對角線を引き，その長さを測れ。

之により次の事が知られる。

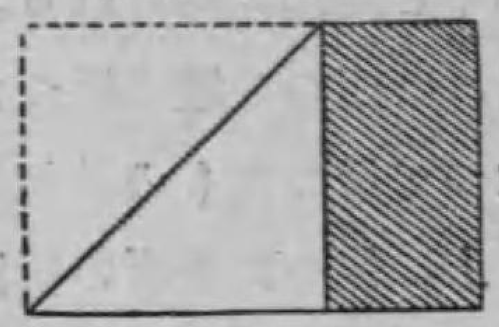
矩形の二つの對角線は相等しい。

§ 84. 正方形。

矩形の相隣る二邊が等しい場合には，四つの角が皆直角であつて相等しく，四つの邊も皆相等しい四邊形になる。此樣な四邊形を正方形といふ。

紙を正方形に切る法。 先づ正しい矩形を作り，其短い方の一邊が長い方の邊に重なるやうに折り（第九十六圖）其餘つた部分（即影を施した部分）を切り去りて開くと，正しい正方形が得られる。

第九十六圖



§ 85. 特殊なる四邊形相互の關係。

梯形，平行四邊形，矩形，菱形及び正方形は四邊形中の特殊なものである。而して，平行四邊形は梯形の特殊なもの，又菱形及び矩形は平行四邊形の特殊なもの，正方形は菱形の特殊なものなると同時に矩形の特殊なものである。此一般と特殊の關係を圖解すると第九十七圖のやうになる。

第九十七圖

第六章　相　似　形

§ 86. 相似三角形。

實驗一。 任意の三角形を描き，また各邊がその邊の二倍なる

三角形を描き，分度器で各の三角形の各角を測つて比較せよ。

實驗二。 實驗一に用ひた三角形を切り取り，各の角を重ね合して比較せよ。

實驗三。 實驗一及び二に於て二倍すべきを三倍し或は四倍して試みよ。

以上の實驗によつて次の事が知られる。

三角形の各邊の長さを同じ割合に伸縮するとき其の角の大さは變らない。

此樣に二つの三角形に於て，三つの角が夫々相等しく，其相應する邊の比が相等しいときは二つは互に相似であると云ふ。

相似三角形と云ふ語を用ひて上に得た實驗の結果を言ひ表はすと，次のやうになる。

三角形の相似なる爲めの條件（其一）。

二つの三角形に於て，三つの邊の比が等しいときには，その二つの三角形は相似である。

§ 87. 相似の三角形の邊の間に成り立つ比例式。

三角形ABC及びA′B′C′が相似であるとし

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C'$$

とすると，

$$a:a'=b:b'=c:c'$$

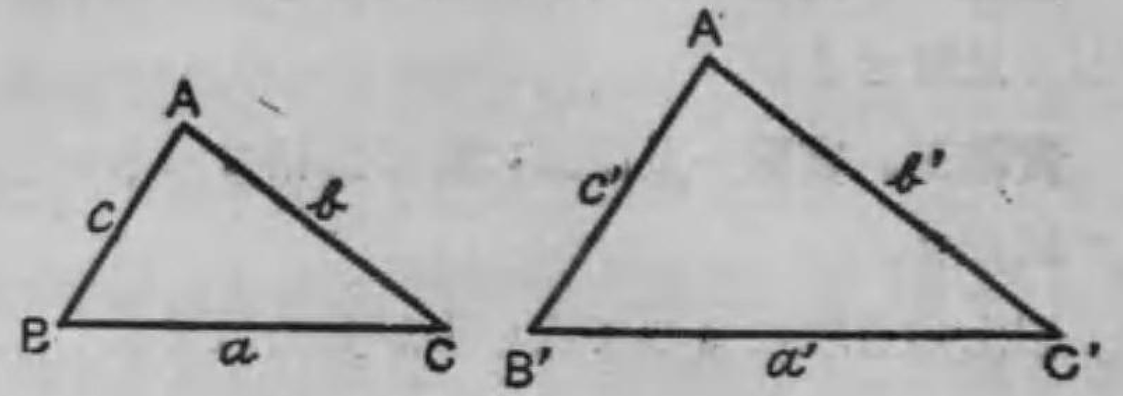
例へば $a:a'$ の値が2であると，$b:b'$ も $c:c'$ も2である。この相應する邊の比を**相似比**といふ。

§ 88. 三角形の相似なる爲めの條件（其二）。

實驗一。 任意の三角形ABCを描き，（第九十八圖）その一邊BCの二倍に等しき直線B′C′を引き，B′及びC′に於て夫々∠ABC及

び∠ACBに等しき角を成す直線A'B'及びA'C'を引くと三つの角が相等しい二つの三角形が出來る。此二つの三角形に於て各の邊の長さを測つて比較せよ。

第九十八圖



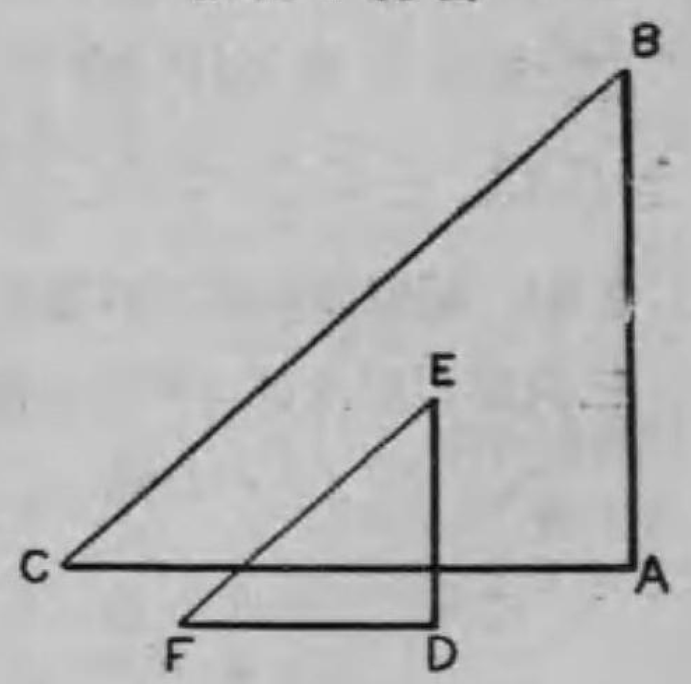
上の實驗により次の事が知られる。

等角なる二つの三角形は相似である。

§89. 日影により直立せる物の高さを測ること。

今第九十九圖に於て直立せる木をABとし，その影をACとする。ACの長さからABの高さを求めるには，長さの知れた棒DEを直立し，其影DFを測る。さすれば三角形ABCとDEFとは等角である爲め相似である。故にABの長さを計算することが出來る。

第九十九圖



例。 直立セル木ノ影ノ長サ13米棒ノ長サ3米其影ノ長サ2米ナル時，木ノ高サ何程デアルカ。

解。 木の高さをx米とすると，

$$2米:3米=13米:x米$$

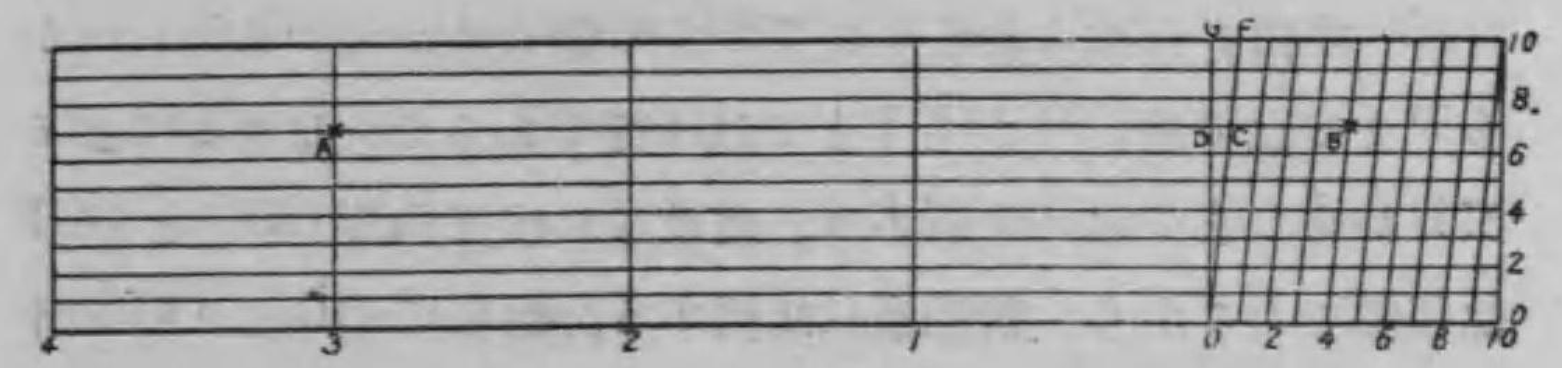
$$x=\frac{3\times 13}{2}=19.5$$　　答　19.5米

§90. 對角線尺。

相似三角形の理を應用して，普通の物指を用ひるよりも精密に長さを測ることの出來るやうに工夫した**對角線尺**と稱するものがある。次に其構造用法及び理論を說明しよう。

I. **構造。** 横5糎縦1糎の矩形を描き，横を一糎宛に區切り，第百圖に示すやうに其分點に0から4までの番號を附け之を便宜の爲め糎の目盛と名づけて置く* 此各の分點を通り縦の邊に平行線を引く，さすれば矩形は五つの正方形に區分せられる。その右端の正方形の上下の邊を更に一粍宛に等分し，圖に示すやうに下の各の分點を其眞上の分點の右隣りの分點と連結する。さうして下の分點に0からまで10の番號を附け，之を便宜の爲め粍の目盛と名けて置く。又矩形の縦の邊を一粍宛に等分し其分點に0から10までの番號を附け，之を0.1粍の目盛と名けて置く。

第百圖



II. **用法。** 此物指を用ひるときは一粍の十分の一即ち0.1粍まで精密に定められた長さの線を引くことが出來る。例へば3.47糎の長さを作るには，糎の目盛の3の線と粍の目盛7を通過する線との交點Aを求め，此點に分割器の一方の脚尖を立て他の脚尖を此線と粍の目盛の4を通る線との交點Bと一致せしめる。さすれば二つの脚尖の距離は3.47糎であるから，これ丈

* この圖は實尺の2倍に擴大されて居る。

の長さに直線を切れば所要の長さの直線が得られる。

又或線の長さを測るには分割器の兩脚尖をそれ丈の長さに開かし，對角線尺の一番下の線により兩脚尖の距離が何糎何粍あるかを觀る。例へば今4糎2粍餘あることがわかつたとする。さすれば兩脚器の一方の脚尖を糎の目盛の4の線と何れかの横線との交點に立て，他の脚尖が粍の目盛の何處を通る線上に於て糎の目盛の2の線と一致するかを觀ればよい。

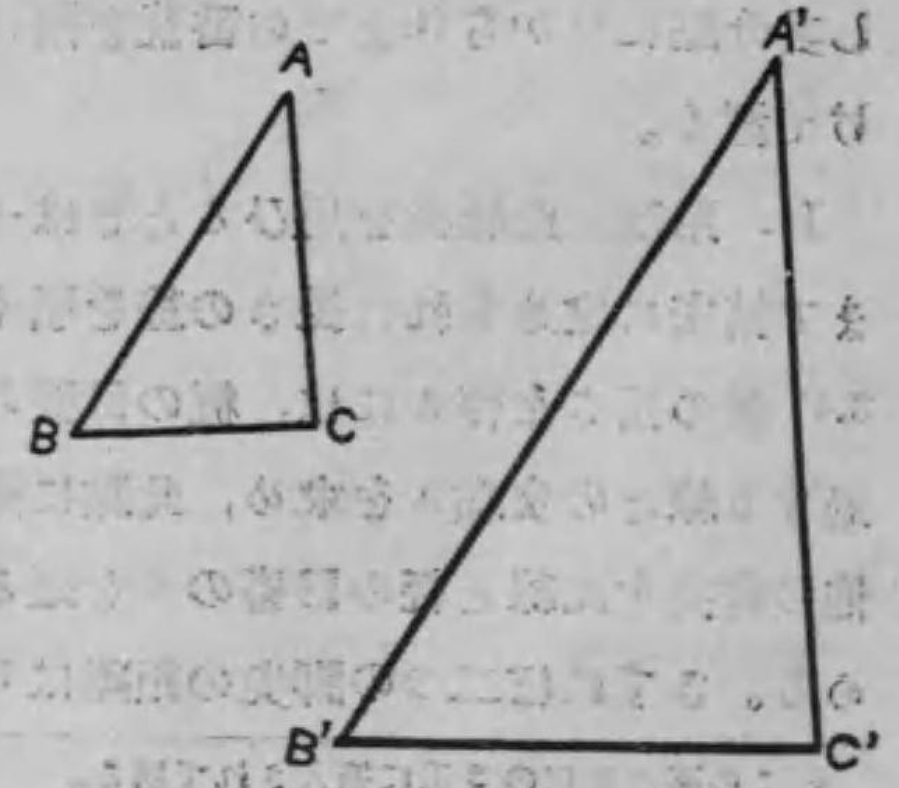
III. 理由。何故AからBまでが3.47糎あるかといふと，AからDまでは3糎，CからBまでは4粍であることは明かである。又DからCまでは0.7粍ある。何故なれば三角形ODCとOGFは相似であるから，對應邊は比例する。而してODはOGの十分の七であるから，CDもFGの十分の七即0.7粍であらねばならぬ。

注意。 本節に於ては，便利の爲め糎の目盛が4までのものについて説明したけれども，これは幾らでもよいのである。

§91. 二つの三角形の相似なる爲めの條件(其三)。

實驗一。 任意の三角形ABCを描き，其頂角Aと相等しい頂角A′を有し，二邊が夫々AB及びACの二倍なる三角形A′B′C′を描き，BC及びB′C′の長さを測りて比較せよ。又∠B及び∠B′を測りて比較せよ。

第百一圖



實驗二。 上に用ひた二つの三角形を切り取りて比較せよ。

以上の實驗により次の事が知られる。

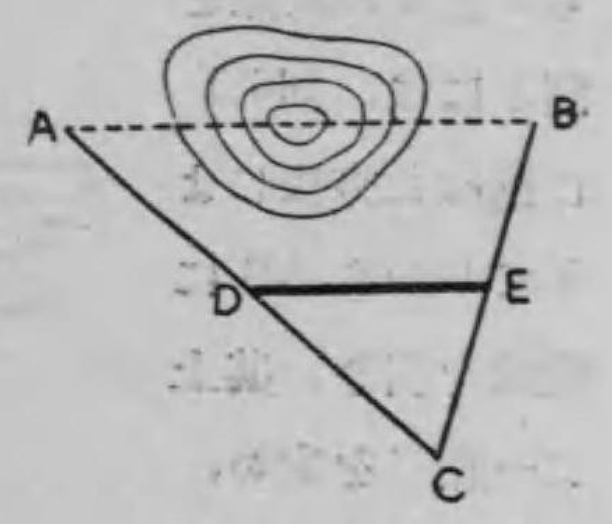
二つの三角形の一つの角が互に等しく之を挾む邊が比例するときは，二つは相似である。

§92 二地點間の距離を間接に測る法。

§75に於ては，三角形全等の理を應用して二地點間の距離を間接に測る方法を述べた。相似三角形の理も亦之と同樣に應用することが出來る。

I. **二地點共に近づくことの出來る場合。** 第七十六圖AとBとを二つの地點とし，此所へは近づくことが出來るけれども其の間に障害物があつて直接に其距離を測ることの出來ない場合に間接に之を測るには，他に一點Cを定めAC及びBCの距離を測り之を同じ比に分ち其分點を夫々D及びEとする。今簡單のためD及びEが夫々AC及びBCの中點とすると，DEの距離を測り之を二倍するとABの距離が得られる。若し又ACをCDの3倍とすればDEの距離を測り之を3倍すればよい。他の場合にも之と同樣である。

第七十六圖



理由。 三角形CDEとCABとが相似であることから容易にわかる。

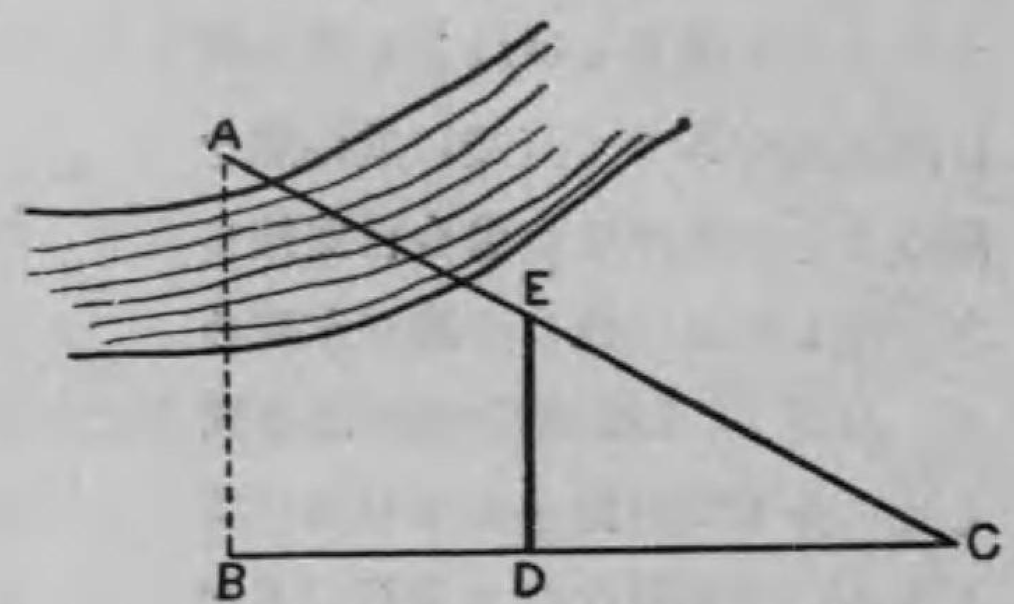
實測の成績。 次の結果はA及びBを直接に測ることの出來る所に定め，先づ之を間接に測り，次に直接に測つたものである。

但しD及びEは夫々AB及びBCの中點に定めた。

測定者	間　接	直　接
甲	11.246	11.223
乙	11.218	11.220
丙	18.352	18.346
丁	18.312	18.337

II. **一地點に達することが出來他の地點に達することの出來ぬ場合。**達することの 出來ない 地點を 第百三圖 A, 出來る地點をBとし，Aから B までの距離を測るには，§66 I に述べた方法によりてBから AB に垂線を引き，其上に一點Cを定め，BC 線上に一點 D を定め，D から §66 I により垂線DEを立て，DE, CD 及びCB の長さを測る。例へば CD と CB が 3 と 5 の割合であるとすれば，DEの長さの $\frac{5}{3}$ 倍は AB の距離である。

第百三圖



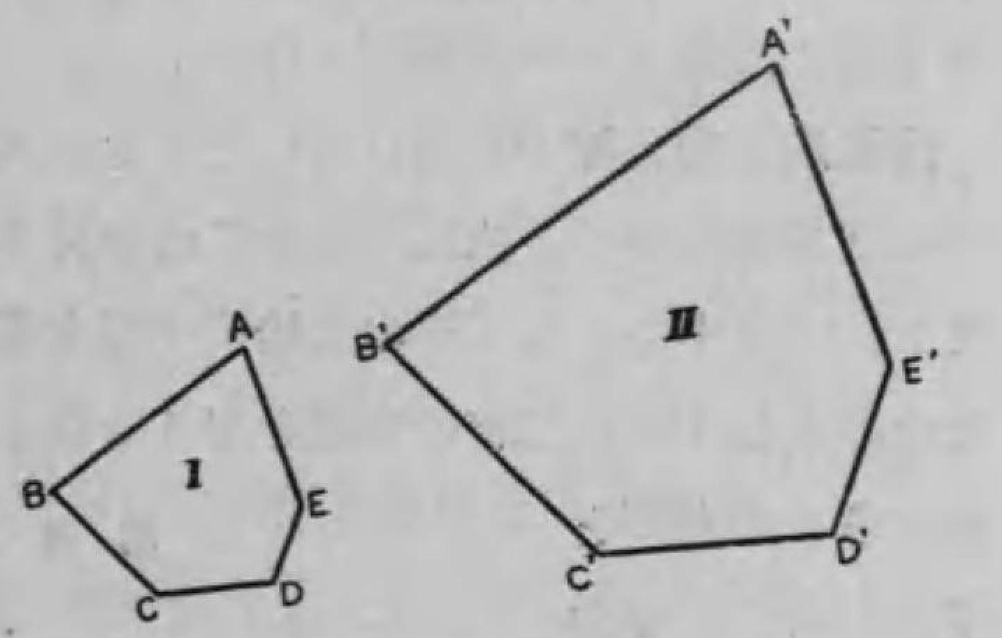
理由。三角形CDEとCBAとが相似三角形であることから容易にわかる。

III. **二點地が共に達することの出來ぬ場合。**二地點AとBが共に達することが出來ぬ場合には，達することの出來る所に一點Cを定め，IIの方法によりAC及びBCの距離を測る。さすればIを應用してAとBとの距離を測ることが出來る。

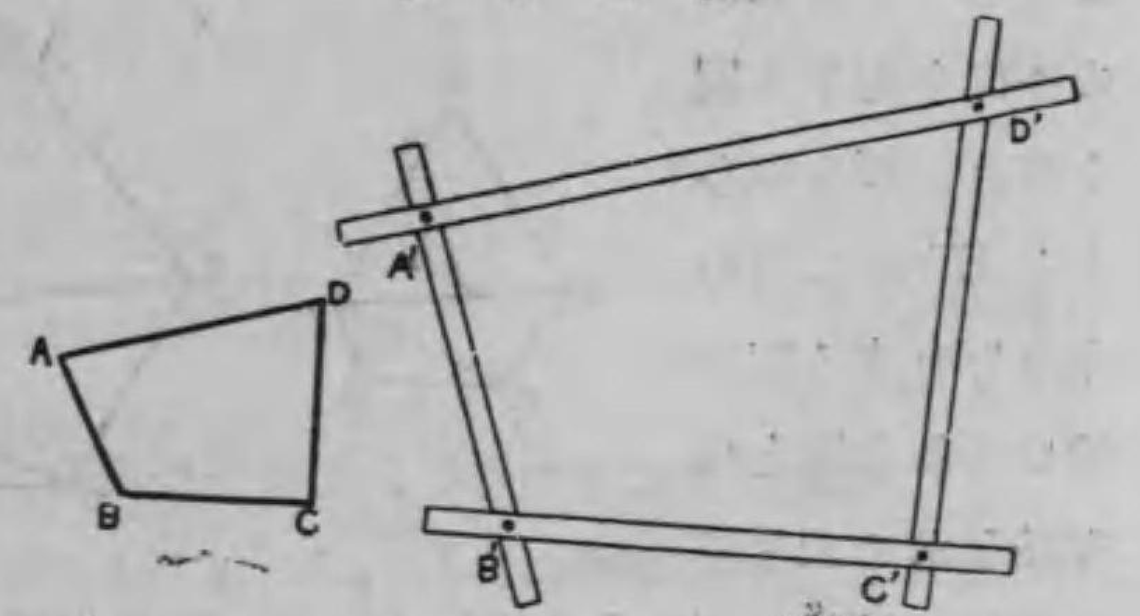
§ 93. 相似多角形。

二つの多角形があつて，其邊の數相等しく，其各の角の大さも夫々相等しく，相對應する邊の割合が等しい場合にはその二つの多角形は互に相似であるといふ。例へば二つの多角形 I に II があつて，何れも邊の數5であり，∠A=∠A′, ∠B=∠B′, ∠C=∠C′, ∠D=∠D′, ∠E=∠E′, 尙其上に，今若しA′B′がAB の二倍であるとすれば，B′C′ も BC の二倍，C′D′ も CD の二倍，D′E′ も DE の二倍，E′A′ も EA の二倍であるときは，此二つの多角形は相似であるといふ。

第百四圖



第百五圖



實驗。任意の四邊形ABCDを描き古ハガキを帶狀に切り之を絲にて第百五圖に示すやうに接ぎ合してその各邊が ABCD の各邊の二倍である四邊形 A′B′C′D′ を作り，A′を一方の手の指先で押さへ，他方の手の指先でC′を動かすとA′B′C′D′は種々の形となり，其各角は

必ずしもABCDと等しくないことがわかる。

之によつて次の事が知られる。

四邊形の各邊を同じ割合に伸縮するとき其各角は必ずしも不變ではない。

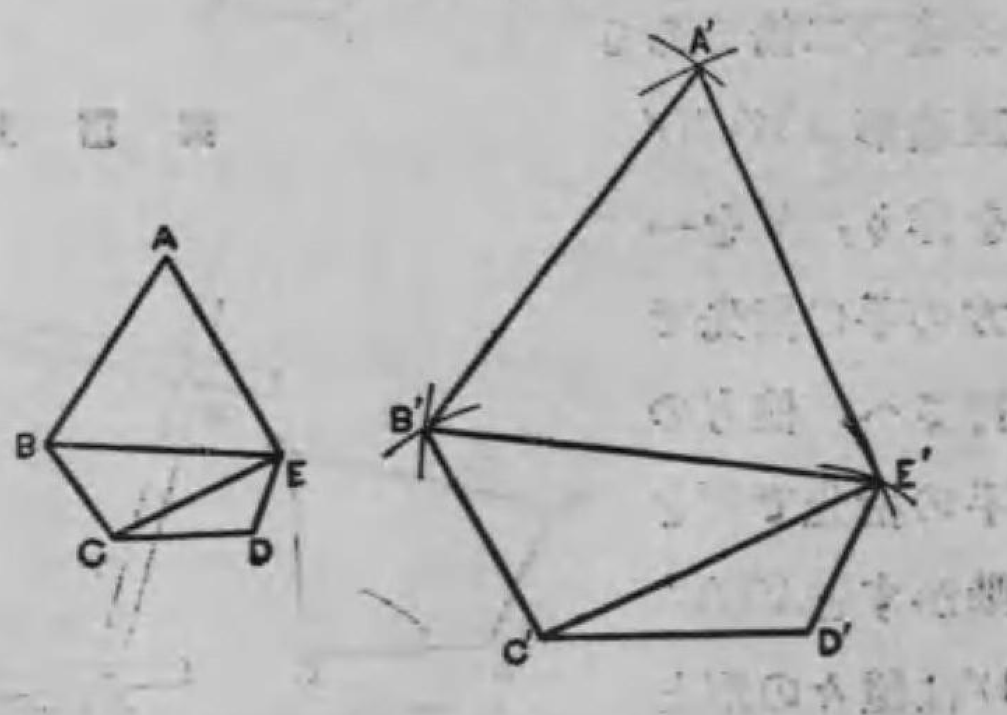
邊の數が4より多い場合も亦同樣である。故に4以上の邊數を有する多角形が相似なる爲めには，三角形の場合とは異なり角が夫々等しい事と，相對應する邊の割合が一定であることゝは別々に成立たなければならぬ。

§ 94. 相似多角形を描く法(其一)。

例。 ABCDE ヲ任意ノ五邊形トシ之ト相似ニシテ各邊ガ相當スル邊ノ二倍デアル五邊形ヲ作レ。

作圖法。 對角線 BE 及び CE を引き，與へられた五邊形を三つの三角形に分つ。次に CD の二倍の長さを有する直線C'D'を引き。C'を中心とし CE の二倍の半徑を有する圓を描き，又D'を中心とし DE の二倍の半徑を有する圓を描き，前の圓との交點を求め之をE'とする。次にC'を中心とし CB の二倍の半徑を有する圓を描き，E'を中心とし EB の二倍の半徑を有する圓を描いて前の圓との交點を求め之をB'とする。最後にB'を中心とし BA の二倍を半徑として描いた圓

第百六圖



とE'を中心とし EA の二倍を半徑として描いた圓との交點をA'とし，A'とB'，B'とC'，C'とD'，D'とE'，E'とA'，を結び附けると所要の五邊形が得られる。

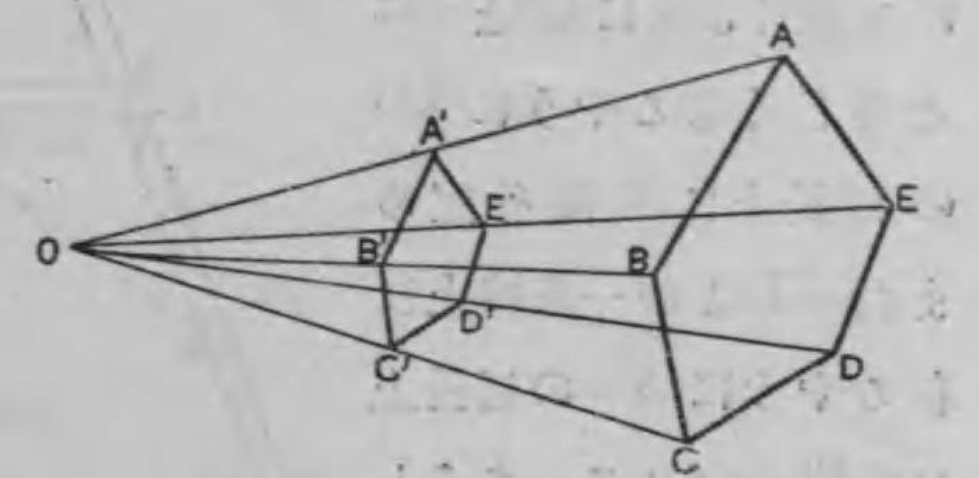
§ 95. 相似多角形を描く法(其二)。

例。 多角形 ABCDE ニ相似ナル多角形ヲ描ケ。但シ各邊ハ ABCD ノ相對應スル邊ノ二分ノ一ナルヤウニセヨ。

作圖法。 ABCDE の內或は外に一點Oを定め，OA, OB, OC, OD, OE を結び附けよ。其各の中點を求め，之をA', B', C', D'及びE'とし，之を結び附けると所要の多角形が得られる。

實驗。 上に作圖した多角形の各の邊及び角を測り，果して求むる多角形であるかどうかを驗せよ。

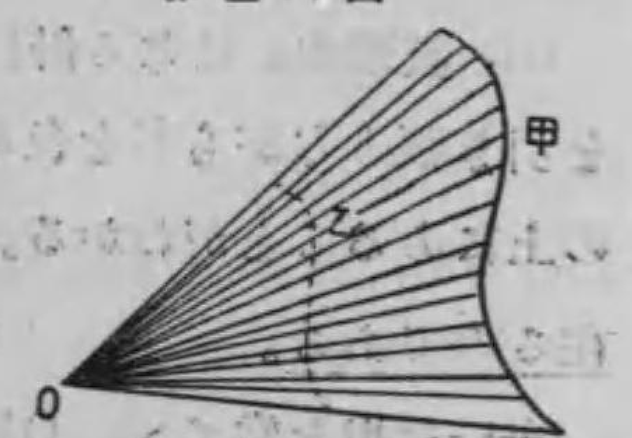
第百七圖



§ 96. 前節の方法を應用して相似曲線形を描く法。

曲線形は直線形の邊の數が限りなく多くなり從つて其各の長さが限りなく短くなつたものと考へることが出來る。それ故前節の作圖法は曲線形にも應用せられる。例へば第百八圖甲を一つの曲線形とし，之に相似なる曲線形を描くには，其形內或は形外に一點Oを定め，これから甲の各點に直線を引き，其直線を同じ比に分ち其分點を連ねると甲に相似なる曲線形乙が得られる。

第百八圖

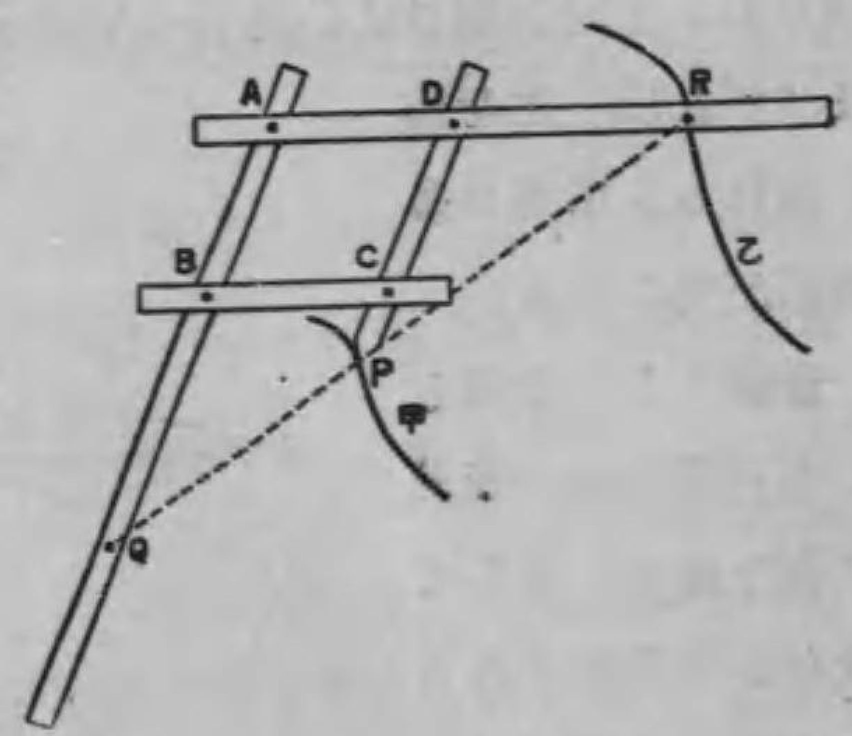


此方法を實際に行ふには直線形の場合とは違ひ，非常に多くの手數を要する。然し器械を用ゐると左程困難なく此理を應用することが出來る。次に之を説明しよう。

§ 97. 縮寫器及び擴大器の模型。

I **製作法。** 古ハガキを幅二分位の帶狀に切り，これを絲で接續して第百八圖に示すやうなものをつくる。但し四邊形 ABCD の相對する二組の邊は等しくする。またPはその尖端を少しく下方に曲げて置く。次にADとDRと等しくなるやうに AD の延長上に R 點を定めまた RPQ が一直線上に在るやうに AB の延長上にQ點を定める。さうしてRには鉛筆の先きがはまる位の小さき孔をあける。

第百八圖



II. **使用法。** 紙上に任意の圖甲を描き，前に作つて置いた模型を程よき位置に置き，Q點に針を刺し，R に鉛筆の先をさし込み，P の尖端が甲の線上に動くやうに鉛筆を動かすと，甲に相似の圖形乙が出來る。

III. **其理由。** Qなる針に絲を結び附け，之を孔Rに通し，之を引き張りながらRを色々動かしてみると，P の端は常に此絲の上にあることがわかる。即ちP, Q, R の三點は常に一直線に在るのである。

次に物指を當てゝ，QP と PR の長さを測りみるに常に等し

いことがわかる。

故に此模型の作用は畢竟前節の作圖方法に異ならぬ。

注意一。 AR と AD の割合を色々に變へると，色々の割合の相似圖形が描かれる。

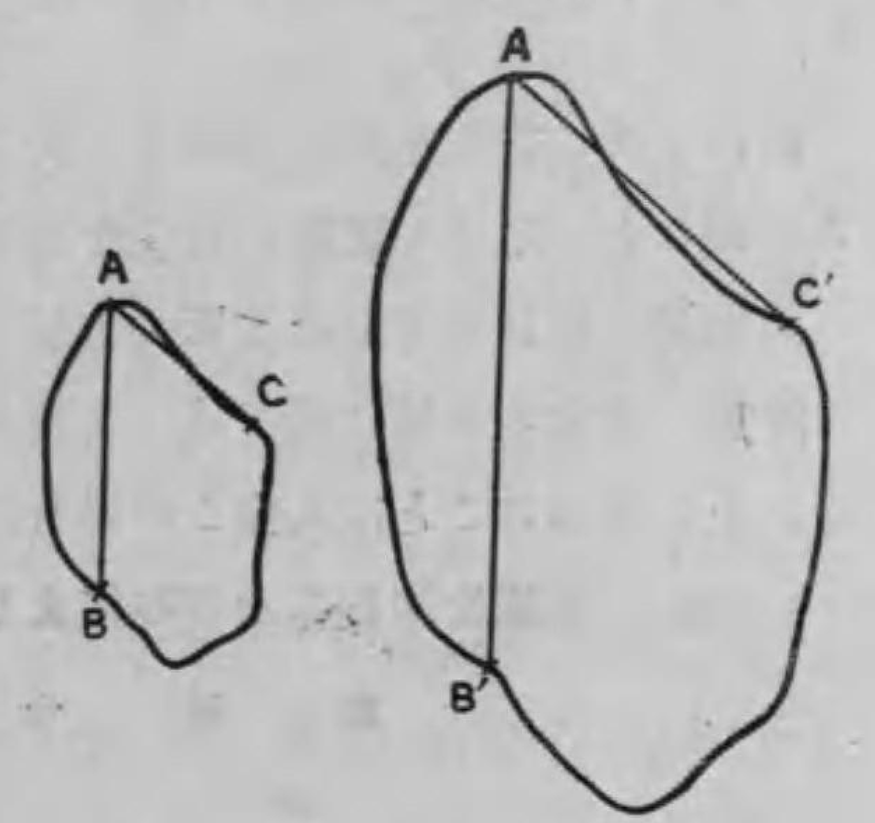
注意二。 P に鉛筆をさし，R で圖をえどると圖を縮寫することが出來る。

§ 98. 相似曲線形の性質。

實驗一。 任意の曲線圖形を描き，前節の方法により之に相似なる圖形を描け。兩圖形に於て相對應する點に對應する符號 AA′, BB′ 及び CC′ を附け AB, A′B′, AC, A′C′ を連結し各の長さを測つて比較せよ。

之によつて次の事が知られる。

第百九圖



相似曲線形に於て相對應する二點間の距離の割合は一定である。

實驗二。 實驗一に用ひた圖に於て，角 BAC 及び B′A′C′を測つて比較せよ。

之によつて次の事が知られる。

相似曲線形にありては,相對應する角は相等しい。

實驗三。 實驗一に用ひたる圖に於て，A からBまで，A′から

B′まで，BからCまで及びB′からC′までの曲線の長さを§34の方法で測り之を比較せよ。

之によつて次の事が知られる。

相似曲線形に於ては，相對應する曲線の部分の長さの割合は等しい。

§99. 地圖。

小區域の地圖は其地域の相似形である。故に地圖上に於ける直線の長さ即ち二地點間の距離は何れも實地の長さを同じ割合に縮めたものである。又河，國境或は海岸線のやうに曲線をなして居る部分でも，二點間の距離と同樣の割合に縮められて居る。

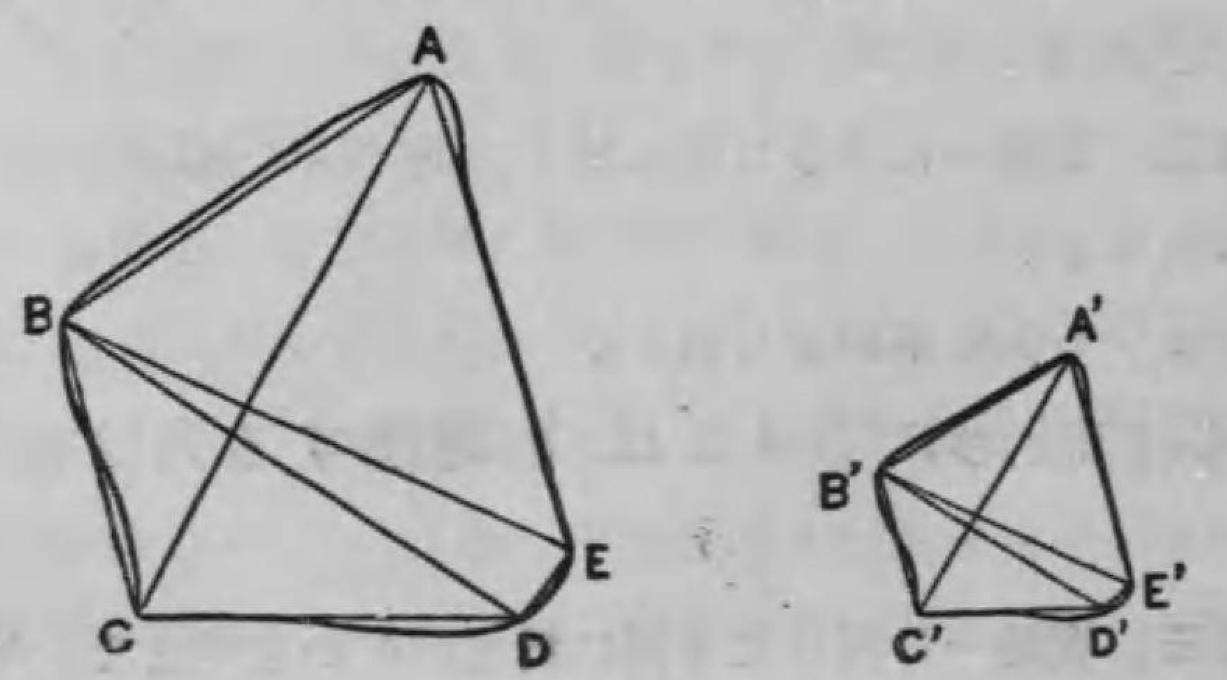
故に§34の方法を用ひ地圖上に於て河，國境或は海岸線の長さを測ると，之より實際の長さを計算することが出來る。

又地圖に於ける方位は實際の方位と同一である。

注意。大なる地域に於ては，土地の彎曲を考へねばならぬから，上に述べたことは其儘この場合に當てはまらぬ。

§100. 距離を測ることのみによりて地圖を描く法。

第百十圖



前節に述べたやうに，小區域の地圖は畢竟實際の土地の相似形であるから§94の方法を應用すれば距離を測ることのみにより地圖を描くことが出來る。

第百十圖ABCDEを田或は畑の如き小區域の土地とし，その地圖を描くには，その角々に杙を打ち込み，大體之を五邊形と見做す。その對角線を引きて數多の三角形に分ち，その各邊の長さを測り，之を同じ割合に縮少し，§94の方法によつて相似形を描き曲線の部分は目分量で描くと所要の地圖が出來る。

驗線。計算に驗算を要する如く，地圖を描いたときは間違なきか否かを驗する必要がある。上に述べた方法で地圖を描くには，BC, BD, CD, BE, DE, AB及びAEの七つの長さを測つて置けば十分である。然しこれ丈では地圖を描き得ると云ふに止り，驗すことが出來ぬ。然るに若しACの長さを測り置き，地圖を描いた後其地圖上に於てACの長さを測り，實地の長さに比較すれば之によつて地圖の正否を檢することが出來る。

此樣に地圖の正否を驗する線を凡て**驗線**と云ふ。

注意一。縮尺六百分の一とすると，實地一間の長さは地圖上に於ては一分となる。故に土地を測るに間繩を用ひ地圖を描くに分の目盛の物指を用ふる場合には，縮尺六百分の一とすると便利である。

注意二。上の作圖に於ては§90に說明した對角線尺を用ふるのが便利である。

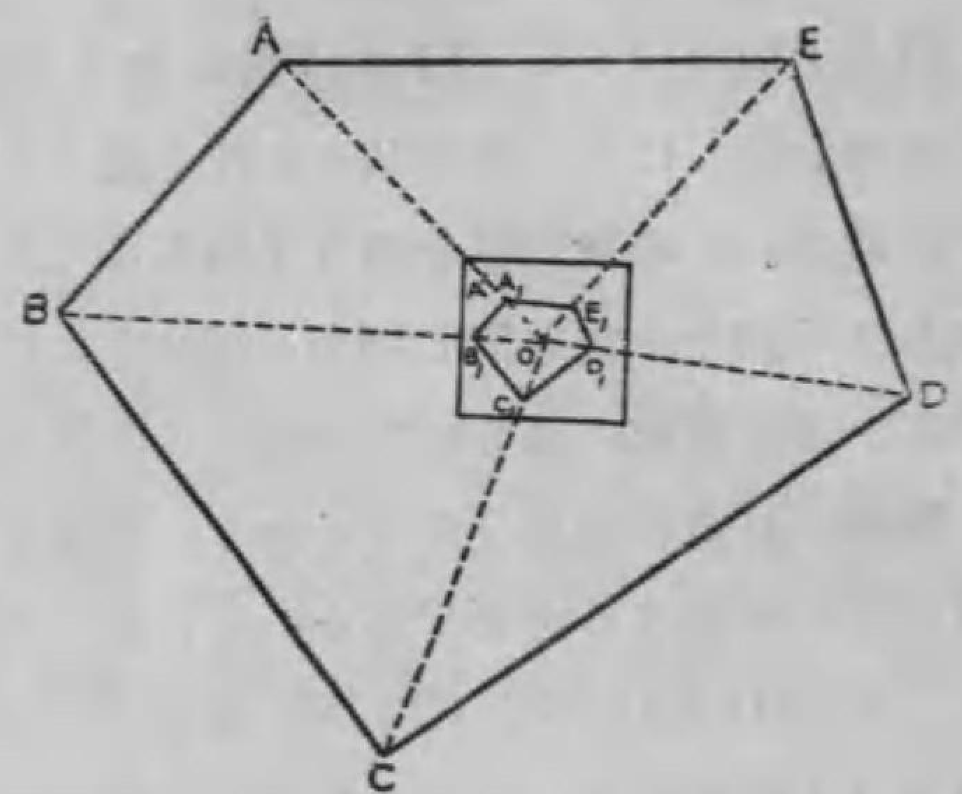
注意三。地圖を方眼紙に描くときは，面積をも計算することが出來る。之に就ては§122及び§123を見よ。

§101. 平板を用ひて地圖を描く法。

第一法。田畑宅地のやうな小區域の地圖は，亦§52に說明し

た平板を用ひて描く事が出來る。A, B, C, D 及びEを測點とすれば，其中央に平板を据ゑて之を水平にし，其上に紙を展べピンを以て固定し，紙の中央に一點Oを定め此所に針を立てる。次に平板上に於てOとAとの間に針を立て，見通しながらA′の位置を動かし OA′A が一直線上に在るやうにする。B′C′D′E′ も同樣の方法にて定め，是等の點とOと連結する。そこで下げ振りを用ひOの眞下の點O′を定め，O′からA, B, C, D 及びEまでの距離を測り，其距離を適當な割合で縮め，その長さに等しく OA_1, OB_1, OC_1 OD_1 OE_1, の長さを定め，A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 を連結すると，これが所要の圖である。

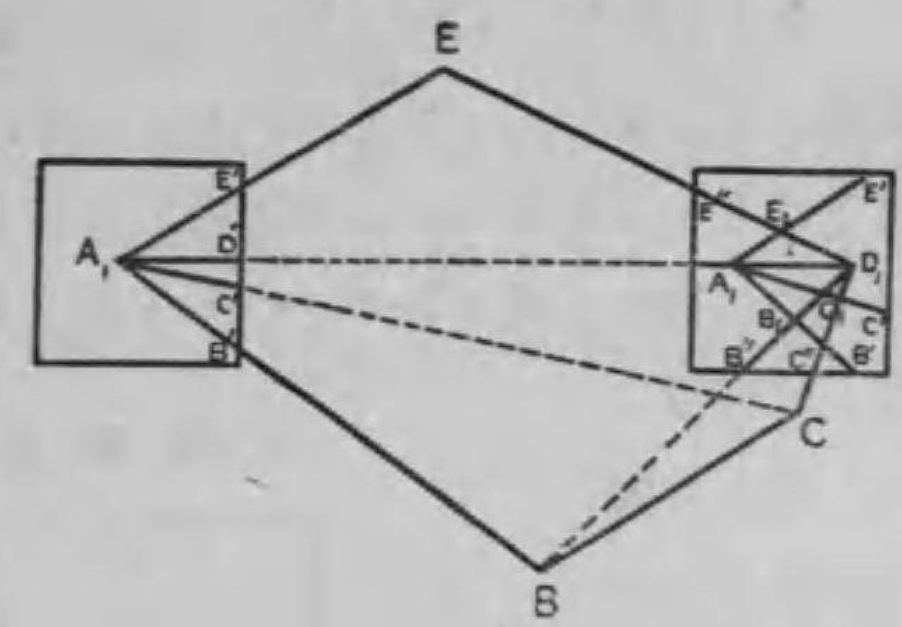
第百十一圖



第二法。A,B,C,D,E を測點とすれば，一つの對角線例へば AD を考へ，其端Aに平板を据ゑ，Aの眞上の點A_1を平板上に定め，第一法と同樣の方法によりA_1から B, C, D, 及びEの方向に直線 A_1B', A_1C' A_1D', A_1E' を引く。次に平板を取り去り，AからDまでの距離を測り，之を適當の割合に縮め，其長さに等しいやうにA_1D_1を定める。次にDに平板を据ゑ，D_1がDの眞上になるやうに紙を移動せしめ，D_1の點に針を立て之を中心とし紙を廻轉し，D_1A_1A の三點が一直線になるやうにする。そこで前

のと同樣の方法により，D_1からB, C及びEの方向に D_1B'', D_1C'', D_1E'' の直線を引き，A_1B'とD_1B''との交點をB_1, A_1C'とD_1C''との交點をC_1，同樣にしてE_1を定め $A_1B_1C_1D_1E_1$ を連結すると所要の地圖が出來る。

第百十二圖



第七章　矩形の面積及び開平法*

§ 102. 面積の單位。

一邊の長さ一米なる正方形のことを又**一米四方**のものとも云ふ。同樣に一邊一粉，二粉，五粉の正方形のことを，夫々一粉四方のもの，二粉四方のもの，五粉四方のものとも云ふ。其他の場合も之と同樣である。一米四方，一粉四方，五粉四方等の代りに亦**1米平方，一粉平方，五粉平方**ともいふ。

實驗一。8糎平方，6糎平方を描け。

一粉平方或は一米平方と一平方粉或は一平方米。

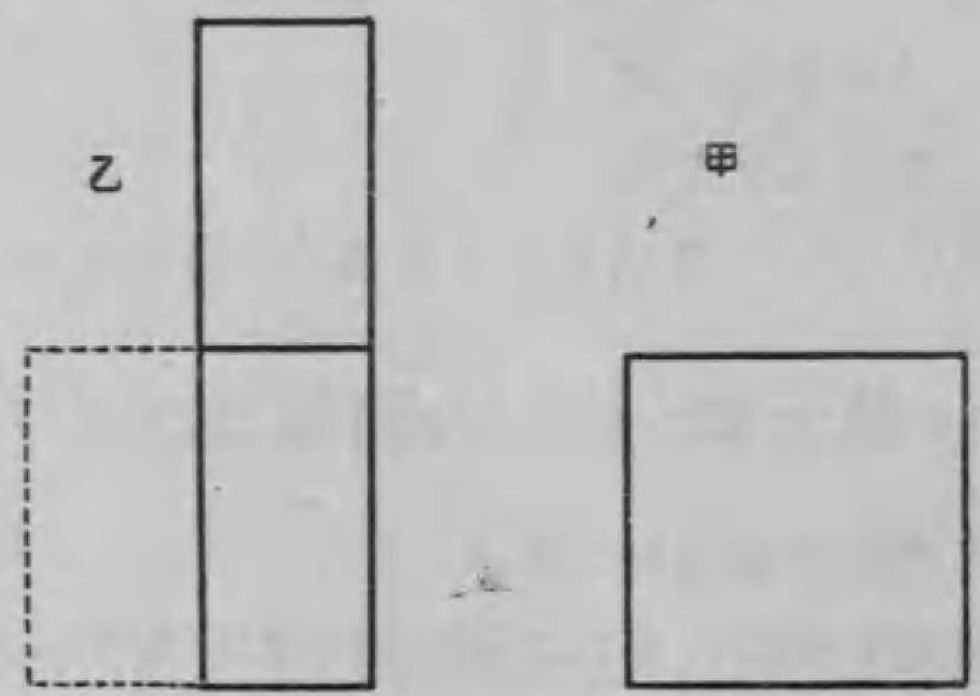
一粉平方の中に圍まれて居る廣さ或は一米平方の中に圍まれて居る廣さを夫々**一平方粉**或は**一平方米**と名け，これを面積の單位とする。一粉平方と一平方粉，一米平方と一平方米とは根本に於て違ふ。即ち前者は圖形の名であつて，後者は其中に圍

* 本書に述ぶる開平法の説明は極めて概略である。

されて居る廣さを指すのである。然るに此二者はよく混同せられる。之を明瞭ならしむる爲めに次の實驗は有效であらう。

實驗。紙を切つて一粉平方のもの二枚作れ。さすれば此二つの廣さはもとより等しい。今此中の一つを第百十三圖乙に示す様に二つに切つて接ぎ合せ。さうすると最早これは一粉平方ではない（何故なるか）。然し其廣さは變りないから一平方粉である。

第百十三圖



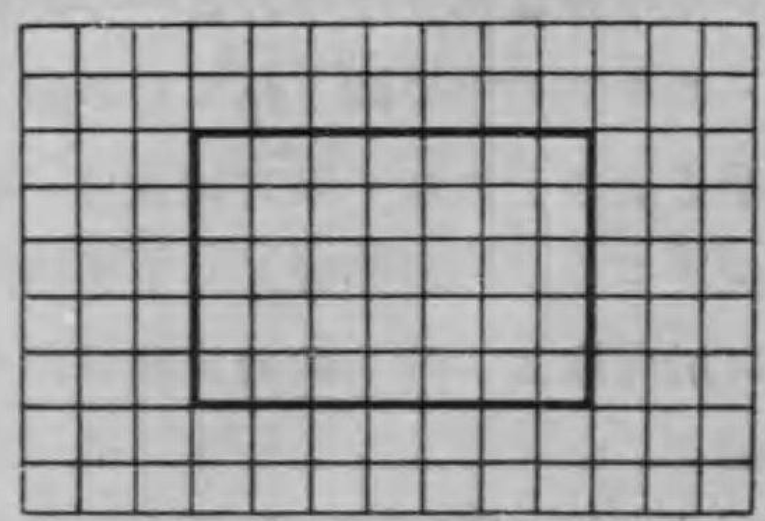
何糎平方と何平方糎。例へば5糎平方といふと5糎四方のことであり，5平方糎といふと一平方糎の5倍といふことである。

實驗。厚紙にて一糎平方のもの數十枚を作り，之を5糎平方に排べよ。又5平方糎を排べよ。

§ 103. 矩形の面積。

實驗一。前節に用ひた一糎平方の紙切れを横7糎縦5糎の矩形に排べ，其正方形の數を數へてその矩形の面積を求めよ。

第百十四圖



實驗。第百十四圖に示す様に，方眼紙に横7縦5（方

眼の一邊を單位とする）の矩形を描き，其方眼の數を數へる事によりて面積を計算せよ。

此様に方眼紙上に描いた矩形の面積は，方眼の數を一つ宛數へることによつて知る事が出來る。然し之は甚迂遠な方法である。次のやうに考へると簡單に知ることが出來る。

方眼は一行* に5つ宛ある。さうしてそれが7行ある。故に方眼の總數は 5×7 即 35 である。

又次のやうに考へてもよい。

方眼は一列に7個宛あり，これが5列ある。それ故に方眼の總數は 7×6 即 35 ある。

之によつて次の事がわかる。

矩形の面積を求めるには縦の長さを表はす數と横の長さを表はす數の積を求めこれに長さの單位に相當する面積の單位の名をつける。

注意一。上の述べ方は正しい述べ方であるけれども，甚長たらしくて不便であるから，今後は次のやうに述べる

矩形の面積は縦と横との積に等しい。

他の圖形の面積に就ても之と同樣の述べ方を用ひることゝする。

§ 104. 正方形の面積。

正方形は矩形の特別なるものであるから，矩形と同樣の算法で面積を計算することが出來る。さうして此場合に於ける算法は次のやうになる。

* 普通縦ならびた行といひ横ならびた列と云ふ。

正方形の面積を求めるには其一邊の長さを自乘する。

§ 105. **平方根，開平法。**

例へば5を自乘すると 25 となる。此とき 25 を5の平方5を 25 の平方根と云ふ。即ち一般に云ふときは，甲數を自乘して乙數を得るときには乙數を甲數の**平方**甲數を乙數の**平方根**といふ。平方根を表はすには$\sqrt{}$の印を用ひる。例へば$\sqrt{25}$は 25 の平方根5を表はす。さうしてその平方根を求める算法を**開平法**と云ふ。

§ 106. **平方根の桁數。**

これから暫くの間與へられた數を整數とし，その平方根を求めることを研究しようと思ふ。

開平の算法を研究する第一着として，平方根の桁數を知る方法を述べる。一桁の數の最小のもの及び最大なものは夫々1及び9であり，又其自乘は夫々1及び 81 である。これと同様に二桁の數三桁の數に就て最小最大の數及び其自乘を求めると次表の如くになる。

	最小及最大數		自乘	自乘ノ桁數
一桁ノ數	最小	1	1	1 或ハ 2
	最大	9	81	
二桁ノ數	最小	10	100	3 或ハ 4
	最大	99	9801	
三桁ノ數	最小	100	10000	5 或ハ 6
	最大	999	998001	

之によつて次の事がわかる。

一桁或は二桁の數の平方根は一桁の數，
三桁或は四桁の數の平方根は二桁の數，
五桁或は六桁の數の平方根は三桁の數，
以下同様である。故に

平方根の桁數は數の右端から二桁宛に句切り其部分の數に等し。

例へば 15129 の平方根の桁數を見るには 1 | 51 | 29 とし，3 桁であることがわかる。

§ 107. **開平方と正方形の面積。**

與へられた數が一桁或は二桁の數である場合には，九九の呼び聲を用ひて直ちに平方根を求める事が出來る。然るに大きい數になると，特別の計算法を用ひねばならぬ。§104 に述べた如く，正方形の一邊の長さを表はす數を自乘するとその面積を表はす數となるから，逆に面積を表はす數の平方根は其邊の長さを表はす數である。故に正方形の面積を知つてその一邊の長さを求める事の工夫が出來たならば，數の開平も出來る譯である。依て次節に於て其方法を研究しよう。

§ 108. **正方形の面積を知りて其邊の長さを求める法。**

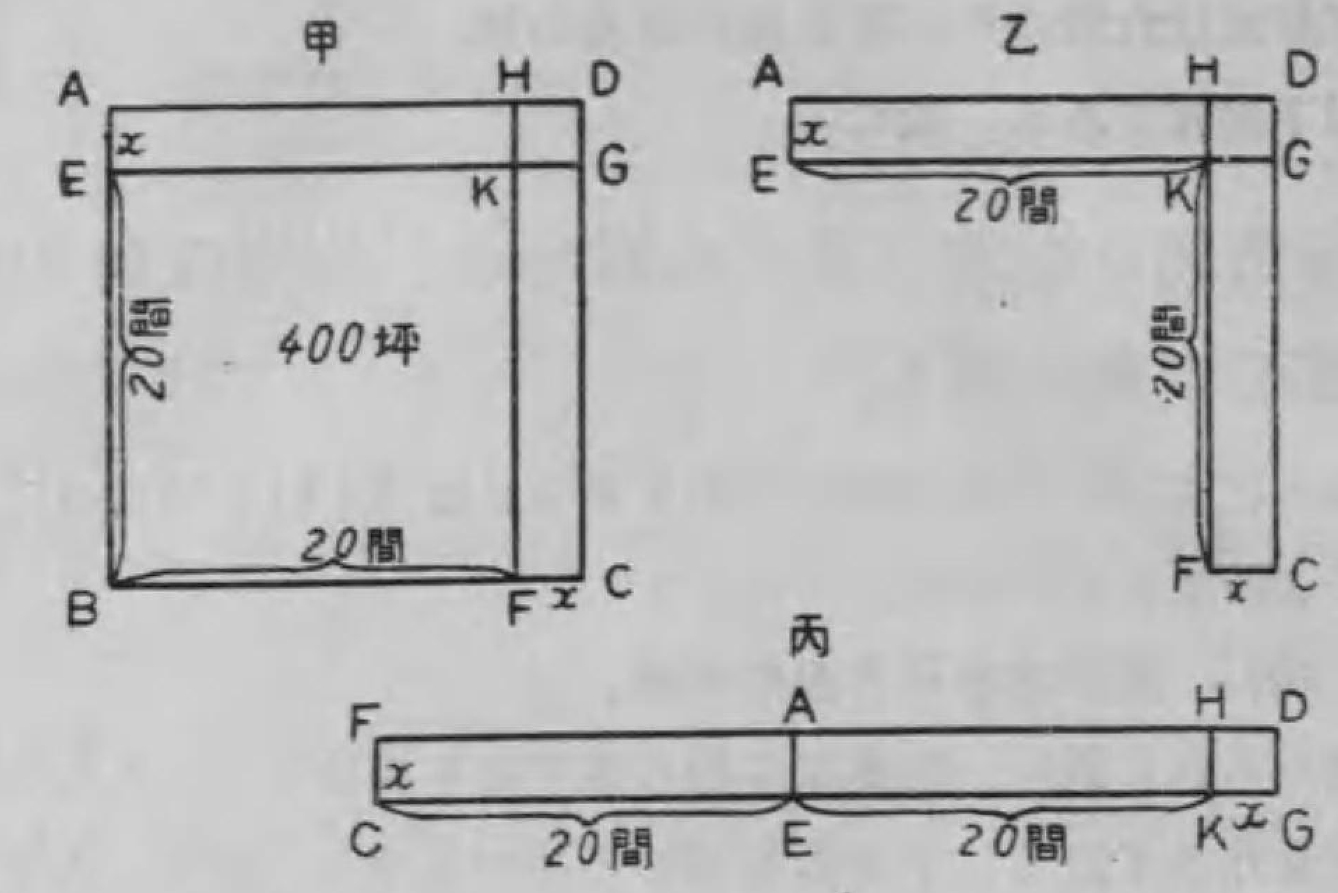
例。 面積 529 坪ナル正方形ノ土地ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

解。

I. **十の位の數を求める。** 第百十五圖甲の正方形 ABCDの面積を 529 坪とし，其一邊の長さを求めるには，先づそれが概略幾十間であるかを考へる。一邊が 20 間であると面積は 400 坪又 30 間であると 900 坪である。故に所要の長さは二十何間といふものであらねばならぬ。

II.十の位の數の平方を引く。次に一の位の數を求めるには，

第百十五圖



その一頂點Bから A の方及びCの方にE及びFを取り，BE=BF =20 間とする。E を通り AD に平行に EG を，F を通り CD に平行に FH を引き，EG との交點をKとする。さうすれば，EBFK は正方形であつて，其各邊の長さは 20 間，從て面積は 400 坪である。又AE, KG 及び FC は相等しく，其長さは次に求めんとするものである。之を便利の爲め x にて表はす。

III. **十の位の數を二倍する。** x を求める爲めに正方形 EBFK を切り去ると，第百十五圖乙の樣になる。さうして其面積は529坪—400坪即 129 坪である。次に矩形 KFCG を切り離して矩形 AEKH の AE の方に接ぎ足すと，第百十五圖丙のやうになる。

IV. **一の位の數を求める。** 若し此圖に於て右端の正方形 HKGD がなかつたならば，129 坪の129 を 40 間の 40 で割つて直ちに x の間數がわかるのであるが，此場合には右端の正方形

あるが爲めにかくすることは出來ぬ。然しこれは全形に比較すれば甚小さいものであるから，129 を 40 で割つてみれば x の大凡の値を知ることが出來る。而してそれは3である。

V. **求めたる一位の數の正否を驗する。** 3 が果して所要の x の値であるかどうかを驗めさねばならぬ。若し之が正しとすれば，CG の長さは 40間+3間 即43間でなければならぬ。さうして CF の長さも 3 間でなければならぬ。故に 43×3 は面積 129 に一致せねばならぬ。實際之を計算して 129 となる。

依て所要の長さは23間である。

§ 109. 三桁或は四桁の數の開平法。

例。 529 ノ平方根ヲ求メヨ。

計算の形式。

```
              5|29(23
              4
  20×2=40  | 129
       3
      43   | 129
              0
```

答 23

計算法の説明。

I. 十位と百位との間に縦線を引き，二つの部分に分つ其各を便利の爲め節といふ。

II. 左端の節中に含まれる最大の平方數を考へ，(此場合には 4)其平方根(此場合には 2)を 529 の右に書く。

III. 其自乘を左端の節から減ずる。

IV. 其殘り 1 の右に次の節 29 を卸して書く。

V. 2 の右に 0 を書き添へ 129 の左に少し隔てゝ書く。

VI. 20を 2 倍して 40 とする。

VII. 40で 129 を割つてみて 3 を得，之を 2 の右に書く。此樣に 40 は割つてみる數であるから試除數といひ 129 を被除數といふ。

VIII. 3 を試除數 40 の 0 の下に書いて二數を加へる。

IX. 43に 3 を乘じて被除數 129 の下に書き，上の數から下の數を減ずる。

算法の理由。前節と比較すれば自から理解せられるであらう。

§ 110. 五桁の數或は六桁の數の開平法。

例 1. 115600ノ平方根ヲ求メヨ。

解。有効數字の右に一つ零の附いた數を自乘すると，有効數字の右に二つの零が附いた數が得られる。故に此問題を解くには最後の二つの零を暫く省き，1156の平方根を求め，之に零を一つ附ければよい。さうして實際計算してみると 340 となる。

例 2. 17956 ノ平方根ヲ求メヨ。

解。最後の二桁が零なる場合と同樣に計算すると次のやうになる。

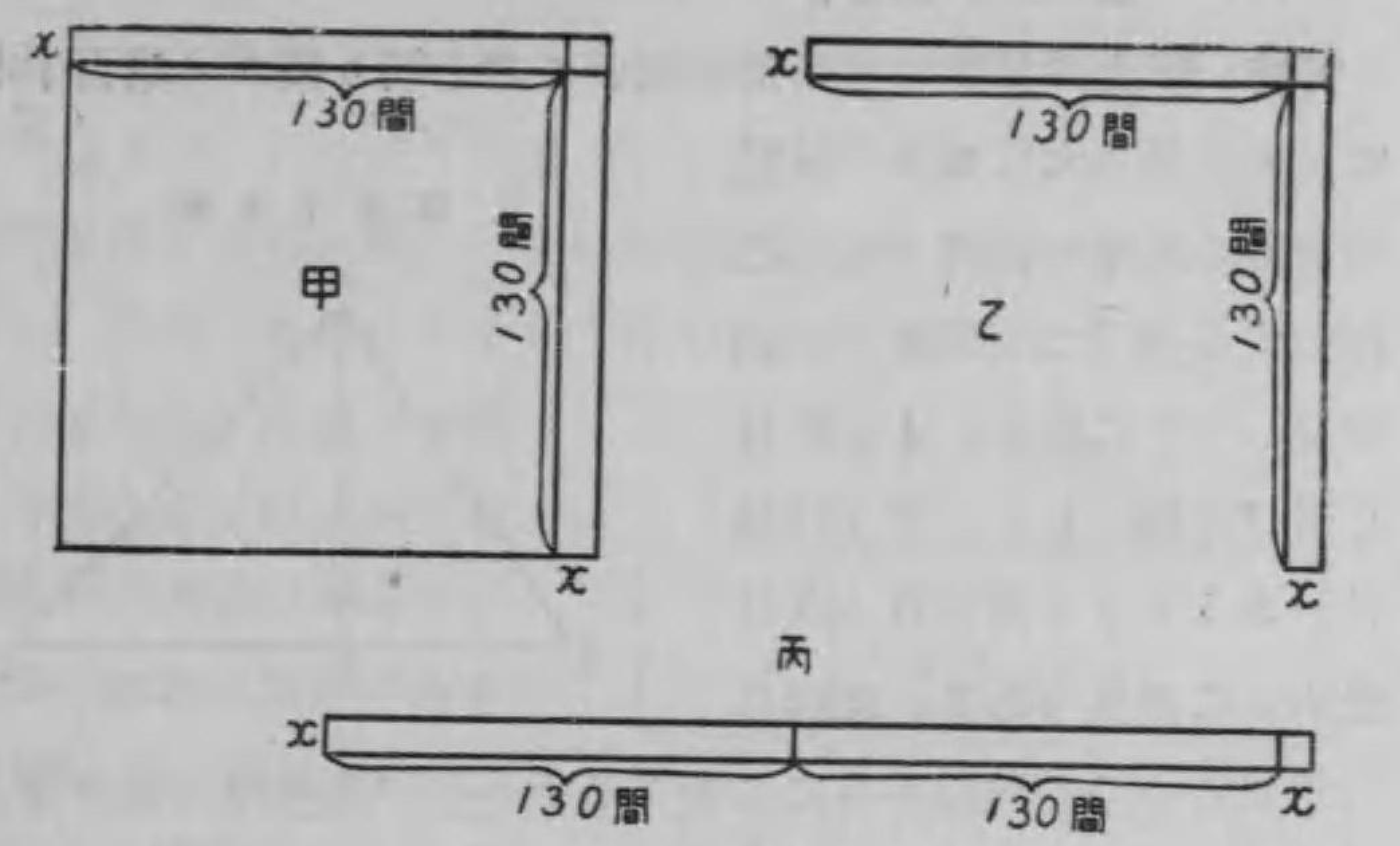
```
      1|79|56(13
      1
 ───────────
 23     79
        69
     ────────
        1056
```

さうして $17956-130^2=1056$

なる關係がある。次に一の位の數を求める爲めに，面積 17956 坪の正方形(第百十六圖)の土地があるとし，其一邊の長さを求めることを考へてみよう。さて其長さは既に 130 間餘なることが上の計算によつて知られ居る故に §108 と同樣に 130 間平方を取り去ると第百十六圖乙の樣になる。さうして其面積は1056 坪である。其未知の長さを x とし之を求める爲めに下方の長方

形を上の方に接ぎ足してみる。さすれば其値は 1056 を 130 の

第百十六圖



二倍で割れば大凡求められることがわかる。實際割つてみると 4 が得られる。之が正いか否かを驗めすには，260 に 4 を足し其結果に 4 を乘じて 1056 となるか否かをみればよい。實際計算してみると，

$$(260+4)\times 4=1056$$

となり，正しいことがわかる。

以上の計算は次の形式に從ふのが便利である。

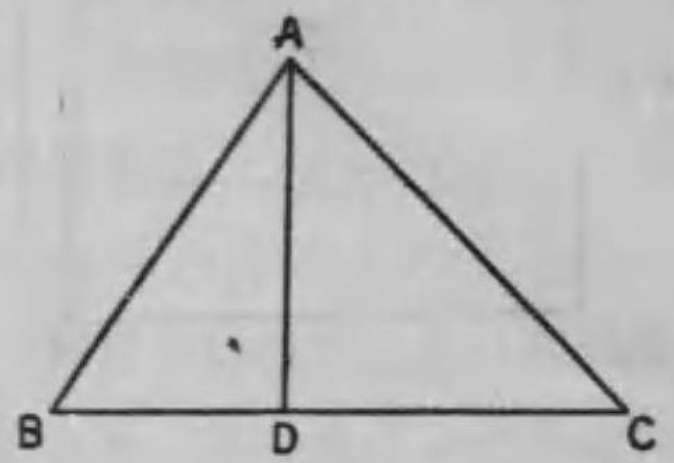
```
        1|79|56(134
        1
      ──────
 23     79
        69
      ──────
 264    1056
        1056
      ──────
           0
```

第八章　多角形の面積

§111. 三角形の高さ。

實驗。紙上に任意の三角形を描いて之を切り拔き(第百十七圖),その最も大なる角の頂點Aを通る直線を折目とし,之に對する邊の二つの部分が相重なるやうに折り,よく折目を附けた後,もとのやうに開け。さうすると其折目ADは邊BCに垂直である。此樣に三角形の一つの頂點から之に對する邊へ引いた垂線の長さを其高さといひ相對する邊を底邊と云ふ。

第百十七圖



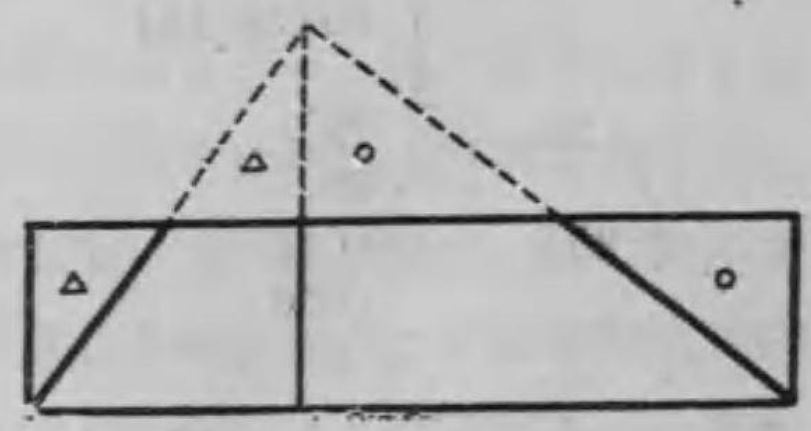
注意一。三角形には三つの頂點があるからその各の頂點を通る高さがある譯である。

注意二。B或はC角が直角である場合にはD點は一つの頂點と一致し,鈍角である場合には底邊の延長の上にある。

§112. 三角形の面積。

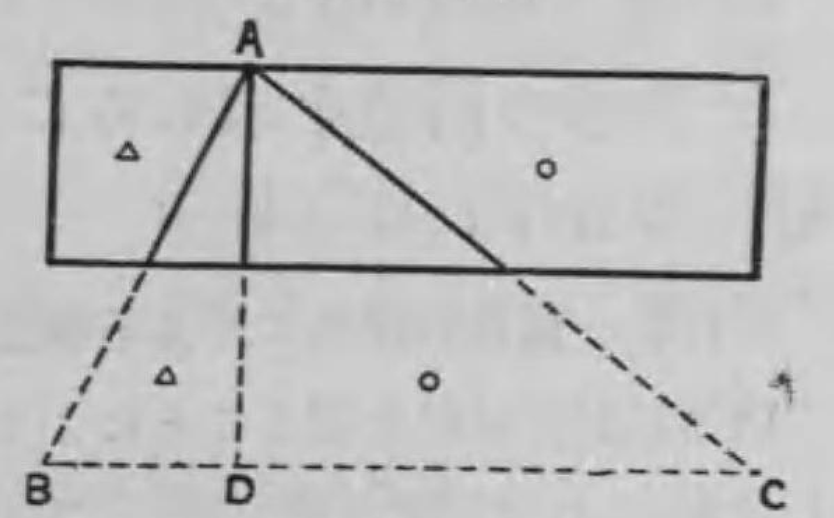
實驗一。紙上に任意の三角形を描いて之を切り拔き(第百十八圖),前節の方法により最も大なる頂點から底邊に垂線を引け。次にAとDが重なるやうに折り其折り目より上の部分を切り離し,又これを折目より二つに切り離し第百十八圖に示すやうに下の部分に接ぎ足せ。さうすると一つの矩形が得られる。此矩形はもとの三角形の底邊を一邊とし高さの半分を他の邊としたものである。

第百十八圖



實驗二。實驗一と同樣に紙を切つて作つた三角形ABCのA點を通りBCに垂直な折目ADを作り,AをDに重ねて折り,其折り目から切り離し,下の部分を縦の折り目から二つに切り離し,第百十九圖に示すやうに上の部分に接ぎ足すと一つの矩形が出來る。此矩形も前と同樣にもとの三角形の底邊を一邊とし其高さの半分を他の一邊とするものである。

第百十九圖

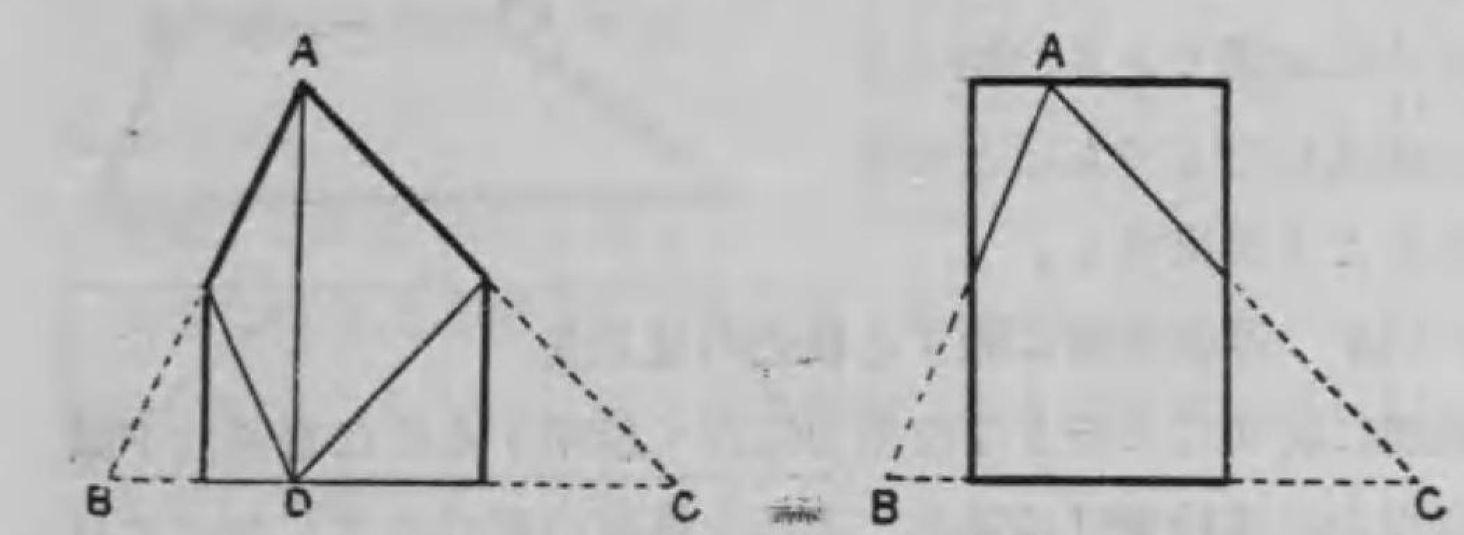


以上の實驗により次の事が知られる。

三角形の面積を求めるには其底邊に高さの半分を乘すればよい。

實驗三。前の實驗と同樣に,紙を切りて作つた三角形ABCの一頂點Aを通り底邊に垂直な折目ADを作り,底邊の兩端の

第百二十圖



頂點がDに重なるやうに折り，その折目から左右の部分を切り離し，第百二十圖に示すやうに殘りに接ぎ足すと一つの矩形が出來る。此矩形はもとの三角形の底邊の半分を一邊とし其高さを他の一邊とするものである。

故に次の事が知られる。

三角形の面積を求めるには，底邊の半分と高さとの積を求むればよい。

以上述べた所を總合して次のやうに述べてもよい。

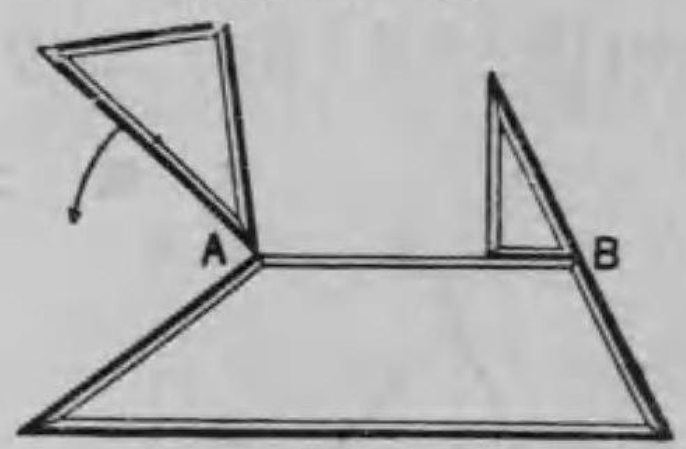
三角形の面積を求めるには，底邊と高さとの積を二等分すればよい。

§113. 前節の説明に用ふる模型。

前節に於ては紙を切ることにより三角形の面積計算法を説明したが，これは又木の板で作つた模型を用ひて説明してもよい。又先づ模型を以て説明し，次に紙を切つて之を確めしめてもよい。

前節實驗一の方法を説明する模型を作るには，厚さ六分位の木の板で第百二十一圖に示す如くすればよい。但しAとBとは蝶番である。他の實驗に相當したものも之と同様に作ることが出來る。

第百二十一圖

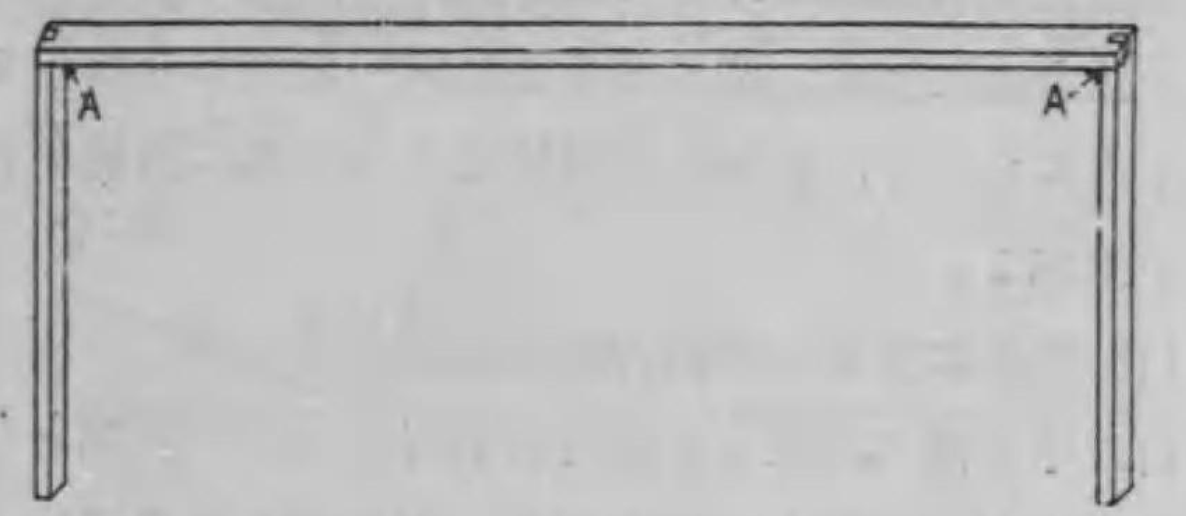


§114. 平面圖形に關する模型の使用臺。

前節に説明したやうな模型を用ひて説明するには普通其下緣を黒板の白墨粉受けに載せ，裏面を黒板の面にもたしかけて行

ふのが便利である。然るに黒板の構造によつてはかくしては模型の位置が低過ぎて不便なことがある。此様な場合には，第百

第百二十三圖

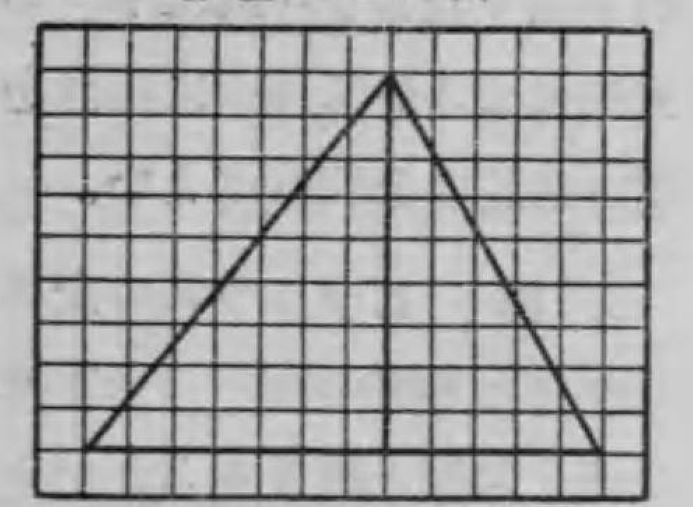


二十三圖に示すやうな臺を用ひ，此上に模型を置くのが便利である。此臺のAの部分は蝶番になり居り，使用しない場合は疊んで置くのである。

§115. 紙上に於て三角形の面積を測る練習。

一粍目の方眼紙を用意し，第百二十四圖の如く三角形の底邊が方眼紙の線と一致し，頂點が方眼紙の縦横の線の交點と一致するやうに描き，之を白紙の上に重ね其頂點の所を針で突き刺して下の紙に印をつけ，之を直線で連結すると方眼紙上の三角形と全等な三角形が得られる。

第百二十四圖



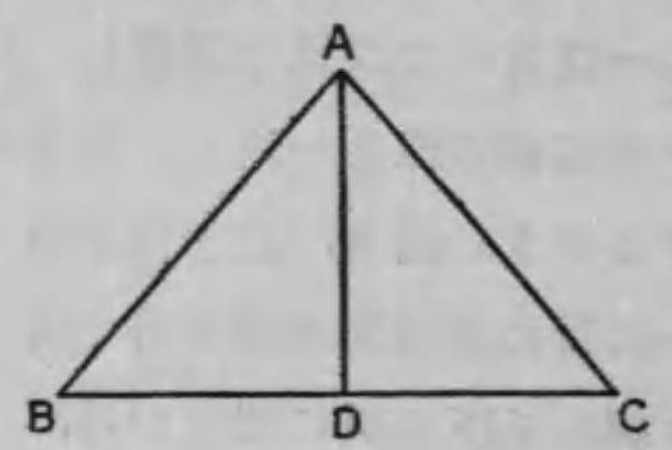
實驗。上の方法にて描きし三角形につき底邊及び高さを測りて其面積を計算せよ。次に方眼紙に描きたるものに就き方眼の數により面積を計算し前のものを之に比較せよ。

注意。白紙數枚を重ねて置いて此方法を應用すると，全等なる三角形數枚を一度に作ることが出來る。生徒或は兒童に對し紙上に於て三角形の面積を求めることを練習せしめるには，此方法で三角形の頂點を印した紙を與へて練習せしめるが便利である。此方法に據ると總ての生徒に同一の圖形を與へることが出來るのみならず，教師は方眼紙により容易に面積を計算することが出來る。

§ 116. 野外に於て三角形の面積を測る法。

第百二十五圖A, B及Cを野外に於ける三つの測點とし，之を直線で連結して出來る三角形 ABC の面積を測るには，其一邊例へば BC の長さを測ると同時に之に對する高さを測るのである。BC が一鎖より短き場合にはBからCまで繩を張り置き §48 或は §66 の方法にて高さを測ればよい。又 BC が一鎖より長いときには §31 の方法によりBからCの方に向つて測り行く途中Aからの垂線と BC との交點が在ると思ふ所に鎖を引き張り置き §48 或は §66 の方法にてAから BC に垂線を引き此長さを測ればよい。

第百二十五圖



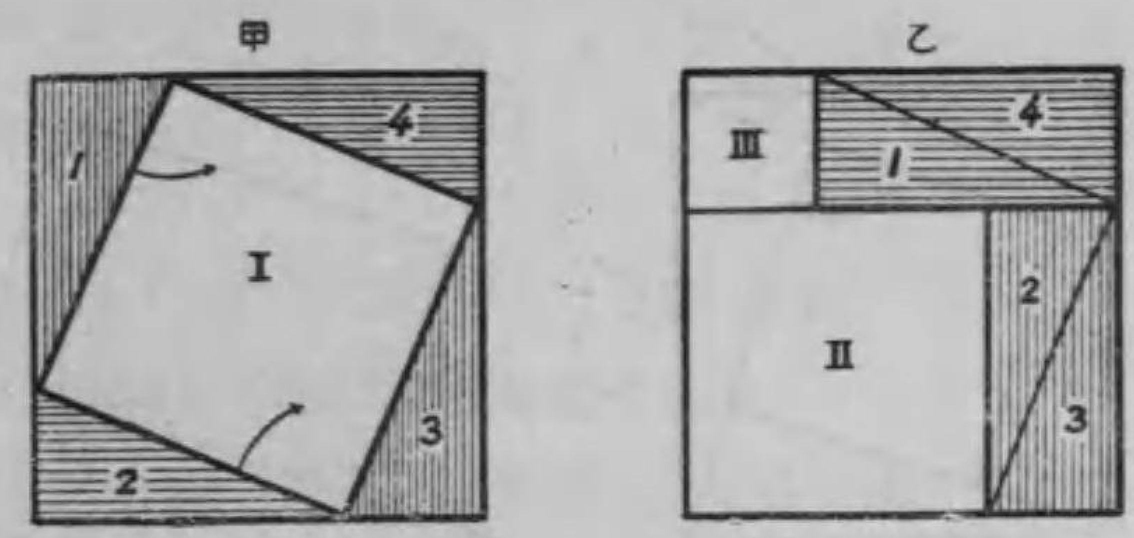
§ 118. ピタコラスの定理。

直角三角形の直角に對する邊を斜邊といふ。又斜邊を弦他の二邊を勾股と稱することがある。

實驗一。色紙を切りて相等しき矩形二枚を作り，其各を對角線に沿うて切り離し，相等しい四枚の直角三角形を作れ。又白紙で前に作りし矩形の二邊の和に等しい長さを一邊とする正方

形を作れ。先白紙の正方形を展べ，其上に第百二十六圖甲に示

第百二十六圖



す様に四つの直角三角形を列べ置くと，其中間に出來る空きIは直角三角の斜邊の上の正方形である。今直角三角形１と２を圖の矢で示すやうに廻轉して置くと空きの場所II及び III は直角を挾む二邊の上の正方形である。而して甲及び乙に於て空いた場所は何れも白紙の正方形から色紙の四つの直角三角形を引いたものがあるから相等しくなければならぬ。

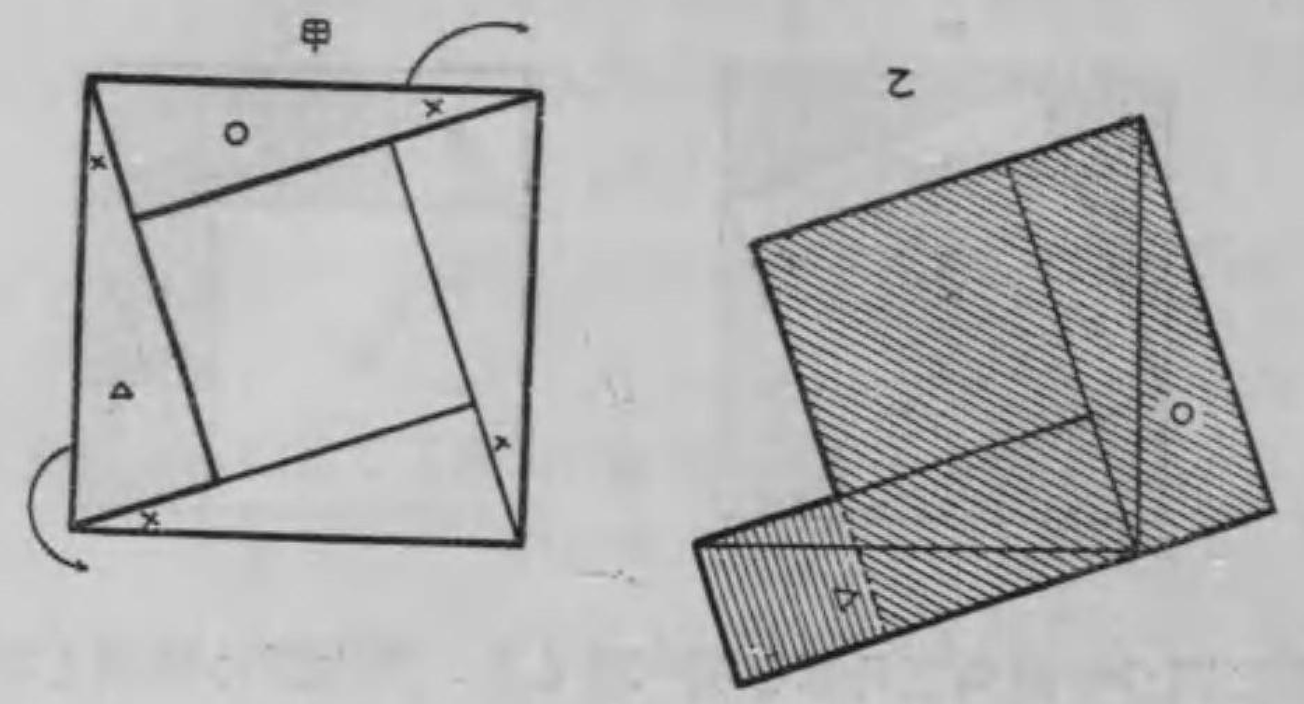
上の實驗を示す模型。木の板で上の實驗を示す模型を作るには，直角三角形3と4は固定し置き，1と2は正方形の板と直角三角形とに夫々小さき孔及び之に適合する凸起を作り置き，之によつて甲のやうにも乙のやうにも列べることが出來るやうにする。さうして直角三角形は赤く塗り下の正方形は白く塗つて置くのである。

實驗二。紙を正方形に切り，第百二十七圖甲の如く×の印を附けた角が相等しくなる樣に四つの直線を引く。

さうすると周圍に全等なる四つの直角三角形が出來，其中央に正方形が出來る。さて此全形は其直角三角形の斜邊の上の正方形である。今○と△の印をつけた直角三角形を切り離し，矢

で示すやうに廻轉して乙に示すやうにしてみると直角を挾む邊

第百二十七圖



の上の正方形を接ぎ合したものが出來る。

上の實驗を示す模型。此實驗を示す模型を作るには，○と△との直角三角形のみが離れるやうにし，之が蝶番によつて廻轉するやうにすればよい。

以上の實驗により次の事が知られる。

直角三角形の斜邊の上の正方形は他の二邊の上の正方形に等しい。

これを**ピタゴラスの定理**といふ。

§ 118. 直角三角形の二邊を知りて他の一邊を計算すること。

例 1. 直角三角形ノ直角ヲ挾ム邊ガ3米及ビ4米ナルトキ斜邊ノ長サヲ求メヨ。

解。直角を挾む二邊の正方形の和は斜邊の上の正方形に等しいから，斜邊をx米とすると，

$$x^2=3^2+4^2$$
$$=25$$

$$x=\sqrt{25}=5 \qquad 答\ 5米$$

例 2. 直角三形ノ斜邊ノ長サ65米他ノ一邊52米ナルトキハ他ノ邊ノ長サ何程ナルカ。

解。所要の邊をx米とすると

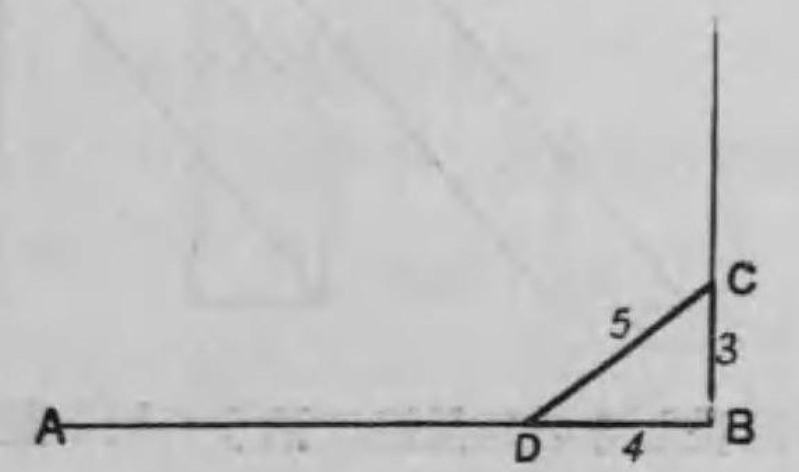
$$x^2=65^2-52^2=4225-2704=1521$$

$$x=\sqrt{1521}=39 \qquad 答\ 39米$$

§ 119. 鎖線の一端に垂線を立てる法。

鎖線ABの一端に於て之に垂線を立てるには，測繩或は卷尺を3, 4, 5の割合に折り第百二十八圖に示すやうに引き張りB及びCに測串或は向桿を立てBCを延長すればよいのである。何となれば三角形BCDに於ては二邊の正方形の和は他の一邊の正方形に等しいから直角三角形である。從て角DBCは直角である。

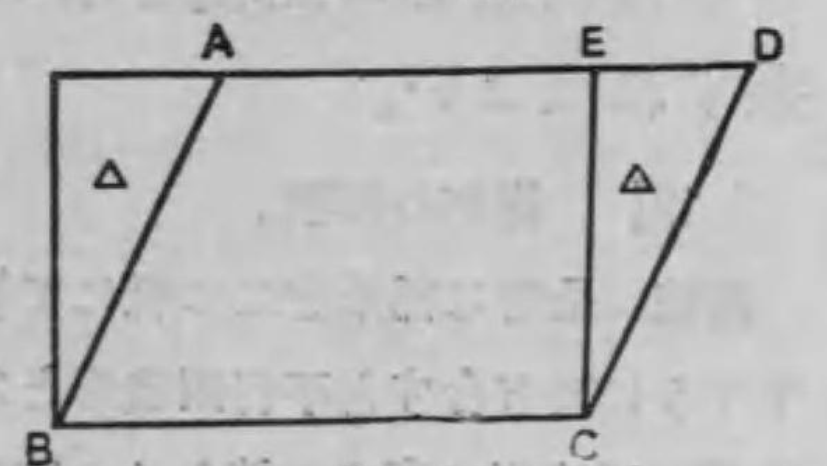
第百二十八圖



§ 120. 平行四邊形の面積。

實驗一。紙上に任意の平行四邊形ABCDを描いて之を切り拔き，其一頂點Cから底邊BCに垂邊CEを引け。さうするとCEが對邊ADと交る場合と交はらぬ場合とある

第百二十九圖

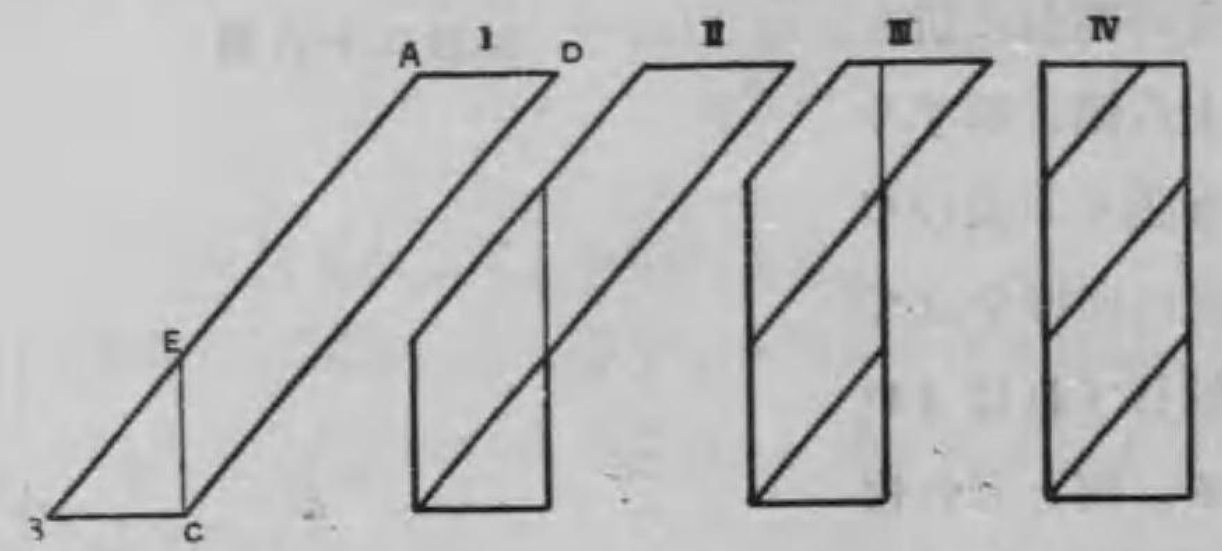


第二の場合は實驗二に於て述べるとし，次には第一の場合に就て述べよう。(第百二十九圖)

先づ CE に沿ふて二つに切り離し左の方へ接ぎ合すと矩形が得られる。此矩形はもと平行四邊形の底邊及び高さを二邊とするものである。

實驗二。CE が AD と交はらぬやうな平行四邊形を切り（第百三十圖)，CE より二つに切り離してIIのやうに接ぎ合し，CE

第百三十圖



を延長しその延長線に沿うて切り離し之を III の樣に接ぎ合し以下同樣に進むと遂に IV のやうな矩形が得られる。此矩形はもとの平行四邊形の底邊を底邊とし高さを高さとするものである。

以上の實驗により次の事が知られる。

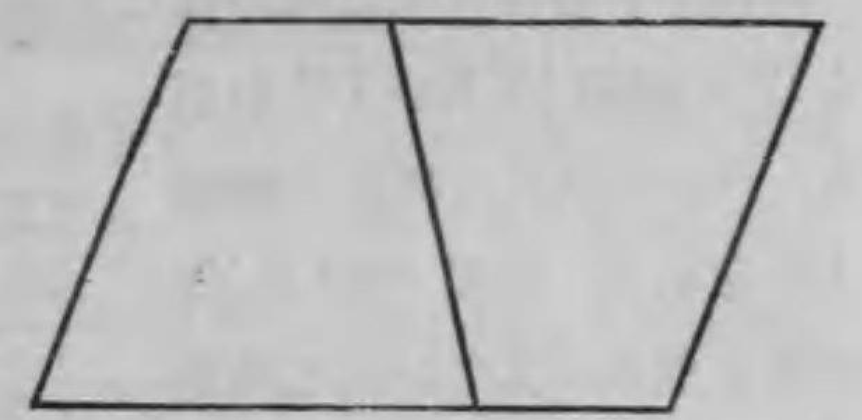
平行四邊形の面積を求めるには底邊に高さを乘ずればよい。

§ 121. **梯形の面積**。

實驗。全等な梯形を二つ紙にて切り抜き，第百三十一圖に示すやうに接ぎ合すと平行四邊形となる。さうして其高さはもとの平行四邊形の高さに等しく，底邊は梯形の上底と下底との和

である。之により次のことが知られる。

第百三十一圖



梯形の面積を求めるには上底と下底との和に高さを乘じ二分すればよい。

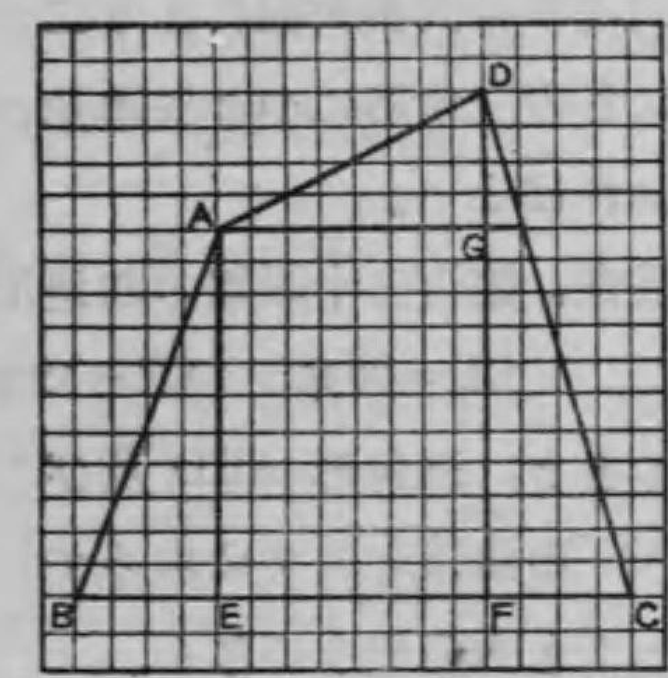
或は

上底と下底との和の半分に高さを乘ずればよい。

§ 122. **方眼紙に描かれた四邊形の面積計算法**。

一邊が方眼紙の線と一致するやうに描かれた四邊形の面積は方眼の數を讀むことにより容易に求めることが出來る。

第百三十二圖



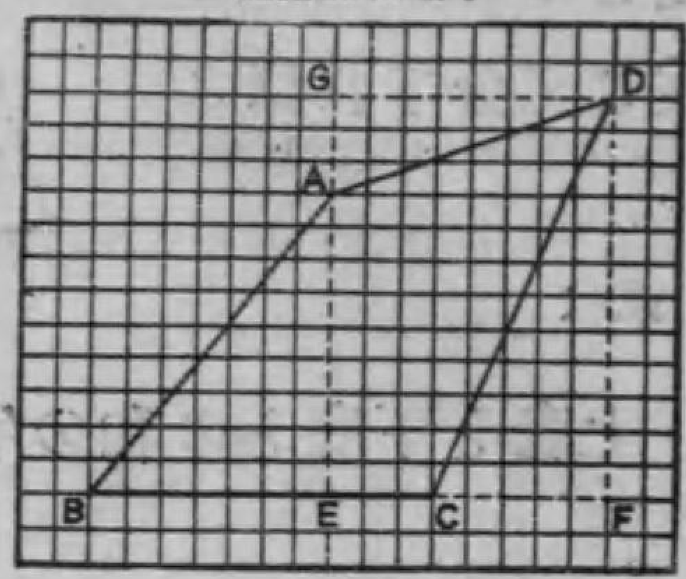
第百三十二圖に示すやうな四邊形の面積を計算するには，A及びDから BC に垂線 AE 及び DF を引き，A から DF に垂線 AG を引く，さうすると AEFG は矩形であるから容易にその面積を知ることが出來る。また他の部分は直角三角形に分たれて居るから，直角を挾む二邊の積を二分すれば各の面積が得られる。此各部分の和を求めると全體の面積が得られる。實際圖に示す四邊形に就いていへば

$$88+22+30+16=156$$

は其面積である。

四邊形が第百三十三圖の様な形の者なるときは，A及びDからBCに垂線AE及びDFを引き，DからAEの延長に垂線DGを引き，矩形GEFDの面積を求め，其中から三角形ADG及びDCFの面積を減じ，三角形ABEの面積を加ふればよい。即實際に就いて計算すると。

第百三十三圖



$$96-12-30+31.5=85.5$$

となる。

§ 123. 一般四邊形の面積計算法。

四邊形は其對角線により二つの三角形に分つことが出來る。故に各の三角形につき底邊及び高さを測つて面積を計算し之を加ふればよい。

注意。 第百三十四圖の四邊形ABCDに於て，

BD=38米，　AE=12米，　CF=14米

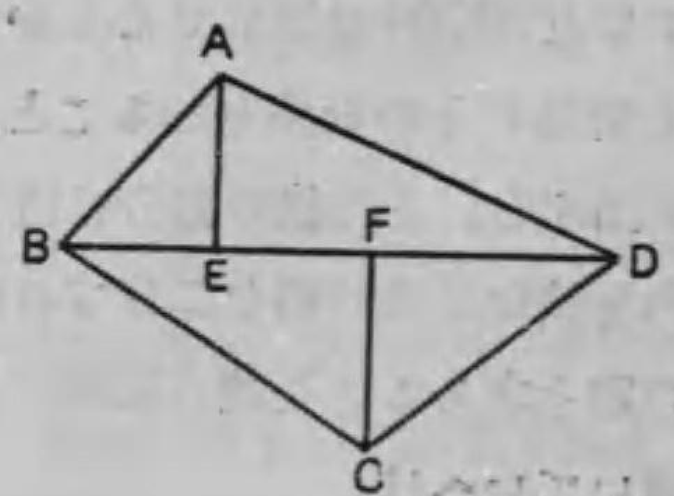
なるとき，三角形ABD及びDBCの面積を別々に求めて加へると次のやうになる。

$$\frac{38\times12}{2}+\frac{38\times14}{2}=228+266$$

$$=494 \quad 即 \quad 494平方米$$

然し38は兩方の三角形に共通であるから

第百三十四圖



$$(12+14)\times38\div2=494$$

とする方が簡便である。

§ 124. 紙上に於ける四邊形の面積を測る練習。

實驗。 方眼紙上に任意の四邊形を描け。但し四邊形の一邊は方眼の線と一致することを要する。之を白紙の上に重ね，その頂點の所を針にて突き刺し，下の白紙に印を入れ，之を連結して四邊形を描き，前節の方法で其面積を計り方眼紙上に描いたものゝ面積と比較せよ。

實測の成績。 第百三十五圖甲によつて計算した結果

$$(8.5+7.8)\times15.1\div2=123.07$$

即　123.07平方分

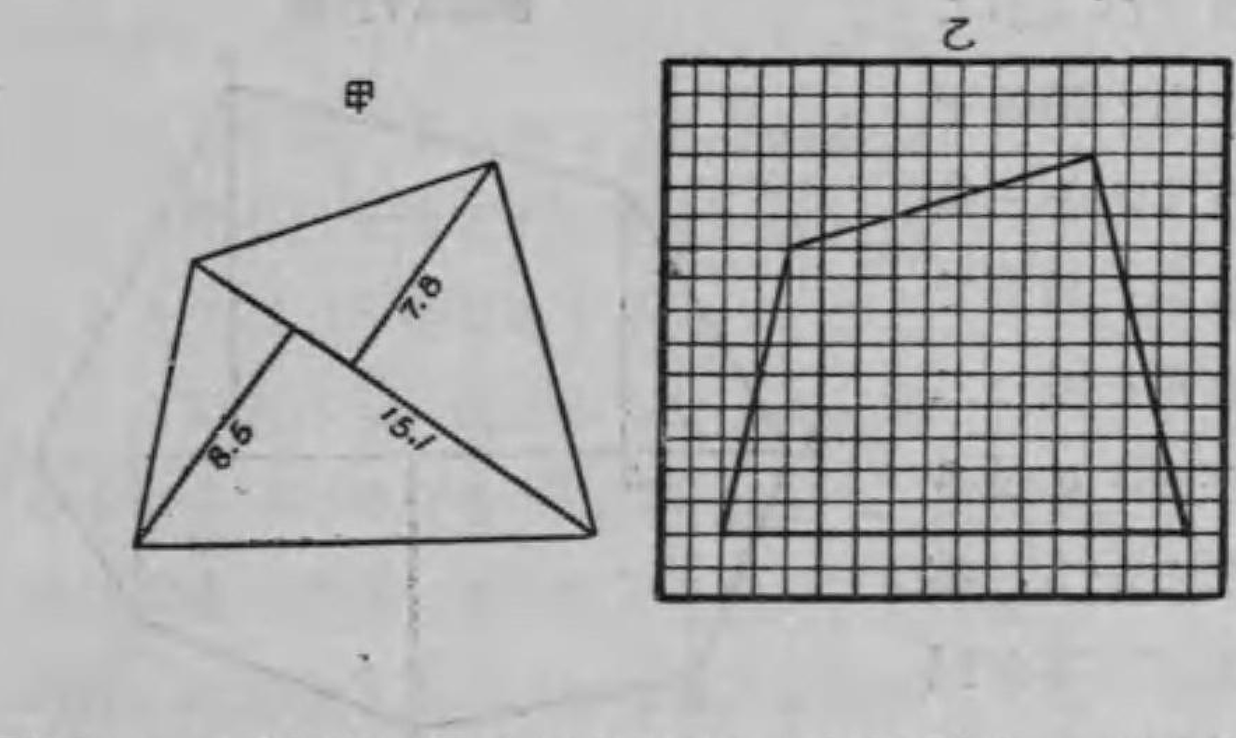
同圖乙により方眼の數を數へて得た結果

$$81+18+13.5+9=121.5$$

即　121.5　平方分

注意一。 生徒或は兒童に紙上に於ける四邊形の面積を求める練習をさせるにはこの方法を採るのが便利である。

第百三十五圖



注意二。 四邊形の場合に於ける野外實習は，三角形の場合と

同様である。

§ 125. 一般多角形の面積計算法(其一)。

何れの多角形も對角線によつて數多の三角形に分割せられる。故に §112 の方法によつて其面積を求めることが出來る。

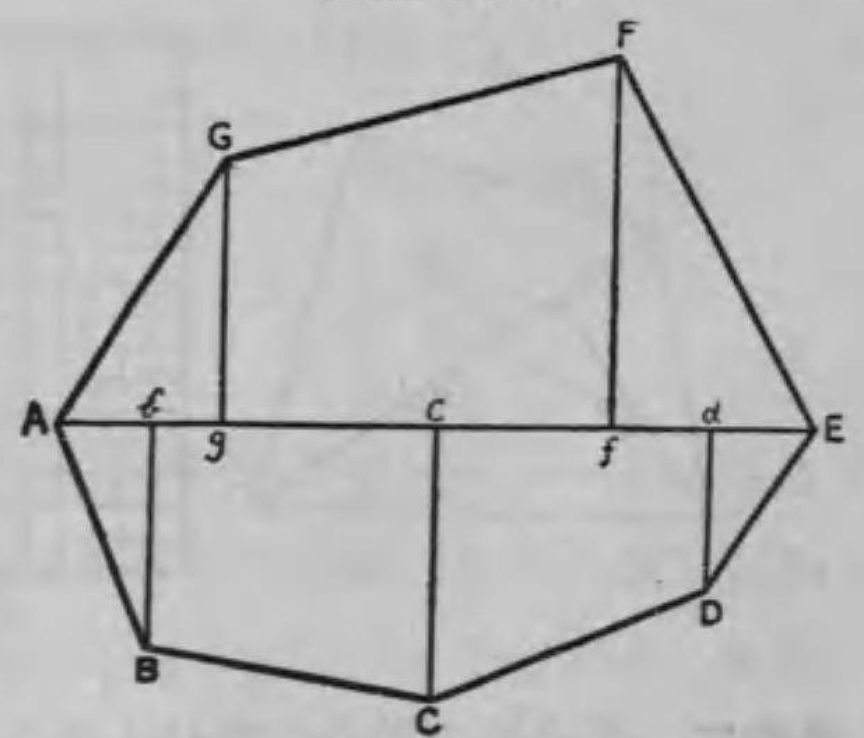
實測の成績。次の成績は同一の場所(五角形の土地)で行つた結果であるけれども，各組とも三角形に分割する方法が違つて居る爲め，途中の數を掲げても比較することが出來ない。それ故最後の結果を掲ぐるに止めて置く。

組	實測の結果	組	實測の結果
I	坪 202.78	IV	坪 202.19
II	202.69	V	201.40
III	200.47		

§ 126. 一般多角形の面積計算法(其二)。

第百三十六圖に示す多角形 ABCDEFG に就て說明しよう。一つの對角線 AE を引き，他の頂點から之に垂線を引き，各の垂線の長さ及びAから垂線の交點迄の距離を測れ。さうすると三角形 AbBは直角三角形であつて其直角を挾む二邊 Ab 及び bB の長さを知つて居るから，其面積を計算する事が出來る又四邊形 BbcC に

第百三十六圖



於て Bb と Cc は平行であるから梯形である。そうして bc は其高さである。上底下底及び高さを知つて居るから其面積を計算することが出來る。上の方法に於て AE は其驅幹となる線であつて之を**基線**といひ，之より左右に測つた垂線を其**枝距**といふ。

野外實習の注意。野外に於て實測するには，基線の一端例へばAからEに向ひ，§31 の方法によつて測り行く途中に於て§48 の方法によりその枝距を測るのである。

記帳上の注意。今

Ab=10間， Ag=15間， Ac=35間， Af=50間， Ad=60間，
AE=70間， Bb=20間， Cc=25間， Dd=15間， Gg=25間，
Ff=35間，

である時には之を次のやうに記すのが便利である。即先づ縱に二線を引き，其間にはAから測つた基線上の距離を記し，左の方にはAからEの方に向つたとき左の方の枝距を，右の方には同じく右の方の枝距を記すものとする。

基線上の距離を記すには，先づ出發點を最下に記す。次にAから b まで 10 間であるからAの上に 10 と記し，b から B までは 20 間であるから 10 の右の方に 20 と記し，其右にBと記す。次にAから g までは 15 間であるから 10 の上に 15 と記し，gG は g から左へ 25 間であるから 15 の左の方に 25 と記し，又其左にGと書く。以下同様に進み最後に到着點Eを最上に記す。

	E	
	70	
	60	15 D
F 35	50	
	35	25 C
G 25	15	
	10	20 B
	A	

計算。計算をするには直ちに上の表からするのが便利である實際やつてみると次の通りである。

$$\frac{10\times 20}{2}=100$$

$$\frac{(25+20)\times(35-10)}{2}=562.5$$

$$\frac{(25+15)\times(60-35)}{2}=500$$

$$\frac{15\times(70-60)}{2}=75$$

$$\frac{15\times 25}{2}=187.5$$

$$\frac{(25+35)\times(50-15)}{2}=1050$$

$$\frac{35\times(70-50)}{2}=350$$

合　計　2825

實測の成積。 次の結果は同一の場所を異なる組が測つたものである。

第一組

		E	
		32.28	
		....	5.28
D	5.70	24.36	
C	5.43	14.79	
B	2.68	6.72	
		A	

算 202.772

第二組

		32.28	
		....	5.28
D	5.70	24.33	
C	5.43	14.76	
B	2.68	6.63	
		A	

算 203.90

第三組

		E	
		32.39	
		....	5.24
D	5.71	24.45	
C	5.70	14.78	
B	2.80	6.67	
		A	

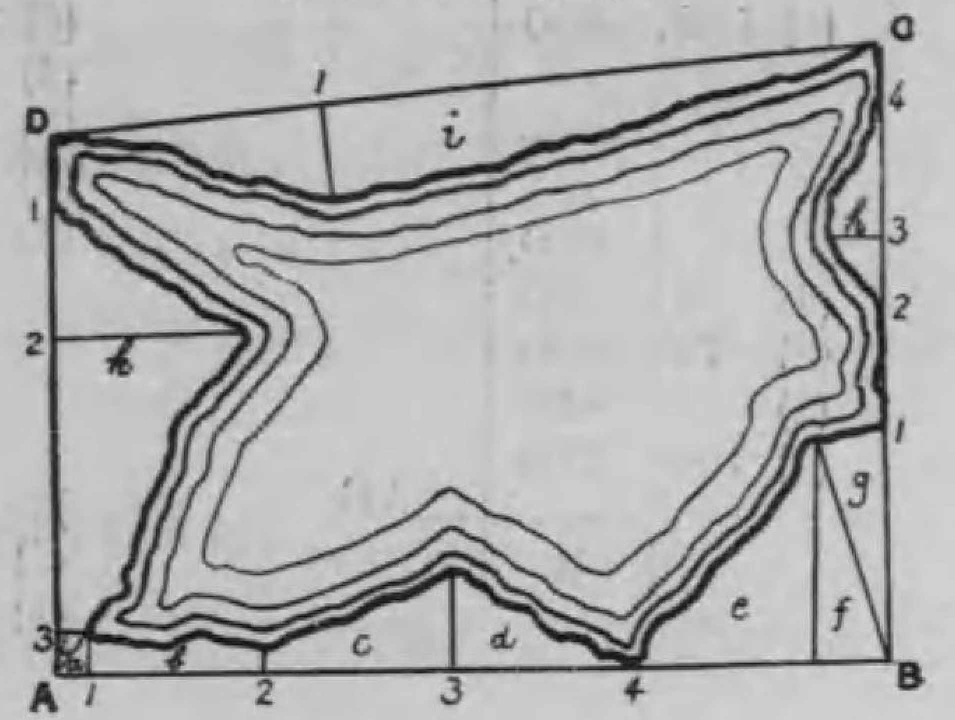
算 203.83

§ 127. 池或は森等の面積を測る法。

I. **大體の方針。** 池或は森の如きものゝ面積を測る場合には，其中に基線を取ることが出來ぬから，其周圍に取るのである。さうして此基線から池或は森の角々への枝距を測り，基線によ

つて圍まれて居る面積から，其中の池或は森ならざる部分の面積を引くのである。故に基線で圍まれた形は容易に面積の計算が出來るやうにして置く必要がある。例へば梯形として置く如きである。

第百三十七圖



例へば今第百三十七圖に示すやうな池の面積を測るには，基線AB, BC, CD 及び DA を取る。但し CB 及び DA は AB に垂直にする。さうすると ABCD は梯形であるからその面積は容易に計算することが出來る。次にこれから其中にある陸地の部分を引き去るのである。

II. **測定方法。** 先づ基線を定め，其一つの頂點例へばBから出發しCに向つて 1, 2, 3, 4 までの距離を測り行く途中に於て其枝距を測り，C に達した後は方向を變じてDに進み，D から A にAからBに還るのである。

III. **記帳法。** 測量の結果を記すには各基線毎に區分して記すのが便利である。即ち前頁のやうである。

B 及びAの右に ⊥AB と記してあるのは BCはB點に於てDAはA點に於て AB に垂直であることを示すのである。

實測の成績。 次に掲ぐるものは運動場の一部分を池と假定し本節の方法を用ひて測つた結果である。途中の數は基線の定め方によつて違ひ，比較しても價値なきもの故，最後の結果のみ

揭げて置く。

	D	
	1050	
(1) 150	800	
	C	
	C	
	900	
(4) 0	750	
(3) 75	600	
(2) 0	400	
(1) 100	250	⊥AB
	B	

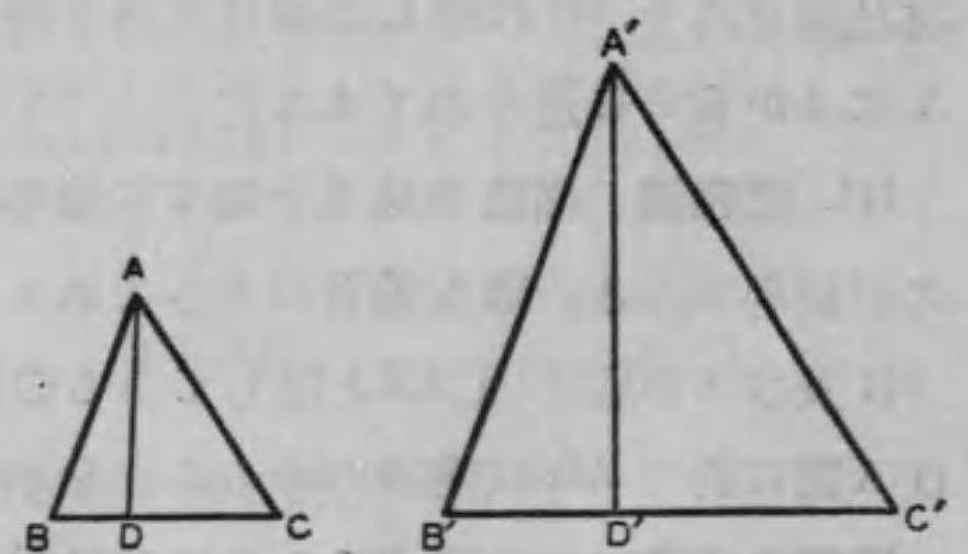
	B	
	950	
(5) 250	850	
(4) 0	650	
(3) 200	450	
(2) 75	250	
(1) 100	50	
	A	⊥AB
	A	
	750	
)3) 200	650	
(2) 75	300	
(1) 0	100	
	D	

	畝 歩
第一組	6.26.50
第二組	6.27.24
第三組	7.06.00
第四組	6.29.99

§ 128. 相似三角形の高さの比。

實驗。 任意の三角形 ABC を描き（第百三十八圖）之と相似であつて各邊が其二倍なる三角形 A′B′C′ を描き，A 及び A′ より對邊に垂線 AD 及び A′D′ を引き其長さを測つて比較せよ。又各邊が三角形 ABC の三倍なるものを描き同樣の事を試みよ。

第百三十八圖



之によつて次の事が知られる。

二つの互に相似なる三角形の相對應する頂點から下した高さの比は對應する邊の比に等しい。

§ 129. 相似三角形の面積の比。

實驗。 任意の三角形と，各邊が其二倍なる三角形とを描き，各の面積を測つて比較せよ。又各邊が三倍なる三角形の面積を測つて比較せよ。

之によつて次の事が知られる。

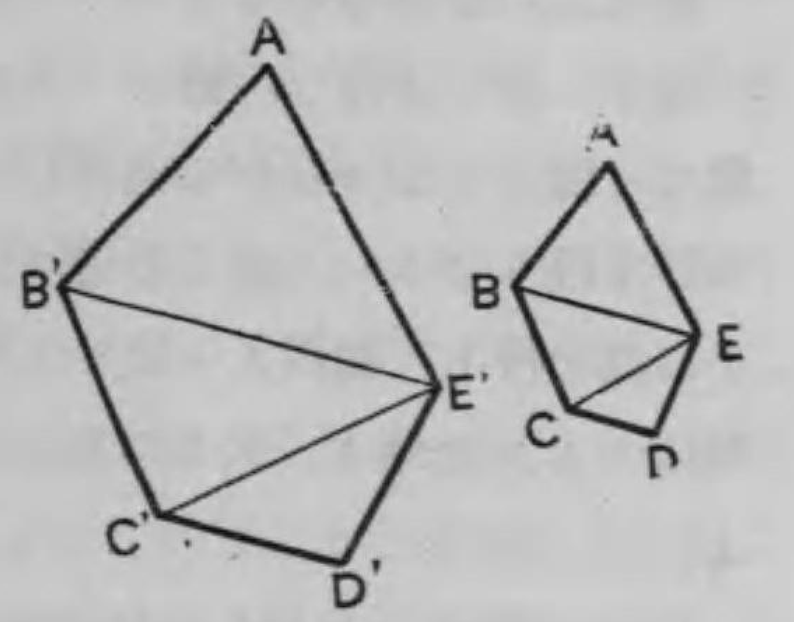
相似三角形の面積の比は對應邊の自乘の比に等しい。

其理由。 各邊の長さが二倍になると高さも二倍になる。さうして三角形の面積は底邊と高さとの積であるから，四倍となる譯である。

§ 130. 相似多角形の面積の比。

今 ABCDE と A′B′C′D′E′ とが互に相似なる五邊形とし且つ後の各邊は前の各の二倍であるとする。之を E 及び E′ を通る對角線で各三つの三角形に分つて考へてみると二つ宛相似な三角形である。故に其各の對に於て後の方は前のものゝ四倍となつて居る故，全體としても後のものは前のものゝ四倍である之と同樣に一般に，

第百三十九圖



相似多角形の面積の比は對應邊の自乘の比に等しい。

注意。地圖の一萬分の一とか二萬分の一とかいふのは，長さに就いていふのであるから，面積に就いていふとその自乘分の一になつて居る譯である。

第九章　圓及び楕圓

§131. 圓の各部の名稱。

圓の各部は名稱を第百四十圖に示す通りである。

第百四十圖

§132. 圓周率。

實驗一。湯呑茶筒の如き圓筒形の器を用意し，其周と直徑とを測りその周が直徑の幾倍あるかを見よ。之を大小種々のものに就て行へ。

實驗二。運動場のなるべく平坦なる所を選び，一人が測繩の一端を一點に固定し，他の一人が之より八米の所に木の切れを當て，繩を引張りながら廻轉して圓を描け。次に此周圍を場所の許す限りなるべく多くの者が圓の內外に圓に沿うて列び各の手に繩を持ち，圓周と一致せしめて圓周の長さを測り，直徑の幾倍あるかを見よ。大さの異なる圓に就ても同樣の實驗を試みよ。

以上の實驗により次の事が知られる。

圓周の長さは何れの圓に於ても直徑の約三倍

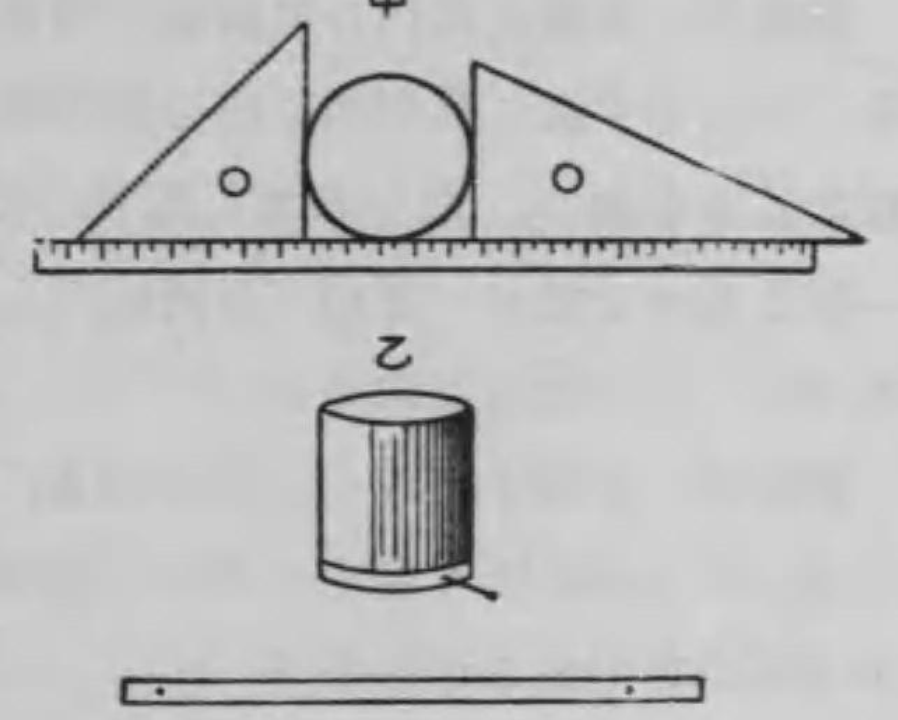
である。

尙一層精密に圓周と直徑との割合を知る爲めに次の實驗を行ふ。

實驗三。木で正しい圓壔を作り，先づ第百四十一圖甲に示す如くして其直徑を測れ。但し精密を要する故に異なる直徑三つ位を測りて其平均を求めよ。次に直徑を測りたる部分に帶狀の紙を第百四十一圖乙の樣に卷き，其重なつた部分に針を刺し上下兩方の紙に印をつけ，之を開き卷いた時內へ向いた方の面を上にして机上に展べ，兩方の孔の距離を測れ。但し數回試みて平均を求めよ。

第百四十一圖

甲



此圓周の長さを直徑の長さにて割り其比を求めよ。

注意一。坊間に賣買する三角定規中には直角の正しくないものがある故，此實驗を行ふには薄い洋紙を第五十圖に示すやうに折り，其直角を用ひて直徑を圖る方が良結果が得られる。

注意二。圓周を測るとき紙の兩端の重なり方はなるべく少ない方がよい。多いときには圓周の長さが實際よりも過大に出る。

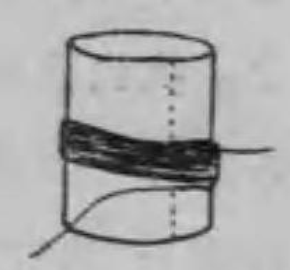
注意三。針の孔の距離を測るとき紙の外側を上にすると圓周が過大になる。又之を測るときは卷いたときと同樣の强さで引き延ばすことが必要である。其爲めに一端を針で止め他端を引き延ばして測つてもよい。

實驗の成績。次に掲ぐるは直徑6糎許りの圓壔を用ひて行つた結果である。

3.140	3.141
3.150	3.153
3.126	3.135
3.146	3.132
3.141	3.156

實驗四。實驗三に用ひた圓壔を用ひ，其周圍を測るに第百四十二圖に示す樣に其周圍に絲を數回巻き，其絲の長さを測り。之を巻きし回數にて除し，一巻の長さを求め，實驗三と同樣にして直徑を測り，二つの比を求めよ。

第百四十二圖



實驗五。半徑十糎許りの圓を描き，§34 IV に述べた方法により齒車を用ひて其直徑と圓周とを測り，圓周が直徑の幾倍あるかを檢せ。

實驗の成績。次表の直徑及び圓周の長さは齒車の隣接せる二の齒の距離を單位として表はしたものである。

半徑	直徑	圓周	圓周:直徑
約 4寸	255.4	804.0	3.1418
約 3寸	191.5	598.0	3.122

以上の實驗により次の事が知られる。

圓周の長さは直徑の長さの約3.14倍である。

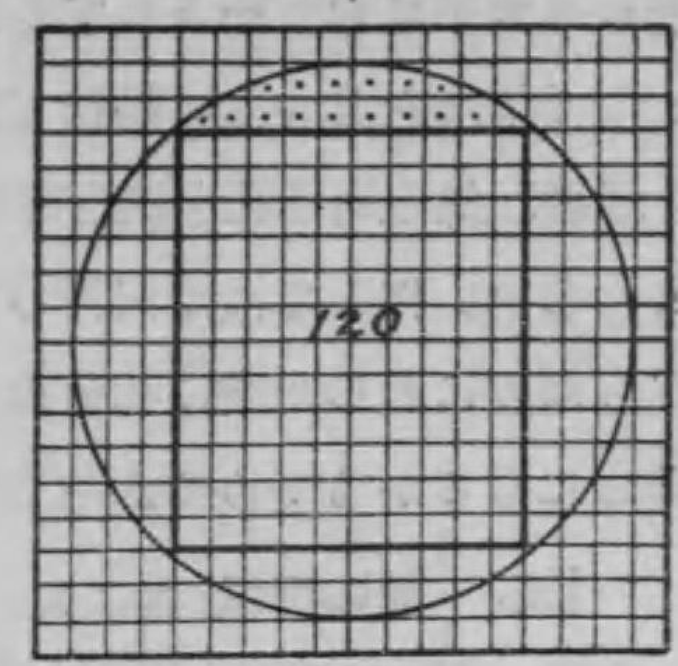
§133. 圓の面積(其一)。

實驗。方眼紙に任意の圓を描き，その中にある方眼の數を數へよ。それには先づ第百四十三圖に示す樣に區切り其正方形或は矩形內の數は邊の長さから計算によつて算出し，周圍のもの

は一つ宛數へるのである。但し一部分が圓外にあるものにつきては半分以上圓內にあるものは一つと數へ然らざるものは全く數へないのである。

かくして數へた結果と半徑の自乘に3.14を乘じたる結果とを比較せよ。

第百四十三圖



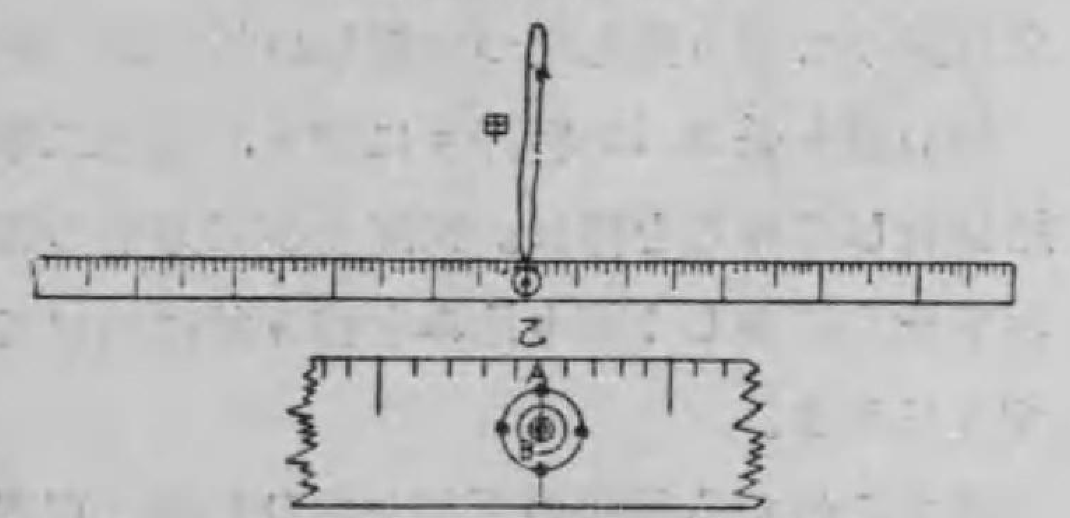
實驗の成績。次表に於て圓の半徑は方眼の邊を單位にして表はしたものである。

圓の半徑	方眼の數	半徑^2×3.14
4	52	50.08
6	113	113.04
8	200	200.96
10	316	314.00
12	452	452.16
14	615	615.44

§134. 簡單な天秤の製作法。

次節に述べんとする實驗には天秤が必要であるから之を簡單に作る方法を說明して置かう。

第百四十四圖



先づ鯨尺一尺の物指を用意する。其中央には第百四十四圖乙に示すやうな印

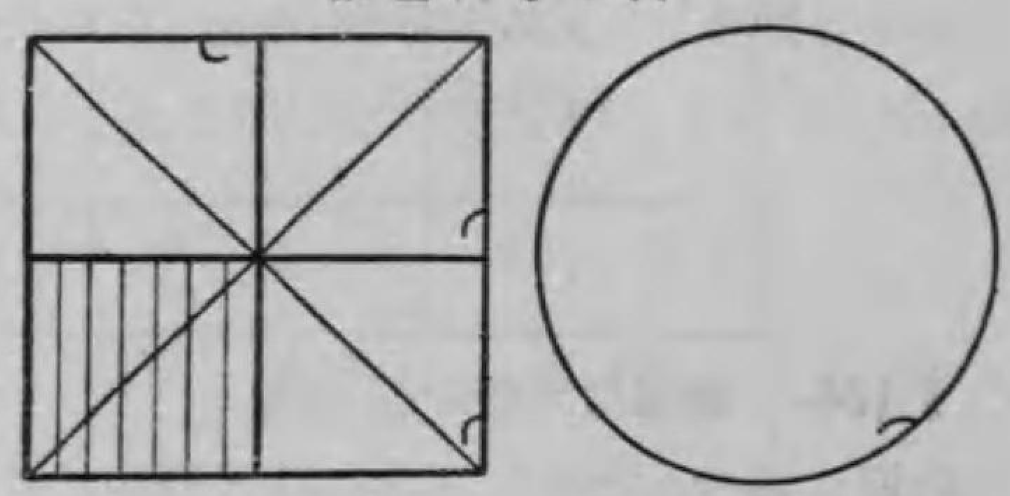
がある。其A點に孔をあけ，絲を通して吊し，其重い方の裏を削つて水平になるやうにする。これが即天秤である。試みに小さな紙切れを其一方に掛けて鋭敏の度合を驗せよ。

注意。 絲を通す孔を第百四十四圖乙の眞中の點にあけては宜しくない。何となれば天秤の支點は桿の重心より上になくてはならぬのに若し此點に孔をあけると大體支點に重心が一致することになるからである。

§ 135. 圓の面積(其二)。

實驗。 模造紙（はがきの紙より厚ければ宜し）に半徑 5.6 糎の圓を描きて正しく切り抜け。又同じ模造紙で一邊 11.2糎の正方形を正しく描いて切り抜き，此正方形の二つの對角線を引いて其交點を求め，之を過りて各邊に平行なる直線を引き，之に沿うて切り離して四つの相等しい正方形となせ。さうすると其各は圓の半徑上の正方形である。其中の一つを取り相對する邊を各8粍宛七つに等分し，其分點を結び附け，之に沿うて切り離し七つの等しい長方形に分て。

第百四十五圖



細い絲を長さ 12 糎許りに切り，之を二等分し，各の兩端を結び合してわなを作れ。又圓及び正方形の各に第百四十五圖に示すやうに少しく切り込みを作り絲に掛けて吊すことが出來るやうにせよ。

さてこれから前節の天秤を用ひ此圓と正方形の目方を比較す

るのである。先づ絲を天秤の兩方に支點より等距離の所に(4寸5分位の所がよい）掛ける。次に其一方に圓を他の方に正方形一つを掛けどちらが重いかを見よ。圓の方が重い事がわかる。それ故更に今一つの正方形をかける。まだそれでも正方形の方が輕いから更に今一つ正方形を掛ける。まだ輕いから帶狀のもの一つを掛ける。これで釣合ふ。

これで圓の目方は半徑の上の正方形の $3\frac{1}{7}$ 倍であることがわかる。

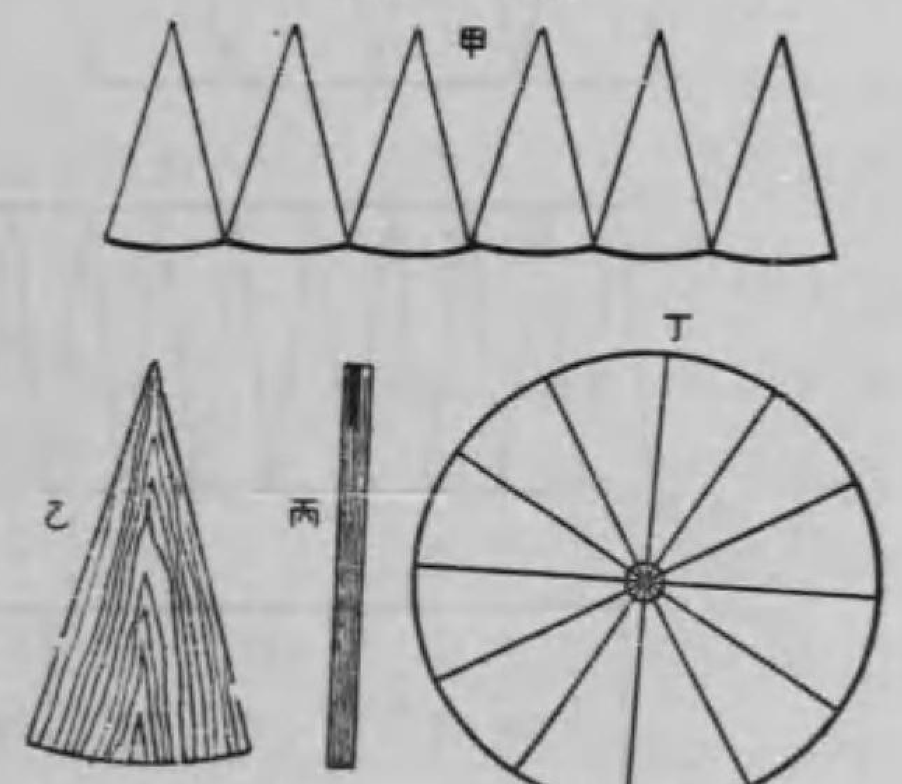
さて圓と正方形は其質及び厚さ共に等しい故，

圓の面積は半徑の上の正方形の $3\frac{1}{7}$ 倍即ち3.14倍である。

§ 136. 圓の面積計算法說明用模型。

§133 及び §135 の實驗により圓の面積を求めるには半徑の自乘に圓周率を乘ずればよいことがわかつた。是からこの理由を說明する爲めに之に必要なる模型の構造を述べて置かう。

第百四十六圖



厚さ二糎位の板で中心の角度 30° 半徑15糎位の扇形十二個を作る。但し木理は第百四十六圖乙に示す樣になるやうにする。而して中心に近い部分を切り割つて同

圖丙(乙の側面圖)に示すやうにして置く。次に六個宛の二組に分ち各組の周圍に革を釘で打ち附けて連接する。別に半徑2糎位の銅の圓板を作り，一方の組の最も端の扇形の引き割つた所にはめ，自由に回轉するやうに釘で止める。この二組の扇形を合すと圓形となる。

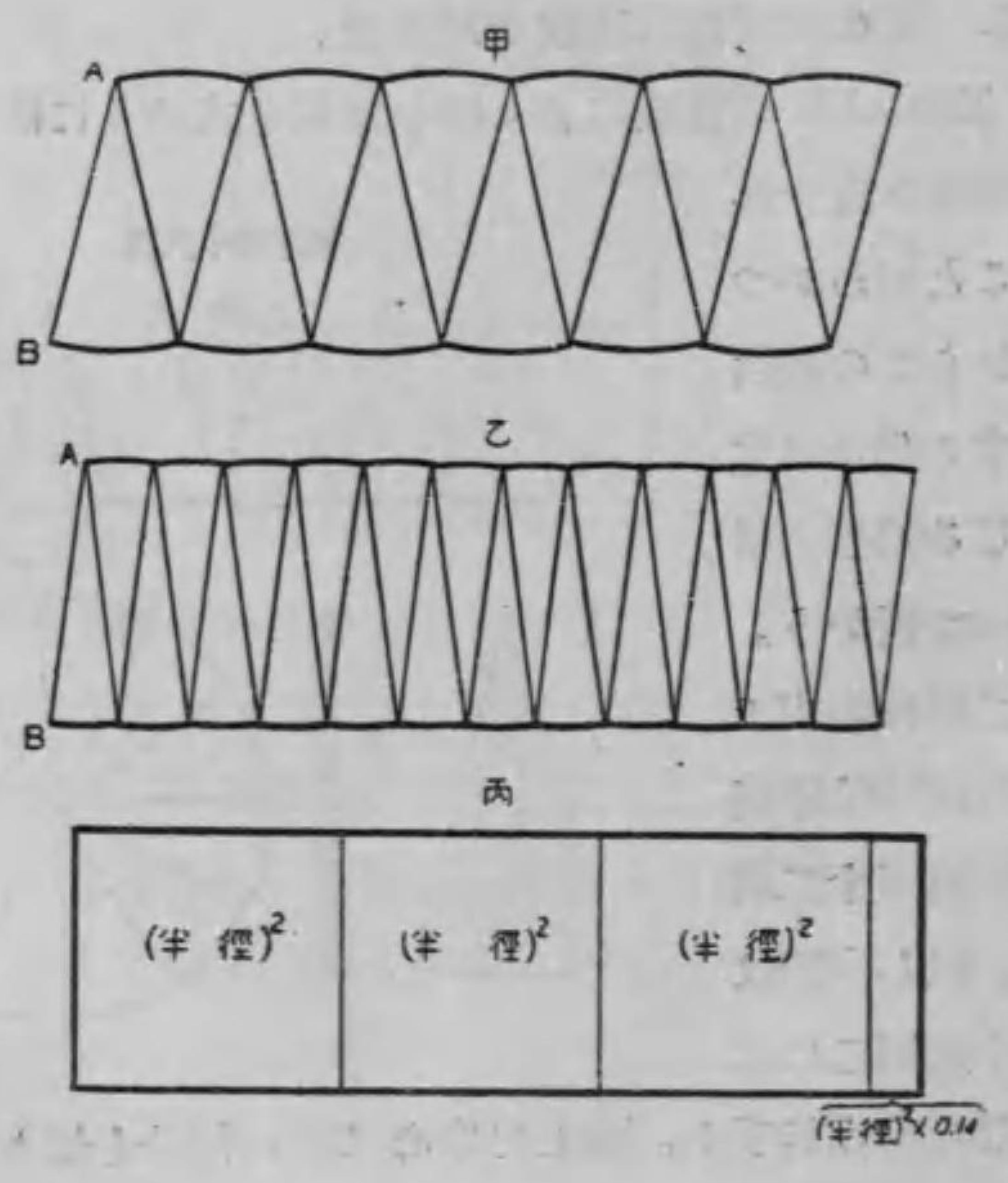
又中心の角度 15° の扇形より成る（從て半圓は十二の扇形より成る）前と同樣の模型を作る。

便宜の爲め前のものを甲，後のものを乙と名づけて置く。

§ 137. 圓の面積(其三)。

前節の模型を用ひて圓の面積計算法の理由を説明しよう。先づ模型甲を採り第百四十七圖甲の如く組み合せ。さうすると上

第百四十七圖



下が波形をなす平行四邊形樣のものが出來る。次に模型乙を採り前と同樣に組み合すと(同圖乙)上下の波形が前よりも小さくABは前よりも上下の邊に垂直に近づく。次に乙の各の扇形を更に二分して(即半圓を二十四の扇形にして)組合したと想像せよ。さすれば上下の波形は更に小さくなり，AB は更に上下の邊の垂線に近づく。此の樣にして次第次第に進んで行くと遂には矩形となる。さうして其短かい邊はもとの圓の半徑であつて長い方の邊は半圓周である。故に長い邊は短かい邊の 3.14倍である。依つて第百四十七圖丙に示すやうに半徑の上の正方形の3.14倍となる。

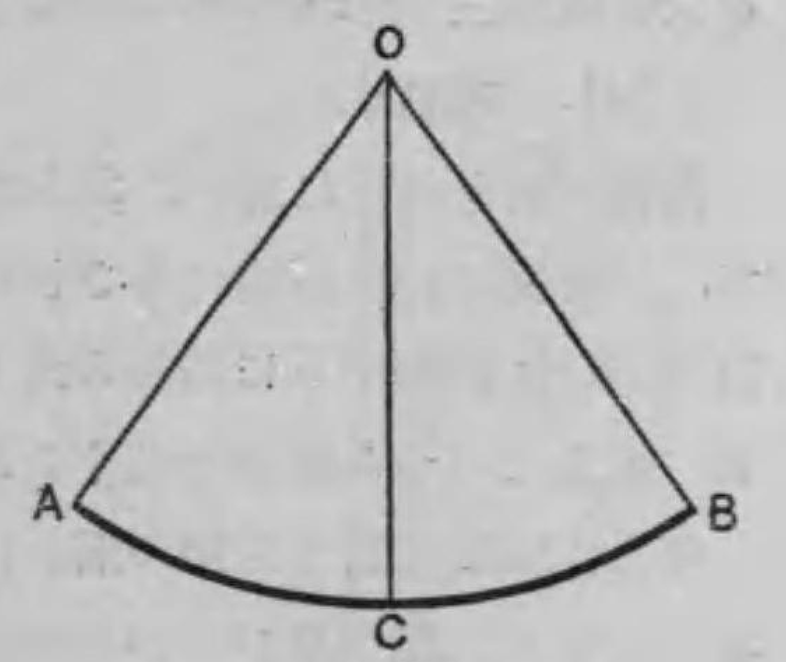
§ 138. 圓の面積(其四)。

實驗。前節に説明した事は又紙を切つて説明することが出來る。同じ圓三枚を切り拔き，其一つを最上にはり附け，殘りの一つを十二の扇形に等分し，前節の模型を組み合したと同樣に圓の下にはり附ける。殘りの圓は二十四の扇形に等分して又其下にはり附ける。之によつて前節の理を了解することが出來る。

§ 139. 扇形の面積。

實驗。紙を切つて任意の扇形 OAB を作り，OC を折目として二つに折り，この折目に沿うて二つに切り，此各を若干の小さき扇形に等分し之を前節に於ける方法と同樣に組み合せ。更に各の扇形を次第に二等分して組み合したりと想像せよ。

第百四十八圖



之によつて次のことがわ

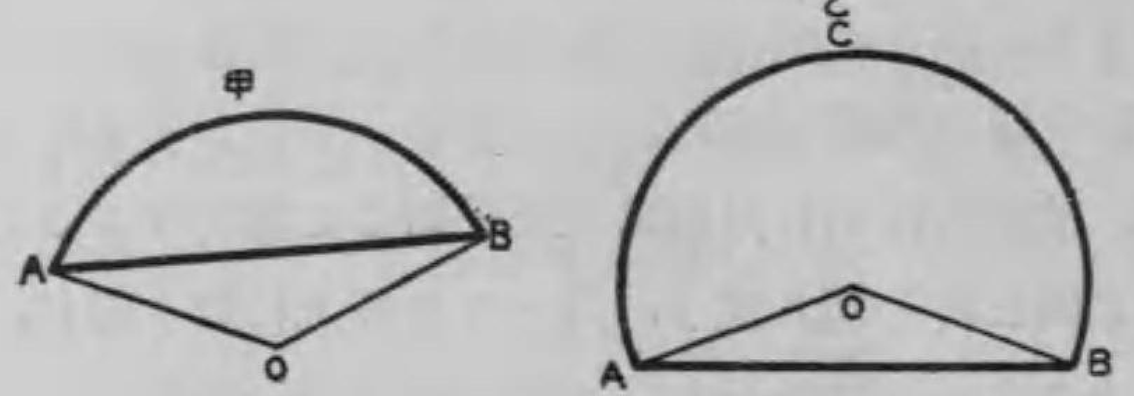
かる。

扇形の面積を求めるには其半徑に弧の長さを乘じて二分すればよい。

§ 140. **弓形の面積。**

I. **弓形が半圓より小なる場合。** 第百四十九圖甲に示す如く，半圓より小なる弓形の面積を求めるには，先づ扇形 AOB の面

第百四十九圖



積を求め，次に三角形 OAB の面積を求め，前のものより後のものを減ずればよい。

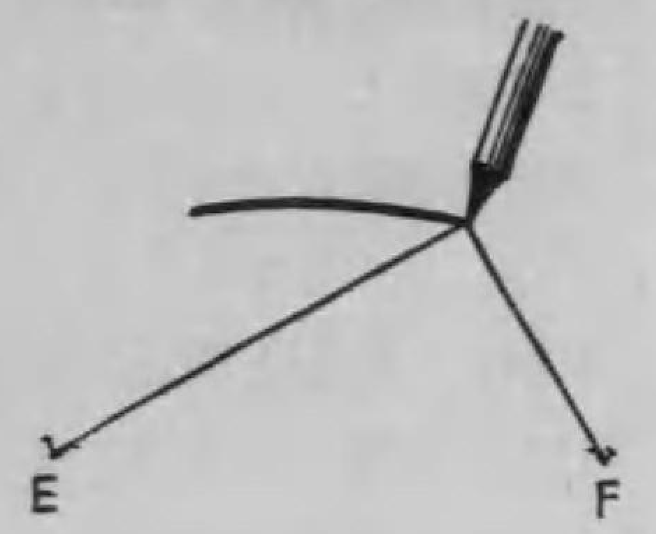
II. **弓形が半圓より大なる場合。** 第百四十九圖乙に示すやうに半圓より大なる弓形の面積を求めるには，扇形OACBの面積を求め次に三角形 OAB の面積を求めて二つを加ふればよい。

§ 141. **楕圓。**

實驗。 紙を机上に展べ，其上に5糎位隔てゝ二本のピンを樹て，10糎位の絲の兩端に小さきわなを作つてピンに引つかけ，第百五十圖のやうに鉛筆の先で其絲を引き張りながら動かすと，紙上に一つの曲線を描くことが出來る。

今此作圖法に於て曲線の描かれる模樣を考へて見るに，針を樹てゝある二點E及びFから鉛筆の先までの距離の和は絲の全長に等しく，從て一定不變である。此のやうに，

第百五十圖



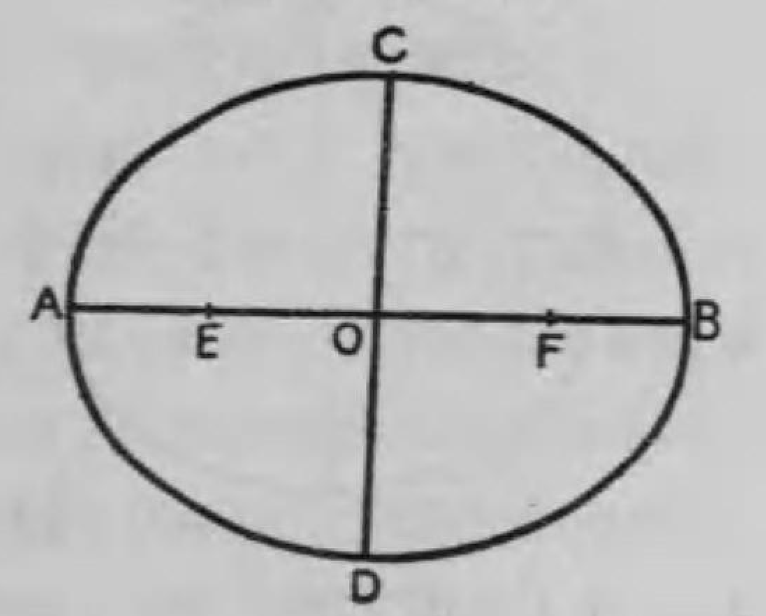
二定點から距離の和が一定なるやうに一點が動いて出來る曲線を楕圓といふ。

注意一。 上の作圖をなすには絲の兩端にわなを作らずとも，その兩端を結び之を二つのピンに引つかけてもよい。然しE及びFから此曲線の點までの距離の和の一定なることを示すには上の方法がよい。

注意二。 上の作圖法に於て，EとFとの距離を次第に遠ざけると次第に細長い楕圓が出來る。又之と反對にEとFとを近づけると次第に圓に近い楕圓が出來る。この樣に同じく楕圓といふ中にも細長いものもあれば圓に近いものもある。それ故楕圓といふ一定の形があると思ふのは誤りである。

注意三。 圓を平たくしたやうな形のものを通俗には楕圓といふて居る。然しこれは楕圓に近い形といふ位の意味であつて正確なる意味に於て用ゐられた言葉でない。正確な意味に於て楕圓といへば必ず上に述べたやうな圖形であらねばならぬ。

第百五十一圖



§ 142. **楕圓各部の名稱。**

楕圓を描くときの二定點即E及びFを其焦點といふ。

二焦點E,Fを連結する直線と楕圓と交る點をA及びBとすると AB を楕圓の**長徑**と云ひ其半分を**長半徑**と云ふ。EF の中點を Oとすると Oを楕圓の**中心**と云ふ。O を通り長徑 AB に垂直なる直線が楕圓と交る點をC及びDとすると，CD を楕圓の**短徑**といひ，其半分即 OC 或は OD を**短半徑**といふ。

§ 143. 楕圓と圓との關係(其一)。

§141に說明した方法により一つの楕圓を描き，二つの針の距離を少しく狹めて更に一つの楕圓を描き，又更に針の距離を狹めて一つの楕圓を描き，同樣にして次第に針の距離を短くして楕圓を描くと，其度毎に出來る楕圓は次第に圓に近づき，二焦點が重なると遂に圓となる。故に，

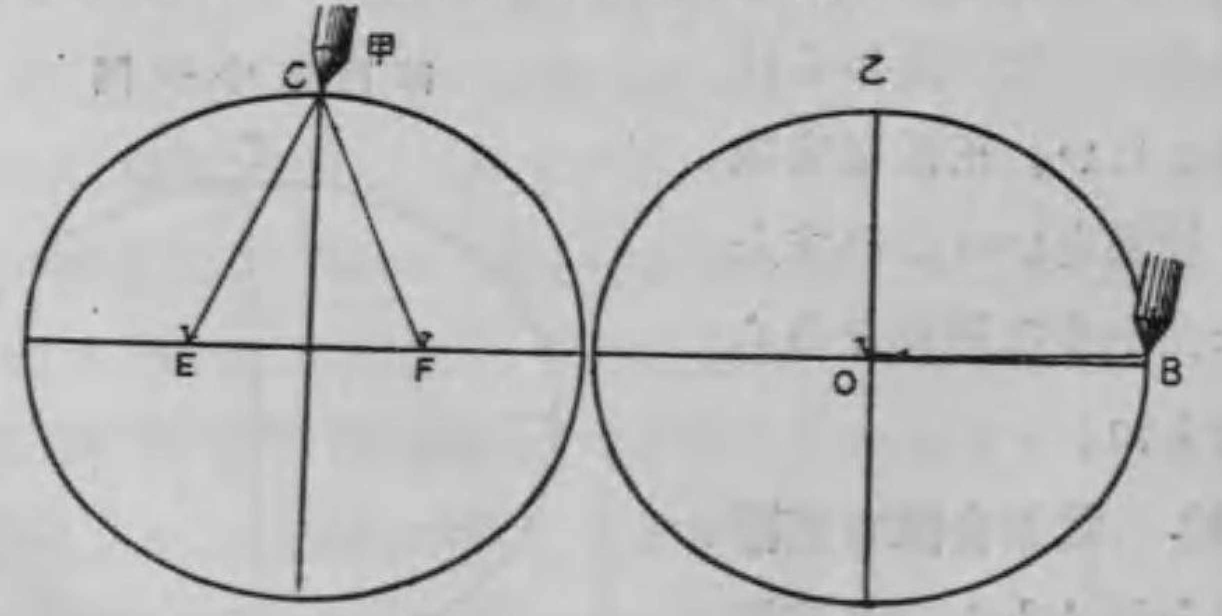
圓は楕圓の二つの焦點が重つたものである。

と見做すことが出來る。

§ 144. 長徑と短徑とを知りて楕圓を描く法(其一)。

實驗。§141の方法で楕圓を描き，一旦ピンを拔き，長徑と短徑とを引き，ピンと絲とをもとのやうになし，第百五十二圖甲の如く絲を鉛筆の尖端に引つかけ短徑の一端Cに持ち來して考

第百五十二圖



ふるに，CE 或は CF の長さは絲の全長の半分であることが知

られる。次に中心にピンを樹て之に絲の兩端のわなを引つかけ鉛筆の先に絲をかけ，之をB點に近づけると，丁度Bに達する故に

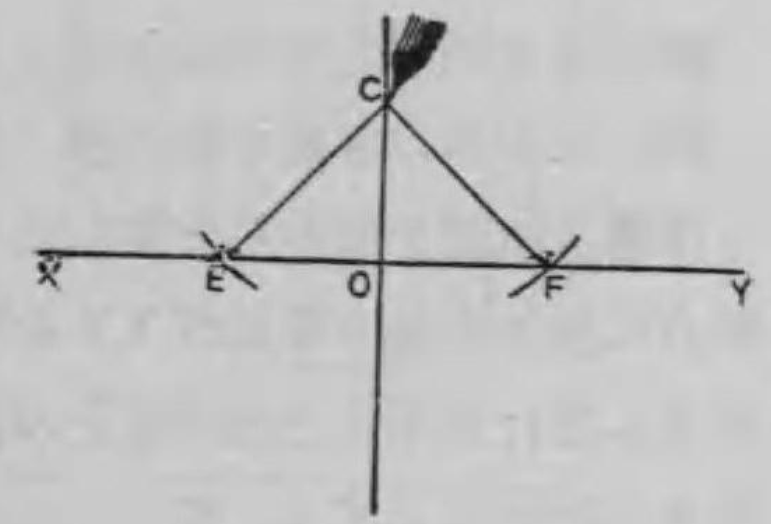
焦點と短徑の端との距離は長半徑に等しい。

之によつて長徑と短徑とを知りて楕圓を描くことが出來る。次に例を揭げて說明しよう。

例。長徑 10 糎短徑 6 糎ノ楕圓ヲ描ケ。

作圖 直線XYを引き，其上に一點を定め之をOとする。Oを通りXYに垂直なる直線を引き，其上にOから3糎の點Cを定める。Cを中心とし半徑5糎の圓を描きXYと交る點をE及びFとする。さうするとE及びFは焦點である。

第百五十三圖



そこでE及びFに針を樹て長さ 10 糎餘の絲の兩端を針に結びつけ，之を鉛筆の先きで引き張り，先きがCを通過するやうに絲の長さを調節して楕圓を描くと，所要のものが出來る。

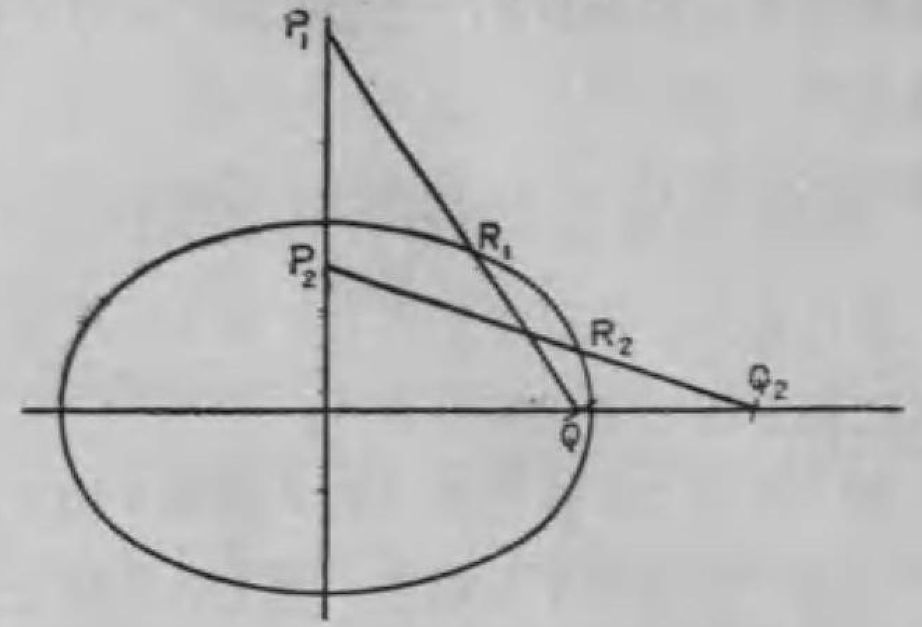
§ 145. 長徑と短徑とを知りて楕圓を描く法(其二)。

實驗。§141の方法により任意の楕圓を描き，其長徑及び短徑を引き，短半徑の延長上の任意の點P_1を取り，之を中心とし長半徑と短半徑との和を半徑として圓を描き，長半徑との交點を求め之を Q_1 とする。P_1Q_1 を結び附け楕圓との交點を R_1 とする。P_1R_1 及び R_1Q_1 の長さを測り長半徑及び短半徑と比較せよ。次に短半徑上の一點 P_2 を取り，前と同樣の實驗を試みよ。

更に他の二三の點を短徑上に取り同樣のことを試みよ。

之によりて次の事が知られる。

第百五十四圖



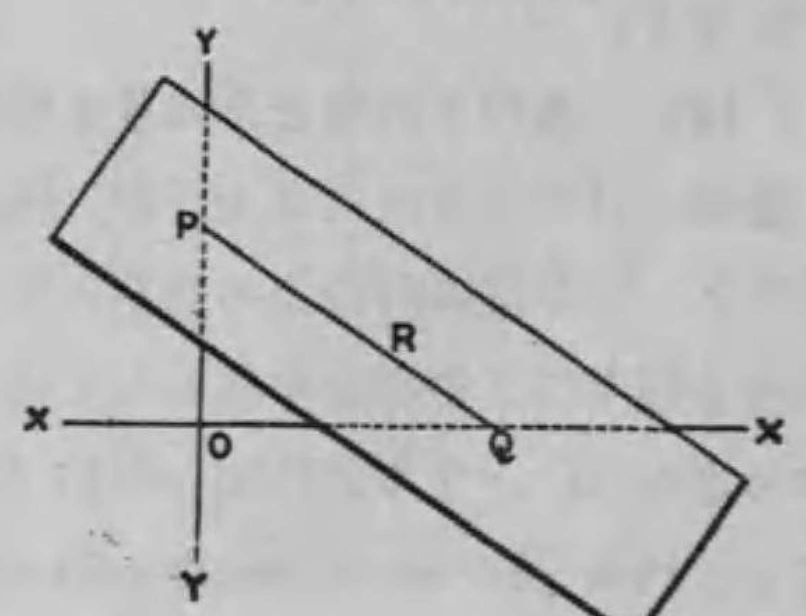
椭圓の長半徑と短半徑との和に等しい長さの直線の兩端を夫々長徑及び短徑或はその延長上に置くと，椭圓によりて長半徑と短半徑とに分たれる。

此結果を利用して椭圓を描くことが出來る。

例。 長半徑六糎短半徑三糎ノ椭圓ヲ描ケ。

作圖。 椭圓を描かんとする紙上に第百五十五圖のやうに互に垂直に交る直線 XX 及び YY を引く。又別によく透き通る紙を用意し之に長半徑と短半徑との和だけの長さ即ち 9 糎の直線を引き之を PQ とする。又其上に R 點を求め PR 及び RQ を夫々長半徑及び短半徑に等しくする。

第百五十五圖



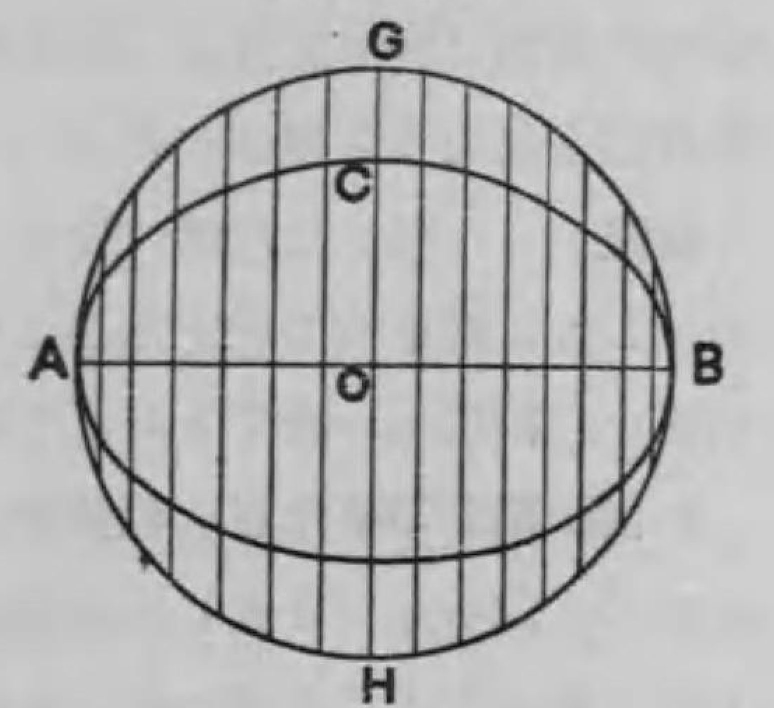
此透き通る紙を前の紙の上に載せ，先づ直線 PQ を直線 OX と一致せしめ，且つ P と O とを一致せしめ，點 R を針で突き

下の紙に印をつける。次に P を OY 線上に於て少しく上に動かすと同時に Q を OX 線上に於て O の方に近づけ，其時 R を針で突き下の紙に印をつける。以下同樣にして P と Q とを常に OY 及び OX の上に在るやうにしながら位置を色々に變じ，其各の位置に於ける R の位置を印しする。然る後印を滑かな曲線で結びつけると所要の椭圓が得られる。

§ 146. 椭圓と圓との關係(其二)。

實驗。 §141 の方法により椭圓を描き，長徑及び短徑を引き，第百五十六圖の如く其中心を中心とし長半徑を半徑として圓を描け。又短徑に平行なる數條の直線を引き，其各につき長徑の上側或は下側に於て，椭圓内にある部分及び圓内に在る部分の長さを測り，割合を求めよ。

第百五十六圖



實驗の成績

椭圓内の部分	圓内の部分	比
8.5	9.6	0.89
11.5	12.9	0.89
13.0	14.9	0.87
13.7	15.9	0.86
14.0	16.0	0.88
13.5	15.0	0 90
10.75	12.5	0 86
7.8)	9.0	(·89

以上の實驗により次の事が知られる。

一つの楕圓の中心を中心とし長半徑を半徑として圓を描き，短徑に平行なる數多の直線を引くとき，長徑の各の側に於て，是等の直線の楕圓內にある部分の長さと圓內に在る部分の長さとの比は一定である。

§ 147. 圓を基として楕圓を描く法。

前節の結果により圓を基として楕圓を描くことが出來る。即圓を描き其一つの直徑を引き，之に垂直なる數多の弦を引き，直徑の兩側に於て此弦を一定の割合に分ち，滑かな曲線により其分點を連ねると楕圓が得られる。

實驗。 上に描いた楕圓に於て，§143によりて二つの焦點を求め，こゝに針を樹て絲を用ひてC及びDを通る楕圓を描き，先に描いた楕圓と一致するかどうかを驗せ。

§ 148. 楕圓の平たさ，楕圓率。

§146に説明したやうに，楕圓は圓をその一つの直徑の兩側から壓し縮めたものと考へることが出來る。故に楕圓の平たさは其縮まりたる度合によつて表される。

今第百五十六圖の楕圓が其長徑ABに垂直な弦をのABの兩側に於てその三分の一宛縮めて得たものとすれば，其短半徑COはABに垂直であるからGOの三分の一丈縮まつたものでなければならぬ。故に各の弦がどれ丈縮まつたかを知るに $\dfrac{CG}{OG}=\dfrac{OG-OC}{OG}$ で知ることが出來る。さうして $OG=OB$ であるから此式は

$$\frac{OB-OC}{OB} \quad 即 \quad \frac{長半徑-短半徑}{長半徑}$$

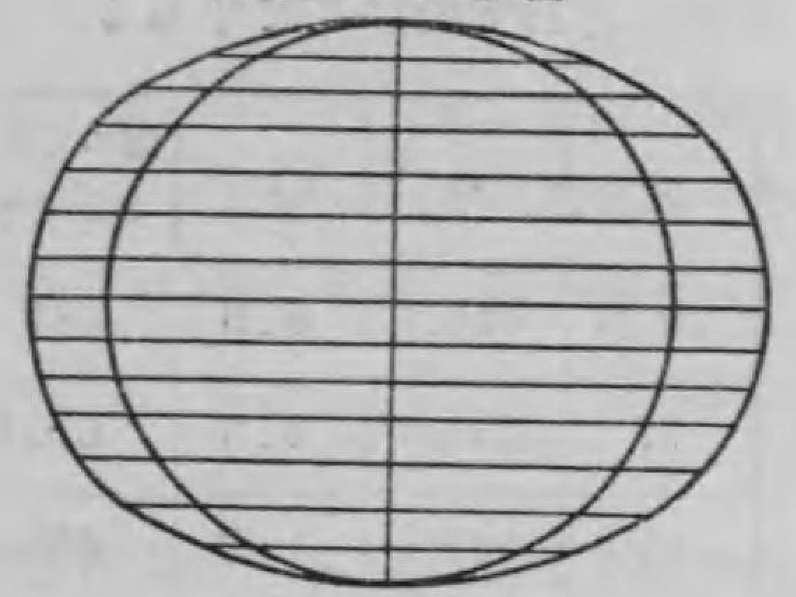
となる。之を**楕圓率**といふ。

§ 149. 楕圓と圓との關係(其三)。

實驗一。 §141の方法により楕圓を描き，其長徑に平行なる數個の弦を引き，其各に就き短徑の一方の側に於て圓の弦となる部分と楕圓の弦と成る部分の長さを求め且其割合を求めよ。さうするとその割合は一定なることがわかる。此實驗により次の事が知られる。

圓の直徑に垂直なる數多の弦を引き其直徑の各の側に於て各の弦を同じ割合に伸ばし其端を連ねると楕圓が得られる。

第百五十七圖



實驗二。 上の方法により楕圓を描き，§144の方法により二つの焦點を求め，此點に針を立て絲を用ひて短徑の兩端を通る楕圓を描き，前の楕圓と一致するか否かを檢せよ。

§ 150. 楕圓の周の長さ。

楕圓の周は圓の周を計算するやうな公式を用ひて計算することが出來ぬ。其大凡の値を計算する公式を次に示す。

a 及び b を夫々楕圓の長半徑及び短半徑とし，π を圓周率とすると，其周の大凡の長さは

$$\pi(a+b)$$

で表はされる。

注意。 上の公式に於て $a=b$ と置くと $2\pi a$ となり，半徑 a の圓の周を表はす。さうして $a=b$ のとき楕圓は半徑 a の圓とな

るから，この時には此公式が周の眞の長さを表はすこと丶なる。此樣に楕圓が圓に近ければ近い程此公式の表はす値は周の眞の長さに近いものである。

實驗。 短徑と長徑とを豫め定めて描いた楕圓に就いて§34IVの方法により其周圍の長さを測り，次に上の公式によつて周の長さを計算し二つを比較せよ。

實驗の成績。 次表の長さは齒車の相隣接せる二つの齒の距離を單位として表はしてである。

b	a	$b:a$	測つて得た周の長さ	$\pi(a+b)$	差	差／周の長さ
102.5	115.2	8:9	684	683.578	0.422	0.0006
77	114·8	2:3	610.8	602.252	8.548	0.0140
57.6	11.4	1:2	556.8	541.336	15.464	0.0277

§ 151. 楕圓の面積と圓の面積との關係。

實驗一。 §147の方法により模造紙（はがきより厚きもの）に長徑 10 糎短徑 6 糎の楕圓を描き正しく切り拔け。又此楕圓の長半徑を半徑とする圓即半徑 5 糎の圓を同じ模造紙に描き正しく切り拔け。さうして§134の秤を用ひて二つの重さを比較せよ

實驗二。 實驗一と同樣の事を長徑 8 糎短徑 6 糎の楕圓に就て試みよ。

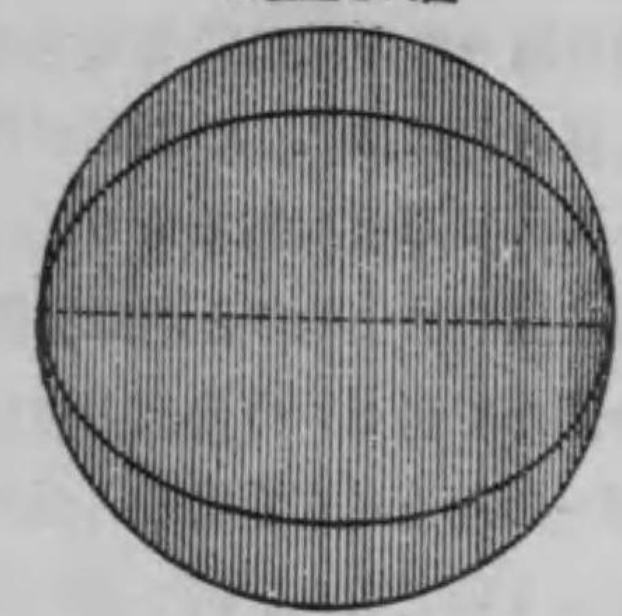
以上の實驗により次の事が知られる。

一つの楕圓と其長半徑を半徑とせる圓の面積の比は楕圓の短半徑と長半徑の比に等しい。

其理由。 長徑 10 糎短徑六糎の楕圓に就て說明しよう（第百五

十八圖）。

第百五十八圖



此楕圓の中心を中心とし其長半徑を半徑とし圓を描き，短徑に平行な弦を引くと，其長徑の各の側に於て圓內の部分と楕圓內の部分の比は長半徑と短半徑の比に等しい。

さうして楕圓は短半徑に平行なる無數の細い帶狀のものから成つて居ると考へることが出來る。其各々が長半徑と短半徑の割合になつて居るから，之を加へ合せたもの，即圓の面積と楕圓の面積の比は矢張り長半徑と短半徑の比に等しい譯である。

§ 152. 楕圓の面積計算法。

前節の說明により，楕圓の面積を求めるには，先づ其長半徑を半徑とする圓の面積を求め，之に$\dfrac{\text{短半徑}}{\text{長半徑}}$を乘ずればよい。然るに圓の面積は（長半徑）^{2}×圓周率であるから

$$\text{楕圓の面積}=\frac{(\text{長半徑})\times(\text{長半徑})\times\text{圓周率}\times\text{短半徑}}{\text{長半徑}}\quad\text{即}$$

$$\textbf{楕圓の面積}=(\text{長半徑})\times(\text{短半徑})\times\text{圓周率}$$

第十章　直方體の體積及び開立法*

§ 153. 直方體。

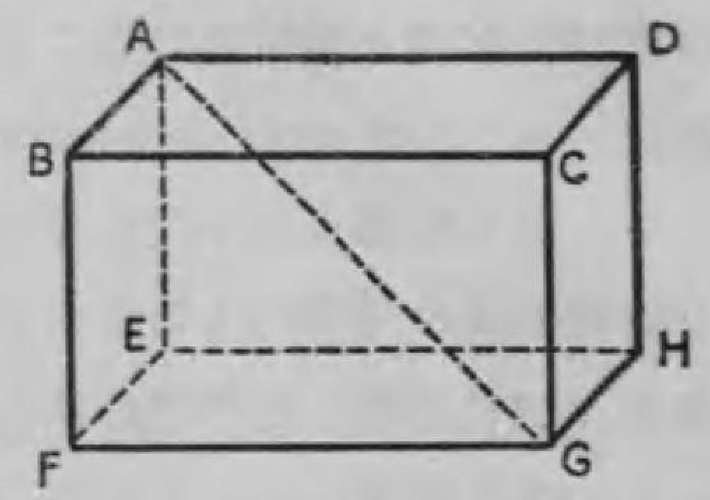
白墨入の箱のやうに六つの面で圍まれ，其各が矩形である形を**直方體**といふ。

* 本章に於て述ぶるところの開立法は唯其說明法の大體を示すに止めておく。詳細なる事は普通の算術教科書に載せられてあるからそれに就て見られんことを望む。

直方體の面と面との交りは 12 ある。其各を稜と云ふ。稜は三つ宛一つの點に於て交つて居る。此點を頂點と云ふ。

直方體には八つの頂點がある。第百五十九圖に示す A,B,C,D, E,F,G, 及 H は頂點である。

第百五十九圖

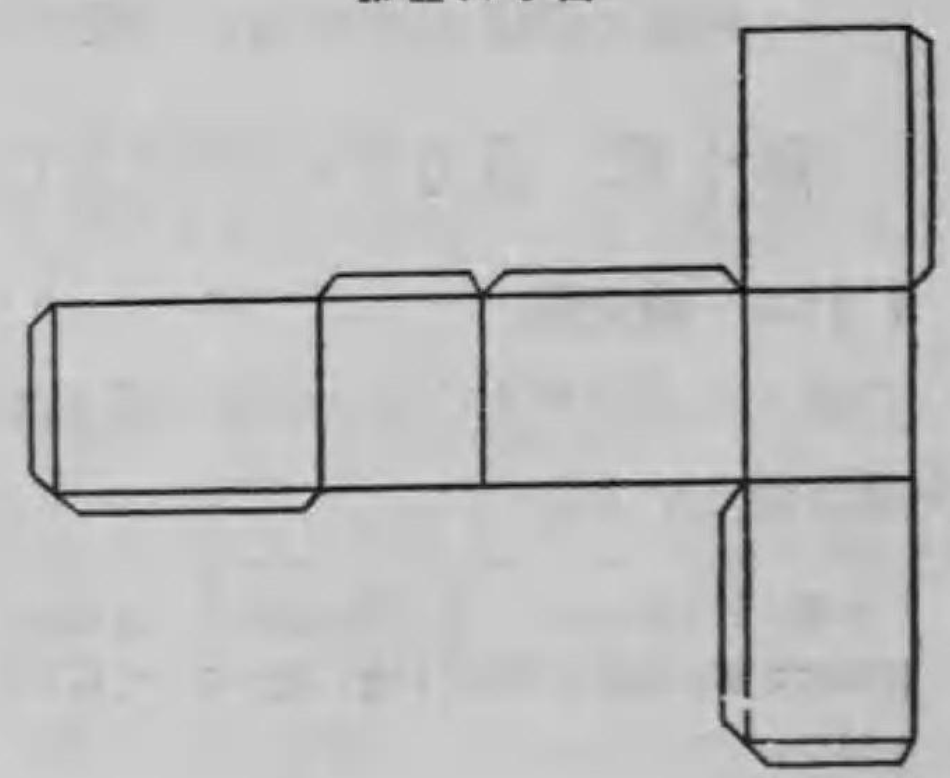


頂點を二つ取ると，直方體を圍んで居る六つの面の中の同一の面上に在る場合と然らざるものとある。例へば A と C とを取つて考へると同一の面上に在るが A と G とを取ると同一の面上に無い。此樣に同一の面上にない二つの頂點を結ぶ直線を直方體の**對角線**と云ふ。直方體には四つ對角線がある。

§ 154. 厚紙にて直方體の模型を作ること。

I. **糊を用ひはり合はして作る法。** 糊を用ひはり合して作るには厚紙に第百六十圖に示すやうな圖を描き，之を切り拔きはり合せばよい。

第百六十圖



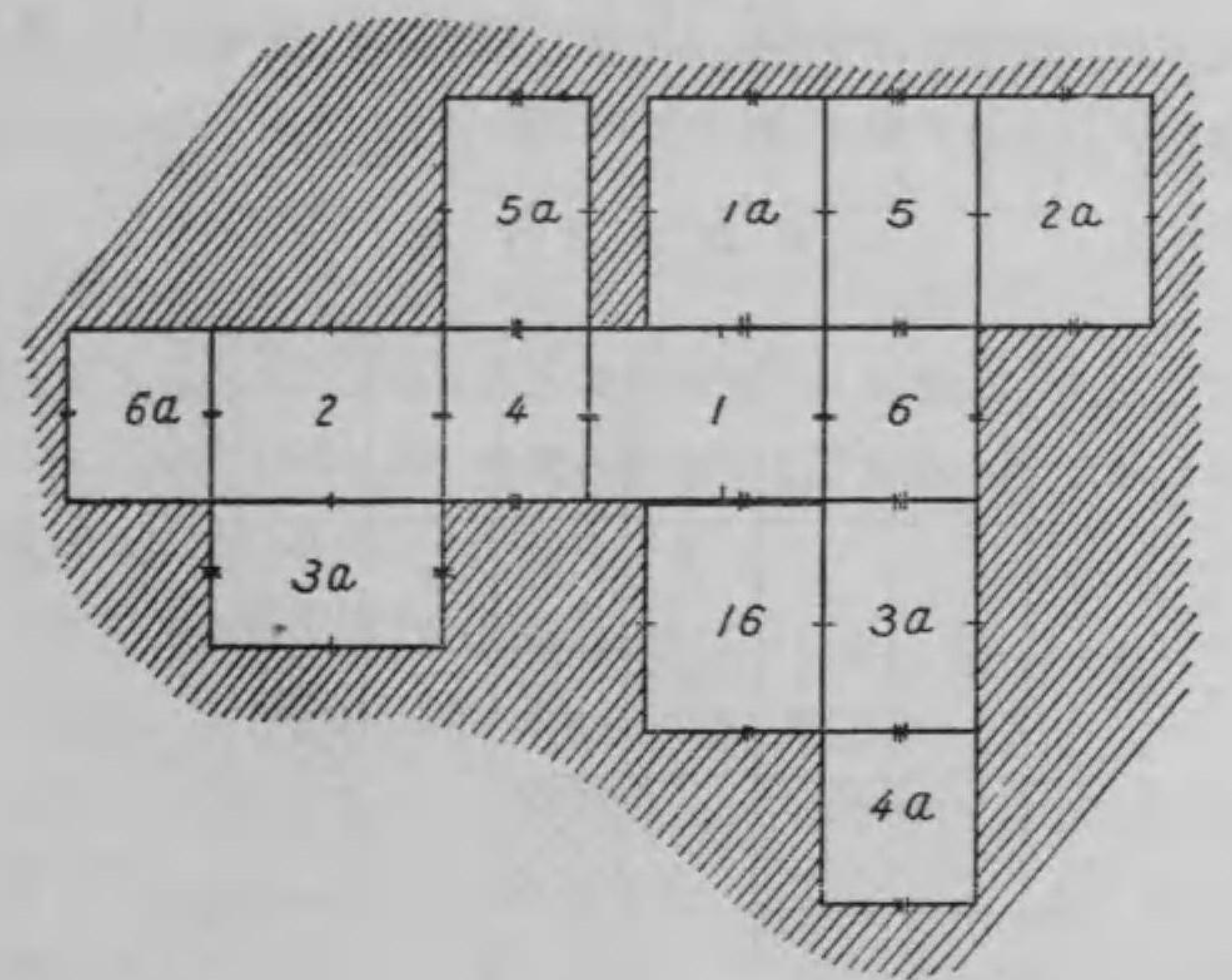
II. **厚紙を組み合して作る法。** 糊を用ひず，たゞ紙を組み合すことによりて直方體の模型を作るには，第百六十一圖の如き圖を描き，影を施した部分を切り去り，太き線にて表し

ただけを切り開き折目を附け，其面に圖に示す番號を附け，之に從つて組み立てゝ行けばよいのである。其際注意すべき事は次のやうである。

甲。 番號を書いてある面は外側になすべきこと。

乙。 同番號の中で a の印のあるものは最も内側に，b の印のあるものは其外側に，單に數字のみのものは最も外側に在るやうにする。

第百六十一圖



丙。 最後の面は挿し込むやうに出來て居る。そのときには多少無理をせねばならぬ。

丁。 内側の面は外側のものより少し小さくなければならぬ。これは合してみて緣を少し狹みで切ればよい。

注意一。 糊を用ひてはり合す方は，製圖は簡單であるけれども，實際の製作は思つた程簡單でない。

注意二。 組み合して作る方に據ると紙が幾枚も重なる爲め，I の法に據つて作る程厚い紙を用ひなくとも確かりしたものが出來る。

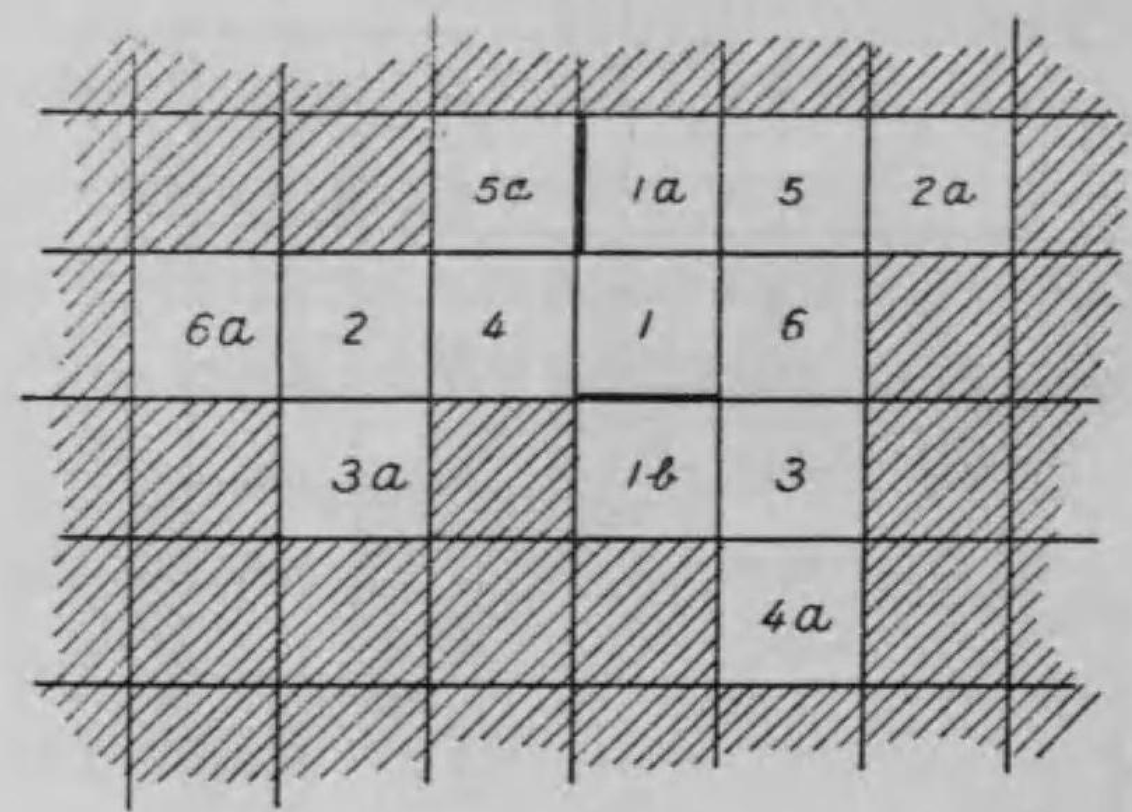
§ 155. 立方體。

直方體のやうに六つの平面で圍まれて居るが，其各の面が正方形である場合には其形を**立方體**といふ。立方體各部の名稱は直方體と同樣である。

§ 156. 立方體の模型を作ること。

立方體の模型の作り方は直方體と大體同樣であるから，圖のみを示すに止めて置く(第百六十二圖)。

第百六十二圖

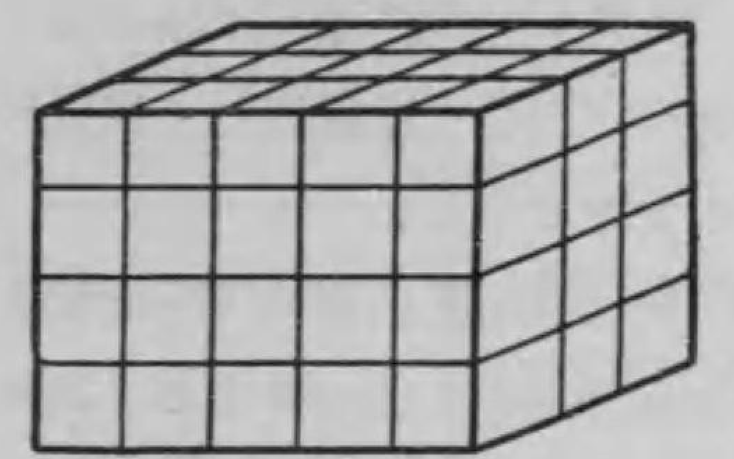


§ 157. 直方體の體積。

前節の方法により稜の長さ一糎立方體 60 個を作れ。此各の立方體の體積は一立方糎といふ。故に之れが二つあれば二立方糎，三つあれば三立方糎である。

實驗。 上に作つた立方體を第百六十三圖に示すやうに積み重ねよ。さうすると横五糎縦三糎高さ四糎の直方體が出來る。此直方體の中に在る小立方體の數で直方體の體積が言ひ表はされる。即若し 10 個あれば 10 立方糎，20個あれば 20 立方糎である。實際一つ宛小立方體を數ふることにより此直方體の體積を求めよ。

第百六十三圖



此樣に直方體の體積を計算するに小立方體を一つ宛數へるのは甚迂遠である。これは次のやうにして數へることが出來る。

先づ直方體の底面には一糎平方のものが幾つ列んで居るかを考へる。さうすると 3×5 即 15 ある。さうして其一つの上に小立方體が四つ宛積み重なつて居る故全體で 4×15 即 60 ある。故に次のことが知られる。

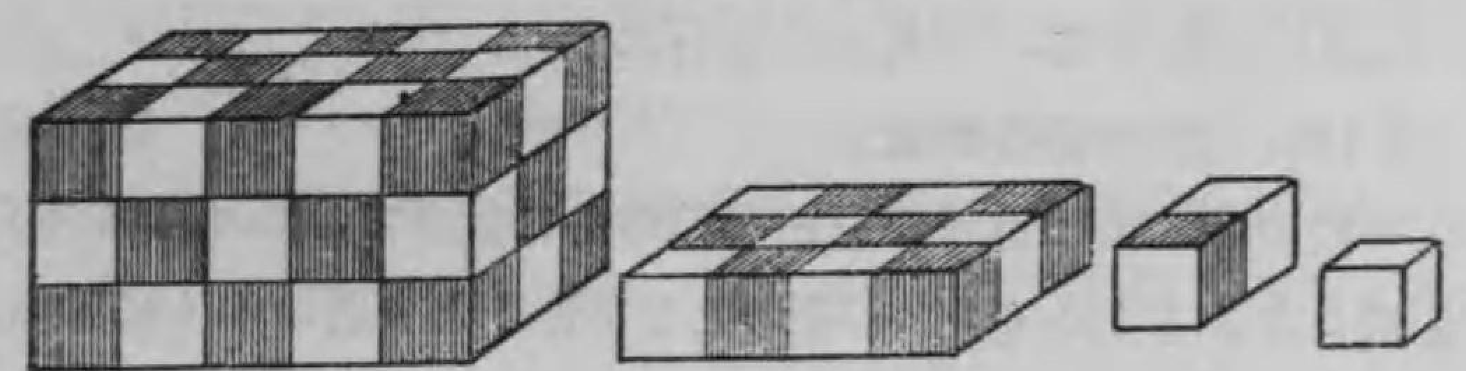
直方體の體積は其縱横高さの積に等しい。

§ 158. 直方體の體積を求むることの別說明法。

前節の說明には多くの小立方體を要する不便がある。此不便を避くるには次のやうにしてもよい。

§155 及 §156 の方法により第百六十四圖に示すやうな三つの

第百六十四圖



直方體と一つの立方體を作り，小立方體を重ねるやうに赤と白とに塗り，第百六十三圖のやうに重ね之を四つの段に分けて考へる。先づ其最上の段の中にある小立方體の數を數へる。即三個宛の行が五つある。故に 3×5 丈ある。それが四段あるから 3×5×4 即 60 個の小立方體がある。

§ 159. 立方，立方根。

或數を三度繰返して掛け合せた積をもとの數の**立方**といふ。例へば 5 を三度繰返して掛け合せた積 5×5×5 即 125 は元の 5 の立方である。

次には前と反對に 125 を元として 5 を考へた場合には 5 を 125 の立方根といふのである。即一般にいふと甲乙二數があつて，甲の立方が乙に等しい場合には，甲を乙の**立方根**といふのである。さうして立方根を求める算法を**開立法**といふ。

注意。立方と立方根とは全く正反對の意味の語であるに係らず往々取り違へられる。よく注意せねばならぬ。

§ 160. 開立九九。

開立を行ふには普通の掛け算の九九の外に 1 から 9 までの數の三乘を呼び聲としてある**立方九九**と稱するものを諳記せねばならぬ。それは次の通りである。

一一(インイチ)が一，　二二(ニニン)　八，　三三　二十七，　四四　六十四，
五五　百二十五，　六六　二百十六，　七七　三百四十三，
八八　五百十二，　九九　七百二十九。

§ 161. 立方根の桁數。

一桁の數二桁の數及び三桁の數の各に就きて，最小なるものと最大なるものとを考へ，その立方を作ると次表の如くになる。

次の表によつて考へてみると，一桁から三桁までの數の立方

		立方	桁數
一桁の數	最小　1	1	1
	最大　9	729	3
二桁の數	最小　10	1000	4
	最大　99	970299	6
三桁の數	最小　100	1000000	7
	最大　999	997002999	9

は一桁の數，四桁から六桁までの數の立方根は二桁の數，七桁から九桁までの數の立方根は三桁の數である。即桁數が三或は其端數を増す毎に立方根は一桁増す。故に立方根の桁數を知るには與へられたる數の一の位より三桁毎に句切ればよい。さうすれば立方根の桁數は區分の數に等しい。

§ 162. 開立法と立方體の體積。

與へられたる數が一桁乃至三桁の數であるときは開立九九を適用すれば直ちに立方根が求められる。

然るに四桁以上の數になると特別の方法が必要である。さて立方體の體積は其稜の長さを三乘すれば得られる。故に逆に立方體の體積を知つてその稜の長さを求めるには之を立方に開けばよい。依て立方體の體積を知つて其稜の長さを求める方法を考究すれば開立の算法が工夫せられる譯である。次節に於て之を試みよう。

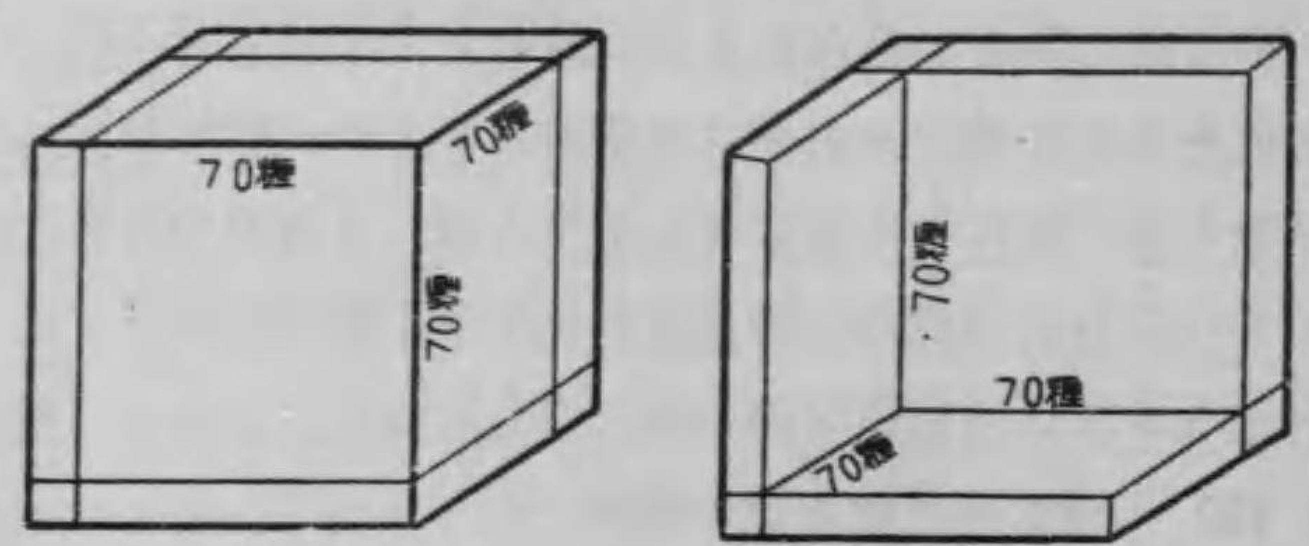
§ 163. 立方體の體積を知りて其稜の長さを求めること。

本節に於ては先づ其體積が五桁若しくは六桁なる場合を考へよう。

今玆に 405224 立方糎の體積を有する立方體があるとする。此數の桁數は 6 であるから其稜の長さは糎を單位とすれば二桁の數である。其數を求めるには次のやうに進む。

I. **十位の數を定める。** 十位の數は 7 に相違ない。何故なれば 70糎とすれば體積は343000立方糎となり，80糎とすれば512000立方糎となる。依つて所要の長さは七十何糎といふものに相違ない。故に其一の位の數が求めらるれば問題は解決せられる譯である。

第百六十五圖



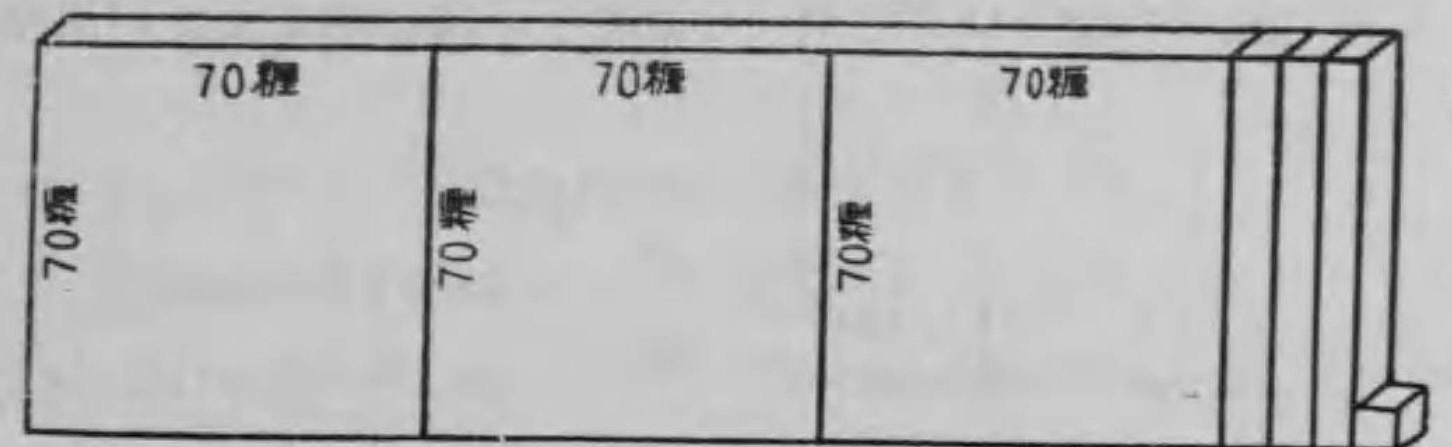
II. **立方體を取り去る。** 一の位の數を定める爲め，其一つの頂點から三つの稜に沿うて 70 糎の距離の點を取り，其點を通過して各の稜に垂直な平面を作り，之に依つて全體を切り離す。さうすると一つの稜の長さ 70 糎の立方體を切り取ることが出來る（第百六十五圖）。其體積は 70^3 即 343000 立方糎で，之を取り去つた殘りは 405224立方糎—343000立方糎 即 62224 立方糎である。

III. **殘りを分解する。** 立方體を取つて殘りを分解すると，板狀のものが三枚取れる。其板の面は何れも正方形であつて其一邊は 70 糎である。從つて其面積は 4900 平方糎である。又其

厚さはこれから求めんとするものである。此三枚の板を取り，殘りを更に分解してみると三本の方柱と一つの小さな立方體が得られる。此方柱の長さは何れも 70 糎である。

IV. **一位の數の恐らくの値を定める。** 上に分解して得たものを第百六十六圖に示すやうに列べる。さて其體積の總計は62224立方糎ある。若しこれが三枚の板のみで，方柱と小さな立方體が附いて居なければ其厚さは直ちに求めることが出來る。即板の面積 4900×3 即 14700 を以て體積 62224 を割ればよい。上の場

第百六十六圖



合には此樣に簡單に算出することが出來ない。然し方柱と小立方體とは板に較べて體積が甚小である。故に恐らくの値をみるには之を眼中に置かなくともよい。即 62224 を 14700 で割つてみればよい。實際割つてみると 4 となる。即厚さは 4 糎であらうといふことが知られる。

V. **恐らくの値の正否を驗する。** 上に得た恐らくの値が果して正しいものであるかどうかを驗すには，先づ之を正しいものとして第百六十六圖の一面（紙と平行なる面）の面積と厚さとの積を求め，62224 となるかどうかをみればよい。其面積は次のやうにして計算せられる。

板一枚の面積＝70×70	三枚の面積	＝	70×70×3＝14700
方柱一本の面積＝70× 4	方柱三本の面積＝70×		4×3＝ 840
小立方體の面積			4×4 ＝ 16
合　計			＝15556

之に厚さを掛けると，15556×4 即 62224 となり，初めの數に一致する。故に所要の數は 4 である。

依て稜の長さは 74 糎である。

注意。 本節の説明に要する模型は §154 及び §155 の方法を應用すれば作ることが出來る。

§ 164. 4 桁乃至 6 桁の數の開立法。

前節に述べた計算は次のやうな便利な形式に書くことが出來る。

$$
\begin{array}{llr|l}
 & & & 405\,|\,224\,(74 \\
 & & & 343 \\
70^2\times 3 & = & 147000 & 62\ 224 \\
70\times 4\times 3 & = & 840 & \\
4^2 & = & 16 & \\
\hline
 & & 15556 & 62\ 224 \\
\cline{4-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

之を各の段に分つて説明すると次の通りである。

先百位と千位の間に縦線を引いて二つの節に句切る。

I. 開立九九を應用して左節の中に含まれる最大立方數の立方根を求め，之を答の首位にする。

II. 左節より其最大立方數を減ずる。

III. 其殘りの次に次の節を書き連ねる。

IV. 答の首位數に一つ零を附けたものを自乘し之を三倍するその結果を試除數と名づける。

V. III に於て得た數を試除數で割つて答の一の位の數の恐

らくの値を求める。

VI. 答の首位數の右に零を一つ附けた者と，V に得た恐らくの値との積の三倍と，又恐らくの値の二乘とを試除數に加へる。

VII. VI に得た數と恐らくの値との積を求め III に得たる數より減ずる。

§ 165. 七桁乃至九桁の數の開立法。

例 1. 1728000 ノ立方根ヲ求メヨ。

解。 右端に零の一つ附い數を三乘すると右端に三つの零の附いた數が得られる。故に 1728000 の立方根を求めるには，1728 の立方根を求め其右端に零を一つ附ければよい。然るに $\sqrt[3]{1728}=12$ であるから，

$$\sqrt[3]{1728000}=120$$

例 2. 34645976 ノ立方根ノ上二桁ダケヲ求メヨ。

解。 34645976 を尾位から三桁毎に句切つてみると次のやうになる。34|645|976 故に最後の三桁には着目することなく，34645 の立方根を求めると同樣に次のやうにして初めの二桁を求めることが出る。

$$
\begin{array}{llr|l}
 & & & 34\,|\,645\,|\,976\,(32 \\
 & & & 27 \\
30^2\times 3 & = & 2700 & 7\ 645 \\
30\times 2\times 3 & & 180 & \\
2^2 & = & 4 & \\
\cline{2-3}
 & & 2884 & 5\ 768 \\
\cline{4-4}
 & & & 1\ 877\ 976
\end{array}
$$

さうして次のやうな關係がある。

$$34645976-320^3=1877976$$

例 3. 34645976 ノ立方根ヲ求メヨ。

解。 例 2 によつて初めの二桁は 32 であることを知る。さう

して其剰餘 1877976 は 34645976 から 320^2 を引いた殘りであることがわかる。

次に末位の數を求める爲めに，34645976立方糎の立方體があるとして其稜の長さを求めよう。上に說明した所により此立方體から一稜 320 糎の立方體を取るときは殘りは 1877976 立方糎となり，之を分解すると§163に述べたと同樣に三枚の板と三本の方柱と一つの小立方體とになる。其厚さの恐らくの値を求める爲めに 1877976 を三枚の板の面積 $320^2\times 3$ 即 307200 で割つてみると 6 であることを知り，其正否を確かめる爲めに其れの面積を求めると，

三枚の板の面積	$320^2\times 3$	$=307200$
三本の方柱の面積	$320\times 6\times 3=$	5760
小立方體の面積	6^2	$=\quad 36$
		合計$=312906$

となる。之に厚さ 6 を乘ずると 1877976 となり正しいことがわかる。

以上の計算は次のやうな形式でなすが便利である。

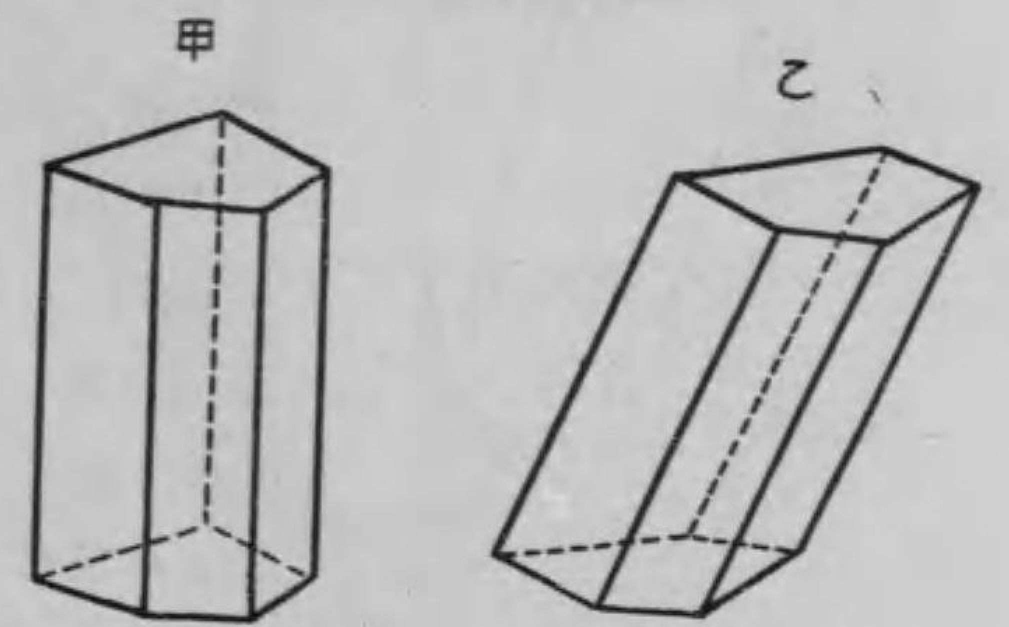
	34|645|976 (326
	27
$30^2\times 3\quad =2700$	7 645
$30\times 2\times 3=\ 180$	
$2^2\quad =\quad 4$	
2884	5 768
	1 877 976
$320^2\times 3\quad =307200$	
$320\times 6\times 3=\ 5760$	
$6^2\quad =\quad 36$	
312996	1 877 976
	0

第十一章　角壔及び圓壔

§ 166. 角壔及び其各部の名稱。

第百六十七圖に示す形を**角壔**（或は角柱）と云ふ。其上下の面を**底面**（又は端面）其以外の面を**側面**と云ふ。又相隣接する側面の交りを**側稜**と云ふ。

第百六十七圖

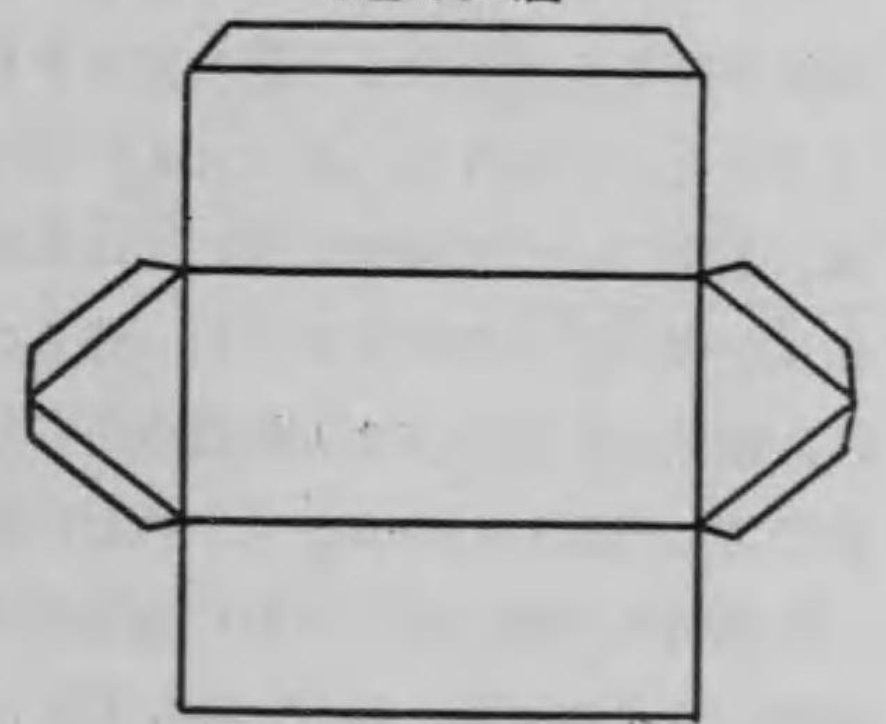


角壔の側稜は甲に示すやうに底面に垂直なることもあり，乙のやうに斜なることもある。甲は**直角壔**と云ひ乙は**斜角壔**と云ふ。

角壔の兩底面の距離を**高さ**と云ふ。直角壔に於ては側稜は高さに等しく，斜角壔に於ては高さは側稜より小である。

§ 167. 直角壔の模型を作ること。

第百六十八圖

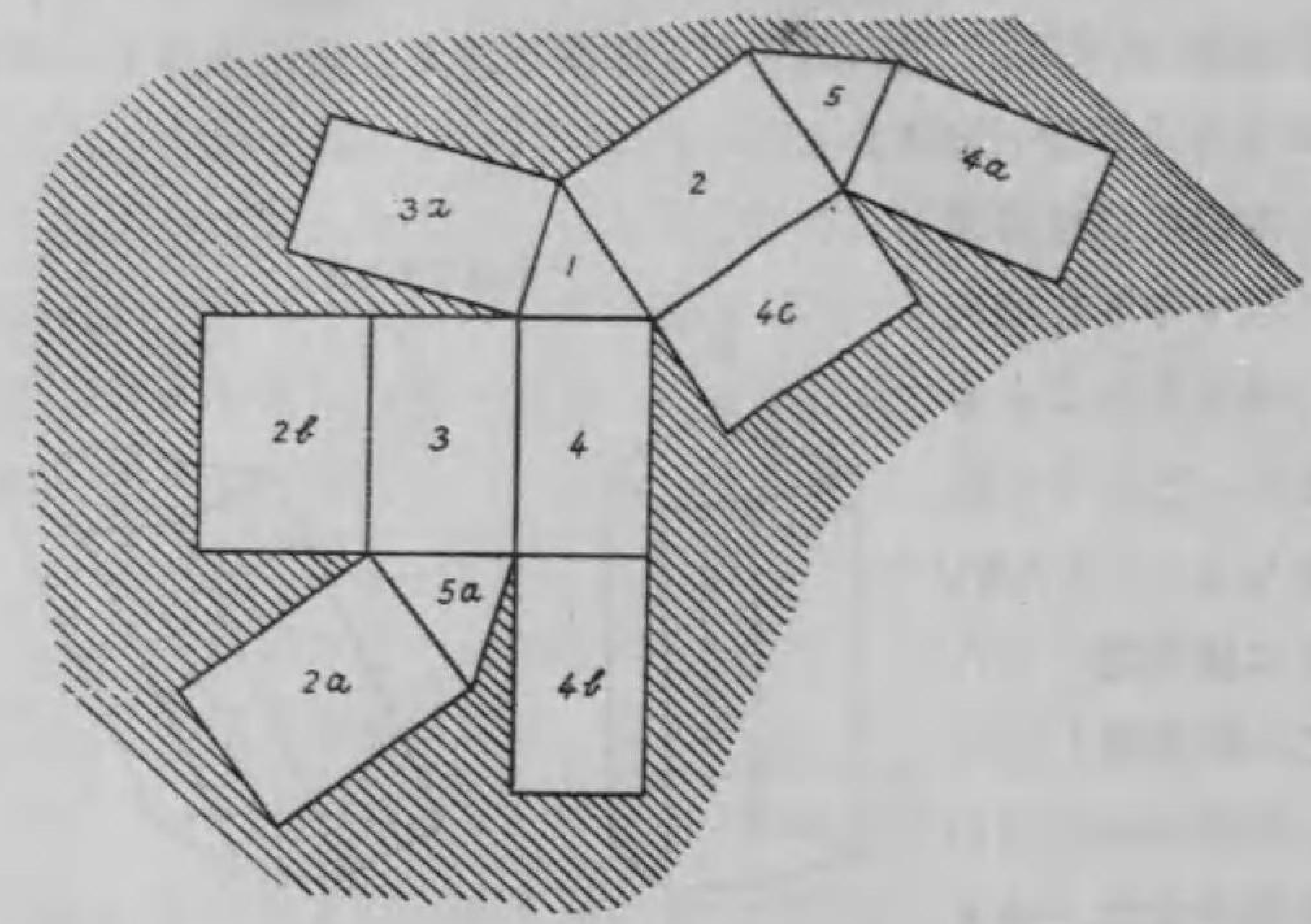


I. **厚紙を糊てはりて作る法**。厚紙を第百六十八圖に示すやうな形に切り，折り目を入れて折り合し糊をつけてはればよい。

II. **糊を用ひずに作る法**。紙を組み合すことのみによつて直

角壔の模型（簡單の爲め三角壔に就きて說明する）を作るには第百六十九圖に示す圖を描き影を施した部分を切り去り，§154と同樣に其番號によつて組み合せばよい。

第百六十九圖



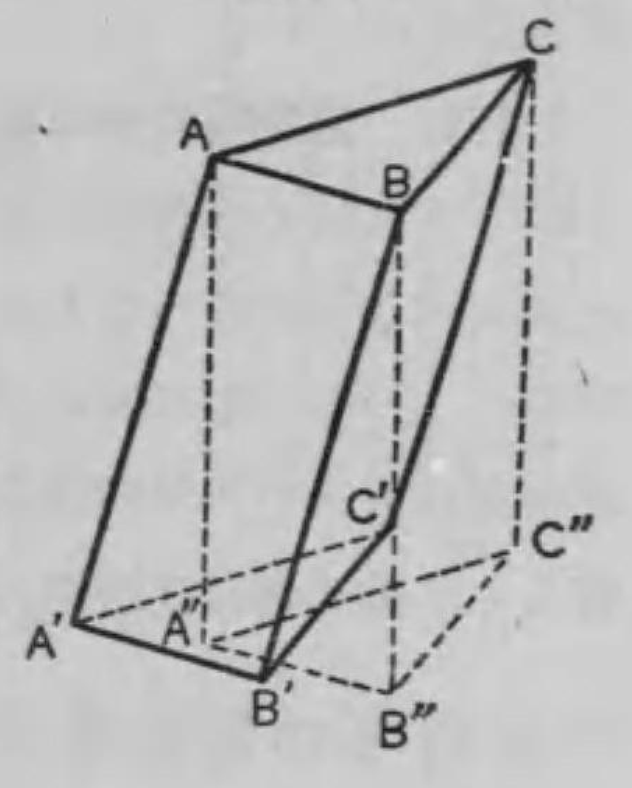
§ 168. 厚紙にて斜角壔の模型を作ること。

凡そ模型を作るには二つの場合がある。例へば今斜三角壔の模型を作るに，形大さを豫め定めず兎に角斜三角壔さへ出來ればよいと云ふ場合と，形と大さが豫め定められて居る場合がある。是迄にあつた模型については此何れの場合であつても其方法及び難易に大差がなかつた。然るに斜角壔の如きものになると，後の方が前の方より餘程六つかしい。後の方さへわかれば前の方は自然にわかるから，次には後の方のみを說明しよう。

今第百七十圖 ABC−A′B′C′を斜三角壔とし其上底 ABC の各頂點から下底の面へ垂線 AA″, BB″, CC″ を下し，A″, B″ 及び C″ を連結して三角形A″ B″ C″ を作つたとする。さすれば

斜角壔は其高さ，即兩底面の距離卽 AA″, BB″ 或は CC″と底面 ABC 及び A″ B″ C″ の位置が與へられたならば其大さ及び形が定まる。次に是等のものを知つて斜角壔を作る方法を說明しよう。

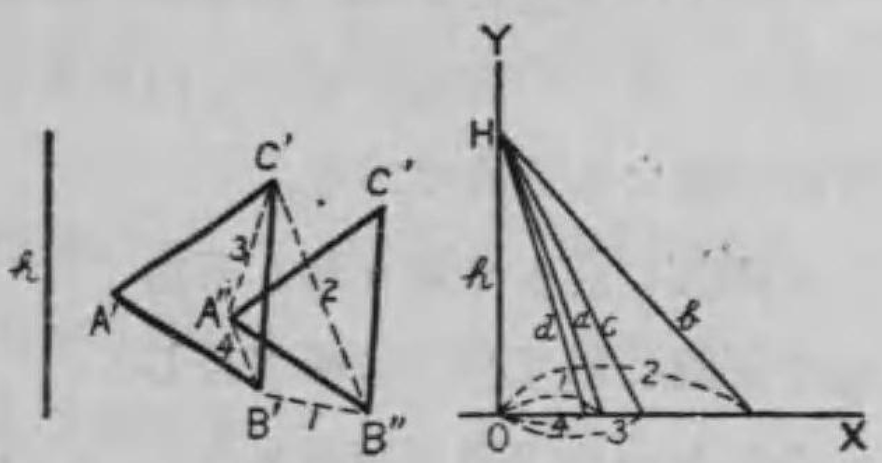
第百七十圖



I. 厚紙を糊てはり附けて作る法。 斜角壔の表面の展開圖を描く爲めに第百七十圖の BCC′B′ の面の圖を描かうと思ふ。それには BB′と BC′の長さを定める。其方法は互に垂直なる直線 OX′及び OY を引き其上に角壔の高さ h に等しく OH を取る。又 OX の線の上に 1, 2,3,4 の長さを取り其端と Hとを結び長さ a, b, c, d を定める。

そこで第百七十二圖の如く直線 B′C′を引き，B′を中心とし a を半徑として圓を描き，又C′を中心とし b を半徑として圓を描いて前の圓との交點を求め之をBとし，BB′を連ね BB′及び B,C′を二隣邊とする平行四邊形を作れば所要の面の圖が得られる。

第百七十一圖

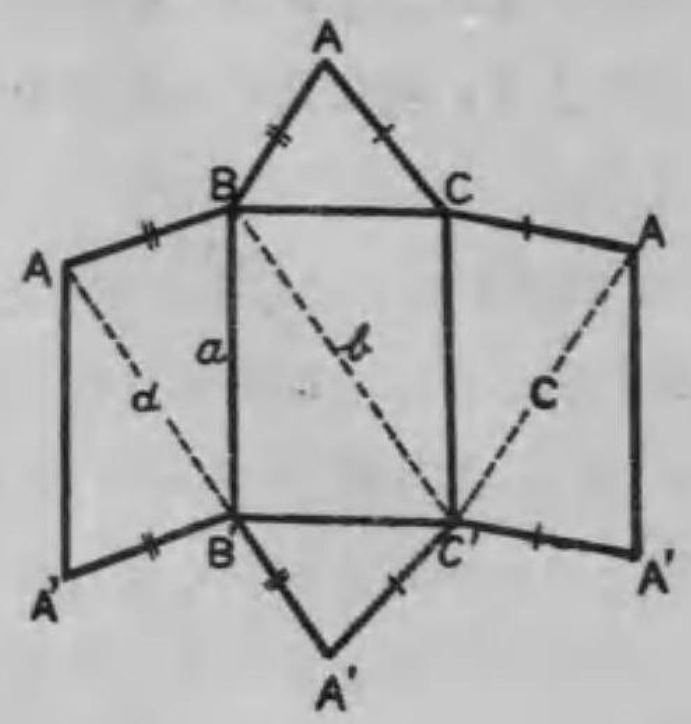


次に同樣の方法にて平行四邊形 AA′B′B 及び CC′ A′A を描き最後に兩底面の圖を描く。之に折目を入れて折り合し糊ではり付けると所要の斜三角壔が得られる。

II. **糊を用ひずに作る法。**

前の方法により側面の圖を描き，之を第百六十九圖と同様に連ね §154 の方法によつて組み合せばよい。

第百七十二圖



§ 169. 直角壔の側面積。

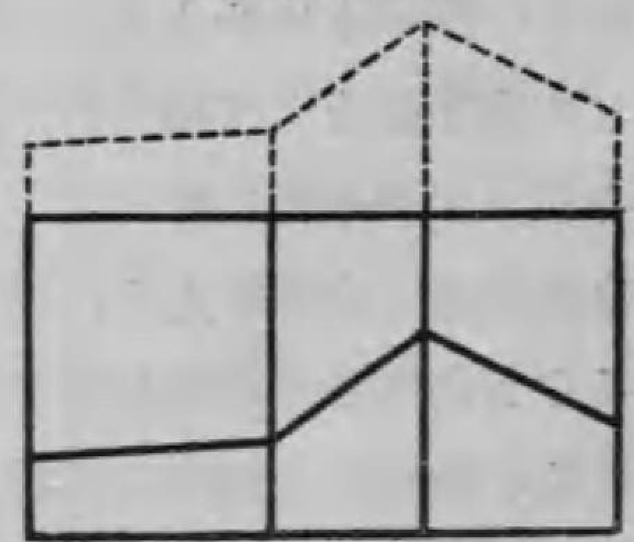
§167 I に於て直角壔の側面と成るべき面を考へてみると其和は，一つの矩形であつて其一邊はもとの角邊の高さに等しく，他の邊は底面の周に等しい。故に

直角壔の側面積は底面の周と高さとの積とに等しい。

§ 170. 斜角壔の側面積。

§168 I の方法により，斜角壔の側面となるべき面を平らに展べ置き，其一つの稜に垂直な直線を引いてみると，此直線はいづれの稜にも垂直である。

第百七十三圖



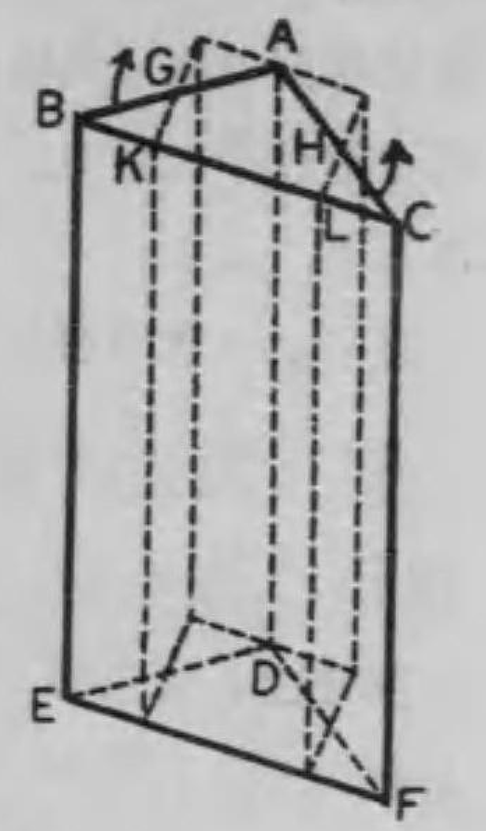
此直線に沿うて切り離し第百七十三圖に示すやうに接ぎ合してみると一つの矩形が出來る。故に斜角壔の側面積は此矩形の面積に等しい。

さて之を再びもとのやうに合してみると其一邊は元の角壔の切口の周であつて，其截面は側稜に垂直であることがわかる。

此樣な切口を直切口と云ふ。依て次のことが知れる。

斜角壔の側面積を求めるには，其側稜の長さに其直切口の周を乘ずればよい。

第百七十四圖



§ 171. 直三角壔の體積。

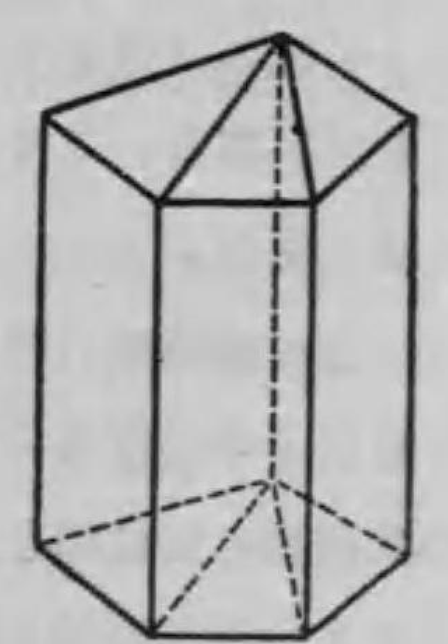
ABC—DEF を直三角壔とし，其體積を求めることを考へてみよう。

AB 及び AC の中點を夫々 G 及び H とし，此等の點から BC に垂線を下し，其足を K 及び L とする。GK 及び HL を通り側稜に平行な平面を引き，出來た三角壔を切り取り，之を矢で示すやうに接ぎ合はすと，直方體が出來る。故に此體積を求むればよい。さて此直方體の底面積はもとの三角壔の底面積に等しく，高さはもとの三角壔の高さに等しい。依て次の事が知られる。

直三角壔の體積を求めるには其底面積に高さを乘ずればよい。

§ 172. 一般多角壔の體積。

第百七十五圖



如何なる多角壔も第百七十五圖に示すやうに三角壔に分つことが出來る。さうして其何れの三角壔の高さもその角壔の高さに等しい。故に次のことが知られる。

直角壔の體積を求めるには底面積に高さを乘ずればよい。

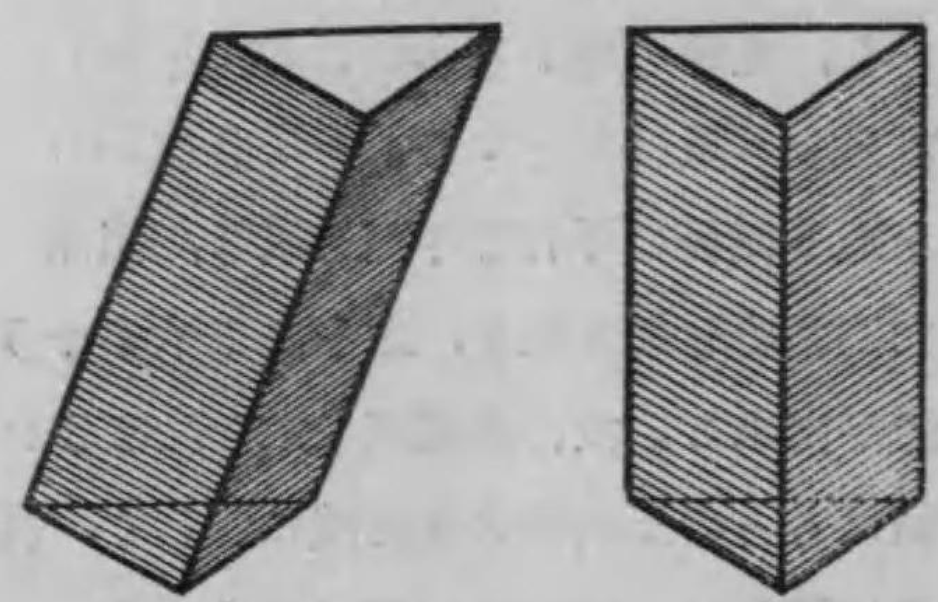
§ 173. 斜角壔の體積。

實驗。 §167及び§168の方法を應用し，厚紙或はブリキを以て等底等高の直三角壔と斜三角壔とを作れ。但しいづれもその上底を附けずに置く。その一方に粟を一パイ入れ他の方に移してみると，又一パイになることがわかる。

之により次の事が知られる。

斜三角壔の體積は之と等底等高の直三角壔の體積に等しい。

第百七十六圖



其理由。 直角壔を紙のやうに薄いものを積み重ねて作つてあると考へると，之をずらして等底等高の斜角壔とすることが出來る。此二つの角壔の體積が等しくなければならぬことは明かである。

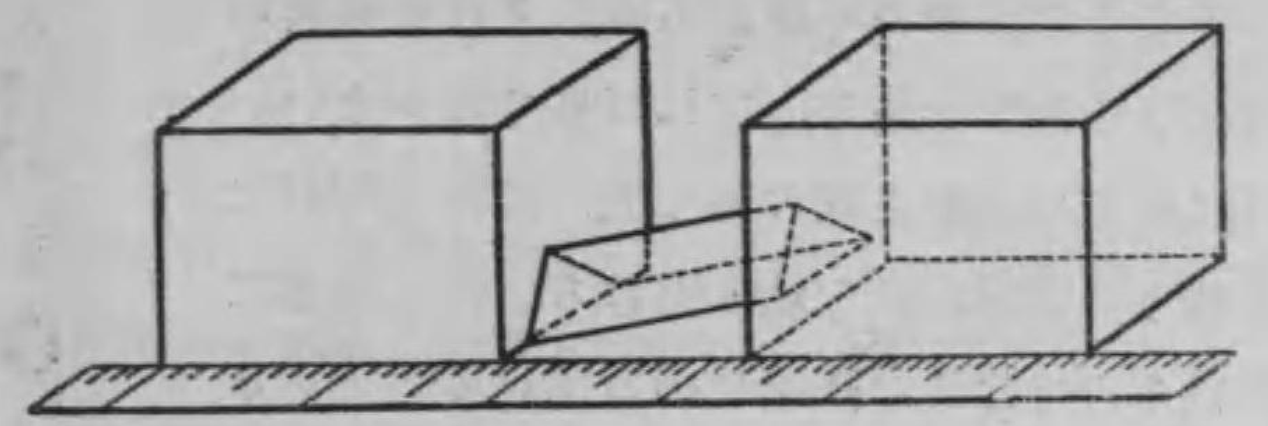
§ 174. 角壔の體積を測る法。

角壔の模型を木に作つて置けば，體積實測の練習に用ひることが出來る。さて其實測を成すには其底面積と高さとを測らねばならぬ。

底面積は第八章に述べた方法で測るのであるが，其端面に線を引くのに都合の惡い場合には，之を紙上に据ゑ，鉛筆を以て其頂點の所に印をつけ，角壔を取り去り，其印を連結して得べき多角形の面積を測ればよい。

高さを測るには直角壔の場合と斜角壔の場合とは少しく違ふ。後の場合には，直方體の木片二つを用意し，第百七十七圖に示

第百七十七圖



すやうに斜角壔の兩底面を之にて挾み，之に物指を當て木片の相對する面の距離を測ればよい。

直角壔の場合には斜角壔と同樣にして測ることも出來るけれども，直方體の定規の代りに三角定規を用ふることが出來る。

注意。 斜角壔の高さを測る方法は錐體の高さ球の直徑等を測るに應用せられる。

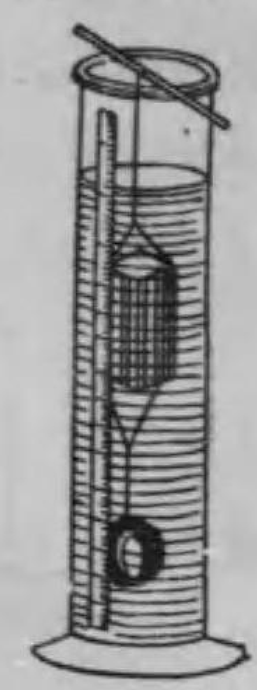
§ 175. 體積測定の結果を驗す法。

立體の體積を測つた後之れを水中に沈め，其排除する水の量により直接に體積を測つて之を驗すことは甚興味のあることである。然のみならず體積測定の場合には，計算する際其桁を間違へたり，其他飛んでもない誤りをすることが往々ある此方法にて驗すと之を發見することが出來る。次に角壔に就いて其方法を説明しよう。

それをなすには先づ目盛りをした硝子の圓壔に水を入れ，角壔に鉛の重りを吊し，又之を絲にて吊し第百七十八圖に示すやうにする。そこで先づ其重り丈を水中に沈めて目盛を讀み置き次に角壔全部を沈めて再び目盛を讀み其差を求めると之が角壔の體積である。

圓筒形の硝子に目盛をすること。上の實驗に用ふる如き圓筒形の硝子は度量衡器として販賣して居る。然し其徑が小さく，其價が不廉な爲め數多く備へることの出來ぬ不便がある。それ故適當の大さの硝子の圓筒を購め，之に目盛するがよい。

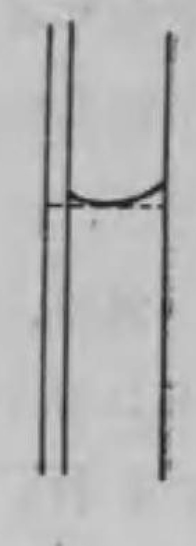
第百七十八圖



それには第百七十九圖の如く先づ圓筒の側面に幅二糎許りの帶狀の紙を粘り附ける。但し全部に糊を附けるのでなく，兩端にのみ附けるのである

次に之に適當量の水を入れ，其水面を紙に印しする。但し水面は彎曲して居るから，其最下の面を標準とする。次に一定量の水を他の標準の刻度ガラスで測つて入れ，紙に其水面を印しする。此紙を削ぎ取り，圓筒內の水をあけ，他の新らしい紙を粘り前と同樣にして之に二つの印を入れる。同樣の事を三四度繰り返す。

第百七十九圖



別に紙上に一直線を引き分割器を用ひ先に作り置きし紙の二つの印の間の長さを此線上に移す。若し其長さが一致しないときには其平均を取るのである。次に普通用器畫で用ふる方法で其二點間を適當の數に等分し，二點以外の部分も同樣に目盛をなし，之を適當な幅に切り圓筒に粘り附けるのである。

注意一。上の方法で作つたものでは，二つの目盛の差によつて其間にある水の量を知ることを得るのみであつて，水全體の量を知ることは出來ない。

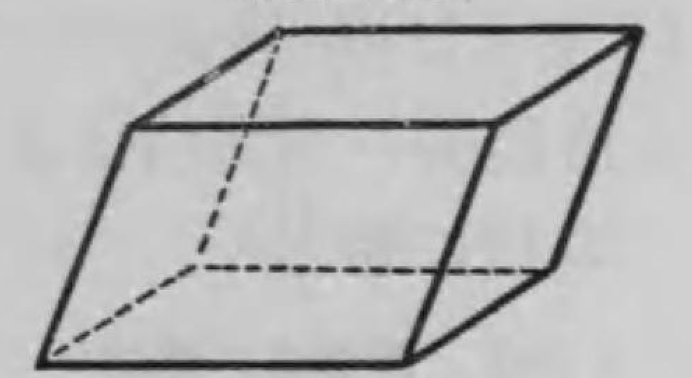
注意二。木には水が浸み込みて膨れるから，一旦水に入れて體積を測つたものを再び水中に入れて測るともとの結果と違ふ

§ 176. 平行六面體。

角壔の底面が平行四邊形であると，第百八十圖に示すやうな六つの平行四邊形にて圍まれたものになる。之を**平行六面體**と云ふ。

平行六面體の凡ての面が矩形と成つた場合には**直六面體**或は**直方體**と成る。即直六面體は平行六面體の特別なものである。

第百八十圖



注意。§154に說明した直方體を作る方法を少しく變形すると平行六面體を作ることが出來る。

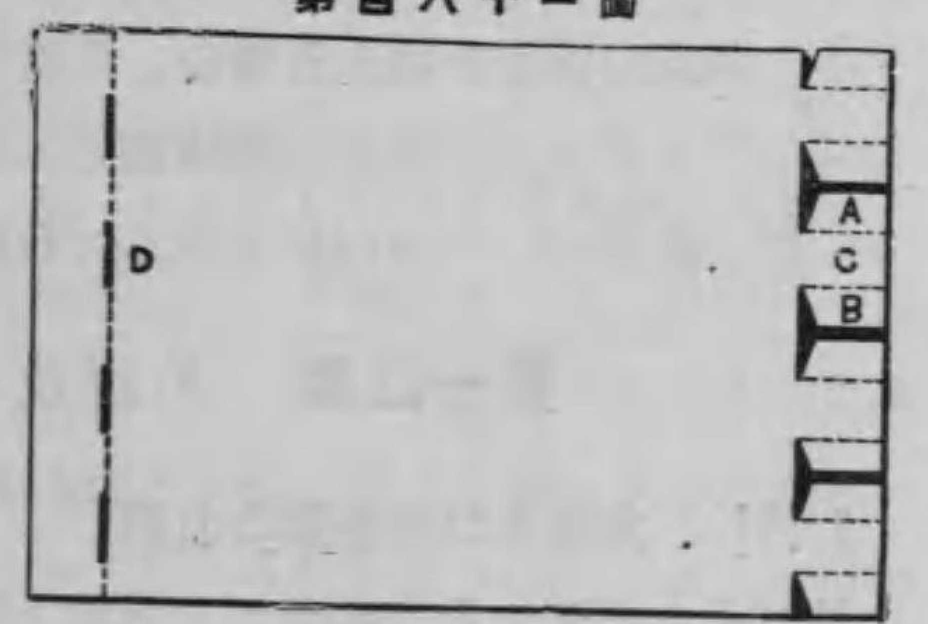
§ 177. 圓壔。

角壔の兩底面が多角形でなくて圓である場合には，之を**圓壔**と云ふ。角壔に直角壔と斜角壔とある如く，圓壔にも直圓壔と斜圓壔とある。即兩底面の中心を連ぬる直線が底面に垂直な場合には**直圓壔**と云ひ，然らざるときは**斜圓壔**と云ふ。

§ 178. 厚紙にて直圓壔の模型を作ること。

紙にて直圓壔の模型を作るには，先づ之を長方形に切り，次に第百八十一圖に示すやうに切り，右の方の端が左の細い隙間にはまるやうに折る。例へばAとBとをCに折り重ね之をDに挿し込む其他も之と同樣である。挿し込んだ後中で開い

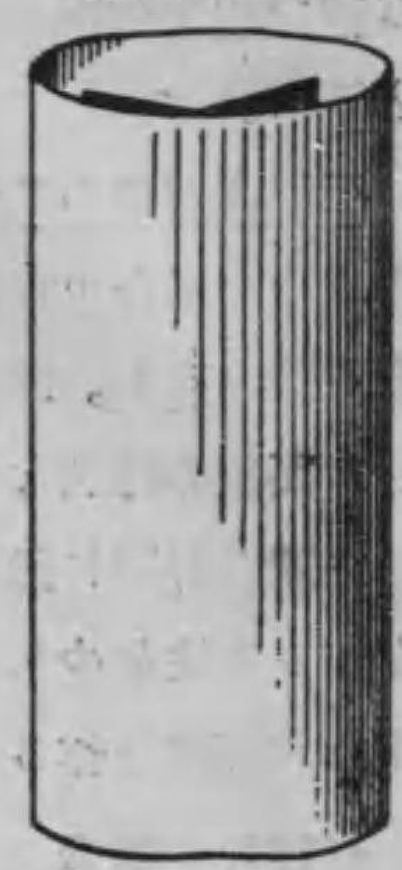
第百八十一圖



て第百八十二圖のやうにする。

§ 179. **直圓壔の側面積。**

第百八十二圖



前節の模型を見ると直圓壔の側面積は矩形である。さうしてその矩形の一邊は圓壔の高さに等しく，他の邊は周の長さに等しい。故に次の事が知られる。

直圓壔の側面積は其周と高さとの積に等しい。

§ 180. **直圓壔の體積。**

直圓壔は直角壔の底面の邊の數が非常に多くなつたものであると考へることが出來る故，其體積を求めるには直角壔と同じ方法を用ふることが出來る。即

直圓壔の體積を求めるには，底面の面積に高さを乘ずればよい。

直圓壔の體積を求める練習は次のやうにすることが出來る。

I. **中實の模型を用ふる場合。**木製の模型の體積を測るには§174の方法により其直徑及び高さを測つて計算すればよい。

II. **中空の模型を用ふる場合。**圓筒形の罐の空いたもの或は茶筒のやうなものは圓壔の體積測定の練習に用ふることが出來る。但し此場合には其內法を測つて容積を算出するのである。

第十二章　角錐及び圓錐

§ 181. **角錐及び其各部の名稱。**

第百八十三圖に示す如き形を角錐と云ひ，Vを其頂點ABCを

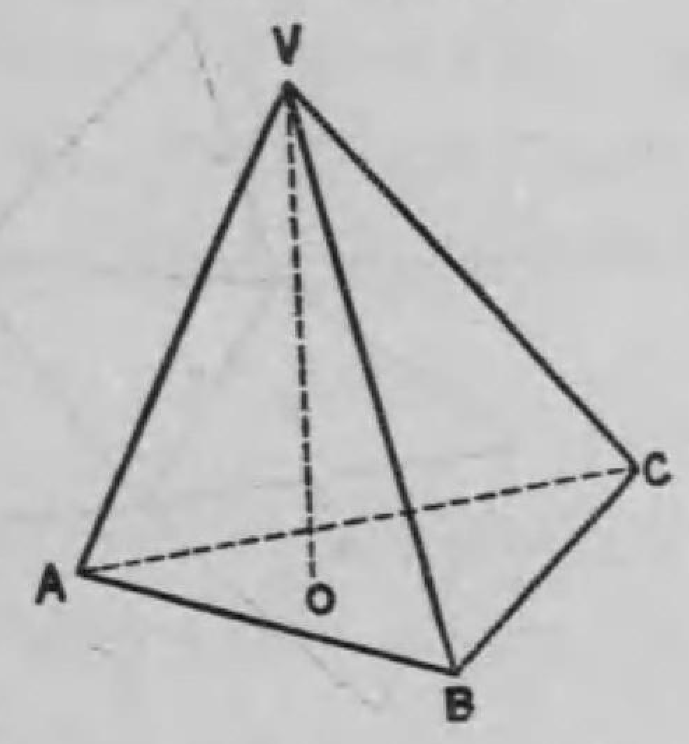
其底面と云ふ。又頂點と底面との距離を其高さと云ひ，底面以外の面を側面と云ふ。

角錐は其底面の邊數により三角錐，四角錐等と云ふ。

三角錐は面の數が四つなる故，特に四面體と云ふ。

§ 182. **厚紙にて三角錐の模型を作ること。**

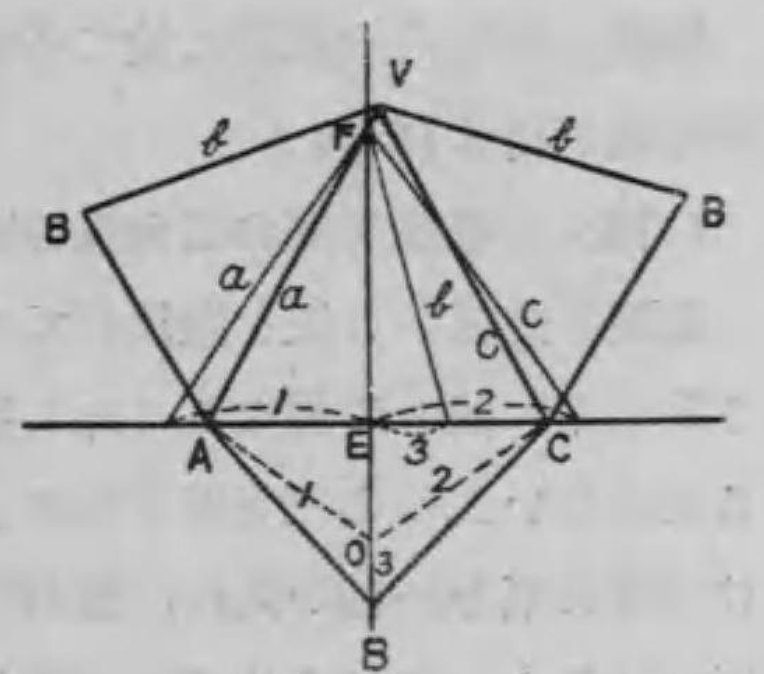
第百八十三圖



三角錐の形及び大さが定まる爲めには，其底面，其高さ及び其頂點から底面に下した垂線の足の位置とが與へられねばならぬ。即今三角錐を第百八十三圖VCABCとし，VからCABへの垂線をVOとすると，三角形ABC高さVO及びOの位置が與へられて居られねばならぬ。

これ等のものが與へられたとして，先づ其展開圖を描かねばならぬ。それには先づ底面となる三角形ABCを描き(第百八十四圖)Oを定める。OからACに垂線を下し，之を延長し其延長EFを角錐の高さに等しくする。次にEから1，2，3の長さを取りa，b，cの長さを決定する。

第百八十四圖

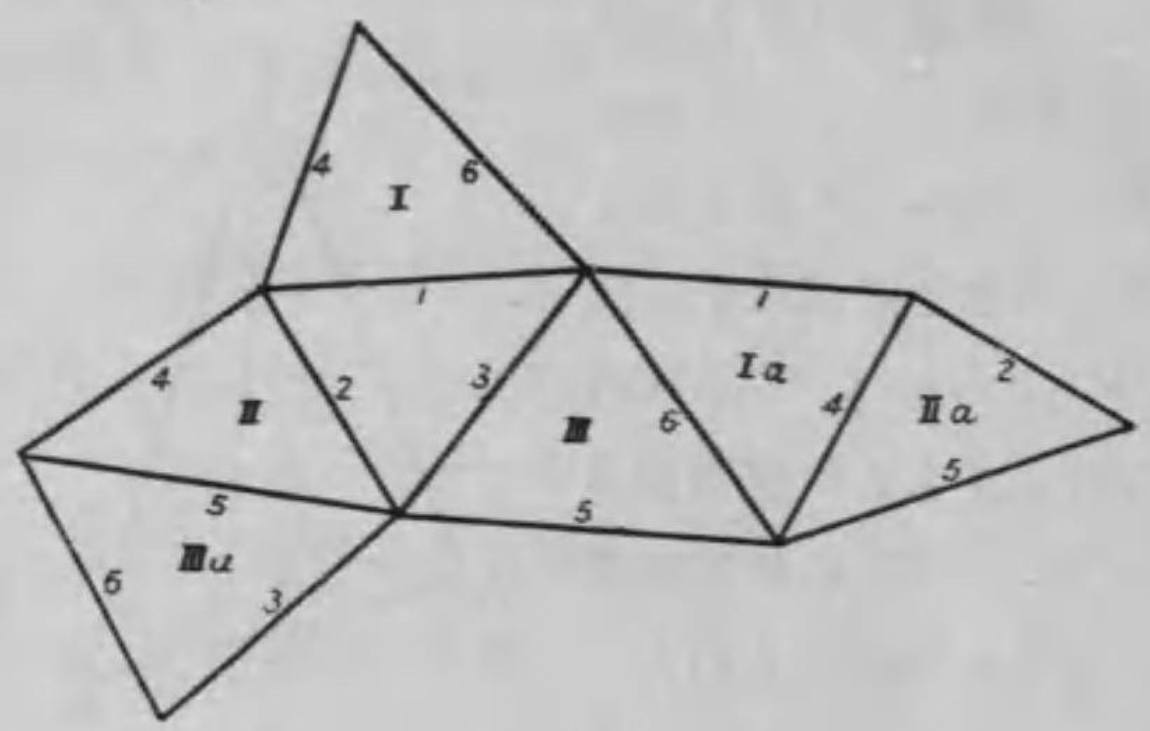


次にAを中心としaを半徑として圓を描き，Cを中心としcを半徑として圓を描き其交點をVとする。又

Vを中心とし b を半徑とする圓とAを中心としABを半徑とする圓との交點をBとし三角形VABを定める，同樣にして三角形VCBを定める。さうすると之が展開圖である。

糊ではり合はして作るには，上の展開圖に折目を入れはり合せばよい。又糊を用ひずに組み合はして作るには展開圖から第

第百八十五圖



百八十五圖のやうな圖を作ればよい。圖に於て同じ數字を附せる線は同長なることを示す。又之を組む方法につきては§154を參照せよ。

注意。第百八十五圖に於て各の三角形を正三角形とすると正四面體が得られる。

§183. 等底等高の三角錐の體積。

實驗。前節の方法を應用してブリキを以て底面全等にして高さ等しく，傾きの異なる（即ち第百八十三圖のOの位置の異なる底のない二つの三角錐を作れ。兩方の三角錐の頂點を下に向け一方に粟を一ばい入れ，他の三角錐にあけてみると矢張り一ばいになる。之によつて次の事がわかる。

等底等高の三角錐の積體は等しい。

其理由。三角錐は紙のやうに薄いものを積み重ねて作られて居ると考へることが出來る。之を一方の側から押してずらすと等底等高で形の違ふ三角錐が出來る。其體積はもとの體積に等しい事は明瞭である。

§184. 等底等高の三角壔と三角錐との體積關係。

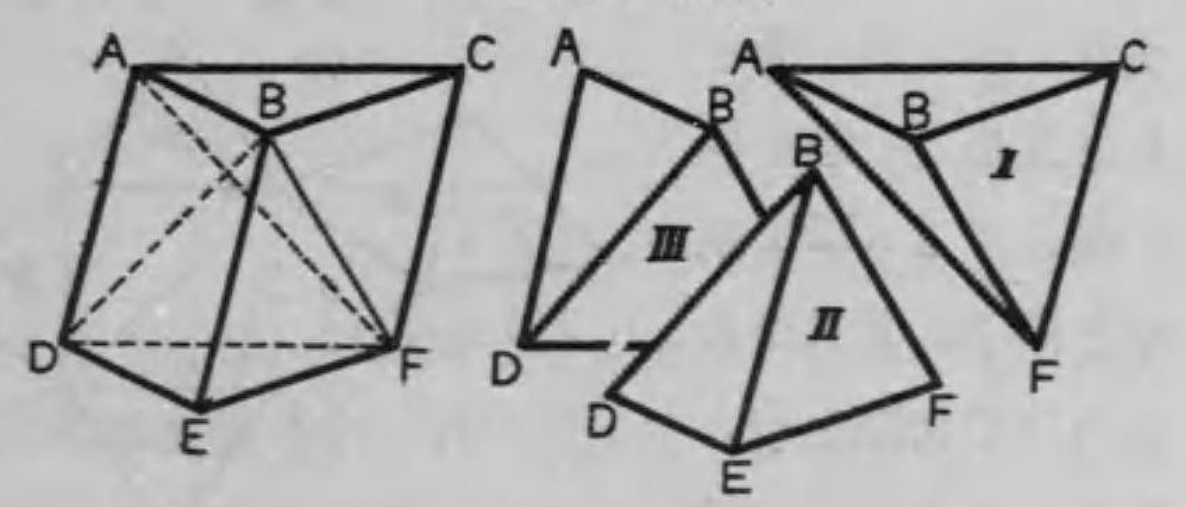
實驗。前節に用ひた三角錐と等底等高の中空角壔を作れ。但し一方の底面丈けは取つて置く。此二つの容積を比較する爲めに角錐で粟を量り角壔に入れみよ。さすれば三ばいにて角壔は一ばいになることがわかる。

之によつて次の事が知られる。

三角錐の體積は之と等底等高の三角壔の三分の一である。從て三角錐の體積を求めるには，其底面積に高さを乘じ三分すればよい。

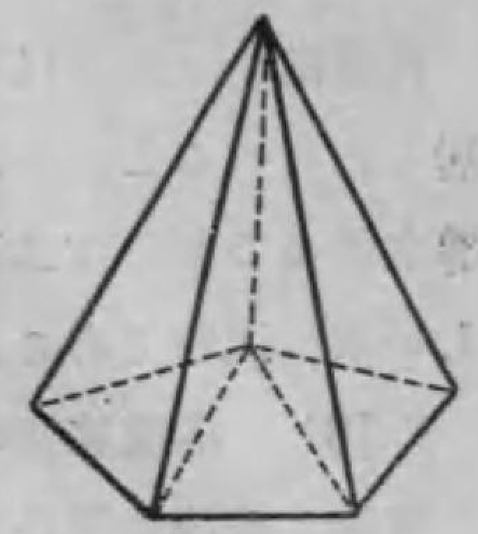
其理由。三角壔は第百八十六圖に示すやうに三つの三角錐に分つことが出來る。此三つの體積は相等しい。何となればIとIIとは底面等しく（即ABC=DEF）且つ高さも相等しい。又IIとIIIに於てはFを頂點と考へると底面と高さが等しいから體積が等しい。依て三つの三角錐が相等しい。

第百八十六圖



注意。§182の方法に從ひ，上の三つの三角錐の模型を別々に作り之を組合して，本節の説明に用ひる模型を作ることが出來る。但し三角壔がABC—DEFが直角壔であるやうにするが簡單である。

第百八十七圖



§185. 一般角錐の體積。

如何なる角錐でも，第百八十七圖に示すやうに等高の三角錐に分つことが出來る。故に

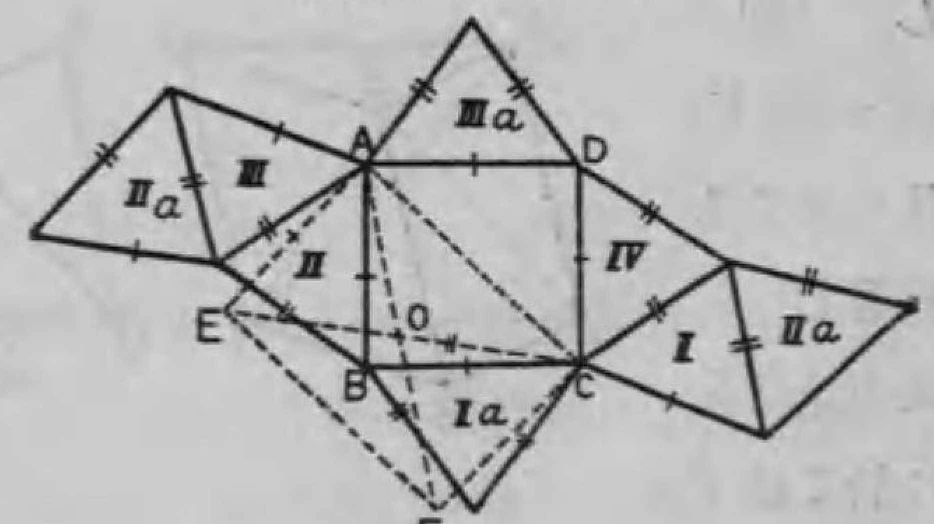
一般に角錐の體積を求むるには底面積に高さを乘じ三分すればよい。

注意。角錐の模型を用ひて實際に其體積を測る爲めに底面積及び高さを測る方法は，§174に於て斜角壔に就いて述べた方法と同樣である。

§186. 立方體を六つの等しき四角錐に分つこと。

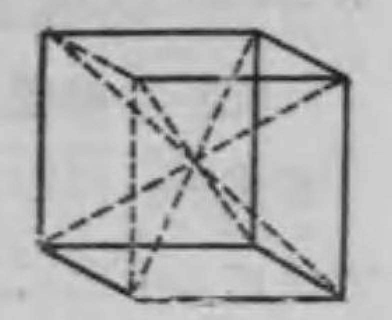
實驗。第百八十八圖に示す如く厚紙の上に正方形ABCDを描き，其對角線ACを引き，ACを一邊とし正方形の一邊を他の邊とするAEFC矩形を描き，其二つの對角線の交點をOとする。正方形の一邊とOCとを以て圖に示す如く三角形を連接して描き，餘の部分を切り去り，折目を

第百八十八圖



入れ，番號に從うて組み合すと一つの四角錐が出來る。之と全く等しき四角錐五個を作り，第百八十九圖に示すやうに組み合してみると立方體が出來る之によつて此立方體は此角錐の六倍であることがわかる。故に此角錐と等底等高の直方體の體積は角錐の三倍であることがわかる。從て此特別の場合に於て§184のことが成り立つことがわかる。

第百八十九圖



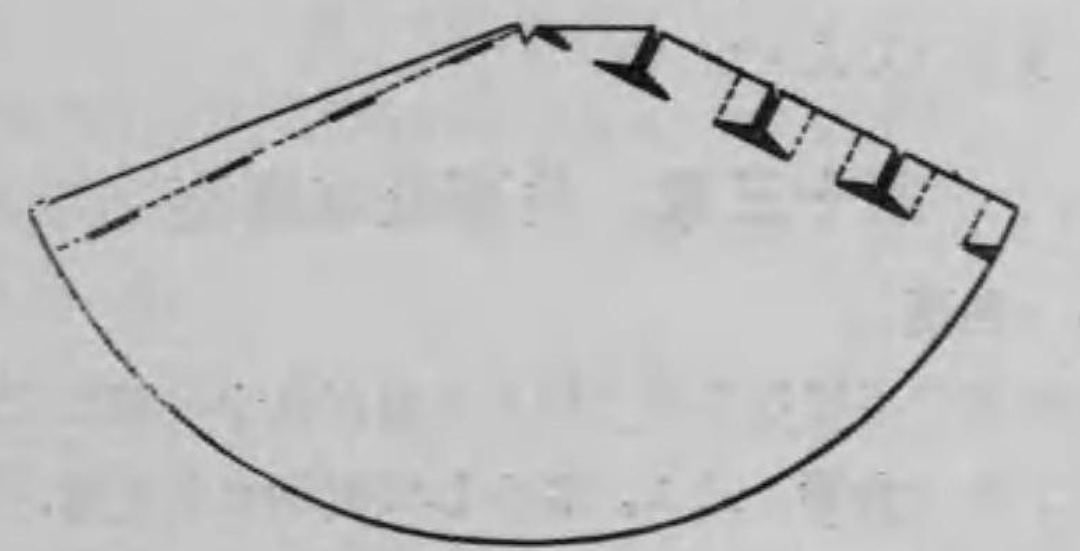
§187. 圓錐。

角錐の底面に相當する面が多角形でなく，圓である場合には**圓錐**と云ふ。さうして其頂點が底面の中心を通り底面に垂直な直線中に在る場合には**直圓錐**，然らざる場合には**斜圓錐**と云ふ。

§188. 厚紙にて直圓錐の模型を作ること。

直圓錐の模型を作るには，紙を第百九十圖に示すやうに切り，

第百九十圖



圓壔を作りしときと同樣に組み合せばよい。

§189. 直圓錐の側面積。

直圓錐の側面を展開してみると扇形となる。さうして其弧は圓錐の底面の周に等しく，其半徑は圓錐の**側高**と云ふ。故に§139により

直圓錐の側面積を求めるには底面の周に側高を乘じ二分すればよい。

§ 190. 等底等高の圓錐と圓壔との體積關係。

實驗一。 §178の方法により，底のない直圓壔を作り又§188の方法により之に等底等高の直圓壔を作れ。机上に紙を展べ直圓壔をこの上に据ゑ手で輕く押さへ，直圓錐で粟を量つて入れてみると，ちやうど三ばいで一ばいになる。

實驗二。 なるべく質の一様な木の然も同じ部分で等底等高の圓錐と圓壔とを作り，§134の天秤を用ひて其目方を比較せよ。

實驗三。 §175の圓壔硝子を用ひ，水中に入るゝことによつて實驗一に用ひたる圓錐と圓壔とを比較せよ。

以上の實驗により次の事が知られる。

直圓錐の體積を求めるには底面積と高さの積を三分すればよい。

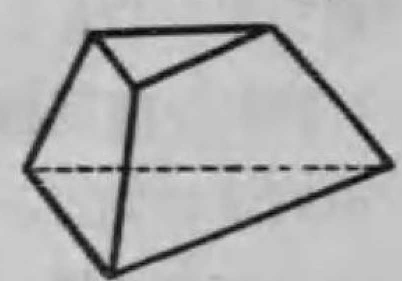
第十三章　角臺及び圓臺

§ 191. 角臺。

角錐を底面に平行な平面で切ると第百九十一圖に示すやうな形になる。之を角臺と云ふ。さうして其切口を**上底**，もとの角錐の底面を**下底**其距離を**高さ**といふ。

§ 192. 角臺の模型を作ること。

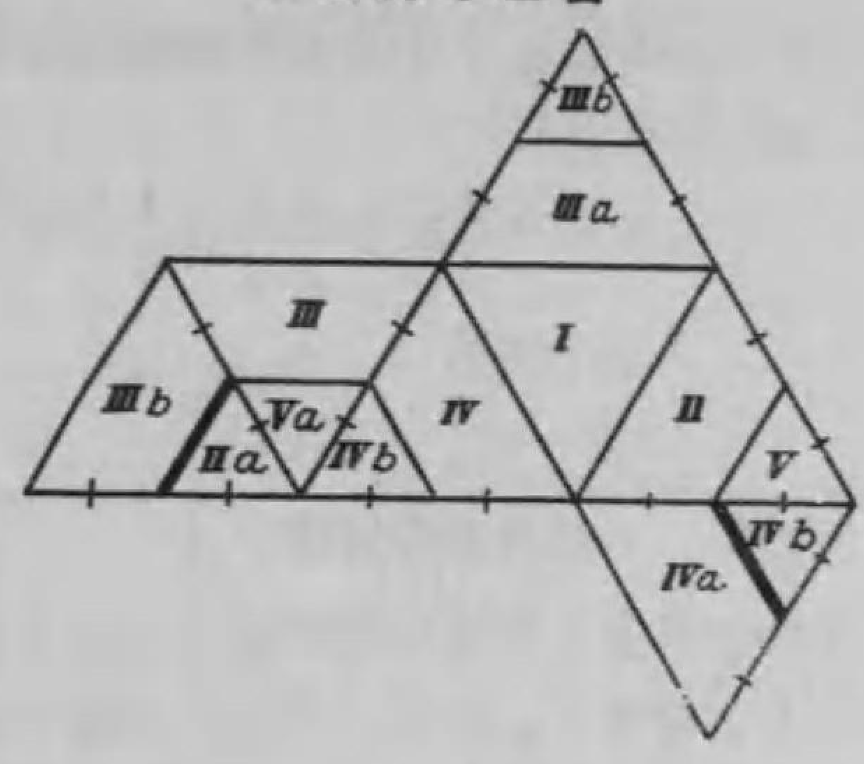
第百九十一圖



第百九十二圖に示す方法で紙を切りて組み合はすと底面が正三角形の角臺を作ることが出來る。組み合はす方法につきては§154を參照せよ。

§ 193. 三角臺を三つの三角錐に分つこと。

第百九十二圖



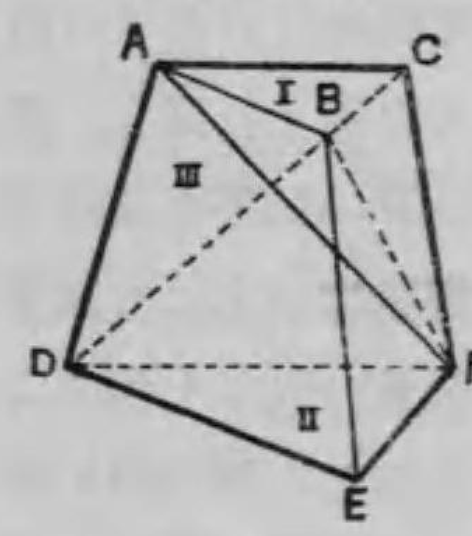
三角臺は第百九十三圖に示すやうに三つの三角錐B—DEF, F—ABC及び F—ABDの三つの三角錐に分つことが出來る。之を示す模型を作るには §182 に從うて三つの三角錐を作ればよい。

§ 194. 前節に於ける三つの角錐の比較。

I とIIとは高さが等しい故に其體積の比は底面の比に等しい。又IIと III とはEを頂點と考へると其高さが等しい。故に其體積は底面に比例する。而して底面の高さは兩方共 AB と DE との距離であるから，底面積の比は底邊 AB と DE との比に等しい。依て

$$\mathrm{II} : \mathrm{III} = \mathrm{DE} : \mathrm{AB}$$

第百九十三圖



今上底及び下底の面積を夫々 a 及び b とする △ABC と △DEF とは相似なる故

$$\mathrm{DE} : \mathrm{AB} = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

從つて

$$\mathrm{II} : \mathrm{III} = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

§ 195. 三角臺の體積。

上底の面積及び下底の面積を夫々 a 及び b として高さを h とすると §184 により I 及 II の體積は夫々 $\frac{1}{3}ah$ 及び $\frac{1}{3}bh$ である。從て III は

$$\frac{1}{3}bh\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{3}\sqrt{a}.\sqrt{b}.h$$

故に三角臺の體積は

$$\frac{1}{3}h(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$$

§ 196. 一般角臺の體積。

何れの角臺も兩底の對角線を通過する平面により三角臺に分つことが出來る。故に三角臺と同樣の公式によつて體積を計算することが出來る。

§ 197. 圓臺及び其體積。

圓錐を底面に平行な平面で切ると第百九十四圖に示すやうな形になる。之を**圓臺**といふ。圓臺は角臺の底面の邊數が限りなく多くなつたものと看做すことが出來る故，角臺と同樣の公式で體積を求めることが出來る。

第百九十四圖

實驗一。 バケツの內徑及び深さを測りて其容積を計算し，水を桝にて量りて入れ計算の結果と比較せよ。

實驗二。 木にて圓臺を作り上下兩底の面積及び高さを測ることによつて其面積を計算し，又 §175 の方法により水中に入れて其體積を測り計算の結果と比較せよ。

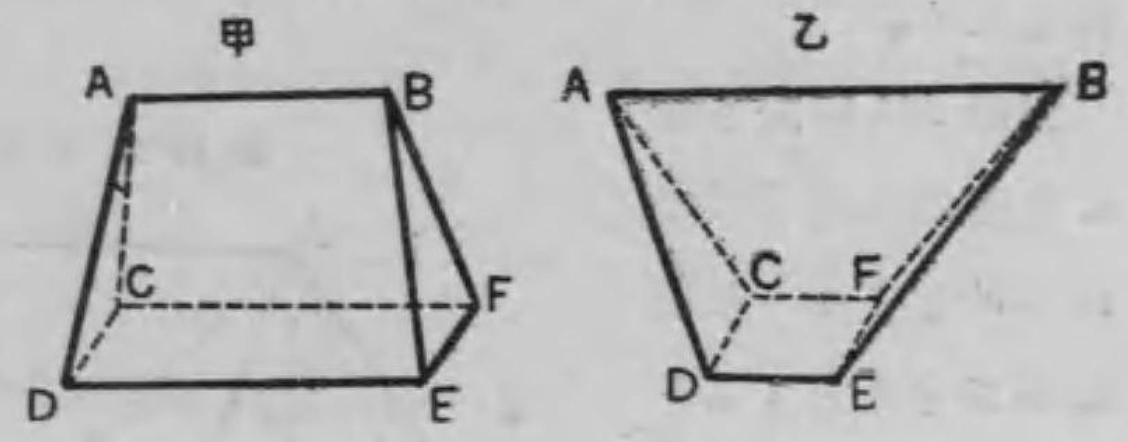
第十四章　楔形及び楔臺*

§ 198. 楔形。

* 本章所載の事項は他章に比較すると稍高尙であるけれども，實際上に重要であるからこゝに揭げることにしたのである。

普通に用ふる楔のやうな形を楔形といふ。第百九十五圖に示すのは楔形であつて AB を其**刄**，矩形 CDEF を**底面**といひ，AB は CF 及び DE に平行である。刄と底面との距離を其**高さ**といふ。

第百九十五圖

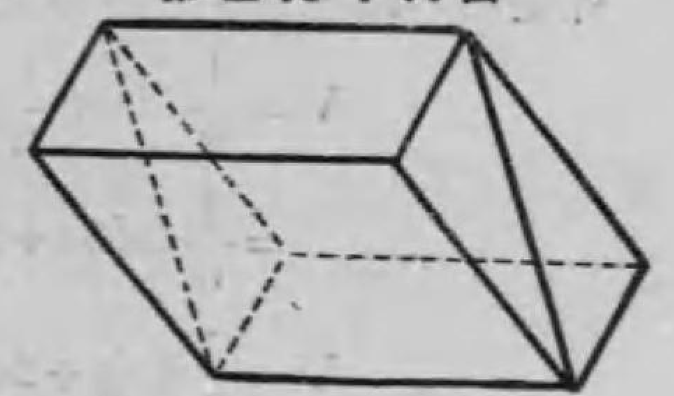


楔形は第百九十五圖甲に示す樣に刄が底面の之に平行な邊より短いものと，乙に示す樣に之より長いものとある。

§ 199. 特別なる楔形及び其體積。

本節に於ては刄の長さが底面の橫の長さに等しい楔形の體積を考へてみよう。これは斜三角壔の特別なものであるから§168によりて模型を作ることが出來る。

第百九十六圖



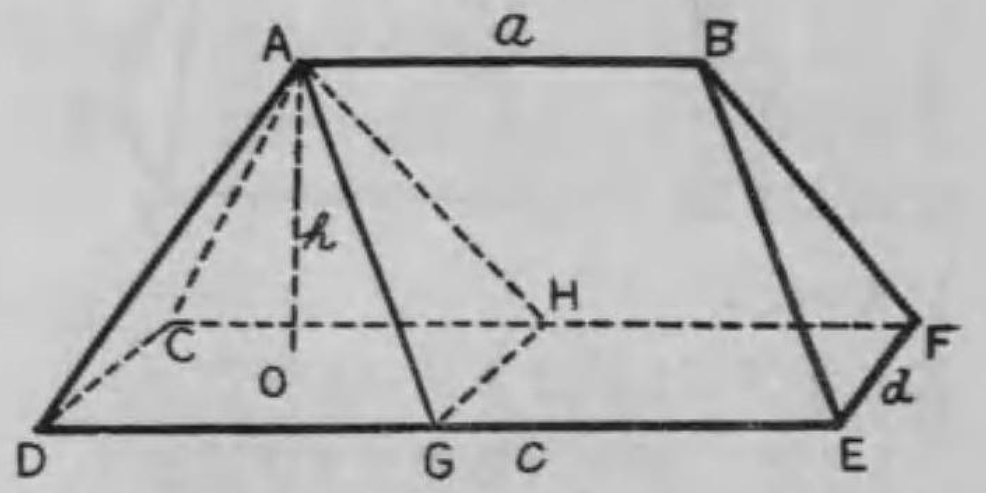
實驗。 上に述べたる方法に據り，同一の楔形二つを作り第百九十六圖に示す如く一方を倒にして重ね合してみると，平行六面體が出來る。故に次の事が知られる。

刄の長さが底面の橫の長さに等しい楔形の體積を求めるには，其底面積と高さとの積を二分すればよい。

§ 200. **楔形の體積。**

I. **刄が底面の横より短かき場合。** 第百九十七圖楔形 AB—CDEF のAを通つて平面 BEF に平行な平面を引くと前節に説明した楔形 AB—GEFH と四角錐 A—CDGH とに分たれる。故に此二つの體積を別々に求め，然る後和を求めると所要の體積が得られる。

第百九十七圖



刄即 AB の長さを a, 底面の二邊 DE 及び EF を夫々 c 及び d, 高さを h とすると楔形 AB—GEFH の體積は前節により

$$\frac{1}{2}adh$$

である。又角錐 A—CDGH の體積は §185 により

$$\frac{1}{2}(c-a)dh.$$

今全體の體積をVとすると，

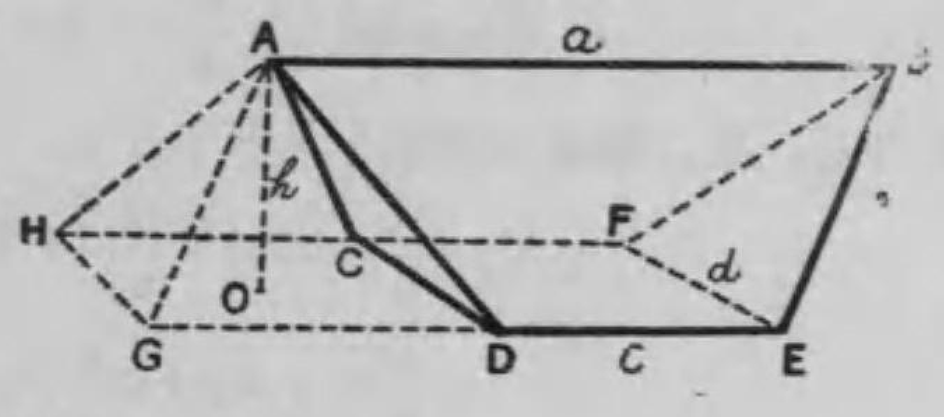
$$V=\frac{1}{2}adh+\frac{1}{3}(c-a)dh$$
$$=\frac{1}{6}dh\{3a+2(c-a)\}$$
$$V=\frac{1}{6}dh(a+2c)$$

II. **刄の長さが底面の横より長き場合。** Iの場合と同様に第百九十八圖の如く，A を通つて面 BEF に平行なる平面を引くと，與へられた楔形は前節の楔形AB—HGEFと角錐A—HGDCとの差である。前と同様に刄の長さ，底面の横縦及び高さを夫 a, c, d 及び h にて表はすと，AB—HGEF 及びA—HGDCは夫々

$$\frac{1}{2}adh \quad 及び \quad \frac{1}{3}(a-c)dh$$

となる。故に

第百九十八圖



$$V=\frac{1}{2}adh-\frac{1}{3}(a-c)dh$$
$$=\frac{1}{6}dh\{3a-2(a-c)\}$$
$$V=\frac{1}{6}dh(a+2c)$$

即Iと同一の公式が得られる。依つて

楔形の體積を求めるには，刄の長さと底面の横の長さの二倍との和に，高さと底面の縦の長さとの積を乘じ，六分すればよい。

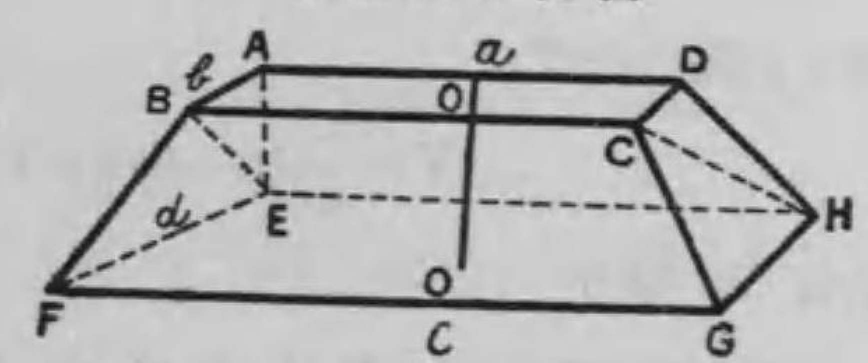
注意一。 $a+2c$ は刄と之に行平なる稜の長さの和なることに注意すると，此公式は容易に記憶せられる。

注意二。 本節の説明用模型は §168 及び §182 を參照すれば容易に作ることが出來る。

§ 201. **楔臺の體積。**

楔形を其底に平行な平面で截り刄の方を取り去つたものを楔臺と云ふ。今第百九十九圖 ABCD—EFGH を楔臺とすると其面 ABCD 及び EFGH を夫々**上底**及び**下底**と云ひ，其距離を**高さ**と云ふ。

第百九十九圖



次に楔臺の體積を求めてみよう。BC と EH を通る平面で切ると二つの

楔形となる。依て此二つの體積を加へ合せば所要の體積が得られる。今稜 AD, AB, EH,及び EF を夫々 a, b, c 及び d にて表はし高さを h とすると BC−EFGH 及び EH−ABCD の體積は夫夫

$$\frac{dh}{6}(a+2c) \qquad \frac{bh}{6}(c+2a)$$

となる。故に楔臺の體積をVとすると,

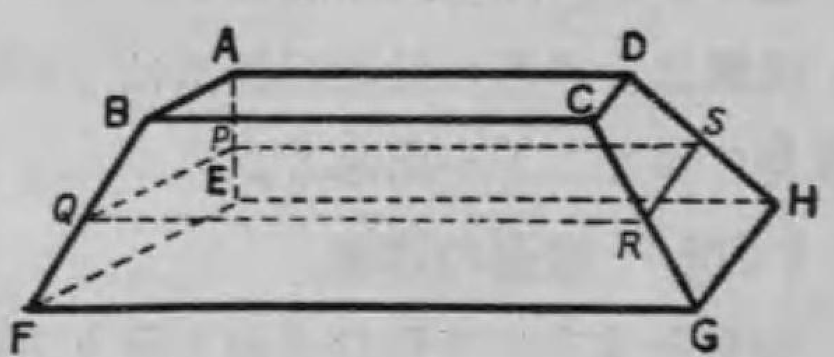
$$V=\frac{bh}{6}(c+2a)+\frac{dh}{6}(a+2c)$$
$$=\frac{h}{6}(bc+2ab+ad+2cd)$$
$$V=\frac{h}{6}\{(a+c)(b+d)+ab+cd\}$$

§ 202. 前節の公式の變形。

楔臺 ABCD−EFGHの稜 AE, BF, CG 及び DH の中點を夫夫 P, Q, R 及びSとし, 之を結び附けると,

$$QR=\frac{a+c}{2},\quad PQ=\frac{b+d}{2}$$

第二百圖



故に

$$\frac{1}{4}(a+c)(b+d)=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$$
$$=PQ.QR$$

依て矩形PQRS の面積をAとすると

$$(a+c)(b+d)=4A$$

從て前節の公式は

$$V=\frac{h}{6}(4A+ab+cd)$$

となる。即ち,

楔臺の體積を求めるには上底の面積下底の面積と中央斷面の面積の4倍との和に高さを乘じ六分すればよい。

注意。堤防のやうなものゝ形は多く楔臺であるから, 前節或は本節の公式によつて體積を求めることが出來る。

第十五章 球

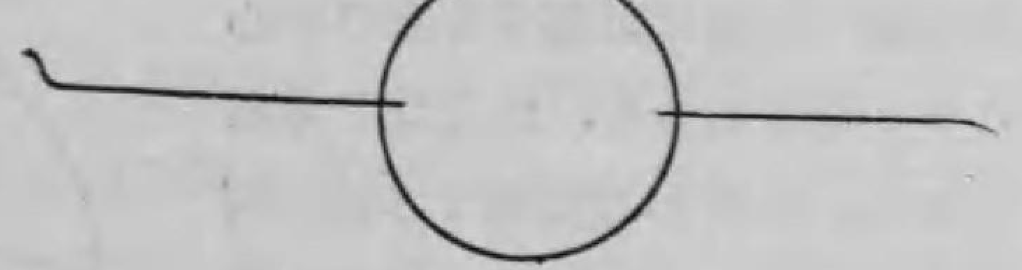
§ 203. 球。

毬のやうに眞丸き形を球と云ふ。

實驗一。古ハガキを圓形に切り, 其一つの直徑を引き, 第二百一圖のやうに其兩端から五分位の所に絲を通し, 其兩端を兩手の食指と拇指で引き張り絲をよつて圓を速に廻轉させると丁度白い毬のやうに見える。之によつて次の事が知られる。

圓の一つの直徑を軸として之を囘轉すると球が出來る。

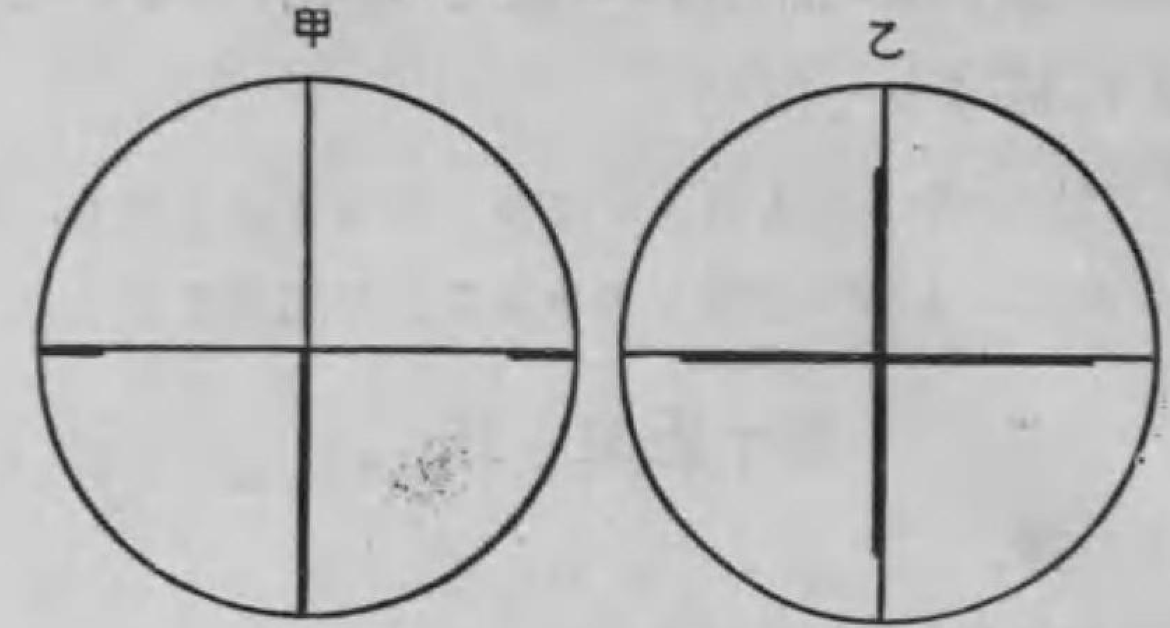
第二百一圖



此事は次の實驗によつて更に明瞭に會得することが出來る。

實驗二。厚紙で同一の徑の圓三つを切り抜き, 其各に互に垂直なる直徑を引く。次に其二つは第二百二圖甲に示すやうに, 一つの半徑と他の直徑の兩端を一糎計り切り開いて間隙を作る。又他の一つの圓は同圖乙のやうに其二つの直徑の各の兩端一糎計りを殘し他の部分を切り開いて間隙を作る。但し此隙の幅は紙の厚さ丈なければならぬ。そこで甲の中の一枚を取り乙に組み合し, 更に之に甲の他の一枚を組み合すと第二百三圖のやう

第二百二圖



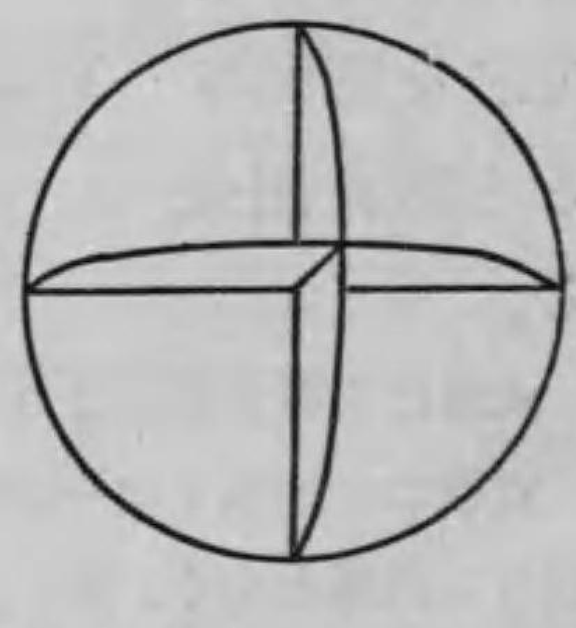
にすることが出來る。但しかくするには紙の尖端を折らぬやうに曲げねばならぬ。

此模型は廻轉する圓の二つの位置を示したもので，第三の圓はたゞ之を支へる爲めである。

§ 204. 球の各部の名稱。

第二百三圖の模型に於て三つの圓の交つた點は廻轉する圓の中心に當る點であつて，之を球の**中心**と云ふ。此點から囘轉する圓の周までの長さは一定である。從て球の中心から其面までの距離は一定である。之を球の**半徑**と云ふ。其二倍を球の**直徑**と云ふ。

第二百三圖



注意。第二百三圖に示す模型を用ふるときは，地球の赤道極，地軸子午線等を明かに說明することが出來る。

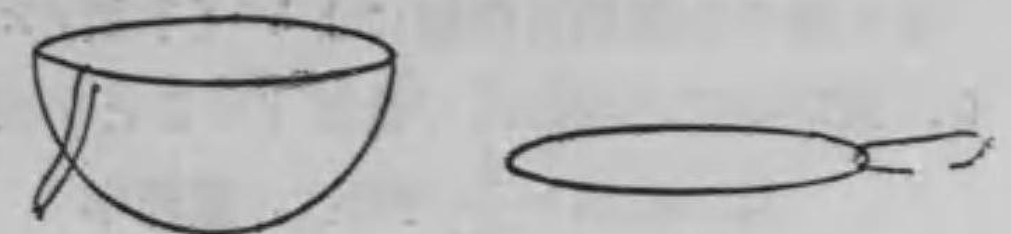
§ 205. 球の表面積。

實驗。銅にて*(或は紙をはつて)一樣な厚さを有する中空の

* 花火に用ふる打上げのたまも之に利用することが出來る。

半球二つと，これと同質で同じ厚さで且直徑の等しい圓板とを作り§134に用ひた秤を以て圓板と空球の重さを比較してみると，空球の重さは略圓板の重さの四倍あることがわかる。さて此空球と圓板とは同質で同じ厚さに作つてあるから，一方の目方が四倍あるならば，其面積も四倍であらねばならぬ。之によつて次の事が知れる。

第二百四圖



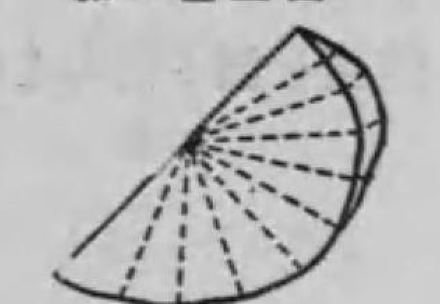
球の表面積は之と等徑の圓の面積の四倍である。

圓の面積は §133 よつて求めることが出來る故，之によつて球の面積を求めることが出來る。

§ 206. 球の體積。

實驗一。林檎のやうな果物を其一つの直徑を通る平面により二つに切り，更に其直徑を通る平面によつて切り第二百五圖の如く蜜柑の房のやうな形に切り，更に球の中心に當る點を通る平面にて二つに切り，更に又各を其點を通る平面にて切り，同樣にして次第に小さく切ると，球の中心を頂點とし球面を底面とする角錐が出來る。其各の角錐の體積は底面積と高さ（即球の半徑）との積の三分の一である。球は是等の角錐の集まつて出來たものであるから，之によつて次の事が知られる。

第二百五圖



球の體積は其表面積と半徑との積の三分の一

である。

さて球の表面積は前節により $(半徑)^2\times圓周率\times4$ であるから，球の體積は次の式で計算することが出來る。

$$球の體積=\frac{4}{3}(半徑)^3\times圓周率$$

實驗二。 同質の木で球と圓壔とを作る。但し圓壔の底面の直徑及び高さは共に球の直徑に等しくする。其二つの目方を§134に說明した天秤を用ひて比較してみると，球は圓壔の三分の二であることが知られる。

さて直圓壔の體積は

$$底面積\times高さ$$

である。然るに底面積は $(半徑)^2\times圓周率$ なる故，此式は

$$(半徑)^2\times圓周率\times高さ$$

となる。然るに高さは底面の半徑の二倍なる故

$$(半徑)^2\times圓周率\times半徑\times2$$

となる。故に

$$球の體積=\frac{4}{3}\times(半徑)^3\times圓周率$$

となる。

實驗三。 §174の方法により木製の球の直徑を測り上の公式によりて體積を計算し，次に §175 の方法により水中に入れて其體積を測り前のものと比較せよ。

大正十四年六月十日印刷
大正十四年六月二十日發行

新主義數學を基調とせる
空間教材の取扱

著作權所有

定價 貳圓五拾錢

著作者 佐藤充
著作者 中野恭一
發行者 目黑甚七
東京市京橋區南傳馬町二ノ五
印刷者 渡邊一郎
東京市神田區三崎町三ノ一
印刷所 株式會社明章印刷所
東京市神田區三崎町三ノ一

發行所

東京市京橋區南傳馬町二丁目五番地
新潟縣長岡市表四の町（本店）
新潟市古町七番町（支店）

目黑書店

（東京） 電話銀座五六八四番 振替東京二八〇九番
（長岡） 電話長岡一八番 振替東京三九一九番
（新潟） 電話新潟九〇三番 振替長野四〇九〇番

終