Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 40

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 40.1. Oma Müller und Opa Müller haben heute Geburtstag. Sie wird 69 Jahre alt und er wird 73 Jahre alt. Wie alt waren sie, als man beide Altersangaben zwar mit natürlichen, aber nicht mit positiven natürlichen Zahlen ausdrücken konnte.

Übungsaufgaben

Aufgabe 40.2. Familie A und B notieren ihre Einnahmen und Ausgaben pro Monat in der Form $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, wobei der erste Eintrag für die Einnahmen und der zweite Eintrag für die Ausgaben steht. Familie A notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$$(2500, 2800),\ (3500, 3200),\ (3300, 2900),\ (2800, 2800),\ (2400, 4200),\ (4000, 2700)\,.$$

Familie B notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$$(3300, 3600),\ (3900, 3800),\ (4300, 4300),\ (4000, 3800),\ (3900, 4100),\ (4000, 3700)\,.$$

(1) Notiere für jede Familie und jeden Monat den Gewinn bzw. das Defizit in Paarschreibweise mit Hilfe der Standardrepräsentanten.
(2) Berechne für jede Familie die Gesamteinnahmen und die Gesamtausgaben im angegebenen Zeitraum.
(3) Bestimme auf zwei verschiedene Arten für jede Familie den Gesamtgewinn bzw. das Gesamtdefizit (Standardrepräsentant).
(4) Vergleiche für jeden Monat den Haushalt der beiden Familien mit Hilfe der Festlegung aus Lemma 40.4.

Aufgabe 40.3. Es seien $(M, *)$ und $(N, \circ)$ Mengen mit Verknüpfungen und es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine mit den Verknüpfungen verträgliche surjektive Abbildung, es gelte also

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y).$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $*$ kommutativ ist, so ist auch $\circ$ kommutativ.
(2) Wenn $*$ assoziativ ist, so ist auch $\circ$ assoziativ.
(3) Wenn M ein neutrales Element besitzt, so besitzt auch N ein neutrales Element.

Aufgabe 40.4. Es sei $V \subseteq K^n$ ein Untervektorraum und $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation.

(1) Zeige, dass die affinen Unterräume der Form $P + V$ die Äquivalenzklassen sind.
(2) Es sei $W \subseteq K^n$ ein weiterer Untervektorraum mit
$$V \cap W = \{0\}$$
und derart, dass man jeden Vektor $u \in K^n$ in der Form $u = v + w$ mit $v \in V$ und $w \in W$ schreiben kann. Zeige, dass W ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 40.5. Zeige, dass die Abbildung
$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\, n \longmapsto [(n, 0)],$$
injektiv ist und dass sie mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.6.*

Zeige, dass die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch
$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc\,,$$
festgelegte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 40.7. Zeige, dass bei der auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch
$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc\,,$$
festgelegten Äquivalenzrelation jedes Paar (x, y) einen Vertreter (x', y') besitzt, bei dem x' und y' teilerfremd sind.

Aufgabe 40.8. Zeige, dass man durch die Festlegung
$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ab, cd)]$$
auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine wohldefinierte Verknüpfung erhält, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 1)]$ als neutrales Element besitzt. Zeige ferner, dass bei $a > 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(b, a)]$ und bei $a < 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(-b, -a)]$ invers zueinander sind.

Aufgabe 40.9. Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für $\mathbb{Q}$ die Addition die Beziehung

$$[(a,d)]+[(c,d)] \;=\; [(a+c,d)]$$

erfüllt.

Aufgabe 40.10. Es sei $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ mit der durch

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

festgelegten Äquivalenzrelation versehen. Zeige, dass es zu $(a_1,b_1),(a_2,b_2), \ldots,(a_n,b_n)$ eine Zahl $d \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen $c_1,c_2,\ldots,c_n$ mit $(a_1,b_1) \sim (c_1,d)$, $(a_2,b_2) \sim (c_2,d),\ldots,(a_n,b_n) \sim (c_n,d)$ gibt.

Aufgabe 40.11. Zeige, dass man durch die Festlegung $[(a,b)] \;\geq\; [(c,d)]$, falls $ad \geq bc$, auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) $\mathbb{Q}$ eine wohldefinierte totale Ordnung erhält.

Aufgabe 40.12. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q},\, n \longmapsto [(n,1)],$$

injektiv und mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.13. Es sei M eine Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung $*$ und einem neutralen Element e. Ferner gelte die Kürzungsregel, dass aus $a*c \;=\; b*c$ stets $a \;=\; b$ folgt.

(1) Zeige, dass auf $M \times M$ durch die Festlegung $(a,b) \;\sim\; (c,d)$, falls $a*d \;=\; b*c$ gilt, eine Äquivalenzrelation definiert wird.
(2) Zeige, dass man auf der Quotientenmenge $M \times M/\sim$ eine Gruppenstruktur definieren kann, die die Verknüpfung auf M fortsetzt.

Aufgabe 40.14. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die durch

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, deren Äquivalenzklassen die „diskreten Geraden“ durch den Nullpunkt ohne den Nullpunkt sind.

Aufgabe 40.15. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}^2$ die durch

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass dies keine Äquivalenzrelation ist

Aufgabe 40.16. Es seien D und W Mengen. Wir betrachten auf der Abbildungsmenge $\operatorname{Abb}(D,W)$ diejenige Relation, bei der die Abbildungen

$$f,g\colon D \longrightarrow W$$

in Relation stehen, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\pi\colon D \longrightarrow D$$

mit

$$f = g \circ \pi$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 40.17. Es seien D und W Mengen, wobei D endlich sei. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{Abb}(D,W) \longrightarrow \operatorname{Abb}(W,\mathbb{N}),\ f \longmapsto \left(w \mapsto \#(f^{-1}(w))\right).$$

Einer Abbildung $f\colon D \to W$ wird also die Abbildung zugeordnet, die jedem Wert $w \in W$ die Anzahl seiner Urbilder zuordnet. Finde möglichst viele Interpretationen für diese Situation.

Aufgabe 40.18. Es sei D eine Schulklasse und $W = \{1,2,3,4,5,6\}$ die Menge der Schulnoten. Das Ergebnis einer Klausur ist eine Abbildung $f\colon D \to W$, wobei jedem Schüler $x \in D$ seine in der Klausur erzielte Note $f(x)$ zugeordnet wird. Die zugehörige Notenverteilung ist die Abbildung, die jeder Note $w \in W$ zuordnet, wie oft diese Note in der Klausur vergeben wurde. Die in Aufgabe 40.17 besprochene Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{Abb}(D,W) \longrightarrow \operatorname{Abb}(W,\mathbb{N}),\ f \longmapsto \left(w \mapsto \#(f^{-1}(w))\right),$$

ordnet also dem Klausurergebnis die Notenverteilung zu. Es sei nun

$$\varphi\colon \operatorname{Abb}(D,W) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

die Abbildung, die jedem Klausurergebnis die Durchschnittsnote zuordnet.

(1) Erstelle eine Formel für die Durchschnittsnote zu einem Klausurergebnis f.
(2) Erstelle eine Formel für die Durchschnittsnote zu einer Notenverteilung $h\colon W \to \mathbb{N}$.
(3) Zeige, dass man die Durchschnittsnote zum Klausurergebnis f allein aus der zugehörigen Notenverteilung $\Psi(f)$ berechnen kann.
(4) Zeige, dass es eine Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Abb}(W,\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

mit

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \Psi$$

gibt.

(5) Aus welchen Notenverteilungen ist das Klausurergebnis rekonstruierbar?
(6) Was ist eine sinnvolle Antwort auf die Frage „Wie ist die Klausur ausgefallen“?

Aufgabe 40.19. Es seien D und W Mengen, wobei D endlich sei. Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf Abb (D,W) aus Aufgabe 40.16 und sei

$$\Psi\colon \text{ Abb } (D,W) \longrightarrow \text{Abb } (W,\mathbb{N})\,,\ f \longmapsto \big(w \mapsto \#(f^{-1}(w))\big)\,,$$

die in Aufgabe 40.17 besprochene Abbildung.

(1) Es sei $\pi\colon D \to D$ eine bijektive Abbildung und $f\colon D \to W$ eine Abbildung. Zeige
$$\Psi(f) = \Psi(f \circ \pi).$$
(2) Es seien $f,g\colon D \to W$. Zeige $f \sim g$ genau dann, wenn $\Psi(f) = \Psi(g)$ ist.
(3) Zeige, dass es eine injektive Abbildung
$$\tilde{\Psi}\colon \text{ Abb } (D,W)\,/ \sim \longrightarrow \text{Abb } (W,\mathbb{N})$$
mit $\Psi = \tilde{\Psi} \circ p$ gibt, wobei p die kanonische Projektion in die Quotientenmenge bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 40.20. (2 Punkte)

Zeige, dass die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a,b) \sim (c,d)$, falls $a+d = b+c$ ist, festgelegt ist, durch die Sprünge $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

Aufgabe 40.21. (8 (2+2+2+2) Punkte)

Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a,b) \sim (c,d)$, falls $a+d = b+c$ ist, festgelegt ist, und es sei $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ die zugehörige Quotientenmenge, also das Äquivalenzklassenmodell von $\mathbb{Z}$. Es sei $G = \mathbb{N} \uplus \mathbb{N}_-$ das (in der 18. Vorlesung eingeführte) „direkte Modell“ für die ganzen Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

die durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} (n,0), & \text{falls } n \text{ nichtnegativ ist}\,, \\ (0,m), & \text{falls } n = -m \text{ negativ ist}\,, \end{cases}$$

definiert ist, und die zusammengesetzte Abbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}\,.$$

(1) Zeige, dass $p \circ \varphi$ eine bijektive Abbildung ist.
(2) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Addition verträglich ist.
(3) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Multiplikation verträglich ist.
(4) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Ordnung verträglich ist.

Aufgabe 40.22. (3 Punkte)

Es sei $(M, *, e)$ eine endliche Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung mit einem neutralen Element e. Ferner gelte in M die „Kürzungsregel“: Aus $z * x = z * y$ folgt $x = y$. Zeige, dass M eine Gruppe ist.

Aufgabe 40.23. (1 Punkt)

Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für $\mathbb{Q}$ die Ordnung die Beziehung

$$[(a, d)] \geq [(c, d)]$$

genau dann, wenn

$$a \geq c,$$

erfüllt.

Aufgabe 40.24. (3 (1+1+1) Punkte)

Die Fußballspiele zwischen dem TSV Wildberg und VfB Effringen endeten in den letzten Jahren wie folgt:

$$7:2,\ 3:0,\ 0:0,\ 9:6,\ 8:0,\ 2:1,\ 4:2,\ 3:0,\ 5:5,\ 6:3,\ 3:1,\ 1:1,$$
$$7:0,\ 2:0,\ 6:4,\ 6:2,\ 3:4,\ 3:2.$$

(1) Erstelle die Äquivalenzklassen (auf der Menge der angegebenen Ergebnisse) gemäß der Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $a : b \sim c : d$, falls $a + d = b + c$, definiert ist.
(2) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die $\{n : 0 \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $\{0 : 0\}$ eigene Äquivalenzklassen sind.
(3) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die die anderen Elemente nur zu sich selbst äquivalent sind.

Abbildungsverzeichnis