**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2018/2019**

# Körper- und Galoistheorie

## Arbeitsblatt 12

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine kommutative Gruppe und $A$ eine $D$-graduierte kommutative $K$-Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der $K$-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von $A$ ist.

Aufgabe 12.2. Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine kommutative Gruppe und $A$ eine $D$-graduierte kommutative $K$-Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D | \, A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von $D$ ist.

Aufgabe 12.3. Es sei $K$ ein kommutativer Ring, $D$ eine kommutative Gruppe und $A = \bigoplus_{d \in D} A_d$ eine $D$-graduierte $K$-Algebra. Es sei $f \in A$ eine homogene Einheit vom Grad $d$. Zeige, dass das inverse Element $f^{-1}$ homogen vom Grad $-d$ ist.

Aufgabe 12.4. Wir betrachten die $\mathbb{Z}/(10)$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra

$$L = \mathbb{Q}[X]/\left(X^{10} - 5\right) = \mathbb{Q} \oplus 5^{\frac{1}{10}} \cdot \mathbb{Q} \oplus 5^{\frac{2}{10}} \cdot \mathbb{Q} \oplus 5^{\frac{3}{10}} \cdot \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus 5^{\frac{8}{10}} \cdot \mathbb{Q} \oplus 5^{\frac{9}{10}} \cdot \mathbb{Q}.$$

(1) Berechne das Inverse von
$$5^{\frac{1}{10}}.$$
(2) Berechne
$$\left(5^{\frac{7}{10}}\right)^4.$$
(3) Berechne
$$\left(\frac{2}{7} - \frac{4}{3} \cdot 5^{\frac{3}{10}} - 5 \cdot 5^{\frac{8}{10}}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4} \cdot 5^{\frac{5}{10}} + 4 \cdot 5^{\frac{7}{10}} - \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{9}{10}}\right).$$
(4) Bestimme graduierte Unterringe von $L$.

AUFGABE 12.5. Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine $D$-graduierte Körpererweiterung. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der $K$-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterkörper von $A$ ist.

AUFGABE 12.6. Es sei $K$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Zeige, dass eine quadratische Körpererweiterung $K \subseteq L$ graduiert ist.

AUFGABE 12.7. Es sei $\epsilon = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ die dritte komplexe Einheitswurzel. Zeige, dass die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\epsilon] = L \subseteq \mathbb{C}$$

graduiert ist.

AUFGABE 12.8. Zeige, dass eine $\mathbb{Z}/(n)$-graduierte Körpererweiterung einfach ist.

AUFGABE 12.9. Es sei $K \subseteq L$ eine $D$-graduierte Körpererweiterung, wobei $D$ nicht zyklisch sei. Zeige, dass die Körpererweiterung nicht von einem homogenen Element erzeugt wird.

AUFGABE 12.10.*

Es seien $p, q \in \mathbb{Z}$ verschiedene Primzahlen und

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$$

die zugehörige Körpererweiterung vom Grad 4. Bestimme, ob die folgenden Elemente die $\mathbb{Q}$-Algebra $L$ erzeugen oder nicht.

(1) $\sqrt{p}$,
(2) $\sqrt{p} + \sqrt{q}$,
(3) $\sqrt{pq}$,
(4) $\sqrt{p} + \sqrt{pq}$.

AUFGABE 12.11. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}\mathrm{i}] = L.$$

(1) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{7}\mathrm{i}$.
(2) Zeige, dass der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ gleich 4 ist.

(3) Finde einen echten Zwischenkörper
$$\mathbb{Q} \subset M \subset L.$$
(4) Zeige, dass $L$ eine $\mathbb{Z}/(4)$-graduierte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.
(5) Zeige, dass $L[\mathrm{i}] = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}, \mathrm{i}]$ eine $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)$- graduierte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Durch welche Untergruppe von $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)$ wird $L$ beschrieben?

Aufgabe 12.12. Sei $D$ eine Gruppe, $K$ ein Körper und $D^\vee = \mathrm{Char}\,(D, K)$ die Charaktergruppe zu $D$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) $D^\vee$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Bei einer direkten Gruppenzerlegung $D = D_1 \times D_2$ ist $(D_1 \times D_2)^\vee = D_1^\vee \times D_2^\vee$.

Aufgabe 12.13. Sei $D$ eine endliche Gruppe, $K$ ein Körper und $\chi \in D^\vee = \mathrm{Char}\,(D, K)$ ein Charakter. Zeige, dass $\chi(d)$ für jedes $d \in D$ eine Einheitswurzel in $K$ ist.

Aufgabe 12.14.*

Es seien $D_1$ und $D_2$ kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper $K$.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon D_1 \to D_2$ durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus $\varphi^\vee\colon D_2^\vee \to D_1^\vee$ definiert wird.
(2) Es sei $D_3$ eine weitere kommutative Gruppe und sei $\psi\colon D_2 \to D_3$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit
$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Aufgabe 12.15. Es sei $D$ eine kommutative Gruppe und $K$ ein Körper.

a) Zeige, dass durch
$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$
ein natürlicher Gruppenhomomorphismus von $D$ in das Doppeldual $(D^\vee)^\vee$ gegeben ist.

b) Es sei nun $D$ endlich und es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass dann die Abbildung aus a) ein Isomorphismus ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe auftretende Abbildung $\mathrm{ev}_d$ heißt *Evaluierungsabbildung* (zu $d$).

Aufgabe 12.16. Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe und es sei $K$ ein Körper. Wir betrachten die Zuordnung

$$E \longmapsto E^{\perp} = \{\chi \in D^{\vee} |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}\ ,$$

die einer Untergruppe von $D$ eine Untergruppe von $D^{\vee}$ zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Die Zuordnung ist inklusionsumkehrend.

b) Unter der kanonischen Abbildung

$$D \longrightarrow (D^{\vee})^{\vee},\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$

ist $\mathrm{ev}_d(E) \subseteq (E^{\perp})^{\perp}$.

c) Es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass dann $\mathrm{ev}_d(E) = (E^{\perp})^{\perp}$ gilt.

Aufgabe 12.17. Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten $m$, und es sei $K$ ein Körper, der eine primitive $m$-te Einheitswurzel besitzt. Zeige, dass die Zuordnungen

$$E \longmapsto E^{\perp} = \{\chi \in D^{\vee} |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}$$

und

$$H \longmapsto H^{\perp} = \{d \in D |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } \chi \in H\}$$

(zwischen den Untergruppen von $D$ und den Untergruppen von $D^{\vee}$) zueinander invers sind.

Aufgabe 12.18. Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten $m$, und es sei $K$ ein Körper, der eine primitive $m$-te Einheitswurzel besitzt. Zeige, dass in der in Aufgabe 12.17 beschriebenen Korrespondenz zwischen den Untergruppen von $D$ und von $D^{\vee}$ Durchschnitte von Untergruppen in die Summe von Untergruppen überführt werden. Es gilt also

$$(E_1 \cap E_2)^{\perp} \;=\; E_1^{\perp} + E_2^{\perp}.$$

Aufgabe 12.19. Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X,Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: $F$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 12.20. Zeige, dass es im Polynomring in $n$ Variablen genau $\binom{d+n-1}{n-1}$ Monome vom Grad $d$ gibt.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine kommutative Gruppe und $A$ eine $D$-graduierte $K$-Algebra. Ein $K$-Automorphismus $\varphi\colon A \to A$ heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

Aufgabe 12.21. Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine kommutative Gruppe und $A$ eine $D$-graduierte kommutative $K$-Algebra. Zeige, dass der in Lemma 12.15 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus $\varphi_\chi\colon\ A \to A$ homogen ist.

Aufgabe 12.22. Wir betrachten die $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$-graduierte Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}]$$

und den durch $\chi(e_1) = -1$, $\chi(e_2) = 1$, $\chi(e_3) = -1$, gegebenen Charakter. Bestimme

$$\varphi_\chi \left(3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 6\sqrt{7} + \sqrt{15} - 4\sqrt{21} + 3\sqrt{35} - 5\sqrt{105}\right).$$

Aufgabe 12.23. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq L := \mathbb{Q}[\mathrm{i}, \sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\zeta_8]$$

mit $\zeta_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}\right)$ gemäß Beispiel 12.9. Zeige, dass die Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ ist.

Aufgabe 12.24.*

Wir betrachten die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \mathrm{i}] = L\,.$$

a) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$.

b) Beschreibe eine möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Basis von $L$.

c) Zeige, dass eine graduierte Körpererweiterung vorliegt. Was ist die graduierende Gruppe?

d) Bestimme die $\mathbb{Q}$-Automorphismen von $L$.

e) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Aufgabe 12.25. Es sei $G$ die Menge der stetigen geraden Funktionen und $U$ die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$-graduierte $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Aufgabe 12.26. Bestimme die Galoisgruppe des fünften Kreisteilungskörpers

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\zeta_5]$$

mit $\zeta_5 = e^{2\pi \mathrm{i}/5}$.

Aufgabe 12.27.*

Zeige, dass der fünfte Kreisteilungskörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\zeta_5]$ mit $\zeta_5 = e^{2\pi \mathrm{i}/5}$ nicht graduierbar ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.28. (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper, $D$ eine kommutative Gruppe und $A$ eine $D$-graduierte kommutative $K$-Algebra. Es sei $\varphi\colon A \to A$ ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^\vee$ mit $\varphi = \varphi_\chi$ gibt, wobei $\varphi_\chi$ der gemäß Lemma 12.15 zu $\chi$ gehörige Automorphismus ist.

Aufgabe 12.29. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, eine $\mathbb{Q}$-Basis von $L$ bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.

Aufgabe 12.30. (5 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(2) Für alle $n$-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 12.31. (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten $m$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) $K$ besitzt eine $m$-te primitive Einheitswurzel.
(2) Zu jedem Primpotenzteiler $p^r$ von $m$ besitzt $K$ eine $p^r$-te primitive Einheitswurzel.
(3) Zu jedem Teiler $n$ von $m$ besitzt $K$ eine $n$-te primitive Einheitswurzel.
(4) Zu jeder Ordnung $n$ eines Elementes $d \in D$ besitzt $K$ eine $n$-te primitive Einheitswurzel.

AUFGABE 12.32. (4 (1+3) Punkte)

Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe und $E \subseteq D$ eine Untergruppe. Es sei $K$ ein Körper.

a) Zeige, dass der Kern des natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\psi\colon D^{\vee} \longrightarrow E^{\vee},\, \chi \longmapsto \chi|_E,$$

gleich $E^{\perp}$ ist.

b) Es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel besitzt, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass $\psi$ surjektiv ist.

## Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9