 $L.C.M$ 爲 $12x^4-20x^3+5x^2+5x-2$, $H.C.F.$爲 $x-1$, 其一式爲 $4x^3-4x^2-x+1$, 求他式。

例 2. 設二式之$H.C.F$ 爲 $x-1$ $L.C.M.$爲 $x^3-6x^2+11x-6$, 其二式若何?

解　設二式爲A及B.

$$\therefore \quad \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=\frac{L}{G}=\frac{Gab}{G}=ab$$

（由前節定理可知,a,b.無公因式）

$\therefore$ $x^2-5x+6=ab$ 即 $(x-2)(x-3)=ab$.

但 $G\times a=A$.　$G\times b=B$　（見前）

$\therefore$ 所求二式一爲$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$.

一爲$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$.

於此二組，分別以最大公約數$x-1$乘之，即得所求之式，

爲 $x-1$ 與 $x^3-6x^2+11x-6$ (一答)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{或} & (x-2)(x-1)\ \text{即}\ x^2-3x+2\\ \text{與} & (x-3)(x-1)\ \text{即}\ x^2-4x+3\end{array}\right\}\ (\text{二答})$$

〔問8〕 設二式之最大公約數爲 $3x-4$ 最小公倍數爲$6x^3+x^2-9x-4$, 求二式。

〔問9〕 設二式爲同次式, 其最大公約數爲 ab^2, 最小公倍數爲 ab^4cd 問此二式若何?

〔問10〕 設A,B,C三式, 每取二式爲一組, 凡三組之最大公約數爲 G_1,G_2,G_3 最小公倍數爲 L_1,L_2,L_3

如是, 則。 $G_1G_2G_3L_1L_2L_3=(ABC)^2$

試證之。

練習問題 IV.

1. 求下列之$L.C.M.$

(一) $24a^3b^3x^4,\ 60a^2b^4x^6$.

(二) $3x^3yz^3,\ 15xy^3z^2,\ 10x^2y^2z^2$.

(三) $ab^2c^3x^4,\ a^4bc^2x^3,\ 5a^3b^2cx^2$.

(四) $(a+b)^2,\ (a-b)^2,\ a^2-b^2$.

(五) $4(x-y)^2x^3,\ y^3(x+y)^2,\ xy(x^2-y^2)$.

(六) $1-x,\ 1+x,\ 1+x^2,\ 1+x^4$.

(七) $6x^2-5x-6,\ 2x^2+x-6,\ 4x^2+2x-12,$

$12x^2-36x+27.$

(八) $21x^2-13x+2,\ 28x^2-15x+2,\ 12x^2-7x+1.$

(九) $2x^2+(6a-10b)x-30ab,\ 3x^2-(9a+15b)x$

$+45ab.$

(十) $x^2-6x+8,\ 4x^3-22x^2+21x+12.$

(十一) $6x^4+2x^3+9x^2-2x+6,\ 10x^4+4x^3+15x^2-3x$

$+9.$

2. 求下列之 $H.C.F$ 及 $L.C.M.$

(一) $x^3-10x^2+26x-8,\ x^3-9x^2+23x-12.$

(二) $6x^3-11x^2-5x-3,\ 9x^3-9x^2+5x-2.$

3. 求下列之 $L.C.M.$

(一) $x^3-6x^2+11x-6,\ x^3-9x^2+26x-24,$

$x^3-8x^2+19x-12.$

(二) $x^4-10x^2+9,\ x^4+10x^3+20x^2-10x-21,$

$x^4+4x^3-22x^2-4x+21.$

4. 設二同次式,其最高公約式爲 $x+2$,最低公倍式爲 $x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2$,問二式若何?

5. 設有二式,其最高公約式爲 x^2-a^2,最低公倍式爲 $x^8-5a^4x^4+4a^8$,問二式若何?

因式分解法第四種

較爲複雜之代數式（即高於二次者）行因式分解時，有以以上各種方法所不能解決者，學者咸有十二分困難。但此種代數式內文字排列順序，極爲規則，其名稱詳述於後，因爲其排列規則，故有特殊方法以解之。至於不規則之代數式，其分解之法，非本法能解決，此種排列文字規則之代數式，名之曰對稱式及交代式。玆關於對稱式及交代式之定義定理詳述於下。

1. 同次式．整式之各項，對於若干文字爲同次者，此式爲此諸文字之同次式

例如$2a^2+3ab+5b^2$爲a及b之二次同次式。

注意，若干同次式之積，亦爲同次式，其次數等於各因數之次數之和。

例如a,b之二次，四次之同次式。

爲a^2+ab+b^2，a^2-ab+b^2，$a^4-a^2b^2+b^4$其積爲a,b之八次同次式如$a^8+a^4b^4+b^8$是也。

2. 對稱式．以整式所含二字交換之，絕無變異者，此式爲此二文字之對稱，故稱此式爲此二文字之對稱式

若其式爲式中任何二字之對稱式，則即爲其一切文字之對稱，故稱此式爲其一切文字之對稱式

例如a^2+b^2，a^2-ab+b^2之類，爲a,b，二文字之對稱式。

又如 $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$，$a^3+b^3+c^3-3abc$，之類。

皆爲a,b,c三文字之對稱式。

3. 同次對稱式

① a,b二文字之一次同次式，公形爲$La+Mb$，若此式爲a,b二文字之對稱，

即 $La+Mb\equiv Lb+Ma \quad \therefore L=M.$

$\therefore$ 其公形爲 $L(a+b)$.

依同理，a,b,c三文字之一次同次對稱式。

爲 $L(a+b+c)$

② a,b二文字之二次同次式。

爲 $La^2+Mab+Nb^2$

此若爲a,b之對稱，

則 $La^2+Mab+Nb^2\equiv Lb^2+Mba+Na^2$

$\therefore L=N \quad \therefore$ 其公形爲$L(a^2+b^2)+Mab$

依同理,a,b,c三文字之二次同次對稱式,

爲 $L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$

③ 又依同法,a,b二文字之三次同次對稱式,

爲 $L(a^3+b^3)+M(a^2b+ab^2)$

又a,b,c三文字之三次同次對稱式,

爲$L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)$

$+Nabc$,

但L,M,N係不含a,b,c者。

4. 交代式，於整式所含各文字之中，以其二者交換之,其形不變而惟符號變者，此式爲此二文字之交代式，若其式爲式中任何二字之交代式,則即爲其一切文字之交代式。

例如$a-b$將a與b交換之。

則爲 $b-a=-(a-b)$ 變原式符號,故 $a-b$ 爲 a,b 二文字之交代式,又如 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 將b與c交換之,則爲 $(c-b)(b-a)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$ 亦變原式符號,c 與 a 交換,a 與 b 交換,結果相同,故此式爲 a,b,c 三文字之交代式。

更有 a^2-b^2, a^3-b^3, $ab(a-b)$, $(a-b)(a+b+c)$.

$(a^2-b^2)x+(a-b)y$之類皆a,b二文字之交代式。

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3,$$

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$

$$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$

$(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)$

$(x-a)$ 皆 a,b,c 三文字之交代式。

5.　**文字之輪換.**　於 a,b,c 三文字之式，將 a,b,c 遞次換爲 b,c,a 者，謂之文字之輪換。a,b,c 輪換之爲 b,c,a，又輪換之爲 c,a,b，更一次輪換，則仍爲 a,b,c 三文字輪換之式。前之對稱式，交代式均依此法而書之.

如　$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3,$$

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b),$$

$$yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y).$$

於其第一項文字輪換之即得第二項，更輪換之得第三項，故任知其一項，其他二項可直捷書之可也。

凡書此類之式恆以 Σ 之記號表之，蓋簡法也。

即書其一項而以 Σ 字(希臘文字之一，即輪換之義)冠之，例如上三式。

以　$\Sigma(b-c)^3$，$\Sigma a^3(b-c)$ 及 $\Sigma yz(y-z)$ 表之可也。

又公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

以$\sum a^3-3abc=\sum a(\sum a^2-\sum bc)$表之可也。

注意，輪換爲寫對稱式及交代式時之主要方法，學者應十分熟練之。

6. 對稱式及交代式之定理.

a.1 若干文字之對稱式及交代式，以其若干文字輪換之，必無變化。

例 如 a,b,c 三文字之對稱式及交代式，其文字爲a,b,c之順，輪換一次，則爲 b,c,a 之順。

若 a 與 b 交換之，則爲 b,a,c；更a與c交換之，則爲b,c,a；固與上同其順者也。

即文字輪換之結果，與其二文字二次交換之結果相同，故無論對稱式，即交代式亦無變化者矣。

a,2 $\left.\begin{array}{l}\text{對稱式}\times\text{對稱式}\\ \text{交代式}\times\text{交代式}\end{array}\right\}=\text{對稱式}$

例如 $\underbrace{(a+b)}_{\text{對稱式}}\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{對稱式}}=\underbrace{a^3+b^3}_{\text{對稱式}}.$

及 $\underbrace{(a-b)}_{\text{交代式}}\underbrace{(a^2-b^2)}_{\text{交代式}}=\underbrace{(a-b)^2(a+b)}_{\text{對稱式}}$

解 二對稱式之文字輪換與原式不變，其積亦然。惟二交代式之文字輪換，均與原式符號相反。但其積又爲二對稱式

二式積之符號矣。

設二對稱式爲A, B,積爲A, B,

二交代式爲A, B,

輪換後爲$-A, -B$,但其積則爲$-A\cdot(-B)=A, B$.

b. $\frac{\text{對稱式}}{\text{對稱式}}=$對稱式

$\frac{\text{交代式}}{\text{交代式}}=$對稱式

例如 $\frac{\text{對稱式}\ a^3+b^3}{\text{對稱式}\ a+b}=a^2-ab+b^2$

對稱式

$\frac{\text{交代式}\ a^3-b^3}{\text{交代式}\ a-b}=a^2+ab+b^2$

對稱式

c. 解仝上.

對稱式×交代式=交代式

$\frac{\text{交代式}}{\text{對稱式}}=$交代式

例如 $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

交代式 對稱式 交代式

$\frac{\text{交代式}\ a^3-b^3}{\text{對稱}\ a^2-ab+b^2}=a-b$

交代式

解 二者均以交代式輪換,與原式符號反故也。

d. 若干文字之交代式,於其式中任取二文字之差以除之必能適盡

例如 a,b,c 三文字之交代式P,而P因 a 與 b 之交換而爲$-P$;若$a=b$,

則 $P=-P$因之$2P=0$ $\therefore P=0$.

故P以$a-b$除之適盡。

系 a,b,c 三文字之交代式,以 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 除之,必能適盡

〔第四章問34,練習 Ⅳ.18〕

例 1. $(a+b+c)^3$ 試解之。

解 此式爲 a,b,c 三文字之三次同次對稱式,解其括弧如次。

$L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)$

$+Nabc$

因所設之式,無涉及a,b,c以外之文字,故 L,M,N必爲數係數。

故$(a+b+c)^3$

$=L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)$

$+Nabc$

先就兩邊a^3之係數比較之得$L=1$.

次於兩邊令$a=0$, $b=c=1$得$M=3$.

更於兩邊令$a=b=c=1$得$N=6$.

故所求之結果為$\sum a^3+3(\sum b^2c+\sum bc^2)+6abc$

注意 1. 本題依$(a+b)^3$公式展開，結果相同，但雙方比較孰為麻煩不問可知。

注意 2. 比較係數法見前。

〔問4〕 下列三式試解之。

（一）$(a+b)^3$. （二）$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

（三）$(a+b+c)^3-\sum(b+c)^3+\sum a^3$.

例 2. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$ 以xyz除之。

解 被除數為x,y,z之四次同次對稱式，除數為三次同次對稱式，故所求之商必為x,y,z之一次同次對稱式。

其形為$L(x+y+z)$（但L為數係數）。

$$\therefore (x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4 \equiv Lxyz(x+y+z)$$

兩邊令$x=y=z=1$得$L=12$.

故所求之商為$12(x+y+z)$.

〔問5〕 $\sum a(b+c)(b^2+c^2-a^2)$以abc除之。

〔問6〕 $\sum a^2(b+c)^2+abc(\sum a)+(\sum a^2)(\sum bc)$以$(b+c)$ $(c+a)(a+b)$除之。

例 3. 已知$(b-c)(c-a)(a-b)$爲$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$之因數，求其他之因數。

解 前者爲 a,b,c 三文字之三次同次交代式，後者爲四次交代式，故其他之因數必爲 a,b,c 三文字之一次對稱式。

故$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ 兩邊就ab^3之係數比較之得$L=-1$.

故所求之因數爲$-(a+b+c)$.

〔問7〕 $(y-z)(z-x)(x-y)$爲$\sum(y^3+z^3)(y-z)$之因數，求其他之因數。

〔問8〕 $\sum a^5(b-c)$以$(b-c)(c-a)(a-b)$除之。

7. 利用對稱式及交代式以分解因數

本法對於分解對稱式及交代式，特別方便，茲舉數例以明之。

注意 1. 所謂分解因式者，亦即左右兩邊相等之意也，(即恆等式詳後)利用本法主要便利之點，爲未定係數法，下列例題，即依未定係數法而分解者。

注意 2. 恆等式左右兩邊同類項係數必等。

決定方法 1.

比較已知一邊同類係數而定他邊同類項之未知係數。

決定方法 2.

先與兩邊未知數之值，次定決定其未知係數。

注意　恆等式兩邊同未知數，均與一同值，結果必等。

例 1. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

$$\equiv A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x)+Cxyz$$

試定其未定之係數A,B,C.

解　先定A之值，兩邊 x^3 之係數左邊為1，右邊為 A，知 $A=1$. 次定 B 之值，兩邊 x^2y 之項，在左邊為消失，故 $B=0$.

乃驗兩邊xyz之項知$C=-3$.

〔問9〕 $(a+b+c)^3\equiv A(a^3+b^3+c^3)$

$$+B(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+Cabc$$

試定其未定之係數A,B,C.

〔問10〕 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\equiv L(b-c)(c-a)(a-b)$

及　$y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)+x^2y^2(x-y)$

$\equiv(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$

試定其未定之係數L及M.　〔第六章問12,練習VI,11〕

例 2. $x^4+3x^3-5x^2+mx+n$ 以 x^2+x-2除之適盡，其m

及n之值若何?　〔前節系3之例〕

解　因商之第一項爲x^2,故姑定其商爲x^2+Ax+B(A及B爲未定之係數).

則　$(x^2+Ax+B)(x^2+x-2)\equiv x^4+3x^3-5x^2+mx+n$

先定A,就兩邊x^3之項比較之。

$$x^3+Ax^3=3x^3\text{即}(1+A)x^3=3x^3\quad\therefore\quad A=2.$$

決定B就兩邊x^2之項比較之。

$$(B+A-2)x^2=-5x^2\text{即}Bx^2=-5x^2\quad\therefore\quad B=-5$$

故左邊爲$(x^2+2x-5)(x^2+x-2)$,乃就兩邊x之項及不含x之項比較之,

得　$$m=-9\text{及}n=10.$$

〔問11〕　$x^4-6x^3-15x^2-36x+36$以x^2+3x+6除之求其商。

〔問12〕　$x^4-6x^3+mx^2+nx+36$以x^2+3x+6除之適盡,其m及n之值若何?

注意.　以上所說明之方法,謂之係數比較法。

II.　恆等式兩邊所含之文字,其值無論如何恆得兩邊相等,故雖有未定之係數,但就其式中之文字與以適當之值,兩邊必仍相等,因以察其未定之係數而決定之可也。

例1.　$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\equiv L(y+z)(z+x)(x+y)$定$L$

之值。　　〔第六章問9〕

解　令$x=0, y=1, z=1$

則$8-1-1=L\times 2$, 故$L=3$.

〔問13〕　試就下列恆等式，定L之值.

（一）$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

$\equiv Labc$.

（二）$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4$

$+z^4\equiv Lxyz(x+y+z)$.　　〔練習VI.2,5〕

例 2.　$x^4+x^3+x^2+x+1\equiv A+B(x+1)+C(x+1)(x+3)$

$+D(x+1)(x+3)(x+5)+E(x+1)(x+3)(x+5)(x$

$+7)$.

其A,B,C,D,E之值各若何?

解　先$x=-1$得$A=1$.

次$x=-3$, 則$81-27+9-3+1=A+B\times(-2)$.

因$A=1$, 故$B=-30$.

次$x=-5$與上同理，得$C=50$.

次$x=-7$　　　得$D=-15$.

至於E之值前就兩邊x^4之係數比較之，知爲1.

注意.　未定係數各文字之數值，率係簡單者，且令所選之未定係數，係就其不消失（其他未定係數多有消失者）者

選列之。

〔問14〕 $4x^3-21x^2+37x-19$.

$$\equiv a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3).$$

其a,b,c,d之值各若何?

〔問15〕 $2x^3+mx^2+nx+2$，依因數分解之，得$(x-1)(x-2)(2x+1)$，其m及n之值各若何?

再舉數例,俾本法練習純熟，以本法對於因式分解,極為應用故也。

例 1. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$分解其因數。

解 所設之式為a,b,c三文字之三次同次對稱式。

$\therefore$ $b=-c$ 則為零,故$b+c$為其一因數,同理$c+a$及$a+b$亦為其因式,故此式

以$(b+c)(c+a)(a+b)$除之適盡,而其商為不含a,b,c者。

故 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$\equiv L(b+c)(c+a)(a+b)$$

就兩邊a^2b之係數比較之,得$L=1$.

故所求之結果如下:

$$(b+c)(c+a)(a+b).$$

〔問16〕 試就下列諸式,分解其因數:

（一）$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

（二）$\sum bc(b+c)+2abc$.

（三）$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$.

例 2. $(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)^2$

$$-x(x+y)^2(x+z)^2-y(y+z)^2(y+x)^2-z(z+x)^2(z+y)^2$$

分解其因數。

解　所設之式爲x,y,z之五次同次對稱式，

因$x=0$則爲零，故有xyz之因數，

故其他之因數必爲x,y,z之二次同次對稱式。

如　$L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)$

故　$(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)^2$

$$-x(x+y)^2(x+z)^2-y(y+z)^2(y+x)^2-z(z+x)^2(z+y)^2$$

$$\equiv xyz\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}.$$

先就兩邊x^3yz之項比較之，

如　$2x^3yz-x\times2xy\times2xz=Lx^3yz$

即　$-2x^3yz=Lx^3yz$故$L=-2$

次於兩邊令$x=y=z=1$, $L=-2$

則 $27-16-16-16=-6+3M$ 故 $M=-5$.

故所求之結果如次:

$$-xyz\{2(x^2+y^2+z^2)+5(yz+zx+xy)\}$$

〔問17〕　試就下列諸式，分解其因數。

（一）$(x+y)^5-x^5-y^5$.

（二）$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$.

（三）$\sum x(y+z)(y^2+z^2-x^2)$.

注意. a,b,c三文字之對稱式,分解其因數,先就abc, $(b+c)(c+a)(a+b)$, $a+b+c$各因數之有無試驗之可也。

〔問18〕 下列二式,試分解其因數。

（一）$(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$.

（二）$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)+8xyz$.

例 3. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$分解其因數。

解 所設之式爲a,b,c三文字之三次同次交代式,

故有$(b-c)(c-a)(a-b)$之因數。

故 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\equiv L(b-c)(c-a)(a-b)$.

但L爲數係數。

乃就兩邊a^2b之係數比較之,得$L=-1$.

故所求之因數爲$-(b-c)(c-a)(a-b)$.

〔問19〕 下列諸式,試分解其因數。

（一）$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

〔第一章問96.第四章問47〕

（二）$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

〔第一章問89,96.第四章39節〕

（三）$(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$

（四）$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

例 4. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$ 分解其因數。

解　所設之式爲a,b,c之四次同次交代式。

故有$(b-c)(c-a)(a-b)$之因數，故其他之因數必爲a,b,c之一次同次對稱式。

故　$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$$

$$\equiv L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

乃就兩邊b^3c之係數比較之，得$L=-2$.

故所求之結果爲$-2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

〔問20〕　下列二式，試分解其因數、

（一）$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

（二）$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.

例 5. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$分解其因數。

解　所設之式爲x,y,z之五次同次交代式。

故有$(y-z)(z-x)(x-y)$之因數，故其他之因數必爲x,y,z之二次同次對稱式。

故$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

$$\equiv(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$$

先就兩邊y^4x之係數比較之得$L=-1$,

次以x^3y^2之係數比較之,得$M=-1$故所求之結果如次

$$-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$$

〔問21〕 下列諸式,試分解其因數:

（一）$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

（二）$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$.

（三）$\sum(y^2+x^2)(z^2+x^2)(y-z)$.

〔問22〕 $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$,試分解其因數。

〔問23〕 下列之式為 a,b,c,d 四文字之交代式,試分解其因數。

$$a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)(a-c)$$
$$+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)(c-a).$$

練 習 問 題 V.

下列諸式,試分解其因數。

1. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$.

2. $(a+b+c)^3-\sum(b+c-a)^3$.

3. $\sum a^2(b+c-a)-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

4. $\sum(b-c)(a-b+c)(a+b-c)$.

5. $(a+b+c)^4-\Sigma(b+c)^4+\Sigma a^4$.

6. $\Sigma(y^3+z^3)(y-z)$.

7. $\Sigma(b+c-a)(c-b)^3$.

8. $\Sigma a(b-c)^2$.

9. $(a+b+c)^5-\Sigma(b+c-a)^5$.

10. $2abc(a+b+c)^2+\Sigma b^2c^2(b+c)$.

11. $\Sigma b^2c^2(b-c)$.

12. $\Sigma a^2(a+b)(a+c)(b-c)$.

13. $(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$

14. $\Sigma(b+c-a)^5(b-c)$.

15. $\Sigma b^3c^3(b-c)$.

16. $(a+b+c)^3(a-b)(a-c)(c-a)-(b+c+d)^3(b-c)(c-a)$

$(a-b)+(c+d+a)^3(c-d)(d-a)(a-c)$

$-(d+a+b)^3(d-a)(a-b)(b-d)$.

17. $\Sigma a(x-a)(b-c)$.

18. $\Sigma(b-c)(x+b)(x+c)$.

19. $\Sigma(b-c)(x-a)^2$.

20. $(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(z+x)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$以$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$除之適盡,求證。

附　恆　等　式

因式分解,乃變所與之式,等如何因式相乘之意,變原式之形而不變其實質耳。亦即左右兩邊恆等之意也。故本書最末一部,特將恆等式之諸定理,諸證法,分門別類述之對於因式分解,亦有相當補助。

① 定義. 等式. 以等號＝聯結二式者,謂之等式。

例如
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \quad (1)$$
$$3x+4=x+7. \quad (2)$$
皆等式也。

② 恆等式. 式中文字,無論代以何值,恆能成立等式者,謂之恆等式。

如
$$a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$$
$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$ 之類是也。

③ 等式之定理.

定理 1. 以同數或同式加減於等式之兩邊,仍爲等式。

定理 2. 等式之兩邊以同數或式同乘之,或以不等於零之同數或式同除之,仍爲等式。

定理 3. 等式之兩邊,之同冪,仍爲等式。

④ 恆等式之證明法.

I. 將所設之式,變其一邊,使與他邊相同。

例 1. $(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)$

$+a^4$, 求證。

解　右邊 $=(b^2+c^2)^2+a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2$

$$+a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2+a^4$$

$$=(b^2+c^2)^2+2(a^2+c^2)a^2+a^4=(b^2+c^2+a^2)^2.$$

〔問1〕　試就下列諸恆等式證明之:

（一）$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$.

（二）$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)^2$.

（三）$(a-2b)a^3-(b+2a)b^3=(a-b)(a+b)^3$.

例 2.　$(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2=4xy(x^2+y^2)$ 求證。

解　左邊 $=(x^2+xy+y^2+x^2-xy+y^2)$

$$(x^2+xy+y^2-x^2+xy-y^2)$$

$$=(2x^2+2y^2)(2xy)=4xy(x^2+y^2).$$

〔問2〕　試就下列諸恆等式證明之:

（一）$4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2$.

（二）$x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x+1)^2-1$,

（三）$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(y+z)(z+x)(x+y)$.

注意.　由上例可知恆等式問題, 與因式分解題相同。

II.　就所設之式, 兩邊酌量變化, 俾歸於同式。

例　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c)$$

求證。

解　兩邊各去括弧整理之。

同爲　$2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

〔問3〕　試就下列諸恆等式證明之：

（一）$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

（二）$(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2$.

（三）$(a^2+b^2+c^2)^2=(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$.

*III.　所設之等式，若爲眞確，必適與條件相合，詳言之，所設之式，順次變化，遂至斷定其爲眞確。

例 1.　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$，求證。

解　所設之等式，若爲眞確。

則　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a-b)(c-a)-2(b-c)(a-b)-2(c-a)(b-c)$必爲零。

詳解上式

得　$(a-b+b-c+c-a)^2$ 本式爲零，故原式恆等。

例 2. $(x+y)^4=2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$ 求證。

解 所設之式若爲眞確,則兩邊以$(x+y)^2$除之。

得 $$(x+y)^2=2(x^2+y^2)-(x-y)^2.$$

即 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 本式眞確,故原式恆等。

*〔問4〕 下列恆等式試證明之:

(一) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$

(二) $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=(x^2-xy+y^2)^2.$

(三) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)=1+x+x^2+\cdots+x^{15}.$

(四) $(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}.$

*〔問5〕 試由第一章第13節之公式及第 3 節之公式,推出下列之恆等式。

(一) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).$

(二) $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2.$

5. 條件之恆等式. 於某條件之下所成立之恆等式,謂之附條件之恆等式。

例. 若$a+b+c=0$

則 $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

是也。

證法列下

I. 將所　之條件變化之，推出所設之恆等式。

例. 設$a+b+c=0$

則$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$求證。

解　將$a+b+c=0$之兩邊各平方之而轉其項。

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca).$$

又各平方之。

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)$$

$$=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}.$$

因$a+b+c=0$

故右邊爲　$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

故　$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$

〔問6〕　設$a+b+c=0$,

則$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$,

求證。

〔問7〕　設$x=a-b, y=b-c, z=c-a$,

則$x^4+y^4+z^4$

$$=2(a-b)^2(b-c)^2+2(b-c)^2(c-a)^2+2(c-a)^2(a-b)^2,$$

求證。

II. 就所設之條件，證明所設之等式。

例　設$2s=a+b+c$，

則　$$s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2,$$

求證。

解　所設等式之左邊，解其括孤。

則爲　$$4s^2-2(a+b+c)s+a^2+b^2+c^2$$

因　$$a+b+c=2s$$

故　$$4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2\text{即}a^2+b^2+c^2$$

〔問8〕　設$2s=a+b+c$，

則　$\{(s-a)+(s-b)\}^3=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c$，

求證。

〔問9〕　設$a^2+b^2=c^2+a^2=1$，

則　$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$，求證。

〔問10〕　設$x+y+z=0$，則$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$，試依此證明下列之等式。

$$p^3(q-r)^3+q^3(r-p)^3+r^3(p-q)^3=3pqr(q-r)(r-p)(p-q).$$

*III. 所設之式，若爲眞確，必適與條件相合。

與前節III同。

例 1.　若a,b,c不相等，且$a+b+c=0$，

則　$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2,$$

求證。

解　先$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2$，

則　$a^2+ab=bc+c^2$因之$a^2-c^2=bc-ab$，

即$(a+c)(a-c)=b(c-a)$此與條件相合，故兩邊不爲零，

以$a-c$除之。

$$a+c=-b\text{即}a+b+c=0$$

此又與條件相合。

故　$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2$$

依同理。　$$b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$$

故　$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$$

例 2.　若$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$

則$a=b=c$求證。

但 a,b,c 爲實數。

解　將所設之條件，解其括弧。

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca.$$

移項，$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

即　$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

因a,b,c爲實數，故$a-b,b-c,c-a$之正負可不論，其左邊各項終皆爲正數也。

乃其和爲零，故各項皆不得不爲零。

即$a-b=b-c=c-a=0$故$a=b=c$.

*〔問11〕　若$2(a^2+b^2)=(a+b)^2$,則$a=b$,求證。

〔問12〕　若$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$

則$a=b=c$,求證。

練　習　問　題　Ⅵ.

1.　下列諸恆等式,試各證明之:

（一）$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2$

$$+(b+c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2).$$

（二）$(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=4a^2$.

（三）$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2+2(b+c)(c+a)$

$$+2(c+a)(a+b)+2(a+b)(b+c)=4(a+b+c)^2.$$

（四）$(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2$.

2.　下列三恆等式,試各證明之。

（一）$a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

（二）$(y+z)^3+(z+x)^3+(x+y)^3-3(y+z)(z+x)(x+y)$

$$=2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

（三）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3+(a+c)^3+(b+d)^3$

$$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

3. 試就下列二恆等式證明之:

（一）$(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$

$$=(ax-by)^2+(ax-by)(ay+bx+by)+(ay+bx+ay)^2.$$

（二）$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$

$$=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx-cw+dz)^2$$

$$+(az-cx+bw-dy)^2+(aw-dx-bz+cy)^2.$$

4. 試就下列各恆等式證明之:

（一）$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2.$$

（二）$(a+b)^3-(a-b)^2(a+b)=4ab(a+b).$

（三）$x^4-y^4-(x-y)^3(x+y)=2xy(x^2-y^2).$

（四）$(m-n)(m+n)^3-m^4+n^4=2mn(m^2-n^2).$

5. 若$a+b+c=0$,

則　$abc+b(a+b)^2+c(a+c)^2=0$, 求證。

6. 若$a+b+c+d=0$,

則　$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$, 求證。

*7. $2\{(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4\}$

$$=\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^2.$$ 求證。

*8. $\dfrac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}$

$$+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1.$$ 求證。

*9. 試依未定係數法於下列第一式以第二式除之適盡，求未定係數A及B之值。

（一） $x^3+Ax^2-2x+B,\qquad x^2+3b+4.$

（二） $x^3+8x^2+5x-A,\qquad x^2-3x-B.$

*10. $A(x-3)(x-5)+B(x-5)(x-7)+C(x-7)(x-3)\equiv 8x-120.$

求A,B,C之值。

*11. $x^2+15\equiv A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1).$

求A,B,C之值。

*12. $\{(y-1)^3+3(y-1)^2+2(y-1)+1\}(3y+2)$

$$\equiv A(y-1)^4+B(y-1)^3+C(y-1)^2+D(y-1)+E$$

求A,B,C,D,E之值。

*13. $x^2-2xy-2xz-3y^2+10yz-3z^2$

$$=(x+Ay+Bz),(x+Cy+Dz)$$

求A,B,C,D之值。

*14. 下列各恆等式，其未定係數L, M各若何?

（一） $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)$

$$+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)\equiv Labc(a+b+c).$$

〔第六章問5〕.

（二）$x(y+z-2)+y(z+x-2)+z(x+y-2)$

$$-2(xyz-1)\equiv L(x-1)(y-1)(z-1).$$

（三）$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)^2-a(a+b)^2(a+c)^2$

$$-b(b+c)^2(b+a)^2-c(c+a)^2(c+b)^2$$

$$\equiv abc\{L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)\}.$$

〔第六章第55節例2〕

雜　題　1.

習題中有＊記號者初學者可略之。

1. 設$x=1234,\ y=123$其$x^2-2xy+y^2$之值若何?

2. 下列各式試分解其因數。

（一）$64x^4y^6+160x^4y^3z+100x^4z^2$.

（二）$x^2+2(a-b)x+a^2-2ab+b^2$.

（三）$x^2-2xy-2xz+y^2+2yz+z$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-2$ 以 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$除之。

＊4. 求$a^2-1+2a\sqrt{-1}$之平方根.

＊5. 設a與b不相等而爲正數,然能成立下列之不等式。試證之。

$$\frac{1}{2}\left(a+b\right)>\sqrt{ab}.$$

＊6. 試將$(p^2+q^2)(q^2+s^2)$變爲二式平方之和。

*7. $\{\sqrt{10+\sqrt{51}}+\sqrt{10-\sqrt{51}}\}^2$試求其等數。

*8. $\sqrt{99+35\sqrt{8}}-\sqrt{99-35\sqrt{8}}$試求其值。

*9. 下列二式，使其值為極小，問x之值若何?

$$x^2-6x+14. \qquad x^2+3x+4.$$

10. 設二數之和為8，其平方之和之最小值若何?

11. 設$a-b=2$，$ab=-2$，問a^2+b^2之值若何?

*12. 求$x^{\frac{5}{6}}-2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$之平方。

13. 以$x^2+y^2+z^2$.

除$(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2+(ax+by+cz)^2$，

求商。

14. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=4a^2$，求證。

*15. 下列二式求積。

（一）$(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}+2)(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}-2)$

（二）$(x^{\frac{5}{6}}-3x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}})$

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}+2$以$\frac{a^2}{x^2}-2+\frac{x^2}{a^2}$乘之，其積以$\frac{a^2}{x^2}-\frac{x^2}{a^2}$除之，

求商。

*17. $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}$以$a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}$除之。

18 下列各式分解其因數。

（一）$a^2+b^2-c^2-d^2+2(ab-cd)$.

（二）$a^4-11a^2b^2+b^4$. （三）$x^4-27x^2y^2+y^4$.

（四） $x^4+2x^2y^2+4y^4$.

（五） $(a+b)^2x^4-2(a^2+b^2)x^2y^2+(a-b)^2y^4$.

*19. 下列各分數式試簡之:

（一） $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\dfrac{a-b}{a^2+ab}$.

（二） $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}\times\left(1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)$.

（三） $\dfrac{\left(a^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^m\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^{n-m}}{\left(b^2-\dfrac{1}{a^2}\right)^n\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{m-n}}$.

（四） $\dfrac{\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2+\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2-2}{\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2}$.

20. 下列各式,分解其因數:

（一） $(x^2-3x-24)(x^2-24)-10x^2$.

（二） $(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)+b^4$.

（三） $(a^2+14a+24)(a^2+11a+24)-4a^2$.

（四） $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$.

（五） $x(2x+1)(2x-3)(x-2)-63$.

（六） $(x^2-x-6)(x^2+3x-4)-504$.

（七） $(a+2)(a+6)(a-3)(a-9)+21a^2$.

（八）$(2x+1)(x-3)(2x-1)(x+3)+40x^2$.

21. 連續四整數之積加,必為完全平方,求證。

22. 下列各方程式,試解之:

（一）$x^4-10x^2+9=0$.

（二）$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120=0$.

（三）$3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$.

（四）$x^{\frac{3}{4}}+8x^{-\frac{3}{4}}-9=0$.　　（五）$4^x+8=9\times2^x$.

23. 下列各式,試分解其因數:

（一）$x^2-\frac{5}{2}x+1$.　　（二）$204-29x^2+x^4$.

（三）$7x^2+39x-18$.

24. 某文字之二次三項式,恆得分解為二因數,問係數間關係若何,且其因數若何?

*25. 設$(a^2-2)x^2-(3a-2)x+2=0$為等根,其a之值若何?

*26. 設$x^2+2(a-1)x+5a-9=0$之根為實數,其a之值限界若何?

27. $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$.

$=(y+z)^3+3(y+z)^2x+3(y+z)x^2+x^3$

$=(z+x)^3+3(z+x)^2y+3(z+x)y^2+y^3$,求證。

28. 設$x=a+1$其x^3-3x^2+3x-1之值若何?

29. $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+2}{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}-3\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)}\div\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-2}$,試簡之。

30. $1-(a-b)^6$ 分解其因數。

31. $a^7-a^4+a^3-1$以a^2+a+1除之適盡，求證。

*32. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$，試簡之。

*33. 下列之分數式，試簡之：

(一) $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$. (二) $\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}$.

*34. $x^{\frac{3n}{2}}-x^{\frac{3n}{2}}$以$x^{\frac{n}{2}}-x^{-\frac{n}{2}}$除之。

*35. 設$a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1$其$\dfrac{a^3-b^3}{a+b}\times\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$之值若何?

*36. 下列二式試簡之：

(一) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$.

(二) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

*37. 設求得$ax^2+bx+c=0$之二根爲a及B,則

(一) a^3+B^3及a^3-B^3之值試以a,b,c表之。

(二) $\dfrac{a^2}{B}+\dfrac{B^2}{a}=\dfrac{3abc-b^3}{a^2c}$,求證。

*38. $x^3+1=0, x^3-1=0$及$x^4-1=0$，試解之。

*39. 設ω_1及ω_2爲1之立方根(即$x^3-1=0$之三根)中之二虛根,試證明下列二式:

$$\omega_1\omega_2=1,\ \omega_1^3=1=\omega_2^3,\ \omega_1^2=\omega_2,\ \omega_2^2=\omega_1.$$

及 $x^2\mp xy+y^2=(x\pm\omega_1 y)(x\pm\omega_2 y)$.

40. 設$x=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$試計算下式之值。

$$2x^4-11x^3-7x^2-9x+14.$$

41. 設$x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^3+y^3+z^3=c^3$試就xyz之值,以a,b,c表之。

*42. 試由$x+y+z=m$, $x^2+y^2+z^2=n^2$, $x^3+y^3+z^3-3xyz=p^3$消去x,y,z.

*43. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$以$a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$乘之。

*44. 若$\dfrac{l}{x^2-yz}=\dfrac{m}{y^2-zx}=\dfrac{n}{z^2-xy}$,

則$lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$,求證。

45. 下列各式,分解其因數:

(一) $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$.

(二) $(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3$.

(三) $(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$.

(四) $x(x^2-1)-y(y^2-1)+xy(x-y)$.

(五) $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

(六) $x^2-5xy-x+6y^2+y-2$.

*46.　$x^{\frac{5}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$以$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$除之。

*47.　下列各方程式，試解之：

（一）$\begin{cases} x^2-xy+y^2=13 \\ x^3+y^3=91 \end{cases}$　　（二）$\begin{cases} x^3-y^3=26 \\ x^2y-xy^2=6 \end{cases}$

*48.　若$x-\dfrac{1}{x}=1$，其$x^2-\dfrac{1}{x^2}$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$及$x^3-\dfrac{1}{x^3}$之值若何？

*49.　若$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=3$其$a^3+\dfrac{1}{a^3}$之值若何？

*50.　下列各分數式，試簡之。

（一）$\dfrac{2x^3+3x^2+2x+3}{4x^3+6x^2-2x-3}$.

（二）$\dfrac{(a+b)^3+(b+c)^3-(a+2b+c)^3}{(a+b)(b+c)(a+2b+c)}$.

（三）$\dfrac{1}{x^3-3x^2+3x-1}-\dfrac{1}{x^3-x^2-x+1}-\dfrac{1}{x^4-2x^3+2x-1}$

$-\dfrac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

（四）$\dfrac{a+b}{ab+c^2-ac-bc}+\dfrac{b+c}{bc+a^2-ab-ac}$

$+\dfrac{c+a}{ac+b^2-ab-bc}$

51.　若x為實數，則不關於其值之如何必可得下列諸項，求證。

（一）$1+2x^4$決不小於x^2+2x^3.

（二）$(x+2)(x-2)(x-3)(x-7)+100$恆為正數。

（三）$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$之值，必在3與$\frac{1}{3}$之間。

*52. $-3x^2+26x-35>0$，試解之。

*53. 由因數分解法，求下列二式之最大公約數。

$$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280,\ 3x^2+4x-7.$$

54. 下列各組之式，求最大公約數：

（一）$x^3-2x^2+3x-6,\ x^4-x^3-x^2-2x.$

（二）$x^4+5x^3+9x^2+11x+6,\ x^4+x^3-7x^2-9x-18.$

55. 求下列二式之最大公約數及最小公倍數

$$x^4+3x^2+6x+35,\ x^3-4x^2+10x-7.$$

56. 若二式$2x^3-x^2+x-6$與$6x^3-9x^2+10x-15$同爲零，其x之值若何？

57. $\frac{6a^4-5a^3-20a^2+1}{4a^4-17a^2-10a+3}$求約分。

58. 凡求最大公約數對於分數式之運算，將如何應用？且若不用最大公約數，其不利益爲奚若？

*59. 若x爲迫近於1，其$\frac{x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$之值若何？

60. $3x^3-5ax-2$及ax^5-x^4-4以$x-2$除之，所得剩餘若相等，其a之值若何？

61. 若$x^n+py^n+qz^n$以$x^2-(ay+bz)x+abyz$除之適盡，則$\frac{p}{a^n}+\frac{q}{b^n}+1=0$，求證。

62. 若ax^2+bx+c以$2ax+b$除之適盡，則此二次式必爲

某一次式之平方，求證。

63. $ax^2+bx+c=0$ 與 $lx^2+mx+n=0$ 如有一公共根，則

$(an-cl)^2=(bl-am)(cm-bn)$ 求證。

64. x^3+px+r 與 $3x^2+p$ 如有一次之通因數。

則 $\frac{p^3}{27}+\frac{r^2}{4}=0$，求證。

65. ax^2-bx+c, dx^3-bx+c 如有一次之公約數，

則 $a^3-abd+cd^2=0$，求證。

*66. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ 以 $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$ 除之。

*67. 下式試簡之。

$$\{(x-y)^2+4xy\}^{\frac{1}{2}}\{(x+y)^2-4xy\}^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{x^4-y^4}{x-y}+2xy(x+y)\right\}^{\frac{2}{3}}$$

*68. 若 $x+\frac{1}{x}=z$ 則 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 及 $x^5+\frac{1}{x^5}$ 以 z 之項表之，其式各若何?

69. 下列各恆等式，試證明之

（一）$(a+2)^3-4(a+1)^3+6a^3-4(a-1)^3+(a-2)^3=0$.

（二）$a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

70. 若 $x=a^2-bc, y=b^2-ca, z=c^2-ab$,

則 $ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c)$，求證。

*71. 若 $a+b+c=2s$，則 $\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc-(b^2+c^2-a^2)}=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$，

求證。

72. 若$a+b+c+d=2s$

則$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d)^2$

$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

求證。

*73. 若$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$，則如下列之式，試證明之。

$(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\cdots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

*74. 若$x=b+c$, $y=c+a$; $z=a+b$,

則$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}=2$，求證。

*75. 若$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{c+a}$,

則$a^2-2b^2+c^2=0$或$a+b+c=0$，求證。

*76. 若$\{a(x-a)+b(y-b)\}^2=(a^2+b^2-c^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

及$x^2+y^2=c^2$，則有$ax+by-c^2=0$之關係，試證明之。

*77. 若$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$

則$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，求證。

*78. 若$(a+b+c)x=(-a+b+c)y=(a-b+c)z=(a+b-c)w$

則$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$,求證。

*79. 若$(pa+qb+rc-sd)(pa+qb-rc+sd)$

$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$

則$bc:ad=ps:qr$求證。

*80. 若$\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$爲等差級數,則a,b,c必爲等比級數,

求證。

*81. 若$a^2+b^2=6ab$,

則$\log\{\frac{1}{2}(a-b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$,求證。

*82. $x^3+px+q=0$方程式之三根爲a,B,r試就$a+B+r$及

$a^3+B^3+r^3$之值以p及q表之。

但p及q爲零以外之有理數。

*83. 若$x^3+px^2+qx+r=0$之一根爲1,他二根相等,問p,q,r

之間關係若何?

84. 若 $x^6-3x^5+ax^4+bx^3+cx^2-46x+d$ 以 $x^4-8x+10$

除之適盡,其a,b,c,d之值若何?

85. x^4+1以x^2+px+q除之適盡,其p及q之值若何?

*86. 試依未定係數法,求$4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$之平方

根。

*87. 若$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$,

其A,B,C,之值若何?

*88. 試於$\frac{1}{1-x}=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

定$A,B,C\cdots\cdots\cdots\cdots$之值。

*89. $(x+y)^7-x^7-y^7$以x^2+xy+y^2除之。

*90. 下列各式，分解其因數。

（一）$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

（二）$\sum x(y+z)^2-4xyz$.

（三）$a^3+b^3+c^3+5abc-\sum a(a-b)(a-c)$.

（四）$\sum a^4(b-c)$.

（五）$\sum a(b-c)(1+ab)(1+ac)$.

*91. 下式求證。

$$\sum a^2(b+c-a)^2+abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$+(\sum a^2-\sum bc)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$=2abc(bc+ca+ab).$$

*92. 下列各分數式，試簡之：

（一）$\sum\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$

（二）$\frac{\sum a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}{\sum a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$

（三）$\sum\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}$.

（四）$\sum\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}$

雜　題　2.

1. 求$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$之平方根

*2. 設$x=2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$

其 x^3-6x-6 之值若何?

*3. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2=\sqrt{59+24\sqrt{6}}$,

求證。

〔以上平方式(第一章 3 節)之應用〕

*4. 下列列各方程式,試解之?

(一) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=8.$

(二) $(x^2+ax+b)^{\frac{1}{2}}-(x^2-ax+b^2)^{\frac{1}{2}}=2a.$

〔以上亦爲平方公式之應用,此種問題很多,學者可自擇其一二題多練習之可也。〕

*5. 若 x 爲正實數,則不關於其值之大小,其 $x^3+10x-6x^2$ 固恆爲正,求證。

*6. 若 x 爲 1, 2, 3, 則 ax^2+bx+c 之數値爲 4, 7, 12. 問其極小之數値若何?

〔以上平方配成(第一章 4 節)之應用〕

*7. 任意四連續整數之積加 1,必適於某整數之平方相等求證。

〔參照第一章 8 節例 7〕

8. 若$(a+bx)^2+(c+dx)^2$為 x 之一次完全平方,問 a, b, c, d, 之間關係若何?

〔以上第一章 5 節之應用〕

9. $(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)$試計算之

10. $\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left\{1+\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right\}$ 試簡之。

11. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$ 以 $\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 除之。

12. 試分解下式之因數,且依 $a+b+c+d=2q$ 簡其結果:

$$4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2.$$

13. 下列各式分解其因數:

(一) $x^4+x^2y^2+y^4$

(二) $x^2-y^2-3z^2+2xz+4yz$

(三) $x^4-23x^2y^2+y^4$

〔以上第一章 6 節及 7 節之應用〕

14. 若 a 及 b 為正整數,則 a^3b-ab^3 必可以 3 除盡求證。

15. 下列各式,分解其因數:

(一) $15x^2+54x+27$.

(二) ax^2+bx+c (x 之一次因數)

（三） $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15.$

（四） $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16.$

（五） $(2x^2-x-21)(2x^2-x-15)-91.$

（六） $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$（x 之一次因數）

〔以上二次三項式因數分解之應用〕

16. 下列各方程式,試解之：

（一） $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24.$

（二） $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6.$

（三） $2\times10^{3}x-10^{-3}x+1=1.$ 但 $log^{2}=0.3010.$

17. 設方程式 $x^2-3(1+m)x+5-8m=0$ 之一根爲他根之 5 倍,問 m 之值若何?

〔此種問題爲二次三項式因數分解之應用,此類題甚多,然其他書中方程式篇備載之,茲惟示其一也。〕

18. 下列各組之不等式若同時成立,其 x 之範圍若何?

（一） $x^2-6x+8>0,\ x^2-9x+18<0$

（二） $x^2+2x-15<0,\ x^2+2x-8>0$

19. 方程式 $x^2-2(m-1)x+7-m=0$之根若爲實數，其 m 之制限若何?

20. 方程式$x^2+2(p+1)x+6p+5=0$之根若爲虛根，其 p 值之限界若何?

21. 聯立方程式$x^2+y^2=2y, y=m(x+\sqrt{3})$若為實根,其$m$值之限界若何?

〔以上亦為二次三項式因數分解之應用〕

22. 下列各式,試簡之。

(一) $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3+a^3+b^3+c^3$.

(二) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

(三) $\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)(a+2b+c)}+\dfrac{(b+c)^2}{(a+b)(a+2b+c)}-\dfrac{(a+2b+c)^2}{(a+b)(b+c)}$

*23. 若$x=1+2i$其x^3+x^2-x+15之值若何?

*24. $a^3+3a\sqrt[3]{3}+2$以$a+\sqrt[3]{3}-1$除之。

*25. 下列各方程式,試解之:

(一) $(x^3+11x^2+40x+49)^{\frac{1}{3}}-x=4$.

(二) $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$.

〔以上立方公式之應用〕

26. x^6+y^6試分解其因數。

27. 下列各式,試簡之:

(一) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3$

(二) $\dfrac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)}$

*28. 以 $x^{\frac{1}{4}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}+a$ 除 $x^{\frac{3}{4}}-2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{8}}+a^3$，求商。

〔以上立方和，差公式之應用〕

〔分數式計算，本書所載之事項，應用處雖甚多，然其他書分數篇備載之，茲惟示其一二。〕

29. 設 $a+b+c=0$，則 $a^3+b^3+c^3=3abc$，求證。

30. $(y+z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$ 試簡之。

31. 三數之和 6. 立方之和 9. 積 2. 問此三數平方之和若何?

〔以上第一章 15 節之應用〕

32. 下列各式，分解其因數。

（一） x^3+x^2-4x-4

（二） $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25$.

（三） $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

33. 下式試簡之。

$$\frac{a^6-2a^4-a^2+2}{a^8-a^6+a^2-1}$$

34. $3x^3-5x^2+3=5x$，試解之。

〔以上 16 節至 18節之應用〕

35. 求下列各組之式之最大公約數。

（一） $3x^4+2x^3+6x^2-x+2$, $3x^4-4x^3+5x^2-2x+1$.

（二） $2x^3-ax^2-a^3$, $3x^4-5ax^3+a^2x^2+a^4$,

36. 二方程式 $x^2-7x+k=0$, $x^2-9x+2k=0$ 係有一公共根,試解之。

37. 若 $2x^2-7x+5$ 爲零,而 $3x^2-7x+4$ 不爲零,其 x 之值若何?

38. 若 $6x^3-7x^2-16x+12$ 爲零。

而 $3x^3-5x^2-4x+4$ 不爲零,其 x 之值若何?

〔以上最大公約數之應用〕。

39. 若三項式 $ax^2+2bx+c$ 以二項式 $ax+b$ 除之適盡,其前者必爲完全平方式,求證。

40. $x^3+10x^2+29x+20$,試分解其因數。

41. 下列各方程式,試解之:

(一) $x^3-2x^2+3=0$.

(二) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.

〔以上剩餘定理之應用〕.

*42. $\log(\sqrt{10}+3)-\log(\sqrt{10}-3)=2\log(\sqrt{10}-3)$,求證。

*43. 若 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{4}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$,

則 $(x+y+z)^3=27xyz$,求證.

*44. 若 $a+b+c=0$,

則 $(abc+bca+caa+aab=(a+b)(a+c)(a+a)$,

求證。

*45. 若 $a^p=s+\sqrt{1+s^2}$,

則 $a^{-p}=-s+\sqrt{1+s^2}$, 求證。

46. 若 $a^b=b^a$ 則 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$, 求證。

*47. 若 $2p=a+b+c$,

則 $(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2=a^2+b^2+c^2$,

求證。

〔以上附條件恆等式證明問題〕

*48. 二次方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ 若為等根,

則 $2b=a+c$, 求證。

*49. 若方程式 $px^2+2qx+r=0$ 之二根為 a, B, 而

$ax^2+2bx+c=0$ 之二根為 $a+k, B+k$, 則 $\frac{q^2-pr}{p^2}=\frac{b^2-ca}{a^2}$

求證。

〔以上二題所設之件, 移就附條件恆等式證明問題而擴

張之者也。〕

*50. 若 $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$, 且 $a\neq b\neq c$,

則 $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2=\frac{abc}{a+b}-c^2$, 求證

51. 聯立方程式 $ax+by=1, cx^2+dy^2=1$, 若為等根,

則 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1$, 求證

*52. 若 a, a, c, d 為互異之正實數, 且 $a^2+b^2=1, c^2+d^2$

$=1$, 則 $a+bd<1$, 求證。

*53. 若 $x=a\cos e, y=b\sin e$,

則 $y=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, 求證

〔三角恆等式證明問題，由本書所述之方法擴張之而可為其解，惟祇示此一題而已。〕

54. 若 $\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1$,

則 $x=y+z, y=z+x$ 又 $z=x+y$, 求證。

55. 若 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+b)=1$, 則 a, b, c 之中任取

* 二者之和必為 0, 求證。

56. 若 $a:b=c:d$, 則如下列二式試證之：

(一) $a+d=b+c+\frac{(a-b)(a-c)}{a}$

* (二) $\frac{a^{2m}+b^{2m}+c^{2m}+d^{2m}}{a^{-2m}+b^{-2m}+c^{-2m}+d^{-2m}}=(abcd)^m$

57. 若 $a:b=b:c=c:d$,

則 $(b+c)(b+d)=(a+c)(c+a)$, 求證。

58. 若 $x:y:z=a:b:c$:, 則如下列二式試證之：

(一) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

(二) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$,

59. 若 a, b, c, d 為正數, 且 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{2a^2-3b^2}}{\sqrt{2c^2-3d^2}}$.

則 $a:b=c:d$(求證。

60. 若 $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b$

$-c-d)$ 則 $a:b=c:d$, 求證

*61. 若 $al+bm+cn=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}$.

則 $\dfrac{a}{l}=\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}$, 求證

但 a, b, c, l, m, n 爲實數。

*62. 若 $a(y-z)=b(z-x)=c(x-y)$,

則 $\dfrac{y-z}{a(b+c)}=\dfrac{z-x}{b(c+a)}=\dfrac{x-y}{c(a+b)}$, 求證。

*63. 若 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$.

則 $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{y-z}{b-c}=\dfrac{z-x}{c-a}$, 求證。

*64. 若 $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)$,

則 $\dfrac{y+z-x}{a}=\dfrac{z+x-y}{b}=\dfrac{x+y-z}{c}$, 求證。

*65. 若 $b+c+d:c+d+a=d+a+b:a+b+c$,

則 $\dfrac{a^3-d^3}{a-d}=\dfrac{b^3-c^3}{b-c}$,求證。

〔以上雖爲比例, 然亦附條件恆等式證明問題之所擴張者, 今惟示其一端而已〕

66. 若 a, x, y, b 爲等差級數, c^2, x, y, d^2 爲等比級數,

則 $a+b=cd(c+d)$, 求證。

67. 若 a, b, c 及 α, β, γ 各爲等差級數, 又 $\dfrac{a}{\alpha}, \dfrac{b}{\beta}, \dfrac{c}{\gamma}$ 爲等比級數,

則 $\dfrac{a}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{a}=\dfrac{c}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{c}$, 求證。

68. 若 a, b, c 爲等差級數,

則　方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ 之二根必相等，求證。

*69. 下列二次方程式之根，若爲實根，則 a, b, c 必爲等比級數，而其實根即級數之公比，求證。

*70. 若 a, b, c 爲等差級數，x 爲 a 與 b 之等比中項，y 爲 b 與 c 之等比中項，則 $x^2\ b^2\ y^2$ 必爲等級數，求證。

*71. 若 $\log_a x, \log_a y\ \log_a z$ 爲等差級數，則 x, y, z 必爲等比級數，求證。

72. 方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 若爲等根，則 a, b, c 必爲等差級數，求證。

*73. 等比級數 n 項之和及其逆數之和爲 A，B，又 n 項之連乘積爲 C，

則 $A^n=B^nC^n$，求證.

*74. $S=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$.

$$S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$$

其S若爲等比級數之和，則S亦必爲等比級數之和，求證

且 $\dfrac{S}{S}=a_1a_n$，試併證之。

〔以上爲級數問題，亦附條件恆等式證明問題之所擴張者，今惟示其一端而已。〕

75. $(a+b+c)^2$ 與 $\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\}$ 何者爲

大?

76. 若$(x^2+1)(y^2+4)-8xy=0$，其 x 及 y 之實數值若何?

77. 若$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$ 爲 x 之完全平方式,則 $a=b=c$, 求證。

78. 若 a, b, c 爲實數,則 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+c}=0$ 其根必爲實數,求證。

79. 若 a, b, c 皆爲正實數而不相等,則下列方程式之根必爲正實數,求證。

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

〔以上第五章 45 節 III 例 2 之應用〕.

80. 下式爲完全平方式,其 a 之數值若何?

$$4x^4-12x^3+25x^2+ax+16.$$

81. 下式爲完全平方式,其 a, b 之值若何?

(一)　$4x^4-ax^3+bx^2-40x+16.$

(二)　$x^4+6x^3+7x^2+ax+b.$

82. a, b, c 爲如何之值?

其 $x^6-8x^5+az^4+bx^3+cx^2-44x+4$ 乃爲完全平方式。

83. x^3+4x^2+px-q 以 $(x+1)(x+2)$ 除之適盡。

其 $p, q,$ 之值若何?

84. $x^4+4^3x+mx^2+nx+p$ 以 $(x^2+1)(x+2^2)$ 除之適盡。

其 m, n, p 之價若何?

85. $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ 及 x^3+3x^2+2x+1 以 x^2+2x+1 除之所得剩餘相等,其 p, q 之值若何?

〔以上第五章 46 節系 3 例及 47 節 1 例 2 之應用〕.

86. a, b, c 爲實數,若 $x^3-3b^2x+2c^3$ 以 $x-a$, $x-b$ 除之適盡。

則 $a=b=c$ 或 $a=-2b=-2c$, 求證。

〔第四章 37 節例 3〕

87. 若 $ax^3+3bx^2+3cx+d$ 以 ax^2+bx+c 除之適盡,其第一式必爲完全立方,第二式必爲完全平方,求證。

88. $x^2=A+B(x-1)+C(x-1)(x-2)+D(x-1)(x-2)(x-3)$. 其 A, B, C, D 係數之數值若何?

〔第五章 47 節 11 例 2〕

89. $y^2+5xy+mx^2+x+y-2$ 依 x, y 一次之二因數分解之。

其 m 之值若何?

〔第五章 47 節 I 例 2〕

90. 下列各分數式.試簡之:

(一) $\dfrac{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc}{(a+b)(a+c)}$.

（二） $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

（三） $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

（四） $\dfrac{a^4}{(a+b)(a-b)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^4}{(b+c)(b+c)(b^2-a^2)}$

$$+\frac{c^4}{(c+a)(c-a)(c^2-b^2)}.$$

（五） $\dfrac{(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2}{(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3}$.

〔以上對稱式,交代式,因數分解法之應用〕.

雜題 I（答）

解答題中至要之原理，其運算部分每略而不記，又較易者則不解答，學者注意及之。

1. $(1234-123)^2=1234321$.

2. （一）$4x^2(4y^3+5z)^2$. （二）$(x+a-b)^2$. （三）$(x-$ $-z)^2$.

3. $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$.　　　　4. $a+\sqrt{-1}$ 即 $a+i$.

5. $\dfrac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ >0.

別解，　$(a-b)^2>0$ 故 $(a+b)^2>4ab$ ∴ $a+b>2\sqrt{ab}$.

6. $(p^2+q^2)(q^2+s^2)=p^2q^2+p^2s^2+q^4+q^2s^2$（以 $2pq^2s$ 加減）

$=(pq+qs)^2+(q^2-ps)^2$ 或 $=(pq-qs)^2+(q^2+ps)^2$.

7. $20+2\sqrt{100-51}=34$,

8. 其平方為 196.　　答 14.

別解.　$\sqrt{99+35\sqrt{8}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 兩邊各自乘

化得　$\sqrt{99+35\sqrt{8}}=5\sqrt{2}+7$.

依同理 $\sqrt{99-35\sqrt{8}}=5\sqrt{2}-7$. 故答 14.

9. $x^2-6x+14=(x-3)^2+5$ 及 $x^2+3x+4=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2$ $+\dfrac{7}{4}$,

故所求 x 之值，因 $x-3$ 及 $x+\frac{3}{2}$ 爲零，故爲 3 及 $-\frac{3}{2}$.

10. 一數爲 x，他數爲 $8-x$，故所求之值爲 $x^2+(8-x)^2$ 之最小值32.

11. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2-4=0$.

12. $x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{2}{3}}$ (參照第一章問 6)

13. 化被除數爲 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$，故其商爲 $a^2+b^2+c^2$.

14. 左邊 $=\{(a+b)+(a-b)\}^2=4a^2$.

15. (一) $a^{-2}+2x^{-\frac{1}{2}}-4+x^{\frac{1}{4}}$.　(二) $x^{\frac{5}{3}}-9x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{2}{3}}$.

16. 被除式爲 $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^2$，故商爲 $\frac{a^2}{x^2}-\frac{x^2}{a^2}$.

17. 化被除式爲 $(a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}})$，故商爲 $a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}$

18. (一) $(a+b)^2-(c+d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

(二) $(a^2-b^2)^2-9a^2b^2=(a^2+3ab-b^2)(a^2-3ab-b^2)$.

(三) $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$.

(四) $(x^2-2y^2)^2-2x^2y^2$

$$=(x^2+\sqrt{2}\,xy+2y^2)(x^2-\sqrt{2}\,xy+2y^2).$$

(五) $\{(a+b)x^2+(a-b)y^2\}^2-4a^2x^2y^2$

$$=\{(a+b)x^2+2xy+(a-b)y^2\}$$
$$\{(a+b)x^2-2xy+(a-b)y^2\}.$$

19.　（一）$\dfrac{a^2+b^2}{a}$.

（二）$\dfrac{y+z+x}{x(y+z)}\times\dfrac{x(y+z)}{y+z-x}\times\dfrac{(y+z+x)(y+z-x)}{2yz}$
$$=\frac{(x+y+z)^2}{2yz}.$$

（三）$\dfrac{(ab+1)^m(ab-1)^m(ab+1)^{n-m}}{b^{2m}b^{n-m}}$
$$\times\frac{a^{2n}a^{m-n}}{(ab+1)^n(ab-1)^n(ab+1)^{m-n}}=\frac{(ab+1)^{n-m}a^{m+n}}{(ab-1)^{n-m}b^{m+n}}$$
$$=\left(\frac{ab-1}{ab+1}\right)^{m-n}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}.$$

（四）$\dfrac{ax}{x^2+a^2}$.

20.　（一）$x^2-24=\times$ 參照第一章8節例6.

答 $(x+6)(x+3)(x-4)(x-8)$.

（二）$(a^2+5ab+5b^2$.

（三）$(a^2+14a+24=\times$.

答 $(a+4)(a+6)(a^2+15a+24)$

（四）將所設之式化爲 $(x^2+x-12)(x^2+x-2)+24$

答 $(x+2)(x+3)(x^2+x-8)$.

（五）$(2x^2-3x)(2x^2-3x-2)-63$

$$=(2x+3)(x-3)(2x^2-3x+7).$$

（六）$(x+2)(x-3)(x+4)(x-1)-504$

$$=(x-5)(x+6)(x^2+x+16).$$

（七）$(a^2-7a-18)(a^2+3a-18)+21a^2$

$$=(a^2-18)(a^2-4a-18).$$

（八）$(2x^2+7x+3)(2x^2-7x+3)+40x^2$

$$=(2x^2+3x+3)(2x^2-3x+3).$$

或將所設之式,先化爲$(4x^2-1)(x^2-9)+40x^2=4x^4+3x^2+9$ 依此分解之可也。

21. 以 x 爲最小數。

則 $x(x+1)(x\times2)(x+3)+1=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1$

$$=(x^2+3x+1)^2.$$

22. （一）$\pm1,\ \pm3.$　　　　（二）左邊分解之。

則　　$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 6$ 及 $\dfrac{5\pm\sqrt{-39}}{2}.$

（三）依$\sqrt{3x^2-4x+5}$將所設之方程式化爲$X^2+2X-15=0.$

即 $(X-3)(X+5)=0$, 乃由 $X-3=0$,得$x=2$或$=\frac{2}{3}.$

（四）令 $x^{\frac{3}{4}}=X$, 則 $(X-1)(X-8)=0$　$\therefore\ x=16.$

（五）令 $2^x=X$, 則 $(X-1)(X-8)=0$　$\therefore\ x=0$ 或 3.

23. (一) $(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 　　(二) $(17-x^2)(12-x)$.

(三) $(7x-3)(x+6)$.

24. 見第一章 10 節.

25. 由 $(3a-2)^2-8(a^2-2)=0$ 得 $(a-10)(a-2)=0$

$\therefore$ $a=10$ 或 2.

26. 由 $(a-1)^2-(5a-9)\geqq 0$ 得 $(a-5)(a-2)\geqq 0$

$\therefore$ $a\geqq 5$ 或 $\geqq 2$.

27. 皆等於 $(x+y+z)^3$

28. $(x-1)^2=a^2$.

29. $$\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2}\times\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

30. $(1+a-b)(1-a+b)(1-a+b+a^2-2ab+b^2)$

$\times(1+a-b+a^2-2ab+b^2$

31. $a^7-a^4+a^3-1=a^4(a^3-1)+a^3-1$ 而 a^3-1 以 a^2+a

$+1$ 除之適盡故也。

32. $140\sqrt{2}$. 　　33. (一) $\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$. 　(二) $\frac{2x^2}{1+x^2+x}$

34. x^n+1+x^{-n}.

35. $$\frac{a^3-b^3}{a+b}\times\frac{a^3+b^3}{a-b}=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=\{(a+b)^2-2ab\}^2-(ab)^2=(8-2)^2-1=3$$

36. (一) $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}=(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3$

$$=52.$$

(二)題式$=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-1}$

$$=\frac{2\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)}{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)}=\frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$$

或將各項之分母,化爲有理數。

37. (一) $a^3+B^3=(a+B)\{(a+B)^2-3aB\}=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$

及 $a^3-B^3=\sqrt{(a+B)^2-4aB}\{(a+B)^2-aB\}$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}(b^2-ac)}{a^3}.$$

38. $-1,\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{4}$; $1,\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. 及$\pm1$. $\pm\sqrt{-1}$.

39. $(x\pm\omega_1y)(x\pm\omega_2y)=x^2\pm(\omega_1+\omega_2)xy+\omega_1\overline{\omega}_2y^2$

$=x^2\mp xy+y^2.$

40. 就 x^3 及 x^4 計算之,則 $x^3=x^2\times x$ 及 $x^4=x^3\times x=x$.

$$2x^4-11x^3-7x^2-9x+14=2\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}-11\times1$$

$$-7\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}-9\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+14=10.$$

41. 先於第一式之平方,減去第二式,$xy+yz+zx$

$=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$ 次依第一章 15 節公式,得答如次.

$$xyz=\frac{1}{6}(a^3-3ab^2+2c^3),$$

42. $p^3=m\left(n^2-\dfrac{m^2-n^2}{2}\right)$ 即 $m^3-3mn^2+2p^3=0$.

43.　令 $x=a^{\frac{1}{3}}, y=1, z=a^{-\frac{1}{3}}$. 答 $a-2+a^{-1}$

44.　令 $\dfrac{l}{x^2+yz}=\dfrac{m}{y^2-zx}=\dfrac{n}{z^2-xy}=r$,

則 $r=\dfrac{l+m+n}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$ 及 $r=\dfrac{lx+my+nz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

相除，得 $\dfrac{lx+my+nz}{(l+m+n)(x+y+z)}=1$.

45.　（一）$ab(a-b)$.　（二）$(2x-3)(1-x)$.

（三）$(a-b)^2(a+b)$.　（四）$x^3-y^3-x+y+xy(x-y)$

$=(x-y)\{(x+y)^2-1\}=(x-y)(x+y+1)(x+y-1)$.

（五）就首尾兩端之項，完成平方。

$\{1+y+x^2(1-y)\}^2-4x^2$

$=(1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y-2x)$

$=\{(1+x)^2+y(1-x^2)\}\{(1-x)^2+y(1-x^2)\}$

$=(1+x)(1+x+y-xy)(1-x)(1-x+y+xy)$.

（六）$x^2-(5y+1)x+6y^2+y-2$

$=x^2-(5y+1)x+(2y-1)(3y+2)$

$=(x-2y+1)(x-3y-2)$.　〔第一章8節〕

或依第一章 10 節之方法亦可。

46.　被除式爲 $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x+y)$ 故商爲 $x+y$.

47.　（一）兩式相除，$x+y=7$ 以與第一方程式組合可

也。

答 $x=3,\ y=4;\ x=4,\ y=3.$

（二）兩式相除$\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}=\dfrac{13}{3}$去分母。

$(3x-y)(x-3y)=0$ ∴ $y=3x$ 或 $x=3y$，各與第一式組合。

答 $3,1;\ 3w,w;\ 3w^2,w^2;\ -1,-3;\ -w,-3w;$

$-w^2,-3w^2$ 但 w 爲 1 之立方根虛數之一。

48. $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4}=\sqrt{5}.$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3.$

及 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3\right\}=4.$

49. $a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-3\right\}=\sqrt{3}\times 0=0.$

50. （一）$\dfrac{(x^2+1)(2x+3)}{(2x^2-1)(2x+3)}=\dfrac{x^2+1}{2x^2-1}.$

（二）分子分解之，則 $-3(a+2b+c)(a+b)(b+c)$

故答 $-3.$

（三）分母各分解之。

答 $\dfrac{2}{(x-1)^3(x+1)(x^2+1)}.$

（四）分母各分解之。 答 0.

51. （一）$1+2x^4-x^2-2x^2=1-2x^2+x^4+x^4-2^3+x^2$

$=(1-x^2)^2+(x^2-x)^2 \nless 0.$

（二）$(x^2-5x+6)(x^2+5x-14)+100$

$=(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)+16=(x^2-5x-4)^2.$

（三）令$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=m$去分母，

$(m-1)x^2+(m+1)x+(m-1)=0.$

因 x 爲實數，故 $(m+1)^2-4(m-1)^2 \geqq 0$

即 $(3m-1)(m-3) \leqq 0$ $\therefore$ $3 \geqq m \geqq \frac{1}{3}.$

52. 所設之不等式爲 $-(x-7)(3x-5)>0$，故 $(x-7)\left(x-\frac{5}{3}\right)<0$ 成此不等式之 x 之值，其限界爲 $7>x \vee \frac{5}{3}$.

53. $x-1.$

54. （一）$x-2.$ （二）$x^3+4x^2+5x+6.$

55. G. C. D. x^2-3x+7, L, C, M $(x-1)(x^4+3x^2+6x+35)$.

56. $\frac{3}{2}$

57. 分母子之 G. C. D 爲 $2a^2-5a+1$，故答$\frac{3a^2+5a+1}{2a^2+5a+3}$.

59. 用約分則爲$\frac{x}{x^2-1}$，故答無限大。

60. 由 $24-10a-2=32a-16-4$，得 $a=1$.

61. 除式爲 $(x-ay)(x-bz)$ 故 $a^ny^n+py^n+qz^n=0$,

即 $(a^n+p)y^n=-qz$.及 $b^nz^n+py^n+qz^n=0$,

即 $py^n=-(b^n+q)z^n$ 兩式相除，得題之關係。

62. 由 $a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\dfrac{-b}{2a}\right)+c=0$，得 $b^2-4ac=0$，

63. 見第四章 37 節例 5.

64. 通因數爲 $3(x^3+px+r)-x(3x^2+p)=2q\left(x+\dfrac{3r}{2p}\right)$

故由 $x+\dfrac{3r}{2p}$ 得 $3\left(-\dfrac{3r}{2p}\right)^2+p=0$，得題之關係

65. 兩式之差爲 $dx^3-ax^2=dx^2\left(x-\dfrac{a}{d}\right)$，故公約數爲

$x-a$. 則 $a=\dfrac{a}{d}$ 代入所設之式，得題之關係。

66. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$.

67. $(x+y)(x-y)^3(x+y)^2=(x+y)^3(x-y)^3$.

68. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=z(z^2-3)$.

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{x^4+\frac{1}{x^4}-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1\right\}$$

$$=z\{(z^2-2)^2-2-(z^2-2)+1\}=z(z^4-5z^2+5).$$

69. （二）$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 之二倍爲

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 於此注意可也

70. 依第一章 15 節之公式。

71. 分母子分解之，令 $a-b+c=2(s-b)$,

$a+b-c=2(s-c)$, $-a+b+c=2(s-a)$.

73. 左邊 $=ns^2-2s(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots$

$+a_n^2=ns^2-ns^2+a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots a_n^2.$

74.　化分子爲 $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

75.　去分母，$a(a+b)(c+a)+c(b+c)(c+a)=2b(b+c)(a+b)$.

故 $a(a+b)(c+a)-b(b+c)(a+b)$

$$+c(b+c)(c+a)-b(b+c)(a+b)=0$$

分解之．$(a^2+2b^2+c^2)(a+b+c)=0$.

76.　左邊 $=\{(ax+by)-(a^2+b^2)\}^2$

$$=(ax+by)^2-2(a^2+b^2)(ax+by)+(a^2+b^2)^2,$$

右邊 $=(a^2+b^2-c^2)\{x^2+y^2-2(ax+by)+(a^2+b^2)\}$

$$=(a^2+b^2-c^2)\{a^2+b^2+c^2-2(ax+by)\}$$

依 $ax+by$ 整題之。

得 $(ax+by-c^2)^2=0$.

77.　第一式之平方與第二式以 $\frac{xyz}{abc}$ 乘之者相減。

78.　今所設各式之值爲則 $\frac{1}{n}$

則由 $\frac{1}{x}=(a+b+c)n,\frac{1}{y}=(-a+b+c)n,\frac{1}{z}$

$=(a-b+c)n,\frac{1}{\omega}=(a+b-c)n$. 得題之等式。

79.　由本題至 83 皆附條件恆等式之例。

解所設等式之括弧，且簡之。

得 $bcqr=adps$

80. 由$\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$推出 $b^2=ac$ 可也。

81. 由所設之條件，$(a-b)^2=4ab$ ∴ $\frac{1}{2}(a-b)=\sqrt{ab}$.

取兩邊之對數可也。

82. 依第五章問 15. 答 $0,\ -3q$

83. 三根爲 $1, a, a$

由 $1+2a=-p,\ 2a+a^2=q,\ a^2=-r$，得 $p+q+r+1=0$.

84. 依第五章 47 節系 3 例之方法。

答 $a=2,\ b=-8,\ c=34,\ d=20$.

85. 依第五章 46 節系 3 之例。

$pq=(p^2-q)p\cdots\cdots\cdots(1)$ 及 $(p^2-q)q=1\cdots\cdots\cdots(2)$

然 $p\neq0$，故由 (1) $p^2-q=q$，而 (2) 爲 $q=\pm1$. 因之 $q=1$，

則 $p^2-1=1$. ∴ $p=\pm\sqrt{2}$. 若 $q=-1$，則 p 之值爲虛數。

故答 $p=\pm\sqrt{2}.\ q=1$.

86. $4x^4-12x^3+5x^2+6x+1\equiv(2x^2+Ax\pm1)^2$

答 $2x^2-3x-1$.

87. 去分母，$x^2+15\equiv A(x^2+2x+5)\quad(Bx+C)(x-1)$.

先 $x=1$ 則 $A=2$ 次依係數比較法，

得 $B=-1$ 及 $C=-5$.

88. 去分母,依係數比較法, 答 $A=B=C=\cdots=1$.

89. 被除式為次式之對稱式,而 x,及 $x+y$ 皆為其因數,故由 $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv xy(x+y)(x^2y+xy+y^2)\{M(x^2+y^2)+Nxy\}$ 得 $M=N=7$,因之所求之商為 $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

90. (一) $3(x+y)(y+z)(z+x)$ (二) $(x+y)(y+z)(z+x)$.

(三) $8abc$. (四) $-(b-c)(c-a)(a-b)(\sum a^2+\sum bc)$.

(五) 此式為 a, b, c 六次之交代式(非同次式)而有 $b-c, c-a, a-b$ 之因數,故等於

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+Nabc+P(a^2+b^2+c^2)+Q(ab+bc+ca)+R(a+b+c)+S\}$$

依係數比較法,$L=0$, $M=0$, $N=-1$, $P=0$, $R=0$, $S=0$ 故所求之結果如次:

$$-abc(b-c)(c-a)(a-b)$$

91. 左邊為 a, b, c 之五次同次對稱式,而有 abc 之因數。

92. (一) 1. (二) $a+b+c$.

(三) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$〔參照第四章 40 節例 2〕.

(四) x^2.

雜　　題　2.　答

1. $\pm\left(x-\frac{1}{x}2\right)$　　2. 0.

4. (一) 9.　　(二) $\pm\frac{2\sqrt{3}\sqrt{a^2-b^2}}{3}$.　　6. $\frac{4}{3}$.

8. $ad=bc$.　　9. $1+x^3+x^6$.　　10. 2.

11. $2-\sqrt{3}$.　　12. $16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

13. (一) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

(二) $(x+y-3z)(x-y+z)$.

(三) $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$.

14. 將 a, b 依三之倍數,變化之如(三之倍數)$+1$,(三之倍數)-1 可也。

15. (一) $3(x+3)(5x+3)$.

(二) $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$.

(三) $(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$.

(四) $(x-4)(2x+7)(2x^2-x-8)$.

(五) $(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})$.

16. (一) 9, -2,　　(二) $4, \frac{1}{4}$.　　(三) 0.1327,

17. 5, $-\frac{3}{5}$.

18. (一) $4<x<6$.　　(二) $2<x<3$, $-4>x>-5$.

19. $m \geqq 3, m \leqq -2.$　　20. $2+2\sqrt{2} > p > 2-2\sqrt{2}.$

21. $\sqrt{3} \geqq m \geqq 0.$

22. （一）$6abc.$　（二）$24abc.$　（三）$-3.$

23. $0.$　　24. $a^2-(\sqrt[3]{3}-1)a+\sqrt[3]{3}(a+\sqrt[3]{3}-1).$

25. （一）$-3, -5.$　（二）$-64, 27.$

27. （一）$2\sqrt{y}(3x+y).$　（二）$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}.$

28. $(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}+a)^2.$

30. $(x-z)^3.$　　31. $12.$

32. （一）$(x+1)(x+2)(x-2).$

（二）$(2x-y+5)(x-2y-5)$

33. $\dfrac{a^2-2}{a^4-a^2+1}.$　　34. $-1, \dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}.$

35. （一）$3x^2-x+1.$　（二）$x-a.$

36. $0.7, 0.9,$　　37. $\dfrac{5}{2}.$　　38. $\dfrac{2}{3}.$

40. $(x+1)(x+4)(x+5).$

41. （一）$1, \dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}.$　（二）$1, 1, -2, -\dfrac{1}{2}.$

75. $(a+b+c)^2$ 為大。

76. $x=1, y=2, x=-1, y=-2.$

80. $-24.$　　81. （一）$-20, 9.$　（二）$-6, 1.$

82. $-6, 93, 105$ 或 $38, -92, 137.$

83. 3, 0.　84. 3. 3. 2.　85. $-3, -2,$

88. 1, 7, 6, 1.　89. 6.

90. (一) $b+c$.　(二) 1.　(三)　(四) 1.

(五) $\frac{1}{2(a+b+c)}$.

答 及 解 法 指 針

第 一 種

問 1.（一）$7a^4(a^2-3)$. （二）$-x^3y(x+2y)$.

（三）$27x^2y^3(xy^2+2x^3-3y^3)$.

問 2.（一）$(x-y)(a+bc)$.

（二）$(a+b)(x+y)(x+y-a-b)$.

（三）$(x-y)(x+y)$. （四）$x(b-c)(ax+b)$.

（五）第二項爲 $+(x-y)(a+b-c)$

答 $(a+b-c)(x+x-y)=2x(a+b-c)$.

問 3. $4x^2+20x+25$, $9x^2-12xy+4y^2$, $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$. $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$, $\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}$.

問 5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$, $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$, $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$, $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$, $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$.

注意. 第四第五答相同，何故？

問 6. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$,

凡多項式之平方等於各項之平方及每二項所組之倍積悉以相加。

或化之如次。

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd.$$

是凡多項式之平方等於各項之平方及各項之倍各與其下各項之和相乘之積悉以相加，此爲較便。

問 7.（一）$(a+5b)^2$，（二）$(2a-3b)^2$，（三）$(1-4x)^2$，

（四）$x^2(4a^2x+1)^2$ 或 $(4a^2x^2+x)^2$，（七）$-(x-y)^2$，

（五）$\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3b}{4}\right)^2$.（六）$\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)^2$，（八）$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.

問 8.（一）$3ab^2(a-b)^2$，（二）$5a^2b^2(2a-3b)^2$

問 9.（一）以 $y+z$ 視如單項式。

$$\{3x^2-5(y+z)\}^2=(3x^2-5y-5z)^2.$$

（二）$\{(x-y)-3(y-z)\}^2=(x-4y+3z)^2$.

問 10.（一）$(a+b+c)^2$.

（二）$a^2+2a(2b-3c)+(2b-3c)^2=(a+2b-3c)^2$.

（三）$(2x)^2-2(2x)(3y-z)+(3y-z)^2=(2x-3y+z)^2$

問 11.（一）$x^4-2x^2(x-1)+(x-1)^2=(x^2-x+1)^2$.

（二）化 $-x^2$ 爲 $-2x^2+x^2$ 答 $(x^2+x-1)^2$.

（三）化 $10x^2$ 爲 $6x^2+4x^2$ 答 $(x^2+2x+3)^2$.

問 12.（一）所設之式爲 $(a-b+c)^2$ 故所求之平方根爲 $a-b+c$。

（二）$2x+3y-4z$.（三）x^2-x-1.

問 13. $3^2=9$，$\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$，$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2}{4a^2}$.

加 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 可也。

問 14. 第一以 $12ab$ 加或減,則爲 $(2a+3b)^2$ 或 $(2a-3b)^2$

次 $(x^2 \pm y^2)^2$, $(x^4 \pm y^4)^2$,

第四以 2 加或減,則爲 $\left(\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{a}{x}\right)^2$.

問 15. 16. 36, 12.

問 16. 所設之式去其括弧而整頓之。

$2x^2+3(a+b)x+4ab$ 乃由 $\{3(a+b)\}^2=8\times 4ab$ 得本題之結果。

問 17. 所設之式整頓之如次。

$$\frac{n^2-a^2l^2}{a^2n^2}x^2-\frac{2lm}{n^2}xy+\frac{n^2-b^2m^2}{b^2n^2}y^2$$

乃由 $\left(\dfrac{2lm}{n^2}\right)^2=4\times\dfrac{n^2-a^2l^2}{a^2n^2}\times\dfrac{n^2-b^2m^2}{b^2n^2}$ 得其證明。

問 18. $4x^2-9y$　　　$-(x+y)(x-y)=-(x^2-y^2)=y^2-x^2$

$\dfrac{4}{9}a^2-\dfrac{9}{25}b^2$.

問 19. $a^4-(ab-2b^2)^2=a^4-a^2b^2+4ab^3-4b^4$.

問 20. $(8x^3+4x)^2-(6x^3+1)^2=64x^6-1$.

問 21. $\left(\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{1}{4}y^2\right)^2-\left(\dfrac{1}{6}xy\right)^2=\dfrac{1}{81}x^4+\dfrac{1}{36}x^2y^2+\dfrac{1}{16}y^4$.

問 22. (一) $(a^2+1)^2-(\sqrt{2a})^2=a^4+1$.

(二) $(x^4+1)(x^4-1)=x^8-1$.

(三) $x-\dfrac{1}{x}$.　　　(四) $2+2c^{2x}$.

問 23. (一) $\{(ax+cz)^2-(by)^2\}\{(by)^2-(ax-cz)^2\}$

$=(2acxz)^2-(a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2)^2$

$=2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4$

$-c^4z^4$

（二） $\{(a+b)^2-(c+d)^2\}\{(a-b)^2-(c-d)^2\}$

$=(a^2+b^2+c^2-d^2)^2-(2ab-2cd)^2$

$=a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2d^2-2d^2a^2$

$-2a^2c^2-2b^2d^2+8abcd.$

問 24. （一） $(3x+5y^2)(3x-5y^2).$

（二） $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4).$

（三） $(5x-4y)(5x+4y)(25x^2+16y^2).$

（四） $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}\right).$

（五） $x(x-1)(x+1)(x^2+1).$

（六） $(a^2-b^2)\{1-(a^2-b^2)\}=(a+b)(a-b)$

$(1-a^2+b^2).$

問 25. （一） $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$

問 26. （一） $4(x+z)y.$ （二） $-16x(3x^2-2).$

（三） $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^4+3x^2y^2+y^4).$

（四） $(x-1)\{(x-2)^2-(x-1)^2\}=(x-1)(2x-3)$

$(-1)=-(x-1)(2x-3).$

問 27. （一） $(a^2-2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)=(a-c)^2$

$-(b-d)^2=(a+b-c-d)(a-b-c+d)$.

（二）$x^4-(x-1)^2=(x^2+x-1)(x^2-x+1)$.

問 28. 被除數爲 $x^2-(y-z)^2=(x+y-z)(x-y-z)$.

且 $x-y+z=-(y-z-x)$, 答 $-(x+y-z)$

又第二答 $a^2b^2-(bc-ca)^2=(ab+bc-ca)(ab-bc+ca)$,

以 $ab-bc+ca$ 除之,得商 $ab+bc-ca$。

問 29.（一）$\{2(xy-ab)+x^2+y^2-a^2-b^2\}$

$\times\{2(xy-ab)-x^2-y^2+a^2+b^2\}$

$=\{(x+y)^2-(a+b)^2\}\{(a-b)^2-(x-y)^2\}$

$=(x+y+a+b)(x+y-a-b)(a-b+x-y)(a-b-x$

$+y)=-(x+y+a+b)(x+y-a-b)(x-y+a-b)$

$(x-y-a+b)$.

（二）$(2a+1+a^2-b^2)(2a-1-a^2+b^2)$

$=\{(a+1)^2-b^2\}\{b^2-(a-1)^2\}$

$=(a+1+b)(a+1-b)(b+a-1)(b-a+1)$.

$=-(a+b+1)(a-b+1)(a+b-1)(a-b-1)$.

問 30.（一）$(x-z)^2-(y+2z)^2=(x+y+z)(x-y-3z)$.

（二）$(a-b-c)^2-(2b-2c)^2=(a+b-3c)(a-3b$

$+c)$.

（三）$(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$

$=(a^2-b^2+2bc-c^2)(a^2-b^2-2bc-c^2)$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c).$

問 31.（一）$(x^2-6)^2-4x^2=(x^2+2x-6)(x^2-2x-6).$

（二）$(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$

（三）$(x^2+4y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy$
$+4y^2).$

（四）$(x^4+y^4)^2-x^4y^4=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x2xy^2$
$+y^4)=x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$

（五）$a^2(1+r^2+r^4)=a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2).$

問 32. $x^4-13x^2+36=(x^2+6)^2-25x^2=(x^2+5x+6)$
(x^2-5x+6), 答 x^2-5x+6.

問 33. $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+\sqrt{xy}+y)$
$(x-\sqrt{xy}+y)$, 答 $x-\sqrt{xy}+y$.

問 34.（一）$(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)$
$(a^2-\sqrt{2}ab+b^2).$

（二）$(x^2+6y^2)^2-12x^2y^2$

$=(x^2+\sqrt{12}xy+6y^2)(x^2-\sqrt{12}xy+6y^2).$

$=(x^2+2\sqrt{3}xy+6y^2)(x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2).$

（三）$(a^2+b^2)^2-3a^2b^2=(a^2+\sqrt{3}ab+b^2)(a^2$
$-\sqrt{3}ab+b^2)$

（四）$(x^2+\sqrt{3}xy+5y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+5y^2)$.

問 35.（一）$(x+4)(x+15)$.　（二）$(x-4)(x-25)$.

（三）$(x+12)(x-3)$.　（四）$(x-12)(x+7)$.

（五）$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.　（六）$(x+54)(x-24)$.

問 36.（一）$(a+25b)(a+2b)$.　（二）$(x-4y)(x-25y)$

〔參照問 38（二）〕

（三）$m+\frac{1}{m}=1$　答 $(a+mb)\left(a+\frac{1}{m}b\right)$.

（四）$(x+13y)(x-3y)$.

問 37.（一）先就各項公共之因數括出之，$a(a+b)(a+2b)$.

（二）$a^2(1+b)(1+3b)$.

（三）$(x+a+b)(x+a-b)$.　（四）$(x-a)(x+b)$.

問 38. $(x^2-1)(x^2-9)=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$.

問 39.（一）$(x^2+x+6)(x^2+x-2)=(x^2+x+6)(x+2)(x-1)$.

（二）$(x^2-2x+3-2)(x^2-2x+3-11)$

$=(x-1)^2(x-4)(x+2)$.

（三）$(x^2+6x+8)(x^2+5x+8)$

$=(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)$.

（四）$\{x+y-3(y+z)\}\{x+y-5(y+z)\}$

$=(x-2y-3z)(x-4y-5z)$.

問 40. (一) $(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10=(x^2+x+5)$

$(x^2+x-2)=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

(二) 與例 7 同, $x(x+5)(x^2+5x+10)$.

(三) $(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$.

(四) $(x-5)(x+2)(x^2-3x+12)$.

問 41. 所設之式 $(x^2-5ax+4a^2)(x^2-5ax+6a^2)+a^4$

$=(x^2-5ax)^2+10x^2(x^2-5ax)+25a^4$

$=(x^2-5ax+5a^2)^2$.

問 42. (一) $(x+12)(x-11)$. (二) $x^2(x^2+5y^2)(x^2-19y^2)$

(三) $\left(x+\frac{3}{4}y\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)$ (四) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

(五) $(x^2-3y)(x^2-5y)$. (六) $(16-xy^2)(17+xy^2)$.

(七) $(x-1)(x+8)(x^2+7x+26)$.

(八) $(x-y)^2-9(x-y)+14=(x-y-2)(x-y-7)$

問 43. (一) $(2x-3)(3x-5)$. (二) $(2x-13)(x-3)$.

(三) $(5x-8)(x-6)$. (四) $(x^2-3y^2)(8x^2-3y^2)$.

(五) $(3x-10)(4x+9)$. (六) $3(2a+3x)(3a-x)$.

(七) $(6x-7y)(7x-6y)$. (八) $(5x+6)(9x-5)$.

(九) $(3x-11)(4x-13)$. (十) $x^2(2x-7y)(5x-9y)$

（十）$(x+y-3a-3b)(2x+2y-a-b)$.

問 44.（一）$(bx+c)(cx+b)$.　（二）$(ax+1)(x-a)$

（三）先就 x 羅冪次整理之，$(ax+by)(x+y)$.

（四）$abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2=(ax+by)(bx+ay)$

問 45.（一）$(a-c)(a-b)$.　（二）$(x-3)(y+7)$

（三）$(y^2+1)(y-1)$.　（四）$(x^2z-1)(y^2z+1)$.

問 46.（一）$(x-10)(x+4)$.　（二）$(x+23)(x-10)$.

問 47.　$(5x-3)(x+7)$.

問 48.（一）$(x-15)(x-16)$.　（二）$(3x-8y)(8x+5y)$.

（三）$(3x-16)(7x+9)$.

問 49.（一）$p^2-4q=22^2+4\times203=36^2$ 兩因數不含無理數。

（二）$b^2-4ac=0$ 含 x 之兩因數不含無理且爲同式。

注意. 上二問 x 之係數爲偶數者用半係數之公式爲便.

（三）含 x 之兩因數含無理數。

（四）含 x 之兩因數含虛數。

問 50. $\{x^2-(a^2+b^2)\}^2-4a^2b^2$

$$=(x^2-a^2-b^2+2ab)(x^2-a^2-b^2-2ab)$$

$$=\{x^2-(a-b)^2\}\{x^2-(a+b)^2\}$$

$=(x+a-b)(x-a+b)(x+a+b)(x-a-b).$

問 51.（一）就 a 幂順次整理之。

$-(a^2+6ax-x^4+5x^2-4)$

$=-\{(a^2+6ax+9x^2-(x^4+4x^2+4)\}$

$=-\{(a+3x)^2-(x^2+2)^2\}$

$=-(a+3x+x^2+2)(a+3x-x^2-2)$

$=(x^2+3x+a+2)(x^2-3x-a+2).$

（二）$(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1).$

問 52.（一）$(x+54)(x-24).$ 〔38 之（六）〕.

（二）$(x-111)(x-112)$,（三）$(2x-37)(3x+19).$

（四）$\left(3x-\frac{5}{13}\right)\left(5x+\frac{7}{12}\right).$

問 53.（一）$(x-2+\sqrt{13})(x-2-\sqrt{13}).$

（二）$(x+1+\sqrt{-2})(x+1-\sqrt{-2}).$

（三）$(3x-2+\sqrt{21})(3x-2-\sqrt{21}).$

（四）$\left(3x-\frac{7+\sqrt{-131}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{-131}}{6}\right).$

問 54. $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$.

問 55.（一）由 $(x-2)(x-5)=0$ 得 $x=2$ 或 5.

（二）3, -0.

問 56.（一）± 1.　（二）$a-b, b-a$.　（三）$0, 5$,

（四）$0, \ -\dfrac{7}{3}$.　（五）$5, -2$,　（六）$\dfrac{3}{5}, \ -\dfrac{2}{3}$.

（七）由 $x^2-2x-3=0$ 得 $x=3$ 或 -1.（八）a, b,

（九）$-\dfrac{c}{b}, \ -\dfrac{b}{c}$,　　（⑩）$\pm 2, \pm 3$.

（十一）所設之式為 $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x$

$$+(a^2-b^2)=0$$

故由 $\{(a+b)x-(a-b)\}\{(a-b)x-(a+b)\}=0$

得 $x=\dfrac{a-b}{a+b}$ 或 $\dfrac{a+b}{a-b}$.

（十二）由 $ax^2-(a^2+1)x+a=0$ 即 $(x-a)(ax-1)=0$

得 $x=a$, 或 $\dfrac{1}{a}$.

（十三）$(x^2+x)^2-22(x^2+a)+40=(x-4)(x-1)(x+2)(x+5)$ 故其根為 $4, 1, -2, -5$.

問 57.（一）$8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$.

（二）$8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$.

（三）$a-b+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{x-b}(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b})$.

問 58.（一）$(ax-y^2)^3$.　　（二）$(\pm a-3b)^3$.

問 59. $-3\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)=-3\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)+3\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$

於此注意可也。

問 60. $(x+y)^3(x-y)^3=\{(x+y)(x-y)\}^3$

$$=(x^2-y^2)^3=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6.$$

問 61. $\{(x-y)+(x+y)\}^3=8x^3$.

問 62. 於公式(1)中之 b, 以 $b+c$ 代之。

證明 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$ 在初學者兩邊分別計算可也.

問 63. (一) x^2-ax+a^2. (二) x^2+ax+a^2.

問 64. (一) $(x\pm 2y)(x^2\mp 2xy+4y^2)$.

(二) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(三) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$\times(a^4-a^2b^2+b^4)$.

問 65. (一) $(x^3-1)(x^3-27)$

$=(x-1)(x-3)(x^2+x+1)(x^2+3x+9)$.

(二) $(x^3+y^3)(x^3-8y^3)$

$=(x+y)(x-2y)(x^2-xy+y^2)(x^2+2xy+4y^2)$.

問 66. $(2a)^3-(3b)^3=8a^3-27b^3$.

問 67. 以 $a^{-1}-1$ 作 $(a^{-\frac{1}{3}})^3-1^3$ 觀之可也答 $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$.

問 68. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$=(-p)(p^2-3q)=3pq-p^3$.

問 69. (一) $(x^2+yz)(x^4-x^2yz+y^2z^2)$

(二) $-(x+7y)(3x^2-7xy+13y^2)$.

(三) $2xy(x^4+y^4+x^2y^2)$.

問 70. $x^2+2xy-xz+y^2-yz+z^2$.

問 71.　$(a-c)^2+(a-c)(b-d)+(b-d)^2$.

$=a^2+ab-2ac-ad+b^2-bc-2bd+c^2$

$+cd+d^2$.

問 72.　被除式。

為 $2(x^2+y^2)\{(x^2-xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$+(x^2+xy+y^2)^2\}$

$=2(x^2+y^2)(x^4+5x^2y^2+y^4)$ 故答 $x^4+5x^2y^2+y^4$.

問 73. (一) $x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$

$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$.

(二) $(3a-2b-3c)(9a^2+4b^2+9c^2+6ab+9ac-6bc)$

問 74. 以被除式分解因數，答 $x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx$.

問 75. $a^2+4b^2+1+2ab-2b+a$.

問 76. $a+2b+3c$.

問 77. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz$

$-zx-xy)$. 令 $x+y+z=0$ 故上式右邊為 0,

故 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.　　$\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz$.

問 78. 由前問。

$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0$，依

此證明可也。

問 79. $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$，由問 80

$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$.

故 $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(z-y)$

$$=-(z-x)^3=(x-z)^3$$

問 80. (一) $x^2(x-2)+2(x-2)=(x-2)(x^2+2)$.

(二) $a^2(b^2-1)-(b^2-1)=(b^2-1)(a^2-1)$

$$=(a+1)(a-1)(b+1)(b-1).$$

(三) $(x-4)(x^2-9)=(x-4)(x-3)(x+3)$.

(四) $(2x-3)(x+1)(x-1)$.

(五) $x^4(x-1)-2x^2(x-1)+5(x-1)$

$$=(x-1)(x^4-2x^2+5)$$

問 81. 被除式爲

$x^3(x^2+xy+y^2)+y^3(x^2+xy+y^2)=(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)$

答 x^3+y^3.

問 82. (一) $(x-y)(x+y-z)$.　　(二) $(x-y)(x+y+z)$.

(三) $a^3-b^3-(a^2b-ab^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab$

$(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab)$

$=(a-b)(a^2+b^2)$.

(四) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-c^2(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2$

$-c^2)=(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)$.

(五) $a^2(a+b)+c(b^3+a^3)=(a+b)\{a^2+c(b^2-ab$

$+a^2)\}=(a+b)(a^3+a^2c-abc+b^2c).$

（六）$p^2(x^3-8y^3)-4q^2(x^3-8y^3)=(x^3-8y^3)(p^2-4q^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(p+2q)(p-2q).$

問 83. 被除式化爲 $4a^2x^2(a^2-x^2)+(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)$,

商 $-4a^2x^2+x^4+a^2x^2+a^4=x^4-3a^2x^2+a^4.$

問 84.（一）$x^2-xy-2y^2+3xz+3yz$

$=)x+y)(x-2y)+3z(x+y)=(x+y)(x-2y+3z).$

（二）$(a-2b)(a-b)-5c(a-2b)=(a-2b)(a-b-5c)$

（三）$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+c+b+d)$

$(a+c-b-d)=2(a+b+c+d)(a-d).$

（四）$x^3+y^3-xy(x+y)=(x+y)(x-y)^2$

〔問 85（三）〕

（五）$x^2-(y-z)^2+x+y-z$

$=(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)$

$=(x+y-z)(x-y+z+1).$

（六）$x^4-y^4+z^2(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)(x^2+y^2+z^2)$

〔問 85（四）〕

問 85.（一）$x^3-x^2-x^2+x-2x+2=(x-1)(x^2-x-2)$

$=(x+)(x-1)(x-2).$

或 $x^3-x-2x^2+2=x(x^2-1)-2(x^2-1)$

$$=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2).$$

（二）$(x-1)(x-2)(x-3)$

（三）$x^3-2x^2y-4x^2y+8xy^2-5xy^2+10y^3$

$=(x-2y)(x^2-4xy-5y^2)=(x-2y)(x+y)(x-5y).$

（四）$x^4+2x^3+3x^2+x^2+2x+3$

$=(x^2+2x+3)(x^2+1).$

問 86.（一）依例 5 其 a, b, c 以 a^2, b^2, c^2 代之，

答 $3(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2).$

（二）$\{(b-c)+(c-a)\}\{(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2\}$

$+(a-b)^3$

$=(b-a)(a^2+b^2+3c^2+ab-3bc-3ca)+(a-b)^3$

$=(a-b)\{(a-b)^2-(a^2+b^2+3c^2+ab-3bc-3ca)\}$

$=3(a-b)(bc-c^2-ab+ca)=3(a-b)(b-c)(c-a).$

（三）$\{(b+c)^3+(d+a)^3\}+\{(c+d)^3+(a+b)^3\}$

$=(a+b+c+d)\{(b+c)^2-(b+c)(d+a)+(d+a)^2$

$+(c+d)^2-(c+d)(a+b)+(a+b)^2\}$

$=(a+b+c+d)\{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+(ab+bc+cd$

$+da)-2(bd+ca)\}.$

（四）$(x-x^2)^3+(x^2-1)^3+(1-x)^3$

$$=(x+x^2)^3+(x^2-x)\{(x^2-1)^2-(x^2-1)(1-x)$$
$$+(1-x)^2\}$$
$$=(x^2-x)\{-(x-x^2)^2+(x^2-1)^2-(x^2-1)(1-x)$$
$$+(1-x)^2\}$$
$$=x(x-1)(3x^3-3x^2-3x+3)$$
$$=3x(x-1)(x-1)(x^2-1)=3x(x-1)^3(x+1).$$

或先依 $(x-1)^2$ 括出而分解之。

問 87. (一) 以含 a 與否之項，分類列之。

$a(c-d)-b(c-d)=(c-d)(a-b)$.

或以含 b, c, d 與否之項，分類列之，亦同。

(二) $(a+b)(c-d)$.

(三) $1-x^2+a(1-x)=(1-x)(1+x+a)$.

(四) $(a+b)(m^2+n^2)$.

(五) $ax^2+ax+x+1=(x+1)(ax+1)$.

(六) $(a+c)(b-d)$.

(七) $ax+ab+ac+x^2+(b+c)x=(x+b+c)(a+x)$.

(八) $a(x^2+1)+(x+1)=(x+1)(ax^2-ax+a+1)$.

(九) $1-x^2+ax(1-x^2)=(1-x)(1+x)(1+ax)$,

(十) $x^3-1+p(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x-1+p)$.

(十一) $x(x^3+a^3)+y(x^3+a^3)=(x+y)(x+a)(x^2-ax+a^2)$

(x^2-ax+a^2).

（二）$a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$

$=(x+y+z)(a+b+c)$.

問 88.（一）$a^2(b^2-c^2)-c^2(b^2-c^2)=(b+c)(b-c)(a+c)(a-c)$

（二）$c^2(b^2-a^2)-(b^4-a^4)=(b-a)(b+a)(c^2-b^2-a^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)$.

（三）$a^2(2x+3y)+xy(2x+3y)=(2x+3y)(a^2+xy)$.

問 89.（一）$a^3-b^3-ab(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)$.

（二）$ab(a^2+b^2-1)+a^2+b^2-1$

$=(a^2+b^2-1)(ab+1)$.

問 90.　$14x^3-14x^2y+37x^2y-37xy^2+5xy^2-5y^3$

$=14x^2(x-y)+37xy(x-y)+5y^2(x-y)$

$=(x-y)(14x^2+37xy+5y^2)$

$=(x-y)(2x+5y)(7x+y)$

問 91. 以 a^3 加減，得

$x^3+y^3+a^3-3axy-a^3-a^2(x+y)$

$=(x+y+a)(x^2+y^2+a^2-xy-ya-ax)-a^2(a$

$+x+y)=(x+y+a)(x^2+y^2-xy-ya-ax)$.

問 92. 各項以 $x+a$ 除之適盡，先依此注意以求其商。

得 $x(x^2-ax+a^2)+ax(x-a)+a^3$

$=(a+b)x^2-a(a+b)x+a^2(a+b)$ 故所求之商，

爲 x^2-ax+a^2.

問 93. (一) $b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+ab(a-b)$

$=c^2(a-b)-c(a^2-b^2)+ab(a-b)$

$=(a-b)\{c^2-c(a+b)+ab\}=(a-b)(c-a)(c-b)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$.

(二) $(a-b)^3+(b-c+c-a)\{(b-c)^2-(b-c)(c-a)$

$+(c-a)^2\}$

$=(a-b)\{(a-b)^2-(a^2+ab-3ca+b^2-3bc+3c^2)\}$

$=-3(a-b)(ab-bc-ca+c^2)$

$=-3(a-b)(a-c)(b-c)=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

問 94. (一)除 $ab(a+b)$ 以外各項之括弧悉解之，依 $(a+b)$ 之因數，分爲數羣。

$ab(a+b)+abc+b^2c+ca^2+abc+c^2a+bc^2$

$=ab(a+b)+bc(a+b)+ca(a+b)+c^2(a+b)$

$=(a+b)(ab+bc+ca+c^2)=(a+b)(a+c)(b+c)$

(二) $(a+b)^3+(b+a)\{(b+c)^2+(b+c)(c-a)$

$+(c-a)^2\}$

$=(a+b)\{(a+b)^2+a^2-ab-3ac+b^2+3bc+3c^2\}$

$=(a+b)(2a^2+ab-3ac+2b^2+3bc+3c^2)$.

問 95. $a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3(a-b)$

$$=ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)$$

$$=(a-b)\{ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3\}$$

解 $\{\ \}$ 內之括弧，依 $b-c$ 之因數注意之。

$$a^2b-a^2c+ab^2-abc-b^2c+c^3$$

$$=(b-c)\{a^2+ab-c(b+c)\}$$

$$=(b-c)\{a^2-c^2+ab-bc\}=(b-c)(a-c)(a+c+b)$$

故所設之式係 $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

問 96. 左邊想像以爲有 $b+c$, $c+a$ 之因數，因以 x 分解其因數，

問 97. 所設之式想像以爲有 x^2-x+2 之因數，故化之如次：

$$\begin{array}{lr}
x^4-x^3+2x^2 \cdots\cdots\cdots & x^2(x^2-x+2) \\
\quad +2x^3-2x^2+4x \cdots\cdots\cdots & 2x(x^2-x+2) \\
\qquad -3x^2+3x-6 \cdots\cdots\cdots & -3(x^2-x+2) \\
\hline
x^4+x^3-3x^2+7x-6=(x^2+2x-3)(x^2-x+2) &
\end{array}$$

$$=(x+3)(x-1)(x^2-x+2).$$

練　習　問　題　I.

1. (一) $-(9x-10)^2$.　　(二) $-(3x+7y)^2$.

(三) $\{(a-b)x-2y\}^2$.　(四) $-\{(a+b)x-(a-b)y\}^2$.

(五) $x^2(2x+y)^2(2x-y)$.

2. (一) $(9a^2b^2+x^2)(3ab+x)(3ab-x)$.

(二) $3a^2(2a+b)(b-2a)$.

3. (一) $(x+3y+2)(x+3y-2)$.

(二) $(x^3+x^2+a+1)(x^3+x^2-a-1)$.

(三) $(x^2+a^2)^2-(x-3)^2=(x^2+x-a^2-3)$

(x^2-x-a^2+3).

4. (一) $(x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2$

$=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$.

注意. 與問 32 之(三)比較。

(二) $(x^2+10x)^2-(x-4)^2=(x^2+11x-4)(x^2+9x+4)$.

5. (一) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

(二) $(a^2+5a+1)(a^2-5a+1)$.

(三) $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$.

(四) $(5x^2+xy+4y^2)(5x^2-xy+4y^2)$.

6. (一) $(x-15)(x-5)$.　　(二) $(a-35)(a+3)$.

(三) $(n-15)(n+12)$.　　(四) $(x-29)(x+4)$.

7. (一) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{3}{2}y\right)$. (二) $a^2(a-b)\left(a+\frac{1}{b}b\right)$.

(三) $(x+m)\left(x+\frac{1}{m}\right)$. (四) $(x-ay)\left(x+\frac{1}{a}y\right)$.

8. (一) $(x-a)(x+2b)$.

(二) $(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$.

(三) $(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$.

(四) $(x+a-b)(x-a+b)\{x^2+(a+b)^2\}$.

(五) $(x+b)(x+a+c)$.

9. (一) $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$.

(二) $(a-1)(a+2)(a^2+a+5)$.

(三) $(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$.

(四) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

(五) $(x+2)(x+3)(x^2+5x+\text{[illegible]})$.

10, (一) $(2x+3y)(5x-y)$. (二) $(3x+5)(5x-7)$.

(三) $(7x-4y)(6x+5y)$. (四) $(3x-7y)(14x-5y)$.

(五) $(9x-y)(11x+13y)$. (六) $(11d+c)(c-17d)$.

(七) $(5xy-1)(10xy+1)$.

11. (一) $a^2(a+b)(a-b)(3a+b)(3a-b)$.

(二) $3x^2y(4x^4+y^2)(2x^4-y^2)$.

(三) $2a^2b(2a-3b)(3a+4b)$.

12. (一) $(x+3)(y-7)$. (二) $(a^2c-1)(b^2c-1)$.

(三) $(ax+by)(cx+dy)$.

13. 先將所設之式就 x 羃順次整理之。

(一) $(ax+by)(x-y)$. (二) $(ax-by)(bx+ay)$.

14. (一) $(a+7b)(a+b)$.

(二) $2(a^2+18a+1)(4a^2+9a+4)$.

15. (一) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

(二) $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

(三) $(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)$.

16. (一) $ax^3(1+x)^2(1-x+x^2)^2$

(二) $(x+m)(x+n)(x^2-mx+m^2)(x^2-nx+n^2)$.

17. (一) $(a-2b+c)(a^2+4b^2+c^2+2bc-ca+2ab)$.

(二) $(a-2b-3)(a^2+2ab+4b^2+3a-6b+9)$.

(三) $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y)$.

18. (一) $(a+b)^2\{2(a^2+b^2)-(a-b)^2\}=(b+b)^4$.

(二) $x^2(x+a)-a^2(x+a)=(x+a)^2(x-a)$

(三) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+2x^2y^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)$
$(x^4+x^2y^2+y^4)=(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

(四) $(x^4+x^2y^2+y^4)\{(x^2+y^2)^2-(x^4-x^2y^2+y^4)\}$

$=3x^2y^2(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

（五）$(x^3+y^3)(x^3-y^3+8z^3+6xyz)$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y+2z)$$

$$\times(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$$

19. （一）$(x^6-64)(x^3-1)=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)(x-1)(x^2$ $+x+1)=(x-1)(x-2)(x+2)(x^2+x+1)(x^2+2x$ $+4)(x^2-2x+4).$

（二）$x^3-p^3-(1+p+p^2)x(x-p)=(x-p)\{x^2-(p^2+1)$ $x+p^2\}=(x-p)(x-p^2)(x-1).$

（三）解括弧化為二組平方之差，

$(1+a)^2-(1+c)^2+(1+a)^2c^2-(1+c)^2a^2=(a-c)$ $(2+a+c)+(a+c+2ac)(c-a)=2(a-c)(1-ac).$

20. （一）$(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$

$$=(x+1)(ax^2-ax+a+1).$$

（二）$(x+1)(ax^2-ax+a+b).$

21. （一）$x(a-b-c)-y(a-b-c)=(a-b-c)(x-y).$

（二）$x(a^2+ab)+y(ab+b^2)+ac+bc$

$$=(a+b)(ax+by+c).$$

（三）所設之式係 y 之一次，

$y(x+3)+2x^2+7x+3$

$=y(x+3)+(x+3)(2x+1)=(x+3)(2x+y+1).$

（四）$x(y^2-2y+1)-(y^2-2y+1)=(y-1)^2(x-1).$

22.（一）此式係 c 之一次，將括弧解之.

$$a^2-b^2+c(a-b)=(a-b)(a+b+c)$$

（二）$bx^2(1-ax)+1-a^2x^2=(1-ax)(1+ax+bx^2).$

23.（一）$xy(x-y)+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$

$$=xy(x-y)+z^2(x-y)-z(x^2-y^2).$$

$$=(x-y)\{xy-z(x+y)+z^2\}$$

$$=(x-y)(x-z)(y-z).$$

（二）依第 18 節例 2 其 a, b, c 以 a^2, b^2, c^2 代之，即得其答如次：

$$(b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)$$

$$=(b+c)(a+b)(a+c)(b-c)(a-b)(a-c).$$

24. 解括弧求 $(a+b)$ 之因數，分爲三羣，

（一）$ac^2+bc^2-(a^3+b^3)+a^2b+ab^2$

$$=(a+b)\{c^2-(a^2-ab+b^2)+ab\}$$

$$=(a+b)\{c^2-(a-b)^2\}=(a+b)(c+a-b)(c-a+b)$$

（二）$a^2c+abc-(ac^2+bc^2)+b^3-a^2b$

$=(a+b)\{ac-c^2+b(b-a)\}$ $\{\ \}$ 內之式爲 a 之一次。

$$=(a+b)\{a(c-b)-(c^2-b^2)\}$$

$=(a+b)(c-b)(a-b-c)$.

25. $x^4+x^3+4x^2+4x^2+1x^2+1x+3x+3$

$=(x+1)(x^3+4x^2+4x+3)$

$=(x+1)(x^3+3x^2+x^2+3x+x+3)$

$=(x+1)(x+3)(x^2+x+1)$.

注意. 所設之式以 $x+1$ 除之得商, 更以 $x+3$ 除之得商 x^2+x+1, 或一次以 x^2+4x+3 除之, 亦可。

26. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$

$=x^5+x^3y^2+x^4y+xy^4+x^2y^3+y^5$

$=(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

答 $x+y$.

第　二　種

問　1. -27.　　問　2. 20.　　問　3. 17.

問　4. A 即 $(ax-b)Q+R$ 故也。　　問　5. $x=2$,

問　6. $x=-1$,

問　7. 於所設之式, 令 $x=-10$ 其值為零, 故所設之式以 $x+10$ 除之適盡。

問　8. 於所設之式, 令 $x=0$ 其值為零故也。

問 10. 於所設之式中 a 以 $-b$ 代之可也。

問 12. n 爲奇數，問 $-(-y)^n=-(-y^n)=y^n$.

問 13. 於所設之式中，$y+z$, $z+x$, $x+y$ 以 $-x$, $-y$ $-z$ 代之可也。

問 14. 1. 7.　　2. 18.　　3. 12.

4. $a=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$.

5. $m=-5$, $n=1$.　　6. $a=6$, $B=-37$.

7. 由 $1+p+q=6$, $1-p+q=2$ 得 $p=2$, $q=3$.

8. $-p+q-q+p=0$, $p+q+q+p=0$ 此第一式成立。

由第二式所求之關係爲 $p+q=0$.

問 15. 第二式之差爲 $x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)$, x 不爲零，故其公約數必爲 $x-2$ 或 $x+1$.

故 $x-2$ 爲 x^2+x-a 之因數. 故 $4+2-a=0$ 因之 $a=6$

次 $x+1$ 爲 x^2+x-a 之因數，

但 $a=0$ 與題意不合。

問 16. 與前問同，其公約數爲 $x-3$ 或 $x-1$.

故 $x=3$ 由所設之式得 $a=8$ 又 $x=1$ 亦然。

問 17. 與上二問同，$c=-(p-1)$.

1. 第二章第 29 節例 1 及例 2，由所設之二式

得 $a^2-pa+q=0$, $a^2-p'a+q'=0$ 相減，且以 $p-p'$ 除之，

得　$a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$　〔例 1〕.

問 18. 與例 5 同，

由 $f^2=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$, $f=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

得所求之結果。

問 19. $x^4+x^3y+x^2y^2+x^3y^3+y^4$, $x^4+x^3+x^2+x+1$.

問 20. 因 $8=7+1$.

問 22. $x^6-2x^5+x^4-4x^3+x^2-6x$.

問 23. 左邊以 $a-b$ 乘之，則爲 $a^{32}-b^{32}$.

故左邊$=\dfrac{a^{32}-b^{32}}{a-b}=a^{31}+a^{30}b+\cdots\cdots\cdots\cdots+ab^{30}+b^{31}$.

問 24. 於所設之式，令 $b=c$, $c=a$, $a=b$ 皆適爲零故也。

問 27. $3x+1$.　　問 28. $x+5$.

問 30. $p=364$, $q=363$.

問 31. $a=1$, $b=-3$, $c=-2$.

問 32. 2.　　問 33. 由 $3x^2-4x-2=0$ 得 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{3}$.

問 34. $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=0.61$ 或 -1.61.

問 35. 所求之根，係兩方程式左邊同時爲零之 x 之值。

答 -3

問 36. 所設 x 之值係兩式之因數非兩式公共者，當爲零，

故先求兩式之最大公約數 x^2+3x-2

$$x^3+2x^2-5x+2=(x^2+3x-2)(x-1),$$

$$x^3+x^2-8x+4=(x^2+3x-2)(x-2)$$

是 $x=1$，則第一式爲零，第二式不爲零。

又 $x=2$，則第二式爲零，第一式不爲零。

問 37. （一） $(b-c)(a-b)(a-c)$. （二） $(b+c)(c+a)(a+b)$.

（三） $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

問 38. $(b-c)(a-b)(a-c)$.

問 39. （一） $(x-2)(x^2-3x+7)$.

（二） $(x+1)(x+4)(x-10)$.

（三） $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

問 40. 左邊分解因數，

（一） $1, 2, -3$ （二） $1, 2, \frac{1}{2}$.

（三） $1, 2, 4, -2$.

問 41, 左邊 $(x-1)^3(x^2+3x+6)$ 之根如次

$$1, 1, 1, \frac{-3\pm\sqrt{-15}}{2}.$$

練　習　問　題　I

1. 4, 0 (即以 $x+2$ 除之適盡). 及 $-\frac{69}{2}$.

2. 124. 3. 2.

4. 剩除 -9 加 9 可也。

5. 化所設之式爲 $(a^2-ab)^2-ab(a^2-ab)-b^4$ 其 a^2-ab

以 $-2b^2$ 代之。　　　　答 $2ab^3+3b^4$.

6. 0，及 $2y^n$.

9. (一) -8.　　　　(二) -4.

10. 化所設之式為 $(a^2+b^2)^2+(k-2)a^2b^2$ 其 a^2+b^2 以 ab 代之，適等於零，故 $k=1$.

11. 由 $52-10m-2=32m2+c$，得 $m=1$.

12. $m=-6$, $n=2$.

13. 由第一式減第二式之 x 倍，則為 $2px+2r=2(px+r)$ 故其公約數必為 $px+r$ 故由第二式 $x=-\frac{r}{p}$, $p^3+r^3=0$.

14. $32x^{10}+243=(2x^2)^5+3^5$. 此式以 $2x^2+3$ 除之適盡，其商由第38節公式(3)為

$16x^8-24x^6+36x^4-54x^2+81$.

16. $m=pn$.

則 $x^m-a^m=x^{pn}a^{pn}=(x^n)^p-(a^n)^p$.

17. (一) $5^{2n}-1=(5^2)^n-1$ 故也。

22. $m+n=0$ 則 $x+1$ 恆能除之適盡。

24. $m=6$, $n=-8$.

25. $x^{n+1}-x^n-x+1=(x-1)(x^n-1)$ 故也。

26. 由題意，

$$(a+b)^4-a(a+b)^3-ab(a+b)^2-ab^2(a+b)-2ab^3=0.$$

即 $(a+b)^3(a+b-c)-ab(a+b)^2-ab^2(a+b)-2ab^3=0$.

$b[(a+b)^3-a(a+b)^2-ab(a+b)-2ab^2]=0$.

$b[(a+b)^2(a+b-c)-ab(a+b)-2ab^2]=0$.

$b^2[(a+b)^2-a(a+b)-2ab]=0$.

$b^3(b-a)=0$. $\therefore$ $b=0$ 或 $a=b$.

27. 左邊等於 $\dfrac{a^{64}-b^{64}}{a+b}$.

28. (一) $(x+1)(x-2)(x+5)$.

(二) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$.

(三) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

第 三 種

問 1. 二奇數如 $2m+1$ 及 $2n+1$ 取其和及差自見。

問 2. 二連續奇數如 $a+1$ 及 $a-1$,

故 $(a+1)^3-(a-1)^3=6x^2+2=2(3a^2+1)$ 爲偶數。

次 $a+1$ 與 $a-1$ 爲奇數, 故 a 爲偶數, 故 a^2 爲偶數,

因之 $3a^2$ 爲偶數, 故 $3a^2+1$ 爲奇數, 故 $2(3a^2+1)$

即 $(2\times$ 奇數$)$ 非 4 之倍數。

問 5. xy^2z.

問 4. (一) $5ab^2$. (二) $3\,xyz$.

問 5. (一) ax^2y^4. (二) $3abc$.

問 6. (一) $(a+b)^2$. (二) $(x-a)(x+b)^2$

(三) $3xy(x-m)^2$.

問 7. (一) $4x^2-2x+1$. (二) $x^2(3x+2)$. (三) $x+3$

(四) x^2+x+1. (五) x^2+4a^2.

問 8. (一) $2a-1$. (二) $x-3$. (三) $x-y$.

問 9. (一) $x-3$. (二) $3x+2$. (三) x^2+x-2.

問 10. (一) $x^2(2x-5)$. (二) $2x^2-3$. (三) x^2+3x-1

問 11. (一) x^2+5x+1. (二) $x-3$.

問 12. (一) $x+2$. (二) $x-a$ (三) x^2-3x-4.

(四) $a+2b$. (五) $x(x-1)$.

問 13. (一) 二式之差 $x^2(x-a)(2x+a)$. 答 $x-a$.

(二) $3x^2-2xy+y^2$.

(三) 取二式之和。 答 $2x^3-3x+1$.

(四) 由第一式去第二式之三倍。答 公約數無。

問 14. 所設二式之最大公約數為 $3ab(x-y)$ 故所求之公約數即此最大公約數之約數,列舉之如次。

$a, 3a, b, 3b, ab, 3ab, (x-y), 3(x-y), a(x-y),$

$3a(x-y), b(x-y), 3b(x-y), ab(x-y), 3ab(x-y)$.

問 15. (一) $3x^2-7x+2$. (二) $x-1$.

問 16. $x+f$ 為 $a(a'x^2+b'x+c')-a'(ax^2+bx+c)$

$$=(ab'-a'b)x+(ac'-a'c)=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)$$

之約數，是 $f=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$ ……………………(1)

又 $x+f$ 為 $c'(ax^2+bx+c)-c(a'x^2+b'x+c')$

$$=(ac'-a'c)x\left(x+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right)$$

之約數，是又 $f=\dfrac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$ ……………………(2)

由(1)及(2) $\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\dfrac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$

故 $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$

問 17. 公共之一根為 a，則 $x-a$ 為所設二方程式左邊二式之公約數，故依前問，得係數間之關係。

問 18，所設二式之最大公約數為 $x+f$ 與問 16 相同，求 f 之二值，

得 $f=\dfrac{a^2-c^2}{ab-bc}=\dfrac{ab-bc}{a^2-c^2}$ 即 $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b}{a+c}$

故 $(a+c)^2=b^2$. 因之 $a\pm b+c=0$.

練 習 問 題 III

1. （一）$7a^2b^3x^2y^3$ （二）$4a^2cx^2y$. （三）$5ab^2$.

2. （一）$x(x-y)$. （二）$xy(x-a)^2(x+b)$.

3. 各式分解其因數。

(一) $4x-1$. (二) $3x-4$, (三) $x^2(7x-9)$

4. 將二次分式解其因數, 〔第 23 節例 2〕

(一) $x-3$. (二) $x-4$.

5. (一) x^2+x-1. (二) $3x^2-7x+2$. (三) a^2-ab+b^2.

(四) x^2-5x+3 (五) x^2-x-1. (六) x^2+2x+3.

(七) 公約數無, (八) $xy(2x^2+xy-3y^2)$.

6. (一) $x-1$.

(二) 第一式分解其因數, 答 $x+a$

7. 就兩式之差分解其因數, 答 x^2-3x+2

8. (一) $x+2$. (二) 公約數無。

9. 依第 25 節例 2 可也。或依例 2 之結果, p 以 $-p$ 代之, p' 以 $-p$ 代之, p 以 p 代之亦可。

10. 與前問同。

倍式 最小公倍式

問 1. (一) a^3b^3. (二) $a^2b^2c^3$. (三) $a^4b^2c^2x^4$。

(四) $a^mb^nc^n$.

問 2. (一) $3x^2y^2z$. (二) $36a^2b^2c^2a^2c^2$.

問 3. (一) $3(x+a)^2(x+b)^2(x-b)^3$.

(二) $15ax^2(a-b)$. (三) $(a-b)(b-c)(c-a)$.

（四）$(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$.

注意．$a-c$ 與 $c-a$, $b-c$ 與 $c-b$, $a-b$ 與 $b-a$ 僅符號不同而已。

問　4.（一）$x(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$=x(x^6-1).$$

（二）$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=x^6-y^6.$$

（三）$a^{12}-b^{12}$.　　　（四）$(2x-3)(3x-2)(x+5)$

（五）$(x+a)(x+b)(x+c)$.

（六）$(x-4)(x+3)(3x+4)(3x-5)$.

（七）$3(x+2y)^2(x-2y)^2$.　（八）$6a^2(x+a)^2(x-3a)$.

問　5.（一）$(x-1)(x+1)(x^2+1)=x^4-1$.　$[x^2+1]$.

（二）$(2x-y)(9x^3-22xy^2-8y^3)$. $[3x^2-4xy-2y^2]$

（三）$(x^4-1)(x^2+49)(7x^2-5x+1)$. $[x^2-5x+7]$.

（四）$6a^3+26a^2+25a-7$.　　　$[2a^2+4a-1]$

（五）$(x^2+2x+3)(x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2)$.

$[x^2+2x+1]$.

注意．以上各答之後〔　〕內之式係所設兩式之最大公約數。

問　6.（一）第一第二之最大公約數為 $3x^2+4x-4$.

最小公倍二爲$(x-1)(3x^3+7x^2-4)$ 此最小公倍數與第三式所求得之最大公約數爲x^2+3x+2.

故所求之最小公倍數爲$(x-1)(3x-2)(x^3+6x^2+11x+6)$.

（二） $2(x+2)(x-2)^2(x+3)(x-1)$.（亦依上例得答）

問 7. $3x^2-5x+2$.

問 8. $$\left.\begin{aligned}(2x^2+3x+1)(3x-4)&=6x^3+x^2-9x-4\\ 1\times(3x-4)&=3x-4\end{aligned}\right\}$$

或 $$\left.\begin{aligned}(2x+1)(3x-4)&=6x^2-5x-4\\ (x+1)(3x-4)&=3x^2-\ \ x-4\end{aligned}\right\}$$

問 9. 依本節，相當於 ab 之式爲 b^2cd 爲無公約數，依同次分解爲二因數如次。

$$\left.\begin{aligned}b^2\times ab^2&=ab^4\\ cd\times ab^2&=ab^2cd\end{aligned}\right\}\text{答}$$

注意. 以 b^2cd 依同次分爲二因數除上以外，雖尚有 bc, bd 之一法，然此兩者有 b 爲公約數，故其答祇有如上之一組。

問 10. 以如 $G_1L_1=AB$ 者接連相乘可也。

練 習 問 題 III

1. (一) $120a^2b^4x^6$. (二) $30x^2y^3z^3$. (三) $5a^4b^2c^2x^4$.

(四) $(a+b)^2(a-b)^2=(a^2-b^2)^2$. (五) $4x^2y^2(x^2-y^2)^2$

(六) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1-x^8$.

(七) $6(2x-3)^2(3x+2)(x+2)$.

(八) $(3x-1)(7x-2)($[illegible]$x-1)$.

(九) $6(x+3a)(x-5b)(x-3a)$.

(十) $(x-2)(4x^3-22x^2+21x+12)$.

(十一) $(3x^2-2x+2)(10x^4+4x^3+15x^2-3x+9)$.

2. (一) $H, C, F, x-4$.

$L, S, M, (x^2-6x+2)(x^3-9x^2+23x-12)$.

(二) 公約數無。

最小公倍數 $(6x^3-11x^2-5x-3)(9x^3-9x^2+5x-2)$.

3. (一) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

(二) $x^5+7x^4-10x^3+70x^2+9x+63$.

4. $x^2-3x+2,\ x^3+4x^2+5x+2$.

5. $\left.\begin{array}{l} x^2-a^2 \\ x^8-5a^4x^4+4a^8 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{r} (x^2-a^2)(x^2-2a^2) \\ (x^2+2a^2)(x^4-a^4) \end{array}\right\},$

$\left.\begin{array}{l} (x^2+2a^2)(x^2-a^2) \\ (x^2-2a^2)(x^4-a^4) \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{r} (x^4-a^4) \\ (x^4-4a^4)(x^2-a^2) \end{array}\right\}.$

第 四 種

問 1.（一）第一項爲 $bc(b-c)$.

答 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

（二）$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

（三）$a^3+b^3+c^3+3abc$.

問 2. $bc(x^2-yz)=bc\{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)\}$

$$=abc(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

此式文字輪換無變化，故第二第三兩式亦同此形。

問 3. 所設之方程式，以 a, b, c 及 x, y, z 輪換，並無變化，故 y 及 z 之值以 x 之值，依文字之輪換即可求得者也。

$$y=\frac{m(m-c)(m-a)}{b(b-c)(b-a)},\ z=\frac{m(m-a)(m-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

問 4.（一）爲 a, b 二文字之三次同次對稱式。

（二）爲 a, b, c 三文字之三次同次對稱式。

$$-\sum a^3+\sum b^2c+\sum bc^2-2abc.$$

（三）$6abc$.

問 5. 商爲 a, b, c 之一次同次對稱式，

故爲 $L(a+b+c)$ 由係數比較法 $L=2$.

問 6. 商爲 $L(a+b+c)$ 於兩邊作恆等式，

令 $a=b=c=1$ 得 $L=1$.

問 7. 所求之因數爲 x, y, z 之一次同次對稱式，

故為 $L(x+y+z)$ 由系數比較法，$L=1$.

問 8. 被除數爲 a, b, c 三文字之六次同次交代式，

故其商爲 a, b, c 之三次同次對稱式，

故爲 $L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b$

$+ab^2)+Nabc$

先就 a^5b 之係數比較之，$L=-1$.

次令 $a=0, b=1, c=$ ，得 $M=-1$，更令 $a=-1$，

$b=1, c=2$. 得 $N=-1$，故所求之商如次，

$-(a^3+b^3+c^3+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+abc)$.

問 9. $(a+b+c)^3=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$.

先就兩邊 a^3 之係數比較之，$A=1$.

次由 a^2b 之係數，$B=3$；又由 abc 之係數，$C=6$.

問 10. 第一. $L=3$.

第二. 先就 x^4y 之項察之，此項雖有於右邊。

如 $-Lx^4y$. 然不有於左邊，故 $L=0$.

次就兩邊 x^3y^2 之係數比較之，$M=-1$.

問 11. 商爲 x^2+Ax+c，故 $A=-9$.

問 12. $m=-15, n=-31$.

問 13. (一) $a=b=1$, $c=-1$.

則 $1+1+1-27=-L$ 故 $L=24$

（二）$L=12$.

問 14. $a=1, b=2, c=3, d=4$.

問 15. $2x^3+mx^2+nx+2\equiv(x-1)(x-2)(2x+1)$ 乃由

$x=1$ 及 2 得 $m+n=-4$ 及 $2m+n=-9$ 故 $m=-5$,

$n=1$

問 16. 皆爲 a, b, c 之三次同次對稱式。

（一）$3(b+c)(c+a)(a+b)$.

（二）$(b+c)(c+a)(a+b)$.

（三）$(b+c)(c+a)(a+b)$.

問 17.（一）$(x+y)^5-x^5-y^5=xy(x+y)\{L(x^2+y^2)+Mxy\}$

先就 x^4y 之係數比較之，$L=5$，次令 $x=y=1$，得 $M=5$.

（二）$5(b+c)(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

（三）見問 $2xyz(x+y+z)$.

問 18. 兩式皆有 $x+y+z$ 之因數。

（一）$(x+y+z)(yz+zx+xy)$.

（二）$-(x+y+y)(x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy)$.

問 19.（一），（二），（三）皆三文字之三次同次交代式。

（一）$-(b-c)(c-a)(a-b)$.

（二）$3(y-z)(z-x)(x-y)$.

（三）$-(b-c)(c-a)(a-b)$.

（四）依例3其a, b, c以x^2, y^2, z^2代之，即得其答如次，$-(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$

$$=-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y).$$

問 20. 皆a, b, c之四次同次交代式。

（一）$-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

（二）$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

問 21. 皆三文字之五次同次交代式。

（一）$5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

（二）$-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

（三）$-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

問 22. 所設之式為a, b, c之六次同次交代式，故等於

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+Nabc\}$$

令$L=M=N=-1$〔問〕故答如次。

$$-(b-c)(c-a)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+abc).$$

問 23. 所設之式為a, b, c, d四文字之六次同次交代式。故等於$L(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$

就 a^3b^2c 之係數比較之, $L=1$.

練 習 問 題 V

1. 三次同次對稱式。 答 $(b+c)(c+a)(a+b)$.

2. $24abc$.

3. $2abc$.

4. 三次同次交代式。 答 $-4(b-c)(c-a)(a-b)$.

5. 四次同次對稱式。 答 $12abc(a+b+c)$.

6. 四次同次交代式。 答 $(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

7. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

8. 與 7 之答同。

9. 五次同次對稱式。 答 $80abc(a^2+b^2+c^2)$.

10. $(b+c)(c+a)(a+b)(bc+ca+ab)$.

11. 五次同次交代式。

答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

12. $-(b-c)(c-a)(a-b)(\sum a^2+2\sum bc)$.

13. 六次同次對稱式。 答 $3abc(b+c)(c+a)(a+b)$.

14. 六次同次交代式。 答 $-8(b-c)(c-a)(a-b)(a^3+b^3$

$+c^3+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+abc)$.

15. 所設之式, 爲 a, b, c 之七次同次交代式,

故等於 $(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^4+b^4+c^4)$

$+M(b^3c+bc^3+c^3a+ca^3+a^3b+ab^3)$

$$+N(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+Pabc(a+b+c)\}$$

就兩邊 a^6b 及 b^5c 之係數比較之，得 $L=0$, $M=0$,

又就 b^4c^3 之係數比較之，得 $N=-1$.

又令 $a=-1$, $b=1$, $c=2$, 得 $P=-1$ 故答如次，

$$-(b-c)(c-a)(a-b)\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)\}$$

16. 所設之式爲 a, b, c, d 四文字之六次同次交代式 故與

問 16 同，答亦同。

17. 將所設之式簡之，則其含 x 之項消失，

如 $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

答 $(b-c)(c-a)(a-b)$. 〔參照第四章第 40節例 2〕

18. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

19. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

20. 由問 5.

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$$

$$=12xyz(x+y+z)$$

而被除式令 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=0$ 則皆爲零。

練　習　問　題 VI

1.（二）左邊即 $\{(a+b)+(a-b)\}^2$ 於此注意可也。

（三）左邊爲 $b+c, c+a, a+b$ 之和之平方。

2.（一）（二）依第一章第 15 節公式。

（三）左邊以 $a+b+c+d$ 之因數，分爲四組。

3. 兩邊解括弧。

4.（一）右邊之第一項移於左邊，兩邊各變化之。

（二）先兩邊以 $a+b$ 除之。

（三）先兩邊以 x^2-y^2 除之。

5. 左邊之第一，第二，第三項以 $a=-(b+c)$, $a+b=-c$, $a+c=-b$ 代之。

6. 左邊之 d^3 化爲 $-(a+b+c)^3$ 右邊之三因數，以 $-(b+c)$, $-(c+a)$, $-(a+b)$ 代之，則與第 44 節問 2 之（三）相同。

7. 依第 45 節問 6，其 a, b, c 以 $y-z, z-x, x-y$ 代之。

8. 左邊爲 x 之三次整式，對於 x 之四值 a, b, c 及 d 而爲 1

9.（一）商爲 $x+L$.

則 $x^3+Ax^2-2x+B\equiv(x+L)(x^2+3x+4)$.

先就 x 之係數比較之，$L=-2$.

x^3+故 $Ax^2-2x+B\equiv(x-2)(x^2+3x+4)$ 乃就 x^2 及本

含 x 之項比較之, $A=1$ 及 $B=-8$.

（二）雖亦可命為 $x+L$, 然以 $x+11$ 為便。

答 $B=-3\frac{1}{2}$, $A=-41\frac{1}{2}$.

10. 由 $x=7$, 得 $A=-8$; 由 $x=3$, 得 $B=-12$; 由 $x=5$, 得 $C=20$.

11. 右邊整理之,

得 $(A+B)x^2+(2A-B+C)x+5A-C$.

以與左邊相比較,

得 $A+B=1,\ 2A-B+C=0,\ 5A-C=15.$

解之, $A=2,\ B=-1,\ C=-5.$

12. 令 $y-1=x$.

則左邊為 $(x^3+3x^2+2x+1)(3x+5)$

$$=3x^4+14x^3+21x^2+13x+5$$

右邊為 $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

故 $A=3,\ B=14,\ C=21,\ D=13,\ E=5.$

13. 以係數比較之,

$$\left.\begin{aligned}A+C&=-2\\ AC&=-3\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}B+D&=-2\\ BD&=-3\end{aligned}\right\}$$

解之, $\left.\begin{aligned}A&=-3\\ C&=1\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}A&=1\\ C&=-3\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}B&=-3\\ D&=1\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}B&=1\\ D&=-3\end{aligned}\right\}$

此中尙有適於 $AD+BC=10$ 之條件，

是 $A=-3, C=1, B=1, C=-3$

或 $A=1, C=-3, B=-3, D=1$ 皆爲答數，此二答，因數分解之結果無不相同也。

14. （一）$L=2.$ （二）$L=-2.$

（三）先就 a^3bc 之係數比較之，$L=-2.$

次由 $a=b=1, c=-1$，得 $M=5.$