Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 88

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 88.1. Es sei M eine berandete Mannigfaltigkeit und ∂M sei der Rand. Zeige, dass der topologische Rand von $M \setminus \partial M$ gleich ∂M ist.

Aufgabe 88.2. Bestimme die Träger der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Eine Polynomfunktion.
(2) Die Sinusfunktion.
(3) Die Exponentialfunktion.
(4) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Z}}$.
(5) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Q}}$.
(6) Die Indikatorfunktion $e_{[a,b]}$.
(7) Die Indikatorfunktion $e_{]a,b[}$.

Aufgabe 88.3. Es sei X ein topologischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Abschluss von T gleich dem Träger der Indikatorfunktion e_T ist.

Aufgabe 88.4. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 88.5. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für den $\mathbb{R}^n$ an.

Aufgabe 88.6. Es sei X ein topologischer Raum. Bestimme zur Überdeckung von X durch X eine untergeordnete Partition der Eins.

Aufgabe 88.7. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Wir betrachten die Familie der Indikatorfunktionen

$$e_P, P \in X.$$

Welche Eigenschaften einer (dieser Überdeckung) untergeordneten Partition der Eins erfüllt diese Familie?

Aufgabe 88.8. Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung $A_n = [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, der reellen Zahlen und die offene Überdeckung $W_n = A^o_{n+1} \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, (es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ mit offenen Intervallen, die die Eigenschaften aus Lemma 88.7 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgabe 88.9. Stifte eine Homöomorphie zwischen der abgeschlossenen Kreisscheibe und dem abgeschlossenen Quadrat.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 88.10. (3 Punkte)

Es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine kompakte Ausschöpfung eines topologischen Raumes X. Zeige, dass die Beziehung

$$A_{n+1} \setminus A^o_n \subseteq A^o_{n+2} \setminus A_{n-1}$$

gilt.

Aufgabe 88.11. (4 Punkte)

Man gebe zur offenen Überdeckung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+3[$$

eine untergeordnete stetige Partition der Eins an.

Aufgabe 88.12. (6 Punkte)

Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung

$$A_n = B\left(0, n\right), n \in \mathbb{N},$$

des $\mathbb{R}^2$ und die offene Überdeckung

$$W_n = A^o_{n+1} \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

(es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung des $\mathbb{R}^2$ mit offenen Kreisscheiben, die die Eigenschaften aus Lemma 88.8 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgabe 88.13. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum, der keine kompakte Ausschöpfung besitzt.