

Singularitätentheorie

Vorlesung 25

Faktorielle Ringe

DEFINITION 25.1. Ein Integritätsbereich heißt *faktorieller Bereich*, wenn jede Nichteinheit $f \neq 0$ sich als ein Produkt von Primelementen schreiben lässt.

SATZ 25.2. Sei R ein Integritätsbereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) R ist faktoriell.
- (2) Jede Nichteinheit $f \neq 0$ besitzt eine Faktorzerlegung in irreduzible Elemente, und diese Zerlegung ist bis auf Umordnung und Assoziiertheit eindeutig.
- (3) Jede Nichteinheit $f \neq 0$ besitzt eine Faktorzerlegung in irreduzible Elemente, und jedes irreduzible Element ist ein Primelement.

Beweis. (1) \Rightarrow (2). Sei $f \neq 0$ eine Nichteinheit. Die Faktorisierung in Primelemente ist insbesondere eine Zerlegung in irreduzible Elemente, so dass also lediglich die Eindeutigkeit zu zeigen ist. Dies geschieht durch Induktion über die minimale Anzahl der Primelemente in einer Faktorzerlegung. Wenn es eine Darstellung $f = p$ mit einem Primelement gibt, und $f = q_1 \cdots q_r$ eine weitere Zerlegung in irreduzible Faktoren ist, so teilt p einen der Faktoren q_i und nach Kürzen durch p erhält man, dass das Produkt der übrigen Faktoren rechts eine Einheit sein muss. Das bedeutet aber, dass es keine weiteren Faktoren geben kann. Sei nun $f = p_1 \cdots p_s$ und diese Aussage sei für Elemente mit kleineren Faktorisierungen in Primelemente bereits bewiesen. Es sei

$$f = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_r$$

eine weitere Zerlegung mit irreduziblen Elementen. Dann teilt wieder p_1 einen der Faktoren rechts, sagen wir $p_1 u = q_1$. Dann muss u eine Einheit sein und wir können durch p_1 kürzen, wobei wir u^{-1} mit q_2 verarbeiten können, was ein zu q_2 assoziiertes Element ergibt. Das gekürzte Element $p_2 \cdots p_s$ hat eine Faktorzerlegung mit $s - 1$ Primelementen, so dass wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können. (2) \Rightarrow (3). Wir müssen zeigen, dass ein irreduzibles Element auch prim ist. Sei also q irreduzibel und es teile das Produkt fg , sagen wir

$$qh = fg.$$

Für h , f und g gibt es Faktorzerlegungen in irreduzible Elemente, so dass sich insgesamt die Gleichung

$$qh_1 \cdots h_r = f_1 \cdots f_s g_1 \cdots g_t$$

ergibt. Es liegen also zwei Zerlegungen in irreduzible Element vor, die nach Voraussetzung im Wesentlichen übereinstimmen müssen. D.h. insbesondere, dass es auf der rechten Seite einen Faktor gibt, sagen wir f_1 , der assoziiert zu q ist. Dann teilt q auch den ursprünglichen Faktor f . (3) \Rightarrow (1). Das ist trivial. \square

SATZ 25.3. *Ein Hauptidealbereich ist ein faktorieller Ring.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 3.18 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)), Lemma 3.6 (Zahlentheorie (Osnabrück 2016-2017)) und Satz 25.2. \square

KOROLLAR 25.4. *Sei R ein faktorieller Ring und seien a und b zwei Elemente $\neq 0$ mit Primfaktorzerlegungen*

$$a = u \cdot p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \quad \text{und} \quad b = v \cdot p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$$

(wobei die u, v Einheiten sind und die Exponenten auch 0 sein können). Dann gilt $a|b$ genau dann, wenn $r_i \leq s_i$ für alle Exponenten $i = 1, \dots, k$ ist.

Beweis. Wenn die Exponentenbedingung erfüllt ist, so ist $s_i - r_i \geq 0$ und man kann

$$b = vu^{-1} p_1^{s_1 - r_1} \cdots p_k^{s_k - r_k}$$

schreiben, was die Teilbarkeit bedeutet. Die Umkehrung folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in einem faktoriellen Ring. \square

Faktorzerlegung in noetherschen Integritätsbereichen

LEMMA 25.5. *Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Dann besitzt jede Nichteinheit $f \neq 0$ eine Faktorzerlegung in irreduzible Elemente.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es eine Nichteinheit $f \neq 0$ gibt, für die es keine Zerlegung in irreduzible Elemente gibt. Dann ist insbesondere f nicht irreduzibel und somit gibt es eine Zerlegung $f = f_1 g_1$, bei der die Faktoren keine Einheiten sind. Nach Voraussetzung besitzt zumindest ein Faktor, sagen wir f_1 , keine Zerlegung in irreduzible Faktoren. Dabei gilt

$$(f) \subset (f_1),$$

wobei die Inklusion echt ist, da andernfalls g_1 eine Einheit wäre. So fortfahrend kann man eine unendliche Kette von Hauptidealen

$$(f) \subset (f_1) \subset (f_2) \subset \dots$$

konstruieren. Dies widerspricht aber Proposition 9.2 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)). \square

Mit einem ähnlichen Argument kann man die folgende Aussage beweisen.

LEMMA 25.6. *Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich und seien $f, g \neq 0$ Nichteinheiten. Dann gibt es einen maximalen Exponenten n mit $f = g^n h$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 25.16. □

BEISPIEL 25.7. Wir betrachten den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R} (oder auf einer Intervallumgebung des Nullpunktes oder den Ring der Keime stetiger Funktionen). Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{e^{1/x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $\frac{f}{x^n}$ stetig im Nullpunkt fortsetzbar, da

$$\frac{e^{-1/x}}{x^n} = e^{-u} u^n = \frac{u^n}{e^u}$$

für

$$u = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

gegen 0 geht. Somit gilt in diesem Ring die faktorielle Zerlegung

$$f = x^n \cdot g_n$$

für beliebiges n .

LEMMA 25.8. *Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Dann ist R genau dann faktoriell, wenn jedes Primideal in R der Höhe 1 ein Primhauptideal ist.*

Beweis. Sei zuerst R faktoriell und \mathfrak{p} ein Primideal der Höhe 1. Dieses ist nicht das Nullideal und somit gibt es ein Element $f \neq 0$ $f \in \mathfrak{p}$. Dieses besitzt eine Faktorzerlegung

$$f = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$$

in Primelemente und wegen der Primidealeigenschaft gibt es ein Primelement $p \neq 0$ mit $p \in \mathfrak{p}$. Dann liegt die Primidealkette

$$(p) \subseteq \mathfrak{p}$$

vor, und wegen der Höhenbedingung stimmen die beiden Ideale überein.

Sei umgekehrt jedes Primideal der Höhe 1 ein Primhauptideal. Wegen Lemma 25.5 und Satz 25.2 ist lediglich zu zeigen, dass jedes irreduzible Element ein Primelement ist. Sei also $f \neq 0$ irreduzibel und sei $f \in \mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz besitzt \mathfrak{p} die Höhe 1 und nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{p} = (p)$$

mit einem Primelement p . Also ist

$$f = gp$$

und g muss eine Einheit sein. Somit ist f selbst prim. \square

LEMMA 25.9. *Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich und $p \in R$ ein Primelement. Es sei R_p faktoriell und $g \in R$ ein Element, das aufgefasst in R_p prim ist. Dann gilt $g = hp^r$ in R mit einer Einheit oder einem Primelement h .*

Beweis. Wir schreiben $g = hp^r$ mit dem maximal möglichen Exponenten r , den es nach Lemma 25.6 gibt, und behaupten, dass h ein Primelement oder eine Einheit ist. Wir betrachten die Situation, wo h keine Einheit ist, und müssen h als Primelement nachweisen. Es teile h ein Produkt, sagen wir

$$hc = ab.$$

Daraus ergibt sich in R_p , da h wie g prim in R_p ist, dass h einen der Faktoren in R_p teilt. Es gibt also ein $d \in R$ mit

$$h \frac{d}{p^s} = a,$$

also

$$hd = ap^s$$

in R . Bei $s = 0$ ist man fertig. Andernfalls teilt p , da es h wegen der Maximalität des Exponenten nicht teilt, den anderen Faktor d und so erhält man

$$h \frac{d}{p} = ap^{s-1}$$

in R . Induktive Anwendung dieses Arguments liefert das Resultat. \square

LEMMA 25.10. *Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich und $p \in R$ ein Primelement. Es sei R_p faktoriell. Dann ist R selbst faktoriell.*

Beweis. Sei $f \in R$ eine von 0 verschiedene Nichteinheit von R . In R_p gilt

$$f = \frac{g_1}{p^{n_1}} \cdots \frac{g_s}{p^{n_s}}$$

mit g_i , die in R_p prim sind (ein Faktor kann eine Einheit sein). In R gilt somit

$$p^n f = g_1 \cdots g_s.$$

Nach Lemma 25.9 ist

$$g_i = h_i p^{r_i}$$

mit Primelementen oder Einheiten h_i . Somit ist

$$p^n f = p^{r_1 + \cdots + r_s} h_1 \cdots h_s.$$

Da p kein Teiler der h_i ist, kann man p^n vollständig wegekürzen und erhält eine Zerlegung von f in Primfaktoren. \square

SATZ 25.11. *Sei R ein faktorieller Bereich. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ faktoriell.*

Faktorialität regulärer Ringe

SATZ 25.12. *Ein regulärer lokaler Ring ist faktoriell.*

Beweis. Der Ring ist ein Integritätsbereich nach Satz 21.5. Wir beweisen die Faktorialität durch Induktion über die Dimension d des Ringes. Bei $d = 0$ ist nichts zu zeigen, sei also die Faktorialität für lokale reguläre Ringe kleinerer Dimension bekannt. Sei $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Dann ist $R/(f)$ nach Lemma 21.4 regulär und insbesondere ist $R/(f)$ ein Integritätsbereich. Somit ist f ein Primelement von R . Nach Lemma 25.10 genügt es zu zeigen, dass R_f faktoriell ist. Dafür ist nach Lemma 25.8 zu zeigen, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (f)$ der Höhe 1 von R in R_f ein Hauptideal wird. Für jedes Primideal \mathfrak{q} von R_f ist $R_{\mathfrak{q}}$ eine Lokalisierung von R und somit regulär nach Satz 24.2. Da die Dimension von $R_{\mathfrak{q}}$ kleiner als d ist, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, dass $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}$ ein Hauptideal ist. Dies bedeutet, dass \mathfrak{p}_f lokal in R_f ein Hauptideal ist, und zwar vom Rang 1. Nach Korollar 23.8 ist \mathfrak{p}_f ein projektiver R_f -Modul. Nach Satz 24.1 gibt es eine endliche freie Auflösung

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow 0.$$

Dies führt mit der Nenneraufnahme an f zu einer endlichen freien Auflösung

$$0 \longrightarrow (F_r)_f \longrightarrow \cdots \longrightarrow (F_1)_f \longrightarrow (F_0)_f \longrightarrow \mathfrak{p}_f \longrightarrow 0$$

auf R_f . Somit sind die Bedingungen von Lemma Anhang 17.6 erfüllt und man erhält, dass \mathfrak{p}_f durch einen freien R_f -Modul zu einem freien Modul ergänzt werden kann. Wegen der Rangeigenschaft folgt $\mathfrak{p}_f = R_f$ nach Lemma Anhang 17.7, es liegt also ein Hauptideal vor. \square

In der Dimension 1 ist faktoriell und regulär äquivalent, siehe Satz 21.8 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)). In der Dimension 2 gibt es neben den regulären Ringen nur noch einen (nach Komplettierung) weiteren faktoriellen Ring.

SATZ 25.13. *Der Restklassenring $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ ist faktoriell.*

BEMERKUNG 25.14. Es sei V eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit einer isolierten Singularität im Punkt $P \in V$. Das offene Komplement $U = V \setminus \{P\}$ ist glatt, aber im Allgemeinen nicht mehr affin. Bei $K = \mathbb{C}$ ist U eine komplexe Mannigfaltigkeit, ihre Fundamentalgruppe (die man die lokale Fundamentalgruppe von V nennt) ist ein wichtiges Maß für die Singularität, siehe die 9. und die 10. Vorlesung. Nach Satz 21.6 und Satz 25.12 sind die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{V,Q}$ für alle Punkte $Q \neq P$ faktoriell. Ein jedes Primideal der Höhe 1 von R ist daher in diesen lokalen Ringen nach Lemma 25.8 ein Hauptideal. Es liegt also auf U (aber im Allgemeinen nicht auf V) ein lokal freier Modul vom Rang 1 vor. Man spricht auch von *invertierbaren Moduln* auf U bzw., etwas geometrischer, von *Geradenbündel* auf U . Die Menge all dieser invertierbaren Moduln auf

U bilden mit der Tensorierung als Verknüpfung und dem trivialen Objekt, dem freien Modul R , als neutralem Element, eine kommutative Gruppe, die die *Picardgruppe* von U heißt und die eine wichtige Invariante von R ist. Sie ist (bei R normal) genau dann trivial, wenn R faktoriell ist, und ist insofern ein Maß dafür, wie weit die Singularität von der Faktorialität abweicht. Die Picardgruppe der A_n -Singularitäten ist beispielsweise $\mathbb{Z}/(n+1)$, übrigens wie die Fundamentalgruppe, siehe Satz 9.7 oder Beispiel 10.3.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7