Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 21

Normale Ringe

Definition 21.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ die Menge der Nichtnullteiler von R. Dann nennt man die Nenneraufnahme R_S den *totalen Quotientenring* von R. Er wird mit $Q(R)$ bezeichnet.

Definition 21.2. Ein kommutativer Ring heißt *normal*, wenn er ganz-abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring ist.

Definition 21.3. Sei R ein kommutativer Ring und $Q(R)$ sein totaler Quotientenring. Dann nennt man den ganzen Abschluss von R in $Q(R)$ die *Normalisierung* von R.

Beispiel 21.4. Wir bestimmen die Normalisierung des Ringes $K[X,Y]/(XY)$ über einem Körper K. Das Element $X+Y$ ist ein Nichtnullteiler und für das Element $\frac{X-Y}{X+Y}$ aus dem totalen Quotientenring $Q(R)$ gilt

$$\left(\frac{X-Y}{X+Y}\right)^2 = \frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2} = \frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2} = 1,$$

d.h. dieses Element erfüllt eine Ganzheitsgleichung und gehört somit zur Normalisierung.

Diskrete Bewertungsringe

Definition 21.5. Ein *diskreter Bewertungsring* R ist ein Hauptidealbereich mit der Eigenschaft, dass es bis auf Assoziiertheit genau ein Primelement in R gibt.

Definition 21.6. Zu einem Element $f \in R$, $f \neq 0$, in einem diskreten Bewertungsring mit Primelement p heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f = up^n$, wobei u eine Einheit bezeichnet, die *Ordnung* von f. Sie wird mit $\operatorname{ord}(f)$ bezeichnet.

Lemma 21.7. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (p)$. Dann hat die Ordnung*

$$R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},\, f \longmapsto \operatorname{ord}(f),$$

folgende Eigenschaften.

(1) $\operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord}(f) + \operatorname{ord}(g)$.

(2) $\operatorname{ord}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g)\}$.
(3) $f \in \mathfrak{m}$ *genau dann, wenn* $\operatorname{ord}(f) \geq 1$.
(4) $f \in R^{\times}$ *genau dann, wenn* $\operatorname{ord}(f) = 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.7. □

Wir zitieren den folgenden Charakterisierungssatz, der insbesondere besagt, dass normale lokale eindimensionale Integritätsbereiche diskrete Bewertungsringe und somit faktoriell und regulär sind. Dies bedeutet wiederum für einen normalen noetherschen Integritätsbereich R, dass sämtliche Lokalisierungen an Primidealen der Höhe 1 diskrete Bewertungsringe sind.

SATZ 21.8. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit der Eigenschaft, dass es genau zwei Primideale $0 \subset \mathfrak{m}$ gibt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*
(2) *R ist ein Hauptidealbereich.*
(3) *R ist faktoriell.*
(4) *R ist normal.*
(5) *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*

LEMMA 21.9. *Es sei K ein Körper, B ein diskreter Bewertungsring über K, dessen Restklassenkörper gleich K ist. Dann ist die Ordnung von einem Element $f \in B$, $f \neq 0$, gleich der K-Vektorraumdimension von $B/(f)$.*

Beweis. Dies folgt aus Aufgabe 21.2 durch Induktion über die Ordnung von f. □

Normale Schemata

DEFINITION 21.10. Ein Schema heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_x$ zu $x \in X$ ein normaler Ring ist.

LEMMA 21.11. *Für ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *X ist normal.*
(2) *Für jede offene affine Teilmenge $U = \operatorname{Spek}(R)$ von X ist R ein normaler Ring.*
(3) *Es gibt eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$, wobei R_i ein normaler Ring ist.*

Beweis. Von (2) nach (3) ist eine Einschränkung. Sei (3) erfüllt. Für einen jeden Punkt $x \in X$ gibt es somit eine offene affine Umgebung

$$x \in U = \operatorname{Spek}(R) \subseteq X$$

mit R normal. Dabei ist $\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus R. Nach Satz 23.3 (Kommutative Algebra) ist $R_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls normal. $\square$

Satz 21.12. *Es sei R ein normaler noetherscher Integritätsbereich. Dann ist*

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}},$$

wobei $\mathfrak{p}$ über alle Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 von R läuft.

Beweis. Sei $f = g/h \in Q(R)$ und sei vorausgesetzt, dass f nicht zu R gehört. Dann gibt es nach Lemma 27.1 (Kommutative Algebra) auch ein zu einem Restklassenring nach einem Hauptideal assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin R_{\mathfrak{p}}$. Es ist also $\mathfrak{p}$ das Annullatorideal zu einem Element x modulo dem Hauptideal (y). Wir können durch Lokalisierung annehmen, dass $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von R ist. Wir betrachten den R-Untermodul

$$N = \{q \in Q(R) \mid q\mathfrak{p} \subseteq R\} \subseteq Q(R).$$

Dabei gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}N \subseteq R.$$

Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}N$$

oder

$$\mathfrak{p}N = R.$$

Im ersten Fall folgt aus Lemma 22.6 (Kommutative Algebra), dass die Elemente aus N ganz über R sind. Wegen der Normalität von R folgt $N = R$. Wegen $x\mathfrak{p} \subseteq (y)$ ist auch $\frac{x}{y}\mathfrak{p} \subseteq R$, also

$$\frac{x}{y} \in N = R,$$

ein Widerspruch. Also liegt der zweite Fall, $\mathfrak{p}N = R$, vor. Doch dann muss es Elemente $a \in \mathfrak{p}$ und $q \in N$ mit

$$aq = 1$$

geben. Für $b \in \mathfrak{p}$ ist dann $bq = b/a \in R$, also $b \in (a)$ und damit ist $\mathfrak{p} = (a)$ ein Hauptideal. Nach Satz 24.5 (Kommutative Algebra) ist R ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ besitzt die Höhe 1. $\square$

Abbildungsverzeichnis