Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 9

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 9.1. Erstelle eine Liste der Quadratzahlen bis 900.

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.2.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 9.3.*

Wie oft sagt man „bitte", wenn man dreimal „bitte, bitte, bitte" sagt.

Aufgabe 9.4. Bauer Ernst legt einen Kartoffelacker mit 25 Reihen an. Pro Reihe setzt er 120 Setzkartoffeln der Sorte Sieglinde. Diese Sorte ergibt pro Setzkartoffel einen Ertrag von 3 Kilogramm. Wie hoch wird seine Ernte ausfallen?

Aufgabe 9.5. Berechne

$$|||| \cdot |||||\,,$$

ohne auf andere Darstellungsformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

Aufgabe 9.6. Berechne

$$|||| \cdot ||| \cdot |||\,,$$

ohne auf andere Darstellungsformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

Aufgabe 9.7. Berechne $3 \cdot 4$ allein mit den in Satz 9.3 und Satz 8.12 fixierten Rechenregeln.

Aufgabe 9.8. In der Klasse gibt es vier Reihen mit je acht Sitzplätzen, die alle besetzt sind. Vorne stehen Frau Maier-Sengupta und Herr Lutz. Frau Maier Sengupta zählt die Kinder durch, wobei sie reihenweise von (zuerst) links nach rechts und (dann) von vorne nach hinten durchzählt. Herr Lutz zählt die Kinder von rechts hinten nach links vorne, wobei er zuerst die ganz rechts sitzenden Kinder durchzählt u.s.w.

(1) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Frau Maier-Sengupta die Nummer 23 bekommt, von Herrn Lutz?
(2) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Herrn Lutz die Nummer 18 bekommt, von Frau Maier-Sengupta?
(3) Welche Nummer bekommt das Kind, das in der dritten Reihe von vorne auf dem sechsten Stuhl von links sitzt, von den beiden Lehrkräften?

Aufgabe 9.9. Erstelle das kleine Einmaleins im Zweiersystem.

Aufgabe 9.10. Erstelle das kleine Einmaleins im Dreiersystem.

Aufgabe 9.11. Erstelle das kleine Einmaleins im Vierersystem.

Man kann Satz 9.3 auch mit vertauschten Rollen formulieren.

Aufgabe 9.12.*

Beweise den Satz, dass es auf den natürlichen Zahlen genau eine Verknüpfung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

gibt, die

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Aufgabe 9.13. Wir besprechen eine Variante des zweiten Beweises zu Satz 9.3. Es seien m, n positive natürliche Zahlen.

(1) Zeige, dass

$$\{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\} \longrightarrow \{0, \ldots, mn-1\},\ (i, j) \longmapsto in + j,$$

eine bijektive Abbildung ist.

(2) Bringe diese Überlegung mit Aufgabe 2.17 in Verbindung.

(3) Bringe diese Überlegung mit dem Stellenwertsystem zur Basis n in Verbindung.

Aufgabe 9.14. Welches Problem ergibt sich, wenn man Lemma 9.5 durch Induktion über k beweisen möchte?

Aufgabe 9.15. Angenommen, wir würden für die Multiplikation die Anzahl der Produktmenge als Ausgangspunkt (also als Definition) nehmen. Wie wären bei dieser Vorgehensweise die Aussagen Lemma 9.2, Lemma 9.4 und Lemma 9.5 zu beweisen?

Aufgabe 9.16. Man mache sich klar, dass die in der Vorlesung besprochenen Zugänge zur Multiplikation (also über das mehrfache addieren und über die Anzahl der Produktmenge) nicht tragfähig sind für die Multiplikation in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9.17. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.18. Welche Ziffern treten im Dezimalsystem als Endziffern von Quadratzahlen auf?

Aufgabe 9.19. Bestimme die folgenden Potenzen.

(1) Die dritte Potenz der Vier.
(2) Die vierte Potenz der Drei.
(3) Die siebte Potenz der Fünf.
(4) Die neunte Potenz der Zehn.

Aufgabe 9.20. Erstelle das „kleine Einshocheins“. Kann man das allgemeine Potenzieren n^k darauf irgendwie zurückführen?

Aufgabe 9.21.*

Es sei $a \in \mathbb{N}_+$. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

Aufgabe 9.22. Zeige, dass für das Potenzieren die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}$).

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 9.23. Berechne
$$|||^{||||},$$
ohne auf andere Darstellungformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

Aufgabe 9.24. In der Schule wird Potenzrechnung durchgenommen und es geht um die Frage, ob
$$a^b = b^a$$
ist. Als Gründe, dass dies gelten müsste, werden angeführt:

(1) Es gilt ja auch $a+b = b+a$ und $a \cdot b = b \cdot a$, warum sollte das jetzt plötzlich nicht mehr gelten?
(2) Das wäre gut, wenn das gelten würde, dann könnte man die kleinere Zahl immer oben hinschreiben und es wäre einfacher auszurechnen.
(3) Wenn man beispielsweise $a = 2$ und $b = 4$ nimmt, so ist
$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 4 \cdot 4 = 4^2,$$
warum sollte das für andere Zahlen nicht auch gelten?

Aufgabe 9.25. Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (a,b) \longmapsto a^b,$$

weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

Aufgabe 9.26. Erstelle eine rekursive Beziehung für das Potenzieren $a^{(n')}$, wobei n' den Nachfolger von n bezeichnet. Gibt es auch eine rekursive Beziehung für $(a')^n$?

Aufgabe 9.27.*

Zeige, dass für positive natürliche Zahlen a, n, k die Beziehung

$$a^{(n^k)} = \underbrace{\left((\ldots((a^n)^n)^n \ldots)^n\right)^n}_{k \text{ Potenzierungen}}$$

gilt.

Aufgabe 9.28. Bestätige die folgenden Identitäten.

(1)
$$1 + 2^3 = 3^2.$$

(2)
$$2^5 + 7^2 = 3^4.$$

(3)
$$13^2 + 7^3 = 2^9.$$

Aufgabe 9.29.*

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+,\ (a,b) \longmapsto (a+b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

Die folgende Aufgabe liefert eine Anzahlinterpretation für Potenzen.

Aufgabe 9.30. Es sei L eine endliche Menge mit ℓ und M eine Menge mit m Elementen. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen von L nach M genau m^ℓ Elemente besitzt.

Aufgabe 9.31.*

Es sei M eine k-elementige Menge. Wie viele Verknüpfungen gibt es auf M?

Aufgabe 9.32. Gabi Hochster überlegt sich: „Die Addition $a+b$ bedeutet, b-mal den Nachfolger von a nehmen, $a \cdot b$ bedeutet, b-mal a mit sich selbst zu addieren, a^b bedeutet, b-mal a mit sich selbst zu multiplizieren. Dies kann man doch eigentlich unendlich weitermachen, wobei man allerdings auf die Klammerungen achten muss. Also: $a \heartsuit b$ bedeutet, b-mal a mit sich selbst zu potenzieren (Anzahl der Operanden, nicht der Operationen), wobei Rechtsklammerung gelte, $a \clubsuit b$ bedeutet, b-mal a mit sich selbst die $\heartsuit$-Operation durchzuführen, u.s.w. Am besten nennen wir diese Verknüpfungen systematisch $\heartsuit_1$(Addition), $\heartsuit_2, \ldots.$ “

(1) Berechne $3 \heartsuit 2$, $4 \heartsuit 2$, $5 \heartsuit 2$, ...
(2) Berechne $2 \heartsuit 3$, $2 \heartsuit 4$, $2 \heartsuit 5$, ...
(3) Berechne $10 \heartsuit 3$.
(4) Berechne $3 \clubsuit 2$.
(5) Berechne $2 \clubsuit 3$.
(6) Was ist $2 \heartsuit_n 2$ für jedes n?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.33. (2 Punkte)

Berechne $5 \cdot 3$ allein mit den in Satz 9.3 und Satz 8.12 fixierten Rechenregeln.

Aufgabe 9.34. (2 Punkte)

Erstelle das kleine Einmaleins im Fünfersystem.

Aufgabe 9.35. (3 (1+1+1) Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \{1, \ldots, 10\} \times \{1, \ldots, 10\} \longrightarrow \{1, \ldots, 100\},\ (a, b) \longmapsto a \cdot b.$$

(1) Ist φ injektiv?
(2) Ist φ surjektiv?
(3) Was ist das minimale k mit der Eigenschaft, dass unter der Abbildung

$$\psi\colon \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \mathbb{N}_+,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

alle Zahlen zwischen 1 und 100 im Bild liegen (also erreicht werden).

Aufgabe 9.36. (4 Punkte)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1) \prod_{i=1}^{m} (2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m} (4k^2 - 1).$$

AUFGABE 9.37. (8 (1+1+2+2+2) Punkte)

Die modische Winterjacke „Nungiduluxe“ wird in den Größen XS, S, M, L, XL, XXL und in den Farben pink, türkis, lavendel, anthrazit, weinrot, ochsenblut, luisenblau und tschitscheringrün angeboten. Ferner gibt es die Ausführung mit Reißverschluss, mit einfachen Knöpfen und mit einer Doppelknopfreihe, sowie mit und ohne Kapuze.

(1) Beschreibe die Menge der möglichen Nungiduluxe-Jacken als eine Produktmenge.
(2) Wie viele Nungiduluxe-Jacken gibt es?
(3) Der Grundpreis der Jacke beträgt 200 Euro, für die Größen XL und XXL wird ein Aufschlag von 10 Euro, für die Doppelknopfreihe wird ein Aufschlag von 8 Euro und für die Kapuze wird ein Aufschlag von 12 Euro verlangt. Wie viele Jacken gibt es, die mindestens 220 Euro kosten?
(4) Lucy Sonnenschein möchte sich eine Nungiduluxe-Jacke kaufen. Sie hat Größe M und möchte maximal 215 Euro ausgeben. Anthrazit und weinrot kommt für sie nicht in Frage, und sie findet, dass Reißverschlüsse meistens klemmen. Da sie zufällig eine luisenblaue und eine tschitscheringrüne Mütze hat, wäre bei diesen Farbe die Kapuze unsinnig. Alle verbleibenden Möglichkeiten möchte sie gerne anprobieren. Wie viele Jacken bestellt sie?
(5) Die Bestellung von Lucy trifft auf folgende Schwierigkeiten: In der Größe M sind die Farben pink und lavendel in jeder Ausführung ausverkauft und ochsenblut gibt es nur noch mit Reißverschluss. Türkis gibt es nur gleichzeitig mit Doppelknopfreihe und Kapuze und luisenblau nur mit der einfachen Knopfreihe. Wie viele Jacken werden geliefert?

Abbildungsverzeichnis