# Equazioni e disequazioni con moduli 7

## 7.1 Valore assoluto

Riprendiamo la definizione già vista in "Algebra 1" di valore assoluto. Il *valore assoluto* o *modulo* di un numero $a$, indicato con $|a|$, è lo stesso numero $a$ se esso è maggiore o uguale a zero, o il suo opposto, cioè $-a$, se è minore di zero. In sintesi scriviamo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geqslant 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio $|+7| = 7,\ |-3| = -(-3) = 3,\ |0| = 0,\ |-1| = 1,\ |1| = 1$.

In maniera analoga definiamo il valore assoluto di un'espressione algebrica. Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $E = x^2 - 3x$, indicato con $\left|x^2 - 3x\right|$, è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio,

$$f(x) = \left|x^2 - 3x\right| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geqslant 0 \\ -\left(x^2 - 3x\right) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}.$$

Risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geqslant 0$ si esplicitano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche, cioè

$$f(x) = \left|x^2 - 3x\right| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3 \\ -x^2 + 3x & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}.$$

In generale, la funzione *valore assoluto* o *modulo* di un'espressione algebrica viene definita come:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

La funzione $f(x)$ è detta *argomento del valore assoluto*.

---

**Esempio 7.1.** Per la funzione $f(x) = \left|\sqrt{3} + 3x\right|$ trovare le espressioni algebriche che descrivono i due casi.

Per definizione si ha:

$$f(x) = \left|\sqrt{3} + 3x\right| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x & \text{se } \sqrt{3} + 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} - 3x & \text{se } \sqrt{3} + 3x < 0 \Rightarrow x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

**Esempio 7.2.** Data la funzione $f(x) = \left|x^2 - 4\right| + |x+1| - 2x$ descriverla per casi, eliminando i valori assoluti.

Dobbiamo studiare i segni dei due binomi in valore assoluto

$$\begin{array}{lll} x^2 - 4 \geqslant 0 & \Rightarrow & x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2 \text{ e} \\ x+1 \geqslant 0 & \Rightarrow & x \geqslant -1. \end{array}$$

La situazione è rappresentata con maggiore chiarezza nel grafico seguente.

| Segno di | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ | |

- Nell'intervallo $x \leqslant -2$ l'argomento del primo valore assoluto è positivo o uguale a 0 per $x = -2$ e quello del secondo è negativo;
- nell'intervallo $-2 < x < -1$ tutti e due gli argomenti del valore assoluto sono negativi;
- nell'intervallo $-1 \leqslant x \leqslant 2$ l'argomento del primo valore assoluto è negativo o uguale a 0 per $x = 2$, quello del secondo è positivo o uguale a 0 per $x = 1$;
- nell'intervallo $x > 2$ entrambi gli argomenti sono positivi.

In sintesi

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4) - (x+1) - 2 & \text{se } x \leqslant -2 \\ -(x^2-4) - (x+1) - 2x & \text{se } -2 < x < -1 \\ -(x^2-4) + (x+1) - 2x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ (x^2-4) + (x+1) - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.1, 7.2, 7.3

## 7.2 Equazioni in una incognita in valore assoluto

### 7.2.1 Equazioni nelle quali l'incognita è presente solo all'interno del modulo

- Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)| = k$ con $k \geqslant 0$.

---

**Esempio 7.3.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2 - 7\right| = 3$.

Per la definizione di valore assoluto si ha che $\left|x^2-7\right| = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{se } x^2 - 7 \geqslant 0 \\ -x^2+7 & \text{se } x^2-7 < 0 \end{cases}$, pertanto l'equazione diventa

$$\left|x^2-7\right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7 = 3 & \text{se } x^2-7 \geqslant 0 \\ -x^2+7 = 3 & \text{se } x^2 - 7 < 0 \end{cases}$$

ovvero il tutto equivale all'unione dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2-7 \geqslant 0 \\ x^2 - 7 = 3 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 7 < 0 \\ -x^2+7 = 3 \end{array} \right. .$$

Moltiplicando per $-1$ ambo i membri dell'equazione del secondo sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x^2-7 \geqslant 0 \\ x^2-7=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-7<0 \\ x^2-7=-3 \end{cases}.$$

Si vede abbastanza facilmente che sia nel primo che nel secondo sistema le due disequazioni sono sempre verificate. Infatti, nel primo sistema l'equazione $x^2-7=3$ verifica automaticamente la disequazione $x^2-7 \geqslant 0$ in quanto è richiesto che $x^2-7$ sia uguale a 3, pertanto è necessariamente positivo. Stesso ragionamento vale per il secondo sistema. In altre parole, per risolvere la disequazione data è sufficiente risolvere le due equazioni $x^2-7=3$ e $x^2-7=-3$ unendone le soluzioni. Quindi

$$\begin{array}{l} x^2-7=3 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x_1=-\sqrt{10} \vee x_2=\sqrt{10} \text{ e} \\ x^2-7=-3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_3=-2 \vee x_4=2. \end{array}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi: $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2, +2\}$.

---

**Procedura risolutiva** Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)|=k$ con $k \geqslant 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $f(x)=\pm k$.

---

**Esempio 7.4.** Risolvere la seguente equazione $|x^2-x|=1$.

L'equazione $|x^2-x|=1$ si risolve unendo le soluzioni delle equazioni $x^2-x=1$ e $x^2-x=-1$. cioè:

$$\begin{array}{llll} x^2-x=1 & \Rightarrow x^2-x-1=0 & \Rightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{e} \\ x^2-x=-1 & \Rightarrow x^2-x+1=0 & \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \text{I.S.}=\emptyset. & \end{array}$$

L'insieme soluzione dell'equazione data è quindi

$$\text{I.S.}=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

---

➡ Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k<0$.

Se $k<0$ l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)|=k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione è sempre un valore positivo.

---

**Esempio 7.5.** Risolvere la seguente equazione $|x-7|=-1$. Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale presentato nell'esempio 7.3. L'equazione corrisponde alla soluzione dell'unione dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} x-7 \geqslant 0 \\ x-7=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-7<0 \\ x-7=1 \end{cases}.$$

Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è impossibile.

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7

### 7.2.2 Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

---

**Esempio 7.6.** Risolvere la seguente equazione $|-1+3x| = 7x+4$.

L'equazione presenta un valore assoluto al primo membro.

Tenendo conto che

$$|-1+3x| = \begin{cases} -1+3x & \text{se } \; -1+3x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3} \\ 1-3x & \text{se } \; -1+3x < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases},$$

l'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ -1+3x = 7x+4 \end{cases} \cup \begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \\ 1-3x = 7x+4 \end{cases}.$$

Risolvendo si ha

$$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ 4x = -5 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \\ 10x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{10} \end{cases}.$$

La soluzione $-\dfrac{5}{4}$ non è accettabile in quanto non è maggiore di $\dfrac{1}{3}$. Pertanto rimane la soluzione $x = -\dfrac{3}{10}$ (che è minore di $\dfrac{1}{3}$).

**Esempio 7.7.** Risolvere la seguente equazione $|-2x+5| = x-3$.

Esplicitiamo i due casi dell'argomento

$$|-2x+5| = \begin{cases} -2x+5 & \text{se } \; -2x+5 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{5}{2} \\ 2x-5 & \text{se } \; -2x+5 < 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

L'equazione si trasforma quindi nell'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{2} \\ -2x+5 = x-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ 2x-5 = x-3 \end{cases}.$$

Risolviamo ciascun sistema

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{2} \\ -3x = -8 \Rightarrow x = \dfrac{8}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

ognuno dei quali risulta impossibile, cioè $\text{I. S.}_1 = \emptyset$ e $\text{I. S.}_2 = \emptyset$.

Quindi l'insieme soluzione dell'equazione data è $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2 = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$: l'equazione è impossibile.

**Esempio 7.8.** Risolvere la seguente equazione $|2x-1| = x+2$.

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1 = x+2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ -2x+1 = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni sono $x = 3$ e $x = -\dfrac{1}{2}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.16

## 7.3 Equazioni con più espressioni in valore assoluto

---

**Esempio 7.9.** Risolvere la seguente equazione $|2x-3| - |1-2x| + x = 4$.

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna espressione sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno allora quattro casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento studiamo il segno di ciascun argomento e poi confrontiamo i segni con uno schema grafico:

| Segno di | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | r |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | $-$ | | $-$ | • | $+$ | |
| $1-2x$ | $+$ | • | $-$ | | $-$ | |

Si presentano tre casi:

- Caso I: $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -(2x-3) - (1-2x) + x = 4 \end{cases}$;
- Caso II: $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2} \\ -(2x-3) + (1-2x) + x = 4 \end{cases}$;
- Caso III: $\begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ (2x-3) + (1-2x) + x = 4 \end{cases}$.

In ogni sistema la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo.

Caso I:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -(2x-3) - (1-2x) + x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{I.S.}_1 = \emptyset.$$

Il sistema è impossibile in quanto 2 non è minore di $\frac{1}{2}$.

Caso II:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2} \\ -(2x-3) + (1-2x) + x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{I.S.}_2 = \emptyset.$$

Il sistema è impossibile in quanto 0 non appartiene all'intervallo $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Caso III:

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow \text{I. S.}_3=\{6\}.$$

La soluzione in questo caso è accettabile.

Conclusione: $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2 \cup \text{I. S.}_3 = \{6\}$.

**Esempio 7.10.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2-4\right|-3x=|x-1|$.

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:

| Segno di | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ | |

In questo esempio dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

- Caso I:

$$\begin{cases} x<-2 \\ x^2-4-3x=-x+1 \Rightarrow x_1=1-\sqrt{6} \vee x_2=1+\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{I. S.}_1=\emptyset.$$

- Caso II:

$$\begin{cases} -2 \leqslant x<1 \\ -x^2+4-3x=-x+1 \Rightarrow x_1=-3 \vee x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \text{I. S.}_2=\emptyset.$$

- Caso III:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x<2 \\ -x^2+4-3x=x-1 \Rightarrow x_1=-5 \vee x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \text{I. S.}_3=\{1\}.$$

- Caso IV:

$$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^2-4-3x=x-1 \Rightarrow x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \text{I. S.}_4=\left\{2+\sqrt{7}\right\}.$$

Conclusione: $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2 \cup \text{I. S.}_3 \cup \text{I. S.}_4 = \left\{1, 2+\sqrt{7}\right\}$.

---

**Procedura 7.1.** *Risoluzione di un'equazione con valori assoluti:*

*a )* l'incognita è presente solo nell'argomento del modulo. *L'equazione è del tipo* $|f(x)|=k$ *e si risolve studiando* $f(x)=\pm k$. *Se* $k<0$ *l'equazione è impossibile;*

*b )* l'incognita si trova anche al di fuori del modulo. *Si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione degli insiemi soluzione dei due sistemi;*

*c )* è presente più di un modulo che ha l'incognita nel proprio argomento. *Si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi si risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione degli insiemi soluzione dei vari sistemi.*

✍ *Esercizi proposti:* 7.17, 7.18, 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.23, 7.24, 7.25, 7.26, 7.27, 7.28, 7.29, 7.30

## 7.4 Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni con i moduli si risolvono in modo analogo alle equazioni con moduli.

### 7.4.1 Disequazioni in cui l'incognita si trova solo nel modulo

➡ Disequazioni con valore assoluto nella forma $|f(x)| < k$ con $k > 0$.

La disequazione si risolve studiando l'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) < k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -k \end{cases}$$

che hanno soluzioni $0 \leqslant f(x) < k \ \vee \ -k < f(x) < 0$ cioè:

$$-k < f(x) < k \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}.$$

---

**Esempio 7.11.** Risolvere la seguente disequazione $|x^2 - 1| < 3$.

La disequazione diventa $-3 < x^2 - 1 < 3$ oppure

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 3 \\ x^2 - 1 > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 > -2 \end{cases}.$$

La prima disequazione $x^2 < 4$ è verificata per $-2 < x < 2$.

La seconda è sempre verificata perché il quadrato $x^2$ è sempre maggiore di un numero negativo. L'insieme soluzione della disequazione assegnata è quindi $-2 < x < 2$.

---

➡ Disequazioni con valore assoluto nella forma $|f(x)| > k$ con $k > 0$.

La disequazione si risolve studiando l'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) < -k \end{cases}$$

che hanno soluzioni

$$f(x) < -k \ \vee \ f(x) > k.$$

---

**Esempio 7.12.** Risolvere la seguente equazione $|x^2 - 4| > 4$.

L'equazione diventa $x^2 - 4 < -4 \ \vee \ x^2 - 4 > 4$. Spostando $-4$ al secondo membro otteniamo $x^2 < 0 \ \vee \ x^2 > 8$.

La prima disequazione $x^2 < 0$ non ha soluzioni in quanto il quadrato $x^2$ non può essere minore di 0. La seconda ha per soluzioni $x < -2\sqrt{2} \ \vee \ x > 2\sqrt{2}$.

---

### 7.4.2 Disequazioni in cui l'incognita si trova anche fuori dal modulo

**Esempio 7.13.** Risolvere la seguente disequazione $\left|x^2 - x\right| < 2x^2 + 3x - 1$.

Studiamo il segno dell'argomento del modulo

$$x^2 - x \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1.$$

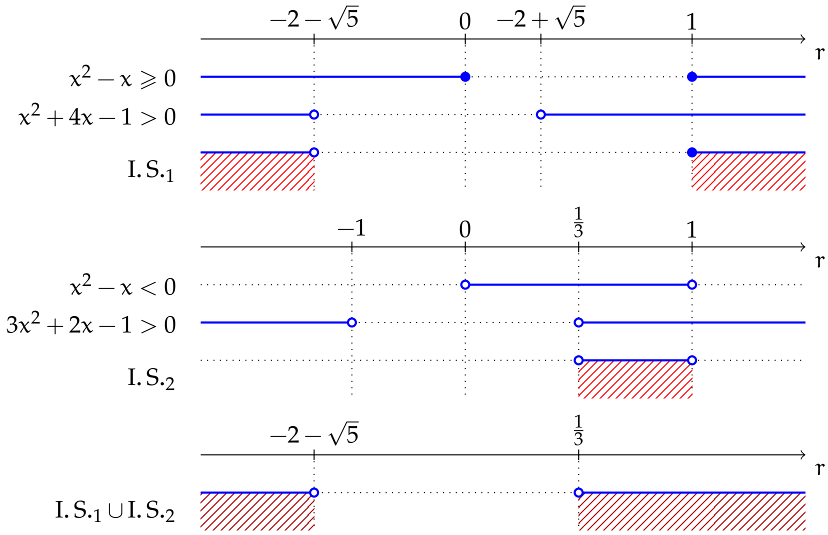
La disequazione assegnata si sdoppia nell'unione di due sistemi:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \ \vee \ x \geqslant 1 \\ x^2 - x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 + x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases}.$$

Semplificando le disequazioni si ha:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \ \vee \ x \geqslant 1 \\ x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}.$$

Quindi rappresentiamo gli insiemi soluzione dei due sistemi in uno schema, così possiamo trovare agevolmente l'insieme soluzione della disequazione data.

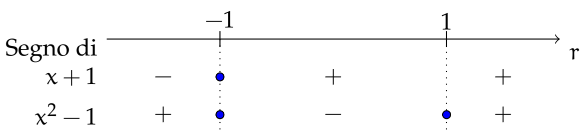



L'insieme soluzione della disequazione data è $x < -2 - \sqrt{5} \ \vee \ x > \dfrac{1}{3}$.

### 7.4.3 Disequazioni con più valori assoluti

**Esempio 7.14.** Risolvere la seguente disequazione $|x+1| \geqslant \left|x^2 - 1\right|$.

Studiamo il segno di ciascun argomento e poi confrontiamo i segni con uno schema grafico:



Si presentano tre casi, quindi tre sistemi:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -(x-1) \geqslant x^2 - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x+1 \geqslant -\left(x^2-1\right) \end{cases} \cup \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x+1 \geqslant x^2 - 1 \end{cases}.$$

Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \\ x^2 + x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}.$$

In questo caso non si hanno soluzioni: $\mathrm{I.S.}_1 = \emptyset$.

Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x^2 + x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x \leqslant -1 \vee x \geqslant 0 \end{cases}.$$

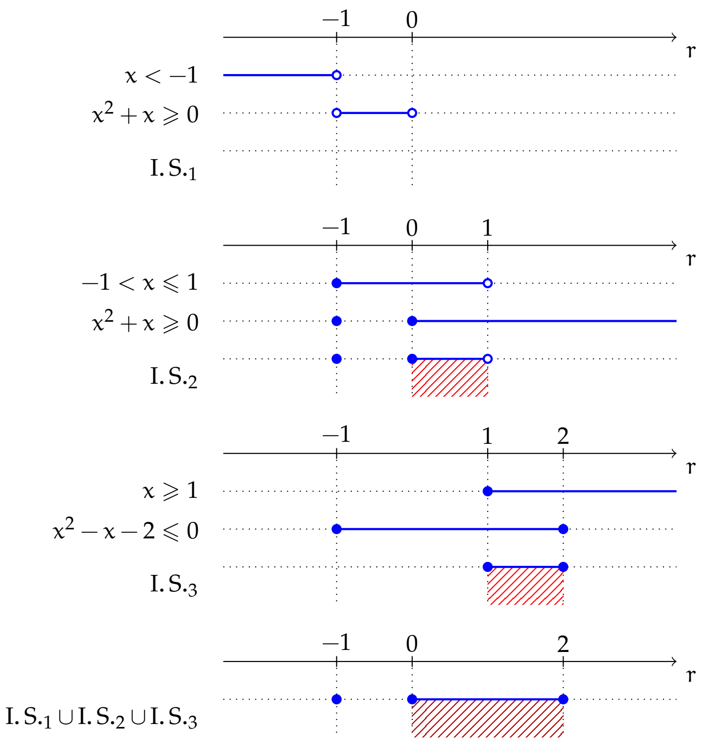
In questo caso le soluzioni sono: $0 \leqslant x < 1 \vee x \geqslant 0$.

Risolviamo il terzo sistema:

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 - x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}.$$

In questo caso le soluzioni sono: $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Adesso rappresentiamo gli insiemi soluzione dei tre sistemi in uno schema, così possiamo trovare l'insieme soluzione della disequazione data.




Unendo tutte le soluzioni si ha: $x = -1 \ \vee \ 0 \leqslant x \leqslant 2$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.31, 7.32, 7.33, 7.34, 7.35, 7.36, 7.37