樂亭贈于國難中之行都

甚、四八

農業研究統計法

APPLICATION OF STATISTICAL METHODS TO AGRICULTURAL RESEARCH

洛　夫　著

前實業部農業顧問，中央農業實驗所總技師
美國康乃爾大學作物育種學教授

沈　驪　英　譯

中華教育文化基金董事會編譯委員會
實業部中央農業實驗所　編輯

商　務　印　書　館　發　行

此書獻給中國學者之對於
本題有深切興趣而提倡統
計分析來解釋其試驗結果者

序

作者曾受中美兩國聘任教授生物統計學有年，當執教時，各地學者以其試驗結果，商請指導分析者頗多。數年以來，深感有關統計分析之基本問題，實有蒐集材料另成專書之必要。書中并宜將試驗機誤之意義及變異數分析之方法，盡行編入，庶讀者可應用之以自行分析其結果。

關於統計學之書籍——普通教本或專門論著——世間已不乏良本，惟欲求一書能將各種計算方法，如變異之測量，相關之計算，曲線之配合，機誤之意義，以及變異數之分析等，能盡數收入者，似尚未見。作者有鑒於此，特編著此書，而尤注意於公式之如何應用，與結果之如何解釋，而略其公式之演化與引申。再各種方法之應用，以農業爲對象，故所舉例題，亦多取材於農業研究之結果，惟統計方法，大抵大同小異，本書所敍述之方法，任何統計資料皆得適用之也。作者又鑒於小區試驗技術之重要，於本書末章，將有關各點特作簡要之論述。

本書之得編成問世，全賴中華教育文化基金董事會及中央農業實驗所之資助，作者於此，特表示謝忱。此書脫成，復承中央農業實驗所沈驪英技正爲之譯成中文。作者對於沈先生之謹愼譯述及有益建議亦深感慰。

本書所用材料及圖表，有向各處搜集而來者，除將原著作人姓名於

書中隨時提明外，特於此處再致謝意。舒乃特教授(Professor George W. Snedecor)及立佛馬博士(Dr. J. R. Livermore)所擬之表，均極名貴，(見附錄表 IX，表 X，及表 XI)今承兩氏慷慨讓用，尤爲感佩。再本書原稿大部份曾經韋適博士(Dr. J. Wishart)加以閱讀，並作有價值之批評及建議，皆爲作者所感幸者也。

裴海女士(Miss Frances Feehan)對於作者之著成此書，頗多有力之襄助。苟無女士之始終協助，則此書之成，恐難實現，故作者尤表示深切之謝忱。

書中掛漏與遺誤，作者雖竭力避免，恐仍難免，尤望讀者加以指正，實所感幸。

洛夫

一九三四年八月

目　錄

附表目錄

農業研究統計法

第一章

緒言

近數年來，學者對於研究工作之推論，頗有一改以前專重觀察之習風，而漸趨於歸納整理，系統分析之趨向。以前之研究工作，因乏系統分析，故其記載，除作者外，他人頗難了解。即統計學（statistics）及用統計分析（statistical analysis）等方法，在往年因贊助者少，故用之不廣。至晚近經學者將統計方法一再修改，其法乃較簡單而合實用，雖算學並無深造之人，亦能採用裕如，其應用乃得日廣。

以前統計學每被認爲一種專門學科，問津者鮮，自方法改成簡單合用以後，遂成爲分析試驗結果之重要工具。此種心理上改變與統計學迅速發展之原因，固半由於學者之切實研究，亦半由於統計學本身之重要，能爲工作者所重視也。現今舉凡一切有關生物，農業，社會，教育，心理，經濟等研究結果，在在需用統計方法來作有系統之整理，將原有記載，條分縷析，使成爲一種簡明之報告也。統計學之應用既日廣，研究之者乃日多，方法改善，日見進步，而新書之出版乃遍見市場矣。

用統計方法來分析研究結果，其進展固速，然流弊亦因之滋生，蓋初用是法者，每誤認爲用數學分析，可糾正試驗中之一切缺點，其實無論如何準確之試驗，總不能完全無錯，而無論如何精密之試驗分析，總不能若資料本身之可靠。

蒐集材料 (Collection of Data)——蒐集材料宜從能代表全體實情之大量材料入手，若僅就一隅，採取樣品 (sample)，而此一隅之材料，又與大體情形不同，則所得結果，便不可靠。故蒐集材料，不可先存成見，譬如研究城中兒童之健康狀況，既不宜專從城市富庶之區，或上等家庭中搜集材料，亦不可單就窮苦人家或工人住處採取情形，宜將全城市各種環境下之兒童健康，通盤調查，此種結果方足以代表全城兒童之健康狀況。

又如研究某類商人之收入，其取材亦不宜集中於城內一二繁盛市區，而須分向各街市中能代表全城商情之各小店鋪中蒐集之。又若爲研究小麥品種之異同，往田間採集麥穗，即宜在全田之中，隨意採取，而不宜在田之一隅，盡量收集，此種在全田中隨意採拾之取樣法，名之曰隨機抽樣 (random sample)。

隨機抽樣 (Radom Sample)——所謂隨機抽樣者，乃在蒐集樣子時，純由隨意採取，而無選擇好惡之謂。選取之材料，除一二不能代表全體之特殊樣子，宜即棄去外，其餘材料，不可隨意取捨。例如採集小麥材料，採集者若先估計全田麥株之高低，根據其所估計每種採集若干，則所得樣本，即非隨機，不能合用。採取麥株者宜自田之甲端，穿過全田直走至田之乙端，於一行內，隨意採取十株或二十株，除受傷者不採外，

其餘可不論其生長之優劣，均行採取。如所採得之數量或嫌過多時，則可將田間所取之樣本，混合放置，而再於每十株中抽取一株，則數量減少，而取樣仍係隨機。

又若研究某城市中男子之身長，欲隨機抽樣時，若此城原有戶册可稽，可就册內每十名或五十名中抽取一人爲代表，其抽取人數，可依照人口之多寡與所需研究之數量而定。否則不用戶册卽在數處熱鬧街市中於每十人或二十人中測量一人亦可。惟不宜於例假日行之，因例假日有某種人將不見諸熱鬧市場，而平時不常見之人此時反增多故也。總之，取樣範圍宜普遍，次數宜多，取法則以隨意而非有意挑選爲原則。

材料之測量與記載 (Measuring and Recording Data)——所蒐集之材料，須於詳細測量後，列表以示其結果。此步工作以力求精細爲要則。蓋無論觀察或測量，第一須求精確。如測量有誤，則雖用精密方法加以分析，亦無濟於事。爲欲減少觀察或測量時之錯誤起見，測量所用之器具尤須準確可靠，若量器不準，每一記錄，皆有錯誤，則影響於試驗結果必大。

所觀察或測量之數，雖每有無從校對者，惟從事工作之人，仍須愼重將事，切不可因其無從校對，卽疏忽了事。又在可能範圍內，所有記錄總以經過校對手續爲妥，例如秤量試驗材料之重量時，可以兩人合作，一人任秤重，一人任記錄，至完全秤畢，乃使兩人對調，將材料完全複秤一次，以校正其錯誤，較爲妥善。

用天秤秤材料時，砝碼累次上下掉換移動，亦易惹起錯誤，故宜設法避免。譬如用砝碼計數之小號天秤來秤重時，可先將此天秤所用各砝

碼之克數如五百克二百克一百克等，一一先記在另紙上，並將各砝碼一一放好，例如二百克之砝碼放於紙上書有二百克處，一百克之砝碼置於紙上寫有一百克處等，然後將物秤重，將紙上已放置之砝碼、選擇移置於秤盤中，其過重過輕不合用者，仍還置於紙上各砝碼原有地位，如此秤物既畢，祇須將紙上無砝碼放置者之各克數相加，再加天秤桿上所示數目，卽得物之全重量，用此法秤物可以一覽便知，且可減少錯誤。

總之試驗爲重要工作，從事者對於材料之採集，測量，與記載，均須小心謹慎，力求減少錯誤與準確，所記錄之數字亦宜楷寫清楚。例如 3 與 5；7 與 9 等數字，往往因楷寫草率，以致難以分別，誠宜特別留心。

當測量或秤重時，小數須讀至幾位爲止，亦爲試驗上應加注意之一端，不過此事須視測量之材料及目的而定，難以一律規定。若僅秤數百株小麥之重量而求其平均數時，則僅秤至克數已足，克數以下之小數，可不必注意。

若係此種材料，可在秤重時卽行分組排列，較一一秤好，而後分組者爲節省時間。分組之方法，當在第二章內詳細論述。組數已經分好，則秤重時可將全組之重量，一起排列，而尾數或小數不必注意。因若以 1.00 至 1.99 爲一組，則無論其爲 1.2 或 1.9 總在此一組內也，若遇二組數目之交界點，則秤重者須特別注意，因若係 1.91 宜屬於 1.00——1.99 之一組，若係 2.00 則屬於下一組矣。

結果之分析 (Calculation of Results)——分析計算結果，宜力求準確。試驗者對於計算步驟，校對方針，須先行規定，俾同事者有所遵循，所得結果，易趨一致。小數點以下數字應算至幾位爲止，常因不預先決

定，各自爲謀，致結果多參差者。故何位應去，何位應留，于其事者，應預先決定法則。例如若得一數爲 4.235，而規定小數僅爲二位時，則宜去五進一成爲 4.24，抑逕去五成爲 4.23，此種標準，均宜預先決定，俾計算者得有所遵行，而結果易於校對與比較也。在開方與乘方時，其小數位數每易被人忽略，而惹起錯誤，計算者亦宜特別留心。譬如規定答數之小數點須算至二位止，則方根內之小數應有四位，如答數爲三位時，則方根內小數應有六位等。倘規定開方後各數須一律留小數位三位，但方根內小數位如僅算至四位爲止，則開方後答數祇有小數二位，較規定者少一位，與其他各數相加減或作他項計算時，結算便不一致，故小數位數，當十分注意，須完全一致。

結果之解釋 (Interpretation of Results) ——統計分析之最要關鍵，在解釋得當。同一統計結果，因解釋不同，所指示之意義，便完全相反，此常由於解釋結果者，僅注意於一部分之統計，而忽於全部分之事實所致。有數種重要因子，雖明明存在，而解釋者卻未注意。喬達克氏 (Chaddock) 之解釋吸煙者與成績不佳者之相關結果，頗可用來引證此種專顧局部統計而忽於其他現象者所造成之錯誤。喬氏所根據之資料，爲大學生吸煙與不吸煙者之成績報告，玆將其結果列表如下：

	不吸煙者	稍有煙癖者	煙癖頗大者
人數	111	35	18
一年平均成績	85.2%	73.3%	59.7%
失敗的比例	3.2%	14.1%	24.1%

照表中數字觀之，不吸煙者之成績，確較優於吸煙者，然則造成此種現象之原因，其果在煙之本身乎？校中好吸煙之學生，往往即愛好交

際者，平時對於功課，本不注意，成績自差，又或入校本意，不在求學，而在求娛樂，功課既不關心，成績自較低下，是則吸煙者成績不佳之原因，除煙之本身外，明明尚有其他關係存在。故在解釋此種結果時，宜將所有可以影響於成績之原因，細細推究，而不宜武斷卽謂凡吸煙者成績皆不佳也。此類專信統計數字而不加詳細考慮，有關因子雖存在，仍隱沒不見，致所論斷之結果，每似是而實非，此種弊病，學者宜注意避免之也。此外尚有一種常易發生之危險，卽爲專信數字，而忽略實際情形。蓋缺少經驗或初用統計之人，每易被數字所蒙蔽，誤認統計法術可以將試驗結果超過實在，卽其所下論斷，與常識不符，亦每不以爲怪。故過於信託統計分析，而忽於日常現象者，常有引入歧途之危險。若試驗結果具有超出尋常之特殊現象，吾等當然不宜爲常識所拘束，而毫不注意。總之論斷一事，須學理與事實兼顧，俾學術上新表現之事實，不致忽視，而數學造成的不近實情之錯誤，亦不致被認爲眞理，而引入歧途。故凡經解釋之結果，須事前詳細考慮，確屬認爲合理無疑後方可發表。

誤用百分數所造成之謬訛解釋，亦爲常有之事，今以下列兩種整地法所得結果以證明之。

A	B	B 優於 A	優越百分數
4.7	9.8	5.1	108.51
7.1	12.8	5.7	80.28
25.0	28.4	3.4	13.60
11.7	20.9	9.2	78.63
16.0	23.8	7.8	48.75
6.2	15.5	9.3	150.00
70.7	111.2	40.5	479.77

第一列A各數係在秋間耕地後種植之結果，第二列B係在春夏休閒地所種之結果，第三列爲B勝過A之產量，第四列爲超過產量之百分數，其算法係將B超過A之產量，以同行A產量相除，而以 100 乘之。所得之六百個分數相加，而以試驗行數 6 除之，得平均百分數爲 79.96，此數即爲B產量多於A產量之平均百分數。

其實此種平均百分法之結果，在算術上確係錯誤，上列例題之正確算法，應先將A品種與B品種之平均產量，分別求出，計A爲 11.78，B爲 18.53，兩者之相差爲 6.75，以此數被A之平均產量 11.78 除之，而以 100 乘之，得相差百分數爲 57.30%，此數始爲B超過A之正確百分數。此例引證誤用平均百分數之危險，史蒂頓脫氏 (Student) 曾謂：百分數須謹慎用之，因彼常爲虛僞之母也。

總之學者對於結果之解釋，須數學分析與常識兼顧並用，初學者對此，尤當注意。因初學者每易太信任統計，而忽略常識，統計之分析，與明晰正確之判斷，常須相輔而行，吾等總不宜略存偏見，以爲試驗結果，全靠精密之數學來解決，而置實際情形與理智之判斷於不顧也。

第　二　章

次數分配

frequency tabulation

誠如上章所述，凡用統計方法來分析試驗結果時，其所度量或記載之個體數目宜大，則分析結果，始爲可靠。換言之，即所測驗之數，須能代表所研究材料之實在情形。今若測度或記錄一大量數目，如數百或逾千之類，倘不加以整理，頗難瞭解其眞實性質。蓋將所有散漫材料，分別個體研究，則終難窺見其整個現象，而得任何結果。若將此散漫而鉅大之數目加以整理，使閱者一目了然，則數分鐘內即可瞭解所記數字之大意矣，整理材料之最簡便方法，爲將所集資料，按組 (class) 或按羣 (group) 排列。組或羣之大小可照所測驗材料之性質而定。組值旣定，次數即可依次填入，此種將試驗材料用分羣或分組來整理之法，名曰次數分配。

組目及組距 (Number of Classes and Class Range or Interval.)——當計算次數分配時，其先決問題，爲組目之多少，及組距之長短。

關於組目之多少，頗難預定。蓋組目本爲一假定數，因所用材料不同，性質各異，所定組目之多少，亦當隨之變異，故不能預爲決定。例如欲數毛莨茶 common buttercup (Ranunculus bulbosus)之花瓣，因花瓣

數目之差，僅五瓣至十瓣，故所分組目，不必過大。若計算野菊花 common field daisy (Chrysanthemum leucanthemum) 之花瓣時，因其瓣數多寡不一，差異較大（見表十一）故組目必須增多。若當增不增，而將數個不同之組別併集在一處，則重要之生物現象，每致隱藏不顯。若分配數目係用衡量二法所得者，如計算每株植物之種籽量等，可將相差不遠之數目，歸併爲一類，不必一數一組也。普通組數爲十組至二十組，至必要時組數既可增加亦得減少。例如小麥之種植於勻整之環境下者，計算每株之麥桿時，分組至八組或十組已夠。又若計算單穗之籽粒時，其所分組數，亦不必多。故云組目之多少，大致隨材料之性質而定，總之所定組目，以適當爲要，俾各數得散佈勻整，固不宜太多，致失眞相，亦不宜太少，致材料之重要性質不易顯出。

組距之長短隨組目之多少而定。在決定組距時，組限 (class limit) 之低限 (lower limit) 與高限 (upper limit) 及組距中點 (mid-point) 皆須注意，俾免將一組之數目平分爲兩段而不知中點何在之弊。中點本身，既不屬於第一段，亦不屬於第二段，乃第一及第二兩段並分之中間一點。定組距時，須注意此中點之易否指定，亦即一組內所包括之數目，能否覓得一確定之中點。

若次數分配表內之數目，係由計數而得者，——如數種籽——則所定組限，以能使中點數爲整數者爲宜。例如組限 1–5, 6–10, 11–15, 等，中點數當爲 3, 8, 13等。

若所用材料，係得自衡量者，亦可照上法行之。惟衡量所得之數，不若點數所得者之易於明白。故在定組距時，尤須注意組距中點之易否指

定。此層若從幾何方面來推想，（卽注意空間之段落）較從算學方面着想（專重數字）易於明瞭。今設有一組距，其低限爲“1”，高限爲“5”，今以之列成一直線

則可一望而知其組距中點爲3。因由低限“1”至中點“3”，其中相隔爲兩段——“1”至“2”爲一段，“2”至“3”爲另一段——再從中點“3”數至高限“5”，其中相隔亦爲兩段——“3”至“4”爲一段，“4”至“5”爲另一段。

今設以尺量物，而將其結果，排列成組，有數個單位之長度僅 0.1 或 0.3 公分，有數個則長至 15 或 20 公分。分組時可將 0.0 至 2.0 公分之個數，歸入第一組。此組之低限爲 0.0 高限爲 1. ，而非 2.0，或逕稱爲 1.999+，較爲準確。凡謂組距爲 0.0 至 1.999+者，卽指長度之小於 2 公分而非等於 2 公分者皆列入此組。其組距中點當爲 1.0 公分。第二組之低限，當爲 2.0 公分，高限則爲3.999+，此組可包括等於 2.0 公分或超過 2.0 公分，而少於 4.0 公分之個數。組距中點當爲 3.0 公分，其他各組照此類推。凡在決定組距及中點時所宜注意者，非僅高低兩限之數目字，乃一組內所能包括之各個數目，今若將上述組距，排列成一直線：——

0.0　.5　1.0　1.5　2.0　2.5　3.0　3.5　4.0

則第一組爲 0.0 至 1.999+，而非 0.0 至 2.00， 2.00 當屬於第二組，第一組之組距中點當爲 1.0。

自低限 0.0 公分至中點 1.0 公分，中間相隔爲兩段——0.0 至

0.499＋ 爲一段，0.5 至 0.99＋ 爲又一段。再從中點 1.0 公分至高限 1.99＋ 公分，中間相隔亦爲兩段——1.01 至 1.49＋ 爲一段，1.50 至 1.99＋ 爲另一段。下一組之中點，可用同一方法推定之。總之定組距中點時，須注意自低限至中點，及中點至高限兩大段中所包括之距離是否相等。

今將上述記分排列成組，各組之高低兩限當爲 0.0－1.9，2.0－3.9，4.0－5.9——。若上述記分，由衡重而得，其組距決定爲 3 克時，其組限當爲 0.0－2.9 克，3.0－5.9克，6.0－8.9克……。

組間距離一經決定，當各組一律，若第一組之組距爲 5，其他各組之組距，亦當爲 5，非至必不得已時，不宜更易，此點當在下章詳細引證。若有特殊情形，低限或高限，須略更動時，當詳細註明。

次數分配表之記法 (Making a Frequency Distribution) —— 次數分配表之記法，當用下列第一表內產量記錄來說明之。

表 1. 乙百區黃豆產量記錄（克）

江蘇徐州　　一九三三年

230	448	239	344	214	274	229	292	200	312
291	328	268	369	225	309	242	261	286	329
290	274	310	317	275	330	218	306	249	393
273	309	234	265	305	304	252	223	310	271
292	295	313	192	269	216	274	217	306	290
297	375	264	239	216	300	262	236	268	318
256	336	276	342	237	257	340	241	250	318
246	312	327	310	269	241	302	235	268	240
258	279	335	211	152	235	233	216	229	283
312	246	318	186	305	223	283	217	350	297

表1所列爲江蘇徐州在一九三三年所種一百區黃豆之產量，排列次數分配表之第一步手續，爲決定組目及組限，普通先從產量記錄求總組距，再從總組距決定組數，由組數而定組距。此表所載之最低產量爲152 克，最高產量爲 448 克，兩者之差爲 296 克，卽爲總組距。若以30 除 296 克，得商數爲 9，餘數爲 26，故 296 約爲 30 之 10 倍。將記錄內之個體數目，分爲十組時，可將所有大小個數，皆包括在內，又若296 被 25 除之，可分爲十二或十三組，今若決將所有產量記錄，分爲十三組，則除數 25，卽爲每組之組距。

組距既定，卽可決定每組之低限，此點與中點有關，故在決定低限時，須注意中點之易否確定。普通先定第一組之低限，俾所定中點或組值，與列入該組內之產量記數，相差不遠，照第一表上之產量記錄，第一組之低限當爲 140.0 克，組距既爲 25，則其高限當爲 164.9+。在列表時 164.9 後之符號"+"，可以省去，蓋組距既爲 140.0－164.9，則凡重量之等於或重於 140 克，而輕於 165 克者，皆屬此組。第二組當爲165.0－189.9，第三組則爲 190.0－214.9 克，依次排下，至將所有個數之記分完全列入爲止。查第一表之產量記錄，最重者爲 448 克，故末一組當爲 440.0－464.9，至此組方能將產量 448 克包括在內，參看表二。

組値既定，卽可將各個數之記分，按組記入。第一表所載產量記錄，第一行爲 230 克，此數當列入 215.0－239.9 之一組內。第二行爲 291克，當列入 290.0－314.9 之一組內。如此逐一記限，直至將各個記數完全記入爲止。最簡便之方法係用符號記數，觀第二表第四組以"/"代表次數，至四個"/"後，在"////"中加一橫劃，成"~~////~~"，卽爲記

數五次之符號。以此法記數較易明白。第一表所載黃豆產量記錄，照此法分列於第二表內：

表 2.

表 1 之次數分配

V 組 距		f 次 數
140.0-164.9	/	1
165.0-189.9	/	1
190.0-214.9	////	4
215.0-239.9	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	20
240.0-264.9	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
265.0-289.9	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	17
290.0-314.9	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	23
315.0-339.9	~~////~~ ~~////~~ /	11
340.0-364.9	////	4
365.0-389.9	//	2
390.0-414.9	/	1
415.0-439.9		0
440.0-464.9	/	1
		100

此表之組距為 140.0—164.9 克；165.0—189.9 克；190.0—214.9 克……而非 140—165 克；165—190 克；190—215 克……。惟其如此，故其記分應列入何組，頗易定斷。若第一組末為 165.0 克，第二組開始又為 165 克，則若遇 165 克之記分，究竟應列入第一組抑第二組，頗難決定。

列表時之符號，普通以大寫之V字代表組或組值(classes or class value)同時V亦卽爲一組之組距中點。各組之記分次數，普通以f代表之。個數之總數，則以N代表之。

在記錄次數時，務須注意所記次數，有否誤塡他組之弊。上述記數法，頗難在原表內校對，祇能另列一表以比較兩表之結果，是否相同。若相同則知無訛。若兩表不相同，當求出不同之點，究在何組，然後重做第三表來校對之，務必求至兩表之各組次數及總數皆相同，始準確可用。若數目過鉅，用上法記數，仍易弄錯，且有時所度量或記載者，常非一物之一個性狀，而爲一物之數個性狀，若以數個性狀同時記入次數分配表內，極易弄錯，若用卡片分別記載，則一物一片，較易明白。

或謂由記錄簿而謄入卡片，由卡片而錄入次數分配表，一再謄寫，徒費時間。其實吾人在研究三四個性狀時，爲試驗之準確計，與工作效率計，所費於謄抄之時間與人工，實不可省。且記載性狀之卡片，又可爲記錄之副本，蓋卡片上之記錄，經詳細校對後，卽可爲研究時檢閱之用。記錄原本——散頁或册頁——可妥爲收藏，以備不時之虞。

今舉例以明卡片之用法。例有一試驗，須將每個作物之八種性狀，逐一研究如下：

1. 株之高度（公分）	69.8
2. 每株之桿數	3
3. 每桿平均小穗數	34
4. 每株籽粒總數	157
5. 每穗平均粒數	52

6. 每株籽粒之總重量（克）　2.571

7. 每穗籽粒之平均產量（克）　0.857

8. 每一籽粒之平均重量（瓱）　16.376

或以爲先將性狀項目印在卡片上，較爲方便。其實此法亦不甚妥，因性狀項目，常有更改，故以空白卡片抄寫較宜。若爲節省時間計，性狀項目，不妨以號碼代之，而另寫一號碼及性狀項目對照表，以便檢閱。有時連號碼亦不必抄寫，祇須將各項所得之數目，照對照表上之次序，依次記錄卽可。所用卡片以易於檢閱爲宜，不宜太大，凡大小在三英吋乘五英吋者已夠用。卡片紙張，不宜太薄，普通圖書館內所用卡片或略薄者皆合用。

茲將卡片記錄式樣附下：

$\frac{1}{69.8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{34}$	$\frac{4}{157}$
$\frac{5}{52}$	$\frac{6}{2.571}$	$\frac{7}{.857}$	$\frac{8}{16.376}$

研究材料，逐項記畢，乃將各張卡片上之第一項記數，或第一個性狀例如株之高度，照其數目之大小，依次排列，其方法與上述次數分配法同。組數及組距決定後，可將同組之卡片，理在一起，或置於盤中，以小紙標明其組距爲記錄時檢點之用。苟分類略具經驗者，卽不用小盤亦可。

所有卡片，完全分好，方將第一個性狀之各組數目，依次填入分配

表內，並與卡片數目，逐一校對，有否錯誤。例如校對至 215.0－239.9 之一組時，見一卡片上所載數目，不屬此組，卽須檢出，而併入應屬之一組。照此按組校對，則記數旣易，錯誤亦少。校對完畢，將分好之卡片，用橡皮圈紮在一起，爲參考之用。至記錄第二個性狀之次數分配時，可將卡片重新分過，照法記錄而校對之。

次數分配之型類(Types of Frequency Distributions)——列次數分配表時因所觀察之材料不同，故狀態各異。最普通者爲對稱分配(symmetrical distribution)。今試以擲銅圓之結果，圖示對稱分配於後。銅圓之一面爲字，一面爲圖，今以銅圓八枚連擲數十百次而記錄其沿見字面之次數。擲得結果有時全見字面，有時全見圖面，有時圖字參半。所成立之分配表，有字與無字之次數常相彷彿。字圖各半之次數，常佔最多數，適成一常態曲線 (normal curve) 見表 3。

表 3.

擲八枚銅圓二千次之次數分配表

字面個數	字面次數	二項開展之結果
0	11	7.8125
1	62	62.5000
2	196	218.7500
3	421	437.5000
4	574	546.8750
5	467	437.5000
6	203	218.7500
7	55	62.5000
8	11	7.8125
	2,000	2,000.0000

本表所示之次數分配，乃類似常態型或對稱型 (normal or symmetrical type) 之分配，而頗與用二項展開式 $2,000(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{8}$ 所得之結果相彷彿。換言之，凡常態分配，可由二項式展開而得。

另一種常態曲線舉例，係從余爾氏 (Yule) 之英格蘭，蘇格蘭，韋爾斯及愛爾蘭八千五百八十五個國民高度記錄中做出，其次數分配見表4。

表 4.

余爾氏之英國蘇格蘭，韋爾斯及愛爾蘭各地人民高度(吋)分配表

除去鞋之高度(吋)	次數
57	2
58	4
59	14
60	41
61	83
62	169
63	394
64	669
65	990
66	1,223
67	1,329
68	1,230
69	1,063
70	646
71	392
72	202
73	79
74	32
75	16
76	5
77	2
	8,585

凡有關生物之統計，其結果常難整齊一致，若列成分配表時常成不對稱分配或偏斜分配 (asymmetrical or skew distribution)。其次數之分配，不若對稱分配之逐漸增高至中間的高峯 (Middle Value) 而復漸次下降，每在一邊遞升極慢，而在另一邊則又下降極快，致成兩邊不相稱的偏斜狀態，此種不整齊形態之次數分配頗普通，其不整齊之程度有時極顯著，有時則僅稍有傾向而已。

表5爲四百株燕麥之高度分配表，組距爲五公分。分配率不若第三表及第四表之整齊，故所成之次數分配表，是不對稱的 (assymetrical)。

表 5.

四百株燕麥之高度（公分）分配表

株之高度	次數
45.0-49.9	2
50.0-54.9	9
55.0-59.9	20
60.0-64.9	35
65.0-69.9	91
70.0-74.9	125
75.0-79.9	91
80.0-84.9	26
85.0-89.9	0
90.0-94.9	1
	400

表6爲另一種不對稱分配表。表中所列爲四百株燕麥之籽粒重量，其分配次數之遞增速度，自第一組起至第三組 (2.00—2.99克) 極速，至第三組後，速度驟減。第四組之次數，僅較第三組略略增加。第四組後次數遞減極速。

表 6

四百株燕麥籽粒重量（克）分配表

重 量(克)	次 數
.00- .99	3
1.00-1.99	50
2.00-2.99	106
3.00-3.99	109
4.00-4.99	80
5.00-5.99	42
6.00-6.99	7
7.00-7.99	2
8.00-8.99	1
	400

表 7 爲一兩端極不相等之次數分配表。此爲五百株燕麥之籽粒重量統計。其次數遞增之速度，較表 6 尤快，至第二組次數已達最多數，第二組之後，次數乃逐漸減少。

表 7.

五百株燕麥籽粒重量（克）分配表

重 量(克)	次 數
.00- 1.99	87
2.00- 3.99	192
4.00- 5.99	128
6.00- 7.99	71
8.00- 9.99	12
10.00-11.99	7
12.00-13.99	3
	500

表8.爲另一種不對稱分配表，此爲五百株燕麥之麥桿統計。自第一組起，次數遞增極速，至第五組後，次數逐漸遞減。

表8.

五百株燕麥麥桿分配表

麥刺數	次數
1	13
2	50
3	115
4	198
5	64
6	31
7	19
8	7
9	2
10	0
11	1
	500

表9

白果闊花刺之次數分配表

花刺數	次數
5	449
6	187
7	66
8	12
9	4
10	1
	719

本表記錄取材於美國康乃爾大學教授弗來直氏。

表9係極度偏斜之分配型，此表爲白果閣(Aquilegia canadensis)之花刺分配，在此表內，第一組之次數最大，以後逐漸遞減，至第十組，次數僅爲1。此種狀態之分配，統稱爲J字式(J-type)分配表，以其狀態像一J字。

另有一種不對稱次數分配，其狀態像一U字，故統稱U字式(U-type)分配表。此種狀態，雖不常見，惟間亦有之。表10即爲此種狀態之分配表。表內所載，爲美國紐約伊色佳城之有雲日百分表。表上所載之結果，爲六年之平均統計，正月內之次數頗高，自二月起而至六月，次數逐漸遞減，七月起又復逐漸增高，至十二月而達最高度。

表10.

美國伊色佳城內有雲日數六年平均百分數

月份	有雲日之百分數
正月	69.3
二月	64.8
三月	61.0
四月	53.6
五月	42.8
六月	38.3
七月	40.0
八月	43.2
九月	47.0
十月	49.3
十一月	72.8
十二月	73.5

本表記錄係美國紐約伊色佳美國農部農業氣象研究所供給。

表 11. 在一定區域內於數個日期中數點野菊花花瓣之分配表

花 瓣 數	六月二十三日	六月二十七日	七 月 一 日
4			2
5		1	3
6	1	3	9
7	0	4	5
8	2	12	12
9	6	13	20
10	4	17	25
11	7	50	47
12	18	70	67
13	33	126	132
14	22	97	75
15	28	100	68
16	34	109	85
17	56	108	93
18	52	114	75
19	66	153	70
20	116	170	118
21	185	228	173
22	89	97	43
23	40	53	21
24	40	40	18
25	35	26	13
26	19	20	14
27	20	13	6
28	13	18	4
29	15	16	4
30	17	7	5
31	13	2	4
32	5	1	1
33	8	3	2
34	3	3	
35	1		
總 數	948	1,673	1,156

有種次數分配，非但不能兩端相等，且次數之遞增，頗不一致。其次數每增至一高峯後即下降，隨後復又增高，使成另一高峯。此種隨增隨減之次數，在一個分配表內，顯現數次，其次數視試驗材料之性質而異。此種有數個高峯之次數分配，在野菊花花瓣之差異中，可以看見。表 11 係在一定區域內，於數個日期中，數點野菊花上花瓣之統計。

表 11 之統計，其次數集中在兩個高峯上，一在 13 朵花，一在 21 朵花，此種不整齊的分配，上巳述過，不宜將數組歸併，致其生物現象不易顯現。若將表 11 之組數，每兩組併為一組，則最高次數，究在何花頗難決定，故在此種情形下，組數不宜歸併，以聽其自然為宜。

以上所舉例子，表示次數分配之各種型類，內包括對稱分配自常態型而至極度的分配偏斜型，若 J 字型與 U 字型等。吾人在整理統計材料時，因所分析之資料性質不同，所成之分配型態亦各不同。

第　三　章

圖　解

用圖表來表示統計數字，能使讀者對於所記載之事實或現象，一目了然。故圖解在統計上，佔重要地位。所用之圖，以不僅能表明事實，且能引起閱者之興趣爲要件。關於圖解之方法與應用之論著甚多，學者可取作參考，惟本書則因限於篇幅，僅就與本書有關係者，引證一二而已。

若材料簡單（如人之高度或穗之長度等），即以照片表示，固較簡易，惟事物略多，或情形略較複雜者，照像即不若圖解之合用。最簡單之圖示爲直線圖 (line diagram)，根據每一事物之長短大小，用長短直線來表示之，例如圖 1。

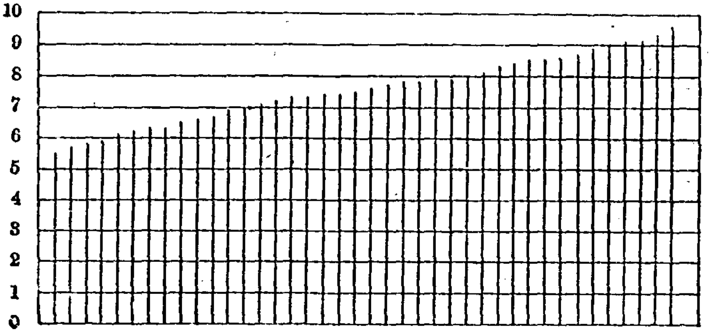


圖 1. 本圖表示 40 麥穗之長度

圖中所示者爲40個麥穗之長度，度數以公分計。直線示麥穗之長，其排列次序，則第一線示最短之穗，第二線稍長，餘遞增，故末一線表示最長一穗。有時不用直線而以點子(dot)示各穗之長短，諸點相連，成一弧形。此種圖解，名之曰累積曲線 (ogive)。惟此法在數量少時尙合用，若有數百穗之小麥，則此法即嫌繁瑣而不若其他方法之明晰矣。

另外一種圖示方法，係用闊條 (bar) 來表示物之長短，其用意與直線大致相同。所成之圖，名爲條圖 (bar diagram) 其勝於直線圖處，因條比線闊，故表示事實之情況，較爲明顯，易於注意，例如圖 2 。

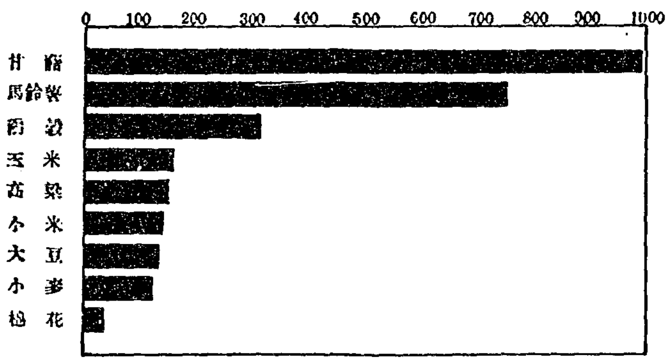


圖 2. 圖示中國數種重要作物之產量每畝斤數。取材於張心一在統計月刊第一號發表之文內。

圖中所示者爲中國數種重要作物每畝產量之斤數。各種長短不同之闊條，示各種產量之多少。條圖之優點，不僅如上述之表現明顯而已，且每一條子，可同時表示數種現象。例如此圖若加用一段空白，則可同時表示稻草與稻之產量，或籽花與皮花之產量。

若研究資料能用次數分配 (frequency distribution) (詳第二章) 來計算者，即可繪次數曲線 (frequency curve) 來表明之。次數曲線常能表示次數分配之實情，及其變動之趨向，較之純用數字表示者明白得多。吾人常對於數目字不甚明白，而對於圖示則頗能了解。

製次數曲線圖之普通方法，係將印就之公厘格上，劃好 x 軸與 y 軸 (x and y axes) 而將組值及次數註明於上。各組之組值，(用組限或組中點均可)。一一記在橫線即 x 軸之上，此即所謂橫線距離。(abscissal distances)。各組之次數，記在 x 軸之垂直線上，此線又名縱坐標 (ordinates)。 故一組內之次數，有時亦名之曰縱坐標值 (ordinate value)。茲以第二章第六表之資料，製一次數曲線圖如下：

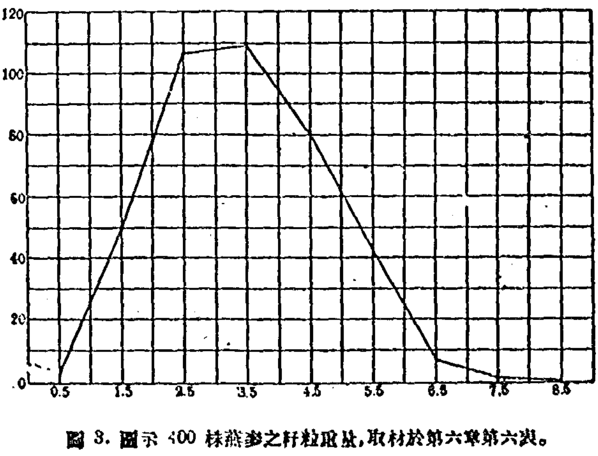


圖 3. 圖示 400 株燕麥之籽粒重量，取材於第六章第六表。

圖以橫線記組中點，直線記次數，任以每一格代表 10 個或 20 個，可照次數之多少而定。縱橫兩軸上之單位既已註明，即可自第一組起，

將組內次數，照縱坐標上之數目字，依次記入。例如第一組爲3，故在第一組與3之交叉處，劃一點。又第二組爲50，故第二點卽在第二組與50之交叉處。餘可類推。各點點好，以直線連之，卽成次數曲線，惟此種曲線，又名多邊次數圖（broken-line curve），因所表示者爲實在狀況之未經修勻者，此種製圖法，又名之爲加權的縱坐標製圖法（loaded or weighted ordinates）。

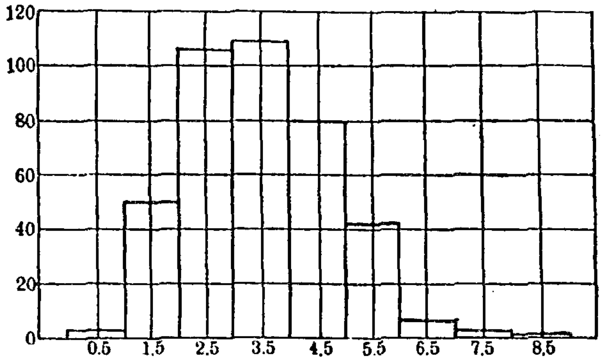


圖 4. 次數直方圖，取材與圖 3 同。

圖 4 表示同一資料所繪成之另一種次數圖，其名爲次數直方圖（histogram）。與圖3不同處，在各點不以一個直線連起，而以數個方形連成。法在第一組縱坐標上之一點，左右引伸一與底線並行之短線，此線通至鄰組之中點爲止。短線之兩邊，各畫一垂直線至底線，而成一直方形。

用製圖法以表示次數分配，究以何者爲宜，頗難規定。直方圖因直線太多，對於次數之集中，容有過分表現之弊。若將直線圖修正，而僅在

短線之一邊，畫一直線，則次數分配之現象，較上圖易於明瞭。茲仍用原來資料，製圖 5 以資比較。

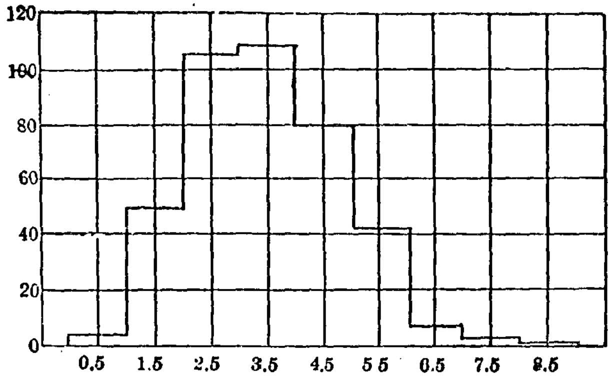


圖 5. 用同一資料所製成之缺一內直線之直方圖

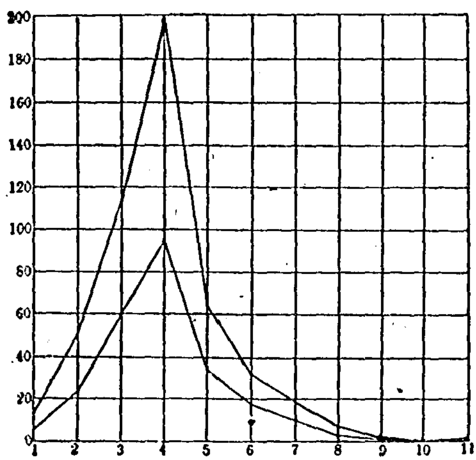


圖 6. 圖示 500 株燕麥株桿數

上圖示 500 株之全數，下圖示 500 株之中數，取材於本書第二章第八表。

圖 5 各點與圖 4 同，惟每一長方形省去一垂線耳。此圖因直線減少，故較圖 4 為清晰。

在同一圖上，有時有製數個曲線之必要。卽觀察之次數不同，仍可依照上法，將每組次數，分別記在圖上，而以直線連之。今將兩種次數分配做在一張圖上如上。

此二圖因所用之個數不同，故所圖示之兩線關係，不甚明白。今若將每組次數，以百分數表示，而後製圖，或可得較為明瞭之印象。

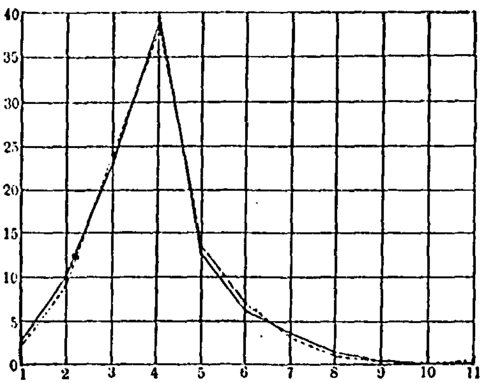


圖 7. 顯示以圖 6 之資料化成百分數後所製成之圖、

圖 7 所表示之兩種次數分配之趨向，較圖 6 為明瞭，此兩種曲線，一以實線示之，一以虛線示之。若一圖上須畫三個或四個曲線，則第三線可以虛實並用之線表示，第四線以較長之斷續線表示之均可。

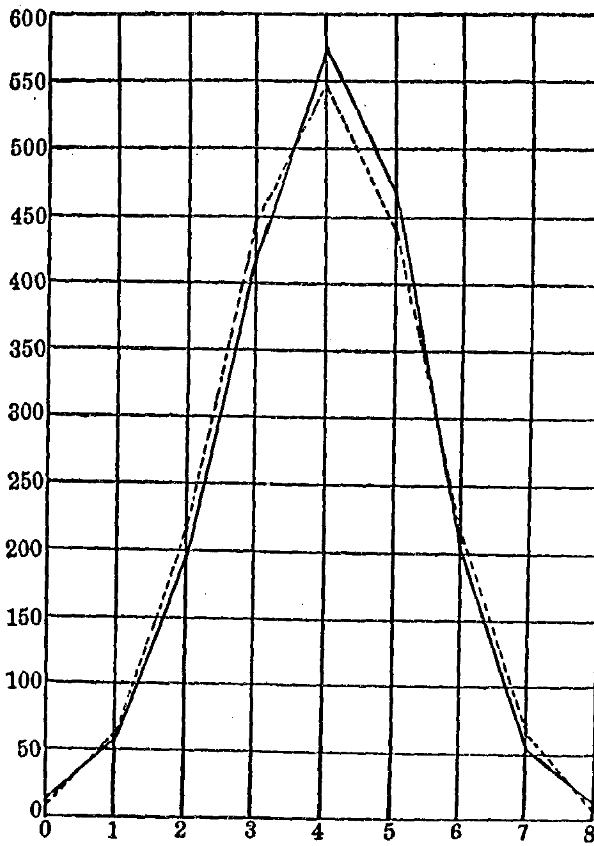


圖 8. 圖示第二章第三表之擲八枚銅圓至二千次之次數分配，實線代表所得結果，虛線代表二項開展 2,000 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^8$ 之結果。

圖 8 示一圖兩曲線之另一例。此圖取材於第二章第三表，圖中包括兩個曲線，實線代表觀察結果，虛線代表二項開展 $2,000(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ 之結果，此兩曲線頗相類似。表示試驗結果與期望結果尙相符合。其中稍有差異乃由於偶然所致，此種偶然差異 (chance variation)，容後詳論。

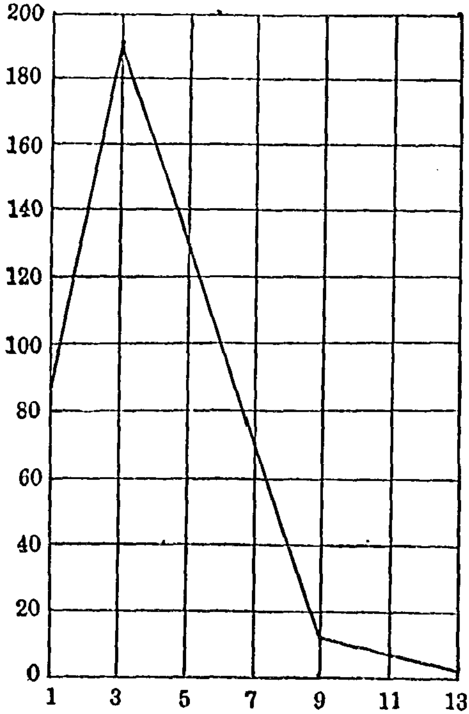


圖 9. 圖示 500 株燕麥之籽粒重量，取材於第二章表 7。

圖 9.示一種明顯的偏斜分配(skew distribution) 所造成之曲線圖。此圖示第二章第七表中500 株燕麥籽粒之重量。第一組次數頗多，故起線即極高。至第二組而達最高峯。第二組以次，即逐漸下降，另有一種極端偏斜之曲線，（或不對稱曲線）傾斜之速較圖 9 為尤甚，試觀圖 10。

圖 10 之資料，係取自第二章第九表，第一組之次數最多，故曲線開始即至最高點，以後即迅速下瀉，至末一組始止。此種曲線之形態，頗像英文字母之 J 字，故即名曰 J 字形曲線圖 (J-shape curve)。

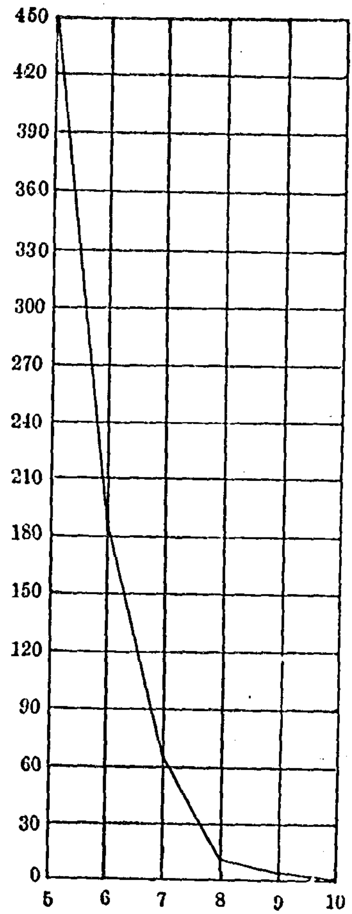


圖 10. 圖示白果樹花上之萼數分配，取材於第二章第九表。

圖解之方法雖多，而大同小異者亦復不少。且與本書有關之各重要方法，已在本篇均有論述，故不復贅。玆將製圖者宜於注意之各點，略述於下，以作參考。

1. 製圖時對於縮尺之標準，

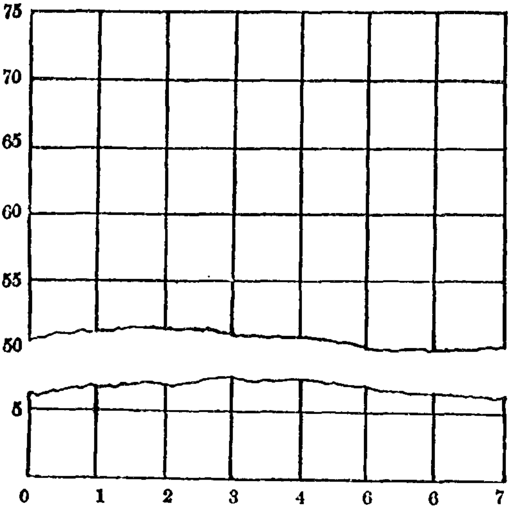
須愼重決定。每一方格所代表之尺寸或次數。不宜太多，亦不宜太少。圖之長與圖之闊，須互相稱配，若太高，則未免將各組之差異過於表顯，若太闊，又恐太不顯明。兩者皆有不切實際之弊，故用者愼之。

2. 若數圖引證同樣結果者，以在可能範圍內，用同一之縮尺繪成爲宜。

3. 每圖所畫曲線，不宜太多，普通以四五個爲度。若遇諸線有互相交叉之現象時，繪線更不宜多。若將諸線堆積在一個圖上，則閱者將忙於追尋各線之起訖，而對於諸線之意義，反覺模糊難明。

4. 若有同性質之資料數種，觀察次數各不相同時，宜先以之化成百分數，而後製圖，方易比較。

5. 無論 x 軸或 y 軸上之 0 線，總以畫出爲宜。若遇次數與組數遠在零度以上，即爲節省紙張起見，亦祇能將不用之中間段截去，而將零線仍舊留用，若附圖。蓋若不留零線，而自半中起畫，則驟觀之，曲線有過於傾向某一方向之弊。



圖示如何留用零線，而截去中間段。

6. 除特殊之例外外，記數時，橫線以自左向右，直線以自下向上爲宜。製圖時宜將表明橫線之數字，寫在底線之下，而將表明直線之次數，寫於圖之左邊。

7. 所營之圖，不宜太小。因若將次數分配縮成極小之圖，則眞義喪失，閱者不易明瞭。凡所繪圖及註字，均須謹愼從事，力求整潔明瞭。

本章僅略述數種重要圖解之製法，及其大概而已。此外有用而繁複之圖解尚多，有志於此者，可詳加研究焉。

第　四　章

地位常數

次數分配之方法及其型類，曾於第二章內述其梗概。惟次數分配，僅爲整理材料之初步工作，略示所研究材料之次數分配狀况而已。至求研究結果之整個現象，則非分配表所能詳。今試舉一例以明其意，設有兩種相類似之資料，其次數分配並列於一個分配表內，故組距及組數皆相同，而其次數之分配則甲乙各異。試觀下表所載兩種燕麥之每株產量分配，即可明瞭。

兩種燕麥之每株產量分配表（公厘 decigrams）

組　距	品　種　A	品　種　B
0.0——0.9	78	153
1.0——1.9	96	86
2.0——2.9	72	40
3.0——3.9	37	15
4.0——4.9	12	5
5.0——5.9	4	1
總　數	299	300

在比較此兩種燕麥之每株產量時，若僅言品種A與品種B之分配範圍不同，殊難令人滿意，蓋在分配範圍外，尚有其他要點，吾人須解決也。

故在明白次數分配之範圍外，對於個數之集中地點等，亦須注意。凡測量地位間之常數即爲平均數（average），其所用單位須與測量時所用單位相同。例如測量長度時係用公分（centimeter），則其平均數亦爲公分，若所秤重時所用單位爲克，則平均數亦爲克，其餘類推。

余爾氏（Yule）對於地位常數或平均數曾有所敍述，茲節錄如下：

（a）平均數爲慎重確定之數，而非觀察者臆測之數，蓋平均數而得自觀察者之推測，則太重視觀察者之臆斷矣。

（b）平均數須根據觀察結果而定，不然，不足以代表材料之全部現象。

（c）平均數宜簡單明顯，使人易於瞭解，平均數不僅爲一種空泛數目字而已。

（d）平均數之計算以簡便及迅速爲宜，若所得結果相同，則由捷徑求得者爲上。惟如因求簡捷而致遺誤要點，則非所取。

此外尚須注意者爲平均數不宜太受分組及樣子變動之影響。末後最重要者爲所求得之平均數，可以代數表示之。

最普通之地位常數爲算學均數（arithmetic mean），中位數（median）及衆數（mode）。此外尚有幾何均數（geometric mean）有時亦有特殊用處。茲將此種常數，分別解釋如下：

算學均數爲各數相加，而以次數總數除得之商。

中位數爲諸數之中間一數，此一數將諸數平分兩段。

衆數爲諸數中次數最多之一數，衆數有兩種，一爲經驗衆數(empirical mode)，一爲計算衆數或理論衆數（calculated or theoretical mode)，此將於下章詳述之。

幾何均數爲各個記分相乘積以組數開方後所得之值，其公式爲：
$M_G=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4\cdots\cdots x_n}$ 若 N 爲 4，$x_1=2$，$x_2=4$，$x_3=6$，$x_4=8$，則 $M_G=\sqrt[4]{2\times4\times6\times8}$ 茲更將上述四種地位常數，分述於下：

算學均數——算學均數亦可簡稱爲均數(mean)，係從諸數之和除組數而得。求法簡易而明瞭，且對於余爾氏所述，平均數之第一，第二兩條件亦相符合。平均數既係諸數之和之均數，故不受分組多少之影響。

均數既係計算所得之數，故不必與記分數中各數相同。例如測量一百學生之高度，均數或爲 67.56 吋。而統觀諸生之記錄，竟無一人之長度與此數相合者，亦屬常事。

計算均數時若所研究之記分數目不大，則將各記分相加而以次數總數除之，較爲簡便。若記分數數目甚大，則以先列次數分配表而後求之較善。從次數分配表求均數時，須先決定各組之中點，例如表 12，第一組之低限爲 125.0，高限爲 149.9，中點爲 137.5，在表內組值項下，次數共有二個，亦即產量爲 137.5 克者，有二個之意也。此種先列次數表而從中點求均數之法，與以諸數相加而以總次數除之所得結果，相差極微。例如一百區黃豆產量之均數，用第一法求得 276.460 克，而第二法則爲 276.500 克，相差及微。

大概所計算之次數極大，而其分配爲常態曲線時，眞正算學均數

（即諸數相加而後以次數總數相除之平均數）與用次數分組所求得之均數相差無幾。此因次數大都集中中間，故兩邊分配勻稱，故任用何法皆好。惟若所計算之次數極小，或次數分配成J字形與U字形者，從諸數求均數與從分組求均數之答數，即不易相同，在此種分配下，次數大部不集中在中間，而集中在一端，兩邊分配，極不勻稱。

茲更將分組計算均數之法舉表 12 爲例，演算於下：

表 12.

從次數分配表計算均數

徐州 1933 年黃豆產量記錄

組 值	V 組 中 點	f 次 數	fV 次 數 × 中 點
125.0-149.9	137.5	2	275.0
150.0-174.9	162.5	2	325.0
175.0-199.9	187.5	15	2812.5
200.0-224.9	212.5	42	8925.0
225.0-249.9	237.5	69	16387.5
250.0-274.9	262.5	78	20475.0
275.0-299.9	287.5	67	19262.5
300.0-324.9	312.5	57	17812.5
325.0-349.9	337.5	42	14175.0
350.0-374.9	362.5	18	6525.0
375.0-399.9	387.5	5	1937.5
400.0-424.9	412.5	2	825.0
425.0-449.9	437.5	1	437.5
		N=400	ΣfV=110175.0

$$均數M=\frac{110175.0}{400}=275.4375 克$$

表內第一項寫每組之高低兩限，第二項則爲每組之中點，普通以 V 字代表之。第三項爲次數，其總次數爲 400，第四項爲中點乘次數之積，若將第四項諸數相加，其和爲 110175.0，此數以總次數 400 除之，卽得均數 275.4375 克。其計算公式爲：

$$M=\frac{\Sigma fV}{N}$$

M＝均數　Σ＝和數　N＝記分總次數

上述計算法若數目大時，殊覺麻煩，易錯，若用一假定均數而求之，法較簡易，今以表 13 作例以明之。

表 13. 用簡法求均數

G＝假定均數＝262.5

組　值	V	f	(V-G)或D	fD
125.0-149.9	137.5	2	-125	- 250
150.0-174.9	162.5	2	-100	- 200
175.0-199.9	187.5	15	- 75	-1125
200.0-224.9	212.5	42	- 50	-2100
225.0-249.9	237.5	69	- 25	-1725
250.5-274.9	262.5	78	0	
275.0-299.9	287.5	67	25	1675
300.0-324.9	312.5	57	50	2850
325.0-349.9	337.5	42	75	3150
350.0-374.9	362.5	18	100	1800
375.0-399.9	387.5	5	125	625
400.0-424.9	412.5	2	150	300
425.0-449.9	437.5	1	175	175
		N＝400		10575
				-5400
				ΣfD＝5175

校正量 $c=\frac{5175}{400}=12.9375$

均數　M＝262.5＋12.9375＝275.4375 克

先假定一數爲均數，名曰假定均數 (assumed mean)，其符號爲"G"，以"G"值與各項之中點相較，而將其差數記於"D"字項下，凡假定均數大於組值時其差爲負號，小於組值時，其差爲正號。求得之"D"值復逐項以其次數乘之，而記錄於 fD 項下，將 fD 之負號數與正號相抵，而以其抵賸之數，用記分總次數除之，所得之商，即爲均數之校正量 (correction)"C"，此校正數表示假定均數與眞均數相差之數。若C係正號。可知所擬假定均數太低，須將C相加在假定均數上。若C爲負號，則假定均數太高，須由假定均數內減去C值。假如在表 13. 中假定均數爲 262.5 克，C爲 12.9375 克，可知假定均數較眞均數實低 12.9375 克，須將此數加入假定均數中，使成眞均數 275.4375 克。

表 13. 之算法較表 12. 爲簡單，因 fD 值較 fV 值爲小，乘除皆較方便而少錯誤。總之計算之數目越大，錯誤之機會亦愈多，以 2 乘 137.5 時，其錯誤之機會較以 2 乘 125 時爲大。多一個相乘數字，即多一個錯誤之機會也。

用第二法求均數之公式

$$M = G + C$$

G = 假定均數

C = 校正量或 $\frac{\Sigma fD}{n}$　C有時爲正號，有時爲負號。

第二法雖較第一法爲簡單，惟以假定均數與各組中點逐一相減，亦殊費時，今若改用單位進級法 (Unity-Step method) 計算之，尤爲簡便。在排列次數分配表時，各組組距恆相同，故今若假定一平均數，而以假定均數之組中點爲 0，其上下各組以單位推算，在其上一組者爲 −1，

表 14.

用單位進級法求均數

鉅 = 每節間組距

G = 262.5

組　　值	f	(V-G) D	f D
125.0-149.9	2	-5	-10
150.0-174.9	2	-4	- 8
175.0-199.9	15	-3	-45
200.0-224.9	42	-2	-84
225.0-249.9	69	-1	-69
250.0-274.9	78	0	
275.0-299.9	67	1	67
300.0-324.9	57	2	114
325.0-349.9	42	3	126
350.0-374.9	18	4	72
375.0-399.9	5	5	25
400.0-424.9	2	6	12
425.0-449.9	1	7	7
	N = 400		423
			-216
			ΣfD = 207

校正量　$c = \Sigma fD/N \times ci$　　$c \times ci = \frac{207}{400} \times 25 = .5175 \times 25 = 12.9375$

計

均數　$M = G + c$　　　$M = 262.5 + 12.9375 = 275.4375$克

上二組者爲 -2，餘類推，在其下一組者爲 1，下二組者爲 2。試觀表 14 "D" 項下之數字爲 -1，-2，-3，及 1,2,3 等較諸表 12"D" 項下之數字爲 -25，-50，及 25，50 等簡易得多。"D" 項之值既小，"fD" 之值亦隨之而小，故 "ΣfD" 僅爲 207，以次數總數 400 除之，得 0.5175，此數爲一級之校正量。因每級間之組距爲25，故須以 25 乘之，而得真真校正量爲 12.9375，以此數加入假定均數 262.5 內，得真均數 275.4375，

此數與第一第二兩法求得之均數相同，用此法求均數，其公式爲：

$$M=G+c\times ci$$

ci＝組距

假定均數既爲假定的，故可由計算者隨意指定，惟爲便於計算起見，以擇一近乎均數之數目較宜。今試仍以表 14 之資料，而設以 337.5 爲假定均數，演算之結果，載表 15，校正量 c 爲－62.0625，因校正量爲負

表 15.

用單位進級法求均數

G＝337.5

組　　値	f	(V-G) D	f D
125.0-149.9	2	-8	- 16
150.0-174.9	2	-7	- 14
175.0-199.9	15	-6	- 90
200.0-224.9	42	-5	- 210
225.0-249.9	69	-4	- 276
250.0-274.9	78	-3	- 234
275.0-299.9	67	-2	- 134
300.0-324.9	57	-1	- 57
325.0-349.9	42	0	
350.0-374.9	18	1	18
375.0-399.9	5	2	10
400.0-424.9	2	3	6
425.0-449.9	1	4	4
	N＝400		38
			-1031
			ΣfD＝- 993

校正量 $c=\frac{-993}{400}=-2.4825\times c\times ci=-2.4825\times 25=62.0625$

均數 $M=337.5+(-62.0625)=275.4375$

數，故須從假定均數內將此數減去，而成均數 275.4375，此數與表 14 所求得者相同。此可知假定均數初無一定，若組分不大，人恆喜以第一組之中點為假定均數，可以避免負數校正值耳。若用兩個不同之假定均數，以求均數，可用以校對計算之正誤。苟結果不相同，則計算必有錯，宜詳細覆核。

表 16. 所載者為中國江蘇徐州府一九三二至一九三三年小麥試驗產量記錄（產量以克為單位）。

表 16.　用單位進級法求均數

徐州 1932－1933 年之小麥產量記錄

G＝412.5

組　值	f	(V-G) D	fD
250.0-274.9	4	-6	-24
275.0-299.9	3	-5	-15
300.0-324.9	13	-4	-52
325.0-349.9	27	-3	-81
350.0-374.9	42	-2	-84
375.0-399.9	55	-1	-55
400.0-424.9	66	0	[illegible]
425.0-449.9	59	1	59
450.0-474.9	43	2	86
475.0-499.9	44	3	132
500.0-524.9	17	4	68
525.0-549.9	13	5	65
550.0-574.9	7	6	42
575.0-599.9	6	7	42
600.0-624.9	1	8	8
	N＝400		502
			-311
			ΣfD＝191

校正量 $c=\frac{101}{400}=.4775, c\times ci=.4775\times 25=11.9375$

均　數 $M=412.5+11.9375=424.4375$

照上表用單位進級法所得之校正量爲11.9375，均數爲，424.4375克。

若將同樣資料，以各種不同之分組排列之，其所得之均數，是否相同，確爲吾人所宜注意者，玆將表 12 之資料，用四種不同組距排列之如下表：

組距 25 克	組距 30 克	組距 40 克	組距 50 克
均數 275.4375	均數 276.275	均數 276.400	均數 275.500

觀上表可知組距雖更動至將兩組歸併，而所得均數則相差極微。

余爾（Yule）氏曾謂以代數計算結果，爲地位常數之一重要條件，今均數即可以代數求之，此實亦均數足稱爲地位常數之要點也。其代數公式爲：

$$NM=n_1M_1+n_2M_2+n_3M_3\cdots\cdots$$

$$M=\frac{n_1M_1+n_2M_2+n_3M_3\cdots\cdots}{N}$$

（註）M＝均數

n_1＝每列個數

M_1＝每列均數

N＝諸列總個數故 $N=n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots$

例將表 12 之資料分爲二列，第一列 200 個之平均產量爲 273.625，第二列 200 個之平均產量爲 277.250，故

表 17.

各種不同組距之排列對於均數之影響

組距 25 克	次數	組距 30 克	次數	組距 40 克	次數	組距 50 克	次數
125.0-149.9	2	125.0-154.9	2	125.0-164.9	3	125.0-174.9	4
150.0-174.9	2	155.0-184.9	7	165.0-204.9	21	175.0-224.9	57
175.0-199.9	15	185.0-214.9	31	205.0-244.9	85	225.0-274.9	147
200.0-224.9	42	215.0-244.9	69	245.0-284.9	126	275.0-324.9	124
225.0-249.9	69	245.0-274.9	99	285.0-324.9	97	325.0-374.9	60
250.0-274.9	78	275.0-304.9	75	325.0-364.9	54	375.0-424.9	7
275.0-299.9	67	305.0-334.9	68	365.0-404.9	12	425.0-474.9	1
300.0-324.9	57	335.0-364.9	35	405.0-444.9	1		
325.0-349.9	42	365.0-394.9	10	445.0-484.9	1		
350.0-374.9	18	395.0-424.9	3				
375.0-399.9	5	425.0-454.9	1				
400.0-424.9	2						
425.0-449.9	1						
均數	275.4375		276.275		276.400		275.500
中位數	272.436		272.576		273.889		272.279
經驗衆數	262.500		260.000		265.000		250.000
近似衆數（第一法）	266.433		265.178		268.867		265.837
近似衆數（第二法）	262.325		260.630		266.320		259.250

$M_1 = 273.625,\quad n_1 = 200$

$M_2 = 277.250,\quad n_2 = 200$

$N = 400$

以之代入上列公式，得

$$M = \frac{(200 \times 273.625) + (200 \times 277.250)}{400} = 275.4375$$

此數與表 12. 表 13. 表 14. 表 15. 所求得之均數相同，故用代數法求均數，與用上述第一，第二，第三各法，求均數相同。

今再舉一例以明代數公式之用法。燕麥第一年測量 500 株，平均高度爲 76.110 公尺，第二年測量 400 株，其高度爲 70.840 公尺，第三年亦測量 400 株，其高度爲 75.200 公尺。

$M_1 = 76.110,\quad M_2 = 70.840,\quad M_3 = 75.200$

$n_1 = 500,\quad n_2 = 400,\quad n_3 = 400$

$N = 500 + 400 + 400 = 1300$

$$M = \frac{500 \times 76.110 + 400 \times 70.840 + 400 \times 75.200}{1300} = 74.208 \text{ 公尺}$$

此可知材料相同之均數，雖其次數分配不相同，仍可合併計算，惟所當注意者，諸數相加時，須以各列之加權平均數相加，而不以其平均數相加。所謂加權平均數者 (weighted average)，即一列之平均數，與一列之個數相乘之積。上列平均數若不以其個數 500 及 400 等相乘而即相加，其答數將爲 74.050，而非 74.208。今試觀下舉之例，可知不用加權平均數而昧然相加之錯誤。

三種大小不同之稻田收穫量

畝數	總產量(斤)	平均產量(斤)
10	1300	130
50	7500	150
80	16000	200

此三塊田之每畝平均產量爲 130 斤，150 斤，及 200 斤，若以此三數相加，而以 3 除之得每畝平均數爲 160 斤。此種算法實爲大誤，因與題意不合。照題意，若種十畝則每畝平均爲 130 斤，若種 80 畝則每畝得 200 斤，此130 斤及 200 斤爲 10 畝及 80 畝之絕對平均產量，故須先各以其畝數乘之，而得加權平均產量，然後相加。今試仍用上列代數公式求得總平均產量爲 177.14 斤。

$$M=\frac{(10\times130)+(50\times150)+(80\times200)}{(10+50+80)}=177.14\text{ 斤}$$

此數方爲 140 畝田之眞正平均產量。故計算平均數時，無論所知者爲百分數或單位數，總須以之相乘，使成爲加權平均數然後可。

中位數 (median)——第二種地位常數爲中位數。設有人羣，依其高矮而排列之，若人數適爲奇數，則中間一人之高度，即爲此人羣高度之中位數。若人數爲偶數，則中間二人之平均高度爲中位數。故人羣中偶有一二特長或特短之人，皆不足影響中位數之高度，是以求中位數時，不必測量每一人之高度，而在人數爲偶數時，中位數不爲任何人之高度，而乃爲中間兩人之平均高度。

若從次數分配求中位數，可以次數總數平分爲二，再從次數末端數起至近乎總次數之半數時尋找之。今試以表 12 之資料作例題，所得

結果如下：

表 18.

計算中位數方法

組　　　值	f	
125.0-149.9	2	
150.0-174.9	2	
175.0-199.9	15	
200.0-224.9	42	
225.0-249.9	69	130
250.0-274.9	78	
275.0-299.9	67	
300.0-324.9	57	
325.0-349.9	42	
350.0-374.9	18	
375.0-399.9	5	
400.0-424.9	2	
425.0-449.9	1	
	N＝400	

中位數 $Mi=250.0+\frac{25(400/2-130)}{78}=272.436$

$$N=400 \qquad 故\frac{N}{2}=200$$

次數 $2+2+15+42+69=130$，較 200 少 70，而次數 69 之組值爲 225.0—249.9，故中位數當在 250.0—274.9 之一組，第 70 次之一數內。此一組內共有 78 個次數，而其組距則爲 25，故 $250+\frac{25}{78}\times 70=272.436$，卽爲中位數。其公式爲

$$Mi=L+\frac{i(N/2-a)}{b}$$

$Mi=$中位數

L =有中位數一組之低限，

a =有中位數一組之上段次數和，

b =有中位數一組之次數，

i =組距，

N =次數總和

若以各數代入公式得中位數

$$Mi=250.0+\frac{25(400/2-130)}{78}=250.0+22.436=272.436$$

本次數分配之均數爲 275.4375。

表 19 另舉一例以示中位數之求法，並附均數以示比較。

表 19.　計算中位數方法

四百株燕麥之高度(cm.)

組　　值	f	
45.0-49.9	2	
50.0-54.9	9	
55.0-59.9	20	
60.0-64.9	35	
65.0-69.9	91	157
70.0-74.9	125	
75.0-79.9	91	
80.0-84.9	26	
85.0-89.9	0	
90.0-94.9	1	
	N=400	

中位數 $=70.0+\frac{5(400/2-157)}{125}=71.72$

均　數 $=71.0$ 公分

表 19. 之資料爲400株燕麥之高度，單位爲公分，次數總和爲400，其半數爲 200，若將上段次數相加至 65.00—69.99 一組，得次數和 157，而下一組 (70.00—74.99) 共有次數 125，若將此數加入 157 之次數和內，則和數超過 200，故中位數必在 70.00—74.99 之一組內。照公式求得中位數爲 71.72 公分。

$L=70.0,\qquad a=157,\qquad b=125,\qquad i=5.0,\qquad N=400$

$$Mi=L+\frac{i(N/2-a)}{b}$$

$$=70.0+\frac{5\times(200-157)}{125}=70+\frac{5\times43}{125}=70+1.72$$

$$=71.72\text{ 公分。}$$

故中位數＝71.72 公分。

平均數＝71.00 公分。

衆數(mode)——本章所論及之衆數有經驗衆數(empirical mode)及理論衆數 (theoretical mode) 兩種，試觀次數分配表中，常有一二組次數特多之現象，若畫成弧線，則高峯特起。故次數最多之一組，卽爲衆數組，其中點爲衆數之值，此種衆數名爲經驗衆數，可根據次數表或弧線而觀察得之，不必計算也。另有一種衆數，爲配合觀察數目之理論弧線之最高峯，計算方法，頗爲繁複，非熟於曲線配合法 (curve fitting) 者，極難瞭解。

經驗衆數之值，不若均數之固定，常隨組距而生更動，惟求法簡單，故爲地位常數中之最簡便者。若有兩個同類材料之次數分配，苟組限相同，其衆數卽可兩相比較，不必計算。今以表 12 之資料，分作四種組距

（25克，30克，40克，50克），而排列之，卽得四個不同之衆數，有爲250有爲265者，相差有15之鉅，至於均數及中位數，則皆無甚變動，詳見表17。

組　距	25 克	30 克	40 克	50 克
衆　數	262.500	260.000	265.000	250.000

理論衆數之眞確數，頗難計算，惟因衆數與均數，及中位數，常發生下列關係。

衆數＝均數－3（均數－中位數）

衆數－中位數＝2（中位數－均數）

故若依據此種關係，在普通次數分配表中，可得近似之理論衆數。今試以表17之四種組距不同之次數分配，根據均數與中位數，求得理論衆數如下：

組　距	25 克	30 克	40 克	50 克
衆　數	266.433	265.178	268.667	265.837

此種理論衆數，雖亦因組距更動而稍有不同，惟不若經驗衆數之甚，此實因理論衆數，由均數及中位數求得，曾顧到全盤次數之分配，不若經驗衆數則僅就次數最多之一數而定。用上列公式求得之衆數，頗有與理論弧線上之理論衆數相符合者，例如下表400株燕麥之產量分配，求得經驗衆數爲3.50克，理論衆數爲3.1505克，而用上列公式所求得之衆數，則爲3.2133克。

每株產量克	f
0.0——0.9	3
1.0——1.9	50
2.0——2.9	106
3.0——3.9	109
4.0——4.9	80
5.0——5.9	42
6.0——6.9	7
7.0——7.9	2
8.0——8.9	1
	400

欲知近似衆數 (Approximate mode),(用公式求得者)與理論衆數(由理論弧線得來者)之比較如何,可參考下列余爾氏之比較表。表中示五年中英國貧民之近似衆數 (Approximate mode),及眞衆數 (True mode)。

年份	近似衆數	眞衆數
1850	5.707	5.815
1860	4.010	4.657
1870	5.238	5.038
1881	3.217	3.240
1891	3.007	2.987

衆數之求法,又可用下列密爾 (Mills) 氏之公式得之:

$$\text{Mode} = L + \frac{i_2}{i_2 + f_1} \times i$$

L ＝衆數組之低限

f_1 ＝衆數組下一組內之次數

f_2 ＝衆數組上一組內之次數

i ＝組距

此公式又可改作下列式樣，而與上列公式所算得者作對照。

$$\text{Mode} = L_1 - \frac{f_1}{f_2 + f_1} \times i$$

L_1 ＝衆數組之高限

用第二法（即上法）求得之衆數，與經驗衆數頗相同。因用此法計算時，有關係數目，僅為衆數之一組，及其上下兩組之次數而已，至於其他各組次數之多少，初無關係，不若用第一法之依據均數及中位數計算，則每組次數之多少，皆有關係也。

為明瞭第一法及第二法計算結果與組距之關係起見，特將表 12 之資料，分作四種組距計算，而將其衆數與均數及中位數列表於次：

地位常數＼組距	25 克	30 克	40 克	50 克
均數	275.4375	276.275	276.400	275.500
中位數	272.430	272.576	273.889	272.279
經驗衆數	262.500	260.000	265.000	250.000
近似衆數（用第一法計算）	266.433	265.178	268.867	265.837
近似衆數（用第二法計算）	262.325	260.630	266.320	259.250

研究資料之數目，不宜太少，在第二章內，已約略言之。今試觀表 20 之結果，對於地位常數之影響，尤為明瞭。

今試將表 12. 之資料在表 20. 中分作頭一百，頭二百，末下二百，及四百個等四種分配。頭一百之次數分配，因數目太小，無確定之經驗衆數。225.0—249.9 之一組內，有次數 19 個，300.0—324.9 之一

表 20.

次數多少對於均數中位數及衆數之影響

組 值	頭一百	頭二百	末下二百	四百全
125.0-149.9	1	2		2
150.0-174.9	0	0	2	2
175.0-199.9	2	7	8	15
200.0-224.9	11	25	17	42
225.0-249.9	19	39	30	69
250.0-274.9	17	32	46	78
275.0-299.9	16	33	34	67
300.0-324.9	20	29	28	57
325.0-349.9	9	22	20	42
350.0-374.9	2	6	12	18
375.0-399.9	2	3	2	5
400.0-424.9	0	1	1	2
425.0-449.9	1	1		1
均 數	276.500	273.625	277.250	275.4375
中位數	275.000	271.094	273.370	272.436
經驗衆數	312.500	237.500	262.500	262.500

組內，有次數 20 個。此兩組雖爲最多數，惟在此兩組之間，又有兩個次數較小之組，卽 250.0—274.9 一組及 275.0—299.9 之一組是，此兩組之次數，僅爲 17 及 16 而已，第二項頭二百之次數分配之衆數，在 225—249 之一組內。第三項末下二百次數分配之衆數，又移至 250.0—274.9，而第四次全數四百之衆數，則亦移在 250.0—274.9 之一組。若以四個均數來比較，其差異卽較小，其差在 273.625 至 277.250 之間。中位數則在 271.094 至 275.000 之間，是以欲得良好之結果，試驗資料，不宜太少，總須在四五百個以上。若有特殊情形，而個數不能增多，在下結論時，須格外謹愼。

玆就三種地位常數——均數，中位數，及衆數——之用度而言，則算學均數爲最有用，且計算均數，根據諸數之和而得。故每一個數之大小，皆可影響於均數之結果，用法旣廣，知者亦衆。中位數與衆數僅示人以次數分配之狀況而已，求法較均數爲易。求中位數時除中間一數及左右兩數外，其他首尾諸數，無論大小，概無關係。求經驗衆數時，祇須次數分配排列妥當，觀察卽得。至於近似衆數則可依據均數及中位數而演算得來。

凡次數分配係對稱分配時，此三個地位常數，當在一個點子之上。若係不相對分配，則此三常數，因數目不同，而不在一點上矣。在此種情形之下，何者足以代表分配狀態，常成疑問，實則三者之用度各異，不能相互替代。算學均數雖較其他兩者爲有用，惟有時代表分配狀態，反不若中位數及衆數之準確。例如調查中國某農村之人民經濟狀況，而得下列之結果：

每年收入（元）	次數
80.0——99.9	8
100.0——119.9	13
120.0——139.9	16
140.0——159.9	22
160.0——179.9	17
180.0——199.9	12
200.0——219.9	11
6000.0——6019.9	1
	100

此一百人中除一人爲富翁，年得六千餘元之進款外，餘皆爲工人及農夫，其歲入款項爲一二百元。今求得此表之平均數爲 210.20 元，經驗

衆數爲 150.00 元，近似衆數（用第二法求得）爲 150.303 元，中位數則爲 151.818 元。此村歲入因受富翁之影響，致平均數大至二百餘元，今若根據算學均數而誤認該村每人歲入有 210.20 元之鉅，殊屬非當，故在此種情形下，衆數或中位數皆較均數爲切實，因衆數及中位數爲一百五十餘元，確代表該村大部份人民之歲入也。

由此可知三種地位常數之用度各異，而凡關社會經濟等問題之統計，則衆數及中位數有時較均數爲確實合用。

在平均數中尚有一種移動平均數（moving average），乃用以平均多年份之記錄，或減少每年結果之變動者。

表 21 記錄 1896 年至 1925 年玉米所含之油份，此可併合計算，而成爲三年移動平均數，及五年移動平均數。其第一個三年平均數則以 1896 年，1897 年，及 1898 年之三數平均而得，其數爲 4.86，第二個三年平均則爲 1897 年，1898 年，及 1899 年之三年平均，其數爲 5.17。第一個五年平均數則爲 1896 至 1900 五年之平均，其數爲 5.27，餘類推。

幾何均數——表 22 以表 12 之資料作例，以明幾何均數之算法。其求法係將各組中點之對數查出，而各以其次數（在表 22 上稱指數）乘之，然後相加，其和以次數和除之，此商數之逆對數即爲幾何均數。

若以公式演算，則可用舒克闢氏（Secrist）之幾何均數公式求之，其公式爲

$$\text{幾何均數} = \sqrt[n]{p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots\cdots p_n}$$

（p_1, p_2 等代表各組組值，n 代表組數）

幾何均數之值，常小於算學均數，用度不廣，蓋因計算既難，而所得

表 21.

移動平均數計算法

立斯農事試驗場玉米含油份量記錄

年　　份	玉米每代含油平均百分數	三年移動平均數	五年移動平均數
1896	4.70		
1897	4.73	4.86	
1898	5.15	5.17	5.27
1899	5.64	5.64	5.55
1900	6.12	5.95	5.88
1901	6.09	6.21	6.15
1902	6.41	6.33	6.42
1903	6.50	6.63	6.65
1904	6.97	6.92	6.91
1905	7.29	7.21	7.11
1906	7.37	7.36	7.25
1907	7.43	7.33	7.27
1908	7.19	7.22	7.35
1909	7.05	7.32	7.38
1910	7.72	7.43	7.43
1911	7.51	7.64	7.63
1912	7.70	7.79	7.87
1913	8.15	8.05	8.02
1914	8.29	8.30	8.22
1915	8.46	8.42	8.39
1916	8.50	8.50	8.63
1917	8.53	8.79	8.78
1918	9.35	8.98	8.94
1919	9.05	9.23	9.23
1920	9.28	9.42	9.50
1921	9.94	9.69	9.64
1922	9.86	9.96	9.80
1923	10.08	9.93	9.99
1924	9.86	10.05	
1925	10.21		

表 22. 幾何均數計算法

中點	對數中點	次數	對數中點乘次數
137.5	2.1383	2	4.2766
162.5	2.2109	2	4.4218
187.5	2.2730	15	34.0950
212.5	2.3274	42	97.7508
237.5	2.3757	69	163.9233
262.5	2.4191	78	188.6898
287.5	2.4586	67	164.7262
312.5	2.4948	57	142.2036
337.5	2.5283	42	106.1886
362.5	2.5593	18	46.0674
387.5	2.5883	5	12.9415
412.5	2.6154	2	5.2308
437.5	2.6410	1	2.6410
		400	973.1564

對數 973.1564/400=2.4329
逆對數 2.4329=270.96
幾何均數=270.96

結果，又不能予人以明確之表示。余爾氏曾謂幾何均數之簡單用處，可以之估計兩個紀元中間之人口而已。

今將三個地位常數列表比較如下：

算學均數	中位數	衆數
計算易。 各數相加，而以次數和除之，故結果之大小與計算諸數，皆有關係，因此表內若有一二特大特小之數，均數即易受其影響。 可用代數計算，此為特點之一。	若各數可依次排列，求法頗易。 將各數依次排列後，即可觀察而得，因有關者僅表內中間一二數而已，故其他各數之大小，不能影響中位數之大小。 不能以代數計算，知甲表中位數，不能以之代出乙表或丙表之中位數。	(1)經驗衆數——易求而易受分組之影響。 (2)理論衆數——若無弧線配合，難求準確之衆數，僅可得一近似之衆數而已。 與中位數同，不受各數之影響，且用處大，因衆數指示次數最多之值也。 不能以代數計算之。

第五章

離差常數

次數分配之型類，吾人用地位常數來決定後，當續求次數分配離開地位常數之程度。驟觀之或以爲次數分配既經平均數決定後，其分散程度亦可明瞭，其實不然。例如第四章表 12 之黃豆產量記錄，其產量全距小至 125 克，大至 449.9 克，全距相差 325 克。末一組僅有一個次數，若將末組取消，則次數雖僅減少一個，而全距可減少 25 克。惟因此一組僅有次數一個，故平均數所受影響極微，在未減去前均數爲 275.4375，減去後爲 275.0313，若在此記錄中，添入一個重 100 克之黃豆，則全距須引伸 25 克，而次數則僅加添一個而已，故平均數所受影響仍微。是以全距及平均數實不能代表次數分配之切實現象也。有時有兩個次數分配、各組組距雖相同，均數亦相同，而分配時離平均數之遠近則各異，是種現象，實非平均數所能表示者也。

是以吾人欲知次數分配之真切現象，於均數外，須求離開均數之差異。此種測驗離均差之常數，須將所測驗之各數，個個顧到，且其算法須能以代數演算。計算差異時所通用者爲平均差，(average deviation)標準差，(standard deviation)變異數(variance)及四分位差，(quartile deviation)其中最通用者爲標準差，現在依次解釋於下：

平均差 Average deviation ——所謂平均差者，卽各記分離開其均數之平均差異。所用單位與記分之單位同。若記分數目不大，平均差可直接由均數逐一求得，不必另分成組，若表 23 所引證者卽是。求平均差之公式爲 $A.\ D.=\frac{\Sigma+D}{N}$

求平均差之D可不必計其正負號，因無論如何，D之總和皆算正號。

公式內所用之正號"+"爲無論其結果爲正或爲負，皆合用之。例如表23求得均數爲 297.35，以各記分一一與均數相較，而將其差寫於D項內。D項之值不問其正負號而將各數相加，得總差數 677.10，以次數總和20除之，得平均差數 33.855。若以各數代入公式，得結果如下：

$$A.\ D.=\frac{677.10}{20}=33.855$$

表 23.

用不分組之資料計算平均差

黄豆產量記錄(克)

產量(克)	D
230	−67.35
201	− 6.35
290	− 7.35
273	−24.35
292	− 5.35
297	− .35
256	−41.35
246	−51.35
258	−39.35
312	14.65
448	150.65
328	30.65
274	−23.35
309	11.65
295	− 2.35
375	77.65
336	38.65
312	14.65
279	−18.35
246	−51.35
5947	$\Sigma+D=677.10$

N=20

M=297.35

Σ+D=677.10

A.D.= $\frac{677.10}{20}$ =33.855 克

表 24.

從平均數求平均差方法

組值	V	f	$\frac{(V-M)}{D}$	fD
125.0-149.9	137.5	2	−137.9375	−275.8750
150.0-174.9	162.5	2	−112.9375	−225.8750
175.0-199.9	187.5	15	− 87.9375	−1319.0625
200.0-224.9	212.5	42	− 62.9375	−2643.3750
225.0-249.9	237.5	69	− 37.9375	−2617.6875
250.0-274.9	262.5	78	− 12.9375	−1009.1250
275.0-299.9	287.5	67	12.0625	808.1875
300.0-324.9	312.5	57	37.0625	2112.5625
325.0-349.9	337.5	42	62.0625	2606.6250
350.0-374.9	362.5	18	87.0625	1567.1250
375.0-399.9	387.5	5	112.0625	560.3125
400.0-424.9	412.5	2	137.0625	274.1250
425.0-449.9	437.5	1	162.0625	162.0625
		N=400		Σ+fD=16182.0000

M=275.4375　　A.D.= $\frac{16182.0000}{400}$ =40.455

若數目大時，可將個數分組而求其平均差。表24所載者為 400 個次數之分配表。若照上法逐一與均數相較，因數目太多，恐易發生錯誤。可先以之排成次數分配表，求得平均數為 275.4375。以此數與組值逐一相

較，而將其答數寫於第四項$\frac{(v-m)}{D}$下，再以類近次數乘之，而將結果寫入第五項 fD 下，次將fD 項內各數相加，而得 Σ+fD（正負號可不計）16182.0000，以總數 400 除之，即得平均差。其公式爲 $A.\ D.=\frac{\Sigma+fD}{N}$

$$\Sigma+fD=16182.00$$

$$\therefore\ A.\ D.=\frac{16182.00}{400}=40.455\text{克}$$

平均差之單位與記分之單位相同，若原用單位爲克，則40.455之單位亦爲克。

有時爲便利計算起見，平均差從假定均數求得之。表25 以 287.5 爲假定均數．各組組值與此數相較，而將其差寫於 D 字項下，D 與 f 相乘之積，則寫於 fD 項內，計共得負 fD 10600，正 fD 5775 兩者相抵，得4825，此數以 N 或 400 除之，得 12.0625，此數即爲從假定均數求平均差之校正量。

$$c=\frac{10600-5775}{400}=\frac{4825}{400}=12.0625$$

計以 287.5 爲假定均數時，小於此數之組值共有 208個，大於此者共有 192 個，皆宜以校正量乘之而從未校正之 fD 總和內減去或加入之。茲求得宜減去之校正量爲 $208\times12.0625=2509.00$，宜加入之校正量爲 $192\times12.0625=2316.00$，故校正後之 fD 總和，爲 $16375-2509.00+2316.00=16182$。

又可簡作　$16375-\{(208-192)\times12.0625\}=16182$

今以以上各數代入上列公式　$A.\ D.=\frac{\Sigma+fD}{N}=\frac{16182}{400}=40.455$

表 25.

從假定均數求平均差方法

G＝假定均數＝287.5

組 值	V	f	D	fD
125.0-149.9	137.5	2	−150	−300
150.0-174.9	162.5	2	−125	−250
175.0-199.9	187.5	15	−100	−1500
200.0-224.9	212.5	42	−75	−3150
225.0-249.9	237.5	69	−50	−3450
250.0-274.9	262.5	78 (208)	−25	−1950 −10600
275.0-299.9	287.5	67	0	
300.0-324.9	312.5	57	25	1425
325.0-349.9	337.5	42	50	2100
350.0-374.9	362.5	18	75	1350
375.0-399.9	387.5	5	100	500
400.0-424.9	412.5	2	125	250
425.0-449.9	437.5	1 (192)	150	150 5775
		N＝400		Σ＝16375

$c = \frac{4825}{400} = 12.0625$

求A.D.,以

$16375 - (208 \times 12.0625) + (192 \times 12.0625) =$

$16375 - 2509.000 + 2316.000 = 16182$

$A.\ D. = \frac{16182}{400} = 40.455$

若假定均數與眞均數不在同一組內時，上法須略予變通，吾人已知由假定均數求平均差，須用校正量，而由眞均數求之則不必．此由於從眞均數求平均差時，具有負號之 fD 總數，與具有正號者必相等，故求平均差亦可用下列公式:

$$A.D. = 2/N\ (\Sigma f D_x)$$

ΣfD_x代表負號之 fD 或正號之 fD 皆可。若以表 4 之正號 ΣfD 代入上列公式得

$$A.D. = \frac{2}{400} \times 8091 = 40.455$$

若以有負號之ΣfD 代入此公式，答數亦相同，此因正負號 fD 之值總相同故耳。根據上述正負號之關係，用假定均數求平均差，而假定均數假不與眞均數同在一組內時，可卽用上述公式而校正之，使成下列之公式：

$$A.D. = 2/N\ (\Sigma fD_a - cn_a)$$

眞均數小於假定均數時公式爲

$$A.D. = 2/N\ (\Sigma fD_b - cn_b)$$

N＝總次數

n_a＝大於眞均數之次數和

n_b＝小於眞均數之次數和

ΣfD_a＝大於眞均數之fD和

ΣfD_b＝小於眞均數之fD和

————c＝校正量

照表25之記錄，眞均數小於假定均數，故

$n_b=208$ ………小於眞均數之次數和

$\Sigma fD_b=10600$………小於眞均數之fD和

$c=12.0625$

將上列各數代入公式內：

$$A.D.=\frac{2}{400}\left[10600-(208\times 12.0625)\right]$$
$$=\frac{8091}{200}=40.455$$

今再以表26之資料爲例，來引證眞均數大於假定均數之算法

表 26.

從假定均數求平均差，假定均數及眞均數不在同一組內。

G＝假定均數＝262.5

組值	V	f	D	fD
125.0-149.9	137.5	2	−125	−250
150.0-174.9	162.5	2	−100	−200
175.0-199.9	187.5	15	−75	−1125
200.0-224.9	212.5	42	−50	−2100
225.0-249.9	237.5	69	−25	−1725 −5400
250.0-274.9	262.5	78 (208)	0	
275.0-299.9	287.5	67	25	1675
300.0-324.9	312.5	57	50	2850
325.0-349.9	337.5	42	75	3150
350.0-374.9	362.5	18	100	1800
375.0-399.9	387.5	5	125	625
400.0-424.9	412.5	2	150	300
425.0-449.9	437.5	1 (192)	175	175 10575
		N＝400		Σ＝15975

$$C=\frac{5175}{400}=12.9375$$
$$A.D.=\frac{2}{400}\left[10575-(192\times 12.9375)\right]=\frac{8091}{200}=40.455$$

$n_a=192$………大於眞均數之次數和

$\Sigma fD_a=10575$………大於眞均數之fD和

$$A.\ D.=\frac{2}{400}[10575-(192\times 12.9375)]$$
$$=\frac{8091}{200}=40.455$$

求平均差亦可用單位進級法計算之，此法在上章求均數時曾詳細解釋，茲不贅述。

上法係由均數求平均差，其實平均差亦可從衆數或中位數求得之，若由中位數求平均差，結果較小，例如表 26 之資料，由中位數求平均差得40.335，是數較40.455爲小。

平均差計算較易，可示人以次數離均數之大概情形，宜於急需，是其長處，惟平均差不能以代數處理之，故不若標準差之有用。

標準差（Standard deviation）——變異數 Variance爲各個離均差自乘後之總和平均數，在統計上用度頗廣，變異數之平方根又名標準差，在統計上所佔地位，尤爲重要。余爾氏謂標準差爲各個離均差自乘之總和平均後之方根，標準差常用 St. Dev. 或 S. D. 或希臘字母σ來代表之。

標準差與平均差不同之點，在後者是一次動差（First moment）的 $\Sigma D/N$，前者是二次動差（second moment）的 $\Sigma D^2/N$，其公式爲：

$$S.\ D.=\sqrt{\Sigma D^2/N}$$

本篇所指動差（moment），係指各差數目總和與其總次數相除後之商數。故若數目不大，可自平均數求各數之差，各差數自乘相加，其總和以個數除之，即爲變異數。開方後即爲標準差。不分組之求標準差方法，詳見表27：

表 27.

用不分組之資料求標準差方法

黃豆產量記錄

產量(克)	D	D^2
230	−67.35	4536.0225
291	− 6.35	40.3225
290	− 7.35	54.0225
273	−24.35	592.9225
292	− 5.35	28.6225
297	− .35	.1225
256	−41.35	1709.8225
246	−51.35	2636.8225
258	−39.35	1548.4225
312	14.65	214.6225
448	150.65	22695.4225
328	30.65	939.4225
274	−23.35	545.2225
309	11.65	135.7225
295	− 2.35	5.5225
375	77.65	6029.5225
336	38.65	1493.8225
312	14.65	214.6225
279	−18.35	336.7225
246	−51.35	2636.8225
5947		$\Sigma D^2=46394.5500$

$N=20 \quad M=297.35$

$\Sigma D^2=46394.5500$

$$S.D.=\sqrt{\frac{46394.5500}{20}}$$

$$=\sqrt{2319.727500}$$

$$=48.164$$

吾人所常遇之記分數目大者居多，故從次數分配表求差數較便。

表 28.

從眞均數求標準差方法

組 值	V	f	V-M	$(V-M)^2$	$f(V-M)^2$
125.0-149.9	137.5	2	-137.9375	19026.7539	38053.5078
150.0-174.9	162.5	2	-112.9375	12754.8789	25509.7578
175.0-199.9	187.5	15	- 87.9375	7733.0039	115995.0585
200.0-224.9	212.5	42	- 62.9375	3961.1289	166367.4138
225.0-249.9	237.5	69	- 37.9375	1439.2539	99308.5191
250.0-274.9	262.5	78	- 12.9375	167.3789	13055.5542
275.0-299.9	287.5	67	12.0625	145.5039	9748.7613
300.0-324.9	312.5	57	37.0625	1373.6289	78296.8473
325.0-349.9	337.5	42	62.0625	3851.7539	161773.6638
350.0-374.9	362.5	18	87.0625	7579.8789	136437.8202
375.0-399.9	387.5	5	112.0625	12558.0039	62790.0195
400.0-424.9	412.5	2	137.0625	18786.1289	37572.2578
425.0-449.9	437.5	1	162.0625	26264.2539	26264.2539
		N=400		$\Sigma f(V-M)^2=971173.4350$	

$$M=275.4375 \qquad S.D.=\sqrt{\frac{971173.4350}{400}}=\sqrt{2427.933587}=49.274$$

表 28 (表12之資料)所載第一，第二，第三及第四各項，皆與求平均差時所用者相同，第五項之 $(V-M)^2$ 及 $f(V-M)^2$ 爲求標準差所獨有者，故求標準差時在求得 $V-M$ 後，須一一自乘，而將其乘方數塡入 $(V-M)^2$ 項內，然後以 f 乘之，而將結果塡入 $f(V-M)^2$ 項下，其總和 $\Sigma f(V-M)^2$ 以N或次數和除之，而後開方，其方根卽爲標準差。

表 29.

從假定均數求標準差方法

G＝假定均數＝262.5

組 值	V	f	D	fD	fD²
125.0-149.9	137.5	2	−125	−250	31250
150.0-174.9	162.5	2	−100	−200	20000
175.0-199.9	187.5	15	−75	−1125	84375
200.0-224.9	212.5	42	−50	−2100	105000
225.0-249.9	237.5	69	−25	−1725	43125
250.0-274.9	262.5	78	0		
275.0-299.9	287.5	67	25	1675	41875
300.0-324.9	312.5	57	50	2850	142500
325.0-349.9	337.5	42	75	3150	236250
350.0-374.9	362.5	18	100	1800	180000
375.0-399.9	387.5	5	125	625	78125
400.0-424.9	412.5	2	150	300	45000
425.0-449.9	437.5	1	175	175	30625
		N＝400		10575	ΣfD²＝1038125
				−5400	
				ΣfD＝5175	

$$c=\frac{5175}{400}=12.9375$$

$$S.D.=\sqrt{\frac{1038125}{400}-(12.9375)^2}$$

$$=\sqrt{2427.933594}$$

$$=49.274$$

$$S.D.=\sqrt{\Sigma f(V-M)^2/N}$$

以表 28 之各値代入得：

$$S.D.=\sqrt{971173.4350/400}=\sqrt{2427.933587}=49.274$$

表28所用之重量單位爲克，故其標準差單位亦爲克。

用上法求標準差，因演算之數太大、故易生錯誤，若由假定均數求

差異，較爲簡單。由假定均數求標準差，終須校正，故假定均數之大小，初無一定，惟爲計算便利計，常選接近均數之數用之，蓋假定均數愈近眞均數，則D值愈小，D值小則演算便。惟有時爲避免D項內之負號起見，亦有以第一組之組值爲假定均數者。

假定均數既定，可照求平均差法與各個組值逐一相較，而將其差數填入D字項內，所以不用“V－M”而用D者，因相減之差，係得自假均數，而非得自眞均數M也。D復與其同行f相乘，而將結果填入fD項內，fD項內各數正負號相抵，而將其差數以N或次數和除之，其商卽爲校正量。再以此數乘方而與fD^2總和平方相校正。

第六項之fD^2係fD與D之積，其總和ΣfD^2以N除之，卽爲未校正前之ΣfD^2，從此數減去校正量平方數，卽爲校正後之ΣfD^2，其方根卽爲標準差。求標準差之公式，爲：

$$S.D.=\sqrt{\Sigma fD^2/N-c^2}$$

將表29之各數代入上述公式，得：

$$S.D.=\sqrt{1038125/400-(12.9375)^2}$$

$$=\sqrt{2427.933594}$$

$$=49.274$$

從假均數求標準差，其答數總較從眞均數求標準差爲高，故須用校正量來校對之，今試以代數來解釋之：

令　M＝眞均數

G＝假定均數

c＝校正量

M＝G＋c＝假定均數＋校正量

V ＝組值

$V-M$＝組值與真均數之差

$V-G$＝組值與假均數之差

故 $V-M=V-(G+c)$ ……………………………(1)

因 $M=(G+c)=V-G-c$

代入 $a=d-c$ ……………………………………… (2)

移項 $a+c=d$ ……………………………………… (3)

平方(3) $a^2+2ac+c^2=d^2$ …………………… (4)

f乘(4) $fa^2+f2ac+fc^2=fd^2$ …………………… (5)

(5)內各行相加而以N除之

$\Sigma fa^2/N+\Sigma f2ac/N+\Sigma fc^2/N=\Sigma fd^2/N$ ………(6)

若由真均數求標準差 $\Sigma f2ac/N$ 等於零，因由真均數求差所得之正號差數與負號差數必相等，兩者相消得零，今以表24 D項下之正負差數證明之：

負差數爲 -8091.0000

正差數爲 $\underline{+8091.0000}$

兩者相加爲 0

故(6)可改成

$\Sigma fa^2/N+\Sigma fc^2/N=\Sigma fd^2/N$ ……………………(7)

其實 Σf 卽爲N，故 $\Sigma f=N$

因之 $\Sigma fc^2/N$ 項內之 Σf 與其分母N對消，成1，

於是(7)變成 $\Sigma fa^2/N+c^2=\Sigma fd^2/N$

還項 $\Sigma fa^2/N=\Sigma fd^2/N-c^2$ ……………………(8)

由眞均數求標準差之公式爲：

$$S.D.=\sqrt{\Sigma fa^2/N}$$

由假定均數求標準差之公式當爲：

$$S.D.=\sqrt{\Sigma fd^2/N-c^2}$$

由此可知由假均數求標準差時，其 $\Sigma fd^2/N$ 必太高，須減去校正量 c^2，方爲正確，此點又可用幾何學來證明之，試觀下圖：

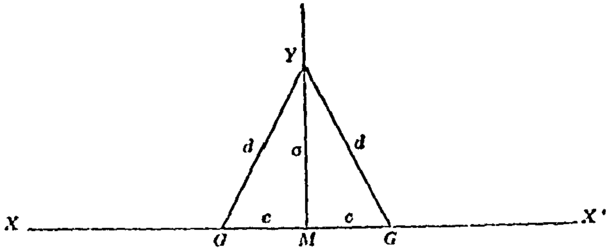


圖11. 從均數M所測得之離差，較從任何假定均數G所測得者爲短。

(1)在XX'之平行線上，以M點爲平均數所在地。

(2)由M點起發一垂直線，而以MY之距離等於標準差σ。

(3)再從XX'之平行線上，以G點爲假定平均數所在地。

(4)G點與Y點之間，以一線連貫之，此G.Y線可代表從假定均數求標準差之d。

(5)M與G間之距離，等於c，即眞均數之校正量。

YM既爲由M點發出來之垂直線，必較YG爲短，換言之σ自較d爲短，而σ線d線與c線成一直角三角形，故

$$\sigma^2+c^2=d^2$$

或$\sigma^2=d^2-c^2$

而$\sigma=\sqrt{d^2-c^2}$

標準差爲由眞均數求得之差數平方總和之平方根，而 d 則爲由假定均數求得之差數平方總和之平方根，由假定均數求得之差數平方根，必較大於由眞均數求得之差數平方根，故須減去校正量，方爲準確。

求標準差亦可用單位進級法來計算之。以此法所求得之結果，須以組距乘之，因用此法時，以一組爲一單位，而每單位之值，即爲組距，故其公式爲：

$$\text{S. D.} = \sqrt{\Sigma fD^2/N - c^2} \times ci$$

ci ＝組距

表 30.

用單位進級法求標準差方法

G＝假定均數＝262.5

組 值	V	f	D	fD	fD²
125.0-149.9	137.5	2	−5	−10	50
150.0-174.9	162.5	2	−4	− 8	32
175.0-199.9	187.5	15	−3	−45	135
200.0-224.9	212.5	42	−2	−84	168
225.0-249.9	237.5	69	−1	−69	69
250.0-274.9	262.5	78	0		
275.0-299.9	287.5	67	1	67	67
300.0-324.9	312.5	57	2	114	228
325.0-349.9	337.5	42	3	126	378
350.0-374.9	362.5	18	4	72	288
375.0-399.9	387.5	5	5	25	125
400.0-424.9	412.5	2	6	12	72
425.0-449.9	437.5	1	7	7	49
		N＝400		423	ΣfD²＝1661
				−216	
				Σ+fD＝207	

$$c = \frac{207}{400} = .5175$$

$$\text{S. D.} = \sqrt{\frac{1661}{400} - (.5175)^2} \times 25$$

$$= \sqrt{3.884694} \times 25$$

$$= 49.274$$

今以表30作例，演算於下，假定均數爲 262.5，故此組之差（卽D）爲o，小于此組者爲負差，大於此者爲正差，因各組之距離相同，故其離均差之程度，可以級數表之。最近假定均數之一級爲差一級，稍遠則爲差二級，差三級，依次類推。此 D 項內之各級數，復各以其 f 乘之，而將乘積寫於fD項內，fD乘D之積，則寫于 fD^2 項內，其和卽爲ΣfD^2，此數以 N 除之，而減去校正量c，然後開方，則得每一級之標準差。每級單位之値與組距相等，故若以組距乘之，卽爲全數之標準差。

今以各數代入$S.D.=\sqrt{\Sigma fD^2/N-c^2}\times c.i$ 之公式內，得：

$$S.D.=\sqrt{1661/400-(0.5175)^2}\times 25$$

$$=\sqrt{3.884694}\times 25$$

$$=49.274$$

用單位進級法所求得之標準差 49.274，與用常法所求得者相同。用單位進級法求標準差所得之 fD 數字較小，易於計算，卽無計算機，亦不致多訛。今以表31再舉一例，以明單位進級法之算法。

$$S.D.=\sqrt{816/400-(-.300)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{1.950000}\times 5$$

$$=6.982$$

在將fD値相加時，正負號須十分留心，因其總數卽爲校正量，宜加宜減，全視fD之正負號而定，一出一進，關係殊大。校正量若有小數，普通算至第四位而留用三位。

除上述之標準差公式外，尙有兩個公式，亦頗合用，苟所研究之次數分配不大，而均數不易求得時，尤爲適用。玆以表32引證其用度。

表 31.

用單位進級法求標準差方法

四百株燕麥麥桿高度(公分)G=72.5

組 值	v	f	D	fD	fD²
45.0-49.9	47.5	2	−5	−10	50
50.0-54.9	52.5	9	−4	−36	144
55.0-59.9	57.5	20	−3	−60	180
60.0-64.9	62.5	35	−2	−70	140
65.0-69.9	67.5	91	−1	−91	91
70.0-74.9	72.5	125	0		
75.0-79.9	77.5	91	1	91	91
80.0-84.9	82.5	26	2	52	104
85.0-89.9	87.5	0	3	0	0
90.0-94.9	92.5	1	4	4	16
		N=400		−267	ΣfD²=816
				147	
				ΣfD=120	

$$c=\frac{-120}{400}=-.300$$

$$\text{S.D.}=\sqrt{\frac{816}{400}-(-.300^2)}\times 5$$

$$=\sqrt{1.950000}\times 5$$

$$=6.982$$

表 32.

從不分組資料求標準差之另一法

x	x²
50	2500
42	1764
54	2916
56	3136
47	2209
48	2304
53	2809
42	1764
45	2025
50	2500
51	2601
538	Σx²=26528

$$N=11$$

第一法

$$M=\frac{538}{11}=48.909$$

$$S.D.=\sqrt{\frac{26528}{11}-(48.909)^2}$$

$$=\sqrt{19.546083}$$

$$=4.421$$

第二法

$$S.D.=\sqrt{\frac{11(26528)-(538)^2}{(11)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{291808-289444}{121}}$$

$$=\sqrt{\frac{2364}{121}}$$

$$=4.420$$

第一法可直接從觀察之記分 X 項內求之，先以各行X值相加，以N除之，得眞均數，並假定均數爲 o，故可將各行 X 自乘而求其 X^2 之總和，復以 N除之得 $\Sigma x^2/N$，從此數內減去校正量 M^2，然後開方，即得標準差。公式爲：

$$S.D.=\sqrt{\Sigma x^2/N-M^2}$$

以表32之値代入

$$S.D.=\sqrt{26528/11-(48.909)^2}$$

$$=\sqrt{19.546083}$$

$$=4.421$$

若以表 32 之資料用普通法（即各均差自乘總和平方根）求標準差所得結果爲 4.420，與 4.421 相差極微。

第二法之公式爲：

$$S.D.=\sqrt{\frac{N(\Sigma x^2)-(\Sigma x)^2}{N^2}}$$

其法先將各組值X平方相加，而以N乘之，再從$N(\Sigma x^2)$中，減去x總和之平方，而以N^2除之，此商數之方根，卽為標準差。

以表32各數代入上列公式：

$$S.D.=\sqrt{\frac{11(26528)-(538)^2}{(11)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{291808-289444}{121}}$$

$$=\sqrt{\frac{2364}{121}}$$

$$=4.420$$

若記分不大時，此法極為合用，且遇記分內無確實均數時，(除不盡之均數)可免因取捨小數而生之錯誤，蓋用此法乃直接從X平方總和內減X總數，不必從X平均數內減X，致引起小數出入之錯誤也。例如本題之平均數為48.909有奇，若從除不盡之均數求差，錯誤自所難免。

照經驗所得，凡六倍標準差可將百分之九十九個記分組距包括在內，此常例對於對稱分配或近似之對稱分配為尤合。例如表28以6乘標準差49.274，得295.644，此數幾將400個記分之總組距，完全包括在內。若從均數275.4375加上295.644之半數147.822，得和數423.2595，若減去147.822，則得127.6155。此兩個數目幾將次數分配內之記分完全包括在內，其未能括入者，僅末組之一個記分而已。

在對稱分配或近似對稱分配中，平均差約當標準差之$\frac{4}{5}$，其確實關係為：

$$A.D.=.7979\ S.D.$$

照表 28 所求平均差爲 40.455，標準差爲 49.274，標準差除平均差，得商爲 .8210，再觀表31之結果，平均差爲 5.497，標準差爲 6.982，標準差除平均差得 .7873，此兩數雖不能與確實相關數完全符合，而相差亦極微。此 0.7979 之數，原爲完全對稱分配中平均差與標準差之確實相關，若非完全對稱分配，則平均差與標準差之相關，僅能與此數相差不遠，而不能完全符合。

六倍標準差之值，既可將百分之九十九個記分組距包括在內，而平均差又爲標準差之 $\frac{4}{5}$，故若所求得者爲平均差，宜以 7.5 倍之，其答數亦可包括全組距內百分之九十九個記分之數。

上述均數一章，對於求數組平均數之方法，曾有所論述。其法將各組之均數一一求出，而用公式 $M = \frac{n_1M_1 + n_2M_2 + n_3M_3 \cdots\cdots}{N}$ 求總平均。本章將論述求數組標準差之總值，其法與求均數時所用者相類似。

若M爲諸組之均數，M_1及M_2爲各組之均數，而d_1及d_2爲各組之均差，則：

$$M_1 - M = d_1$$

$$M_2 - M = d_2$$

環中數M之差之總和爲：$n_1(\sigma_1^2 + d_1^2)$ 及$n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)$。是以若σ等於衆組數之標準差，則

$$N\sigma^2 = n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)$$

或 $$\sigma^2 = \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2\ \sigma_2^2 + d_2^2)}{N}$$

此乃求諸組標準差之公式也。

變量係數 Coefficient of Variability)——若兩種次數分配所用

之材料，分類，及單位，皆相同，則兩個標準差可直接比較。例如測量二組同種人類之高度而比較之，因測量者同爲人類高度，而所用單位亦相同，故二個標準差可直接比較。苟所測量之兩次數分配性質不同，單位各異，則標準差即不能直接比較，而須先化成變量係數方能比較。所謂變量係數者，即標準差對於均數之百分數也。其公式爲 $c=\frac{S.D.100}{M}$

變量係數爲表示標準差與均數之比例常數，既爲比例，便不用單位，故兩個不同單位之標準差化成變量係數，即可比較，今以表 30 及表31兩例題來證明之。

表30所載者爲黃豆每區之產量，單位爲克，表31所載者爲燕麥麥桿之高度，單位爲公分。表30之標準差爲 49.274克，表31之標準差爲6.982公分。若僅就數字而論，則第一標準差較第二標準差大數倍，惟兩者之單位既不相同，孰大孰小實無從比較。是非將兩個標準差各以其平均數乘之，使成爲平均數之百分數，或變量係數，而後比較，始爲公允。茲求得黃豆產量之變量係數爲 17.889，而燕麥株桿高度之變量係數則爲9.834。黃豆產量之變量雖較燕麥株桿高度之變量爲大，惟所大者亦祇兩倍，而非若標準差所表示者有八倍之多也。

標準差及變量係數皆爲測量差異之指數，若二個次數分配性質不同而單位各異時，須用變量係數爲妥。故變量係數在統計學上頗切實用，惟若遇均數極小標準差極大，標準差甚至大過均數時，吾人用變量係數來解釋結果，須格外留心。因均數小而差數大所得之百分數必更大。換言之，變量係數因受小均數而擴大也。

四分位差 (Quartile Deviation) ——中位數爲X 軸上之一點，此

點將所有記分平分爲二，上章蓋已言之。今將進而討論四分位數 Q_1,Q_2 及Q_3之各值。

第一四分位數 Q_1亦依X軸上之一點，此點之左包括總值之$\frac{1}{4}$，右有總值$\frac{3}{4}$。Q_3 則係X 軸上之另一點，在其左者有總值$\frac{3}{4}$，在其右者有總值$\frac{1}{4}$。Q_2 即中位數。X———$\underset{Q_1}{|}$———$\underset{Q_2}{|}$———$\underset{Q_3}{|}$———X'

四分位差可用下列關係決定之：

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

其係數係從中位數除四分位差而得$\frac{Q}{Mi}$，其用度有時與變量係數相同。

Q_1及Q_3 之值或可以求中位數之同一方法求之，今以求中位數時所用表 18 之資料來演算 Q_1,Q_3 之求法。

記分總數 =40)

總數之$\frac{1}{4}$ =100

自第一組至第四組之組數，亦即 225.0—249.9 一組以上之個數 = 61

61與100之差 = 39

$$Q_1=225.0+\left(\frac{39}{69}\times 25\right)=239.130$$

用同一方法求Q_3

記分總數 =400

總數之$\frac{3}{4}$ =300

自第一組至第八組之次數和或 300.0—324.9 一組以上之次數 =275

275與300之差 = 25

300—324.9之次數分配　$= 57$

$$Q_3 = 300.0 + \left(\frac{25}{57}\times 25\right) = 310.965$$

從Q_1及Q_3得

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{310.965 - 239.130}{2}$$

$$= 35.9175。$$

凡屬對稱分配或近似對稱分配，標準差與四分位差有一定關係如下：

$$Q = .6745 \times S.D.$$

四分位差等於標準差之三分之二而有餘，此等一定關係，在統計上極爲重要，將於下章詳述之。

表28之標準差爲 49.274，若四分位差 35.9175 被標準差除之，得商 0.7289，此數較 0.6745 略大。若表28 之次數分配爲對稱的，則四分位差與標準差之比當爲 0.6745。

上述三種離差常數——平均差，標準差，及四分位差——爲測量絕對變異之常數，其單位隨記分之單位而定。平均差與四分位差僅可表示差異之大概情形而已，用度不若標準差之廣。三者之中，四分位差最易計算，惟除對稱或近似對稱之次數分配外，四分位差所能表示之差異，遠不若標準差之切實。至於變量係數則可用來比較兩種不同次數分配，若有兩種單位不同之標準差，各化成變量係數或百分數，便可互相比較而無礙。

第六章

簡單相關

以上兩章——地位常數及離中差——所敍述者，僅一次注意一個性狀之變異而已，例若測驗人羣之高度，用上法可知人類之高矮情形何如，測驗輕重則知其輕重範圍何如，至於人類高矮與其體重有否關係，關係程度如何，此種有關兩個變異之性狀測驗，則非上述方法所能蕆事。吾人在研究生物，社會，經濟，等統計問題時，對於尋求兩種事物之相互關係，實較專攷一種性狀之單獨變異爲重要。有時一種結果之成功，常爲二個或數個因子所釀成，而此數個因子對於結果之關係及因子與因子間之相互關係，皆爲科學家所重視，而欲一窮其究竟者。今試以測量人類之高度與重量爲喻，某甲體高六十六吋，體重一百六十五磅。某乙體高六十八吋，則體重應多少？若以體重及體高平均增減而言，則根據某甲體重與體高之數目，求得身體每高一吋，重二磅半，照此推算，某乙比某甲高二吋，宜加重五磅，故某乙之重當爲一百七十磅。惟體高增加，體重是否隨增，其增加之比，是否如此簡單，皆成問題。若測量一百人之體高體重，其相互關係又何如，且事物之有相關，不僅限於體高體重，作物問題內此種關係亦極普通。例如小麥高度與產量關係，小麥穗長與籽

粒多少，農田大小與收成多少，雨量陽光對於作物之產量影響等等，種類繁多，不勝枚舉。故吾人若知各性狀之相關，便可設法以求關係之輕重，不同因子所發生之相互關係既不相同，而同因子在不同環境下所發生之影響，亦復各異，故有許多因子，既非絕對或完全相關，亦非完全不相關，其關係若接若離，難於斷定。

圖 12 之資料，係取自表33，記人類高度與重量之比較。圖中y 軸記高度，x 軸記重量，表中第一人重140 磅，高 67 吋，故圖上之點，當在 x 軸 140 y 軸67之交叉處。又第二人重 120 磅，高 62 吋，其交叉處適爲 x 線與y線之交點上，其餘各點，照此類推。

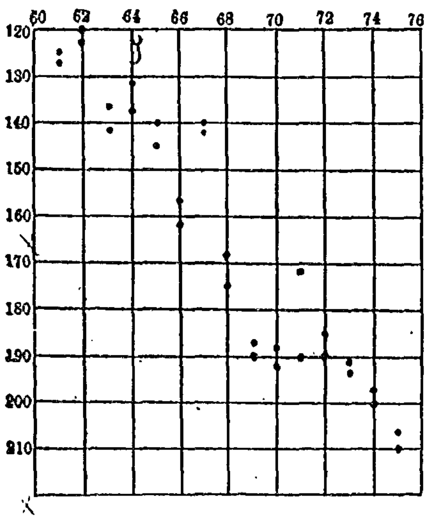


圖12.　散點圖示人類體重與體高之關係

表 3[illegible].

散點圖內所用之人類體重與體高之記分

體重(磅) x	體高(吋) y	體重(磅) x	體高(吋) y
140	67	127	61
120	62	206	75
191	73	123	62
140	65	137	64
172	71	187	69
190	69	145	65
175	68	197	74
210	75	185	72
132	64	157	66
190	72	194	73
125	61	142	63
192	70	190	71
200	74	142	67
136	63	168	68
162	66	188	70

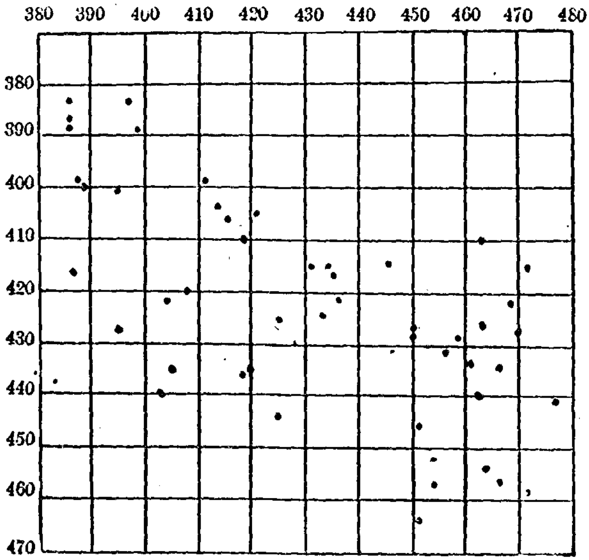


圖13. 散點圖示燕麥前五區平均產量與後五區平均產量之關係

今再以燕麥之產量製圖13以爲例。一點代表燕麥一個品種。y軸代表前五小區燕麥之產量，x軸代表後五小區之產量。圖示前五小區產量與後五小區產量相關之大概情形，此兩圖皆爲散點圖，僅示人以兩種變數性質上之關係而已，至於數量何如，既無表示，而組值一有更動，圖上各點，卽隨之移動，故極難比較。

今試再觀圖14，此圖各數取自表34，而表34卽爲表42之頭上十組之資料。圖上xx'代表每次第一期摘棉量之中點，yy'代表數期摘棉量之平均重量。觀表34第一項第一期摘棉量之中點爲12.5，平均數爲275.0，今在圖上xx'12.5處引申一線，使與yy'275.0處所引申之一線相切，在兩線之交切點上，畫一符號*，其餘各點依次記入。爲避免混亂起見，製圖時宜先從低值入手，漸次向右而進，各符號記畢，以線連之，如圖14。圖表之爲用頗有限，因圖表僅示性質之相互變遷，而未有確實數目可與類似之事物相比較，故以圖表顯示因子之相互關係，殊爲學者所不滿，而用數量來表示相互關係，實爲統計學上所切要，此種以數量表示相關之方法，名目繁多，今當分述如下。

相關係數(Correlation Coefficient)—— 凡比較兩種事實，須用數量表示，方能示人以確實之相關程度，若圖則僅示人以比較之大概情形，而不能予人以比較之眞義。且統計時所研究之事物，爲數常鉅，須有簡明方法，始能將繁複情形，歸納比較，而使閱者一目了然。此種簡明方法，卽現在所敍述之相關係數，故相關係數爲測量相互關係之最普通方法。此法可用以測量直線相關，(Linear correlation) 所謂直線相關者，卽所圖示之各點，可用直線相連，若圖14所示之平均數，卽爲直線相關。

表 34.

棉花首次摘棉量與平均摘棉量記錄

首次摘棉量之中點	總摘棉之平均數
12.5	275.0
37.5	356.0
62.5	344.7
87.5	385.0
112.5	431.0
137.5	462.7
162.5	514.0
187.5	537.5
212.5	623.4
237.5	595.8

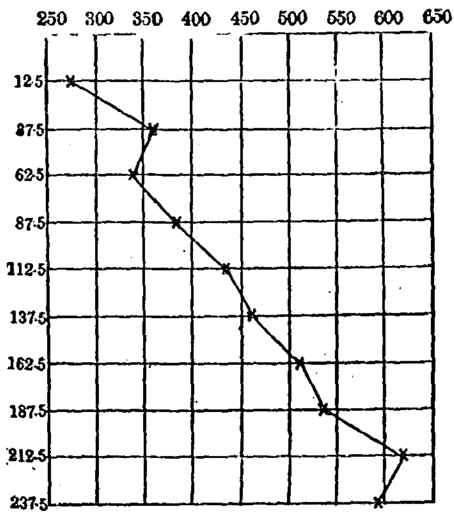


圖14. 曲線圖示棉花首次摘棉量與平均摘棉量之關係

求相關係數之符號爲r，公式爲：

$$r=\frac{\Sigma xy}{N(\sigma_x\sigma_y)}$$

在此公式中，x代表項x平均數之差數x，y代表項y平均數之差數y，σ_x及σ_y係x及y之標準差，N代表次數總和，或兩個相對性狀之對數。

照上列公式，可知r之價值，隨所研究之性狀差異及其對數而定，而決定此種差異者又爲標準差，是以計算相關係數時，除用標準差以求差異外，尙須決定各個數之離均現象。爲計算便利起見，公式內之標準差，可由假定均數內求之，故相關係數之公式，又可改成：

$$r=\frac{\frac{\Sigma D_xD_y}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

此公式內之ΣD_xD_y，可逕以ΣP代表之，故ΣP卽爲各x項假定均數差數和及y項假定均數差數和之積，而c_x及c_y係x均數與y均數之校正量，σ_x及σ_y係x及y由假定均數求得之標準差。

若所研究之記分數目不大時，可勿分組而直接由組值中求相關係數，表35引證不分組求相關係數之方法，所用公式爲由假定均數求相關係數之公式，x之記分得自首先五小區之燕麥產量記錄，y則爲末後五小區之燕麥產量記錄。

計算相關係數之第一步爲決定假定均數G，再由D值求標準差，此與求標準差時所演算者大致相同，惟以前所算者爲一個變異x，而此章所算者爲兩個變異x及y而已。今試觀表35x之假定均數G_x爲435，y之假定均數G_y爲420，G_x值與G_y值各與其x值及y值相較，而將其差填入D_x及D_y項下。正負兩數相抵消後，D_x和爲70，D_y和爲97，各以次數和20除

表 35. 從不分組材料求相關係數之方法

x代表燕麥每品種頭五區之產量，y代表燕麥每品種末五區之產量

前五區 x	後五區 y	D_x	D_y	D_x^2	D_y^2	D_xD_y 或 ΣP
467	435	32	15	1024	225	480
408	420	-27	0	729	0	0
447	432	12	12	144	144	144
395	429	-40	9	1600	81	-360
475	442	40	22	1600	484	880
399	389	-36	-31	1296	961	1116
436	421	1	1	1	1	1
521	495	86	75	7396	5625	6450
451	447	16	27	256	729	432
461	433	26	13	676	169	338
425	425	-10	5	100	25	-50
418	410	-17	-10	289	100	170
432	415	-3	-5	9	25	15
395	402	-40	-18	1600	324	720
450	427	15	7	225	49	105
421	405	-14	-15	196	225	210
468	423	33	3	1089	9	99
386	388	-49	-32	2401	1024	1568
457	431	22	11	484	121	242
458	428	23	8	529	64	184
		306	208	20)21644	20)10385	13154
N =20		-236	-111	1082.200000	519.250000	-410
G_x=435		20) 70	20) 97	12.250000	23.522500	12744
G_y=420		c=3.500	c=4.850	$\sqrt{1069.950000}$	$\sqrt{495.727500}$	
				σ= 32.710	σ= 22.265	

x平均數校正量 $= c_x = 3.500$　　$\sigma_x = 32.710$

y平均數校正量 $= c_y = 4.850$　　$\sigma_y = 22.265$

$$r = \frac{\dfrac{\Sigma D_xD_y}{N} - (c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\dfrac{12744}{20} - (3.500\times4.850)}{32.710\times22.265} = \frac{637.200000-16.975000}{728.288150}$$

$$= \frac{620.225000}{728.288150} = .852$$

之，得 c_x 爲 3.500，c_y 爲4.850，此兩數即爲校正量。是正是負，照D_x和及D_y和之符號而定，每行 D_x 值以其同行之 x 乘之，而得 D_x^2，照普通求標準差方法，以次數和除之，而後開方，得 σ_x 爲 32.710，用同一方法求得 σ_y 爲22.265，再以表內第三項 D_x 與第四項 D_y 相乘，而將其積寫於表內第七項D_xD_y或ΣP項下，正負兩數相消後，得D_xD_y和爲12744。

今求得：

$$\Sigma D_xD_y = 12744$$

$$N = 20$$

$$c_xc_y = 3.500 \times 4.850$$

$$\sigma_x\sigma_y = 32.710 \times 22.265$$

以諸數代入上列公式：

$$r = \frac{\frac{\Sigma D_xD_y}{N} - (c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{12744}{20} - 3.500 \times 4.850}{32.710 \times 22.265}$$

$$= \frac{620.225000}{728.288150}$$

$$= 0.852$$

相關係數既爲 0.852，可知 x 產量與 y 產量之增減有相互關係，x 產量增加時，y 產量亦隨之而增。

若所研究之記分數目極大，以上述不分組方法來計算之，錯誤極易發生，故在計算之前，宜先排列相關表，(correlation table)若有計算機，則用機器求各數之積及和，較爲妥便，今以表 35 之資料，作圖以示相關

表之製法。

製相關表時，先決定x與y之組距範圍，此可照普通選擇組距之原則而定。組距之大小，初無一定，惟須次數分配得當而已。（參照第二章次數分配）照圖15以y為直線x為橫線，故y組距在圖之左邊直線上，x組距在圖之上端橫線上，為避免混亂起見，做相關表時，x與y之值同時並找，自表中第一個數目起，依次填入。例如表35x第一值為467，y第一值為435，x467之一值，屬於橫線460－469.9一組內，y435一值，屬於直線430.0－439.9一組內。吾人先自直軸內找到430－439.9一組，然後順着此方格，往右看至直軸460－469.9一組，即在此縱橫軸所成之方格內，以筆劃一直線，如圖15。畫第二直線時、用同樣方法找得橫軸400.0－409.9，及縱軸420.0－429.9所成之方格。其餘各數，依次一一記入，而相關表遂告成功。此種相關表又名為雙列表，(double-entry table) 以xy兩性狀同時記入也。

y ＼ x	380.0 389.9	390.0 399.9	400.0 409.9	410.0 419.9	420.0 429.9	430.0 439.9	440.0 449.9	450.0 459.9	460.0 469.9	470.0 479.9	
380.0-389.9	/	/									2
390.0-399.9											0
400.0-409.9		/			/						2
410.0-419.9				/		/					2
420.0-429.9		/	/		/	/		//	/		7
430.0-439.9							/	/	//		4
440.0-449.9								/		/	2
	1	3	1	1	2	2	1	4	3	1	19

圖15. 圖示相關表之排法，資料得自表35。

附註　表中有一數x＝521，y＝49，因省篇幅，未曾排入圖中、

表 36.

從分組材料求相關係數之方法

x代表每株穀粒之平均重量(糎)，y代表每株高度(公分)

		x 12	13	14	15	16	17	18	19	f	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或 ΣP
y	55.0-59.9				2					2	-3	-6	18	2	-6
	60.0-64.9		2	5	3	1				11	-2	-22	44	3	-6
	65.0-69.9	1	12	22	8	2				45	-1	-45	45	-2	2
	70.0-74.9	3	27	52	43	10	2	2	1	140	0			49	0
	75.0-79.9		11	50	42	15	3		1	122	1	122	122	75	75
	80.0-84.9	1	2	25	26	14	2	1		73	2	146	292	62	124
	85.0-89.9			4	2		1			7	3	21	63	5	15
												289	584	196	216
f		5	54	158	128	42	8	3	2	400		-73		-2	-12
												216		194	204
D_x		-2	-1	0	1	2	3	4	5						
fD_x		-10	-54		128	84	24	12	10 =	194					
fD^2_x		20	54		128	168	72	48	50 =	540					

$$c_x=\frac{194}{400}=.485 \qquad r=\frac{\frac{\Sigma P}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{540}{400}-(.485)^2}=\sqrt{1.350000-.235225}=1.056 \qquad r=\frac{\frac{204}{400}-(.485\times.540)}{1.056\times1.081}$$

$$c_y=\frac{216}{400}=.540 \qquad =\frac{.510000-.261900}{1.141536}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{584}{400}-(.540)^2}=\sqrt{1.460000-.291600}=1.081 \qquad =\frac{.248100}{1.141536}=.217$$

此種製圖方法，手續雖簡，校對頗難，校對時惟有另製一圖，而觀所填各數，是否相同，若有不符，祇好重做一圖來校對之。重複做圖，費時多而錯誤亦易發生，故遇數目繁多時，用卡片分類，然後填表，較為妥便。

用卡片填表之法，在第二章次數分配內曾略述之。所需卡片張數，與計算之個數常相同。因每一卡片，祇記一個事物之各性狀而已。例如某所研究者為四百株燕麥之x,y,z,u，四種性狀，先將卡片四百張，將每株燕麥之四個性狀分別抄入，並決定各性狀之組距，而列入一相關表，先以x性狀照組距分開，凡卡片上同組之x值分成一束。卡片分完，即行校對，有否錯誤，若無錯誤，即取出第一束卡片（見表36x值第一組為12，第二組為 13……）而將y值分開，凡同組之y值自成一小束，計x值第一組共有五個，分成三個y小束，一個在y組距65.0—69.9內，三個在y組距70.0—74.9 內，另一個在y組距80.0—84.9內。第一組分畢，再分x值之第二組，計第二組內共有 54 個，分成五個y小束，第一束有2 個，第二束有個，第三束有27個，第四束有11個，第五束有2個，詳見表36。其餘各組卡片，依次一一分好，校對無訛，即可將每組內每小束卡片依次填入相關表內，如此製圖，錯誤較少。在抄寫卡片及分離卡片時，已一再校對，錯誤易除，且為慎重計，在相關表填好後，可將卡片重複根據y 值分組，再從 y 組內分開x小束，而與表上根據x組分y 小束之次數相校對，兩相符合，即知無訛。所研究之相關性狀，若有五六個，則仍照上法，以關係最多之一性狀為標準，分成各組，然後將其第一個相關性狀分成小束，而填入表中，校對無訛，乃從已分好之組內，將第二個相關性狀，分開填表，依次而及第三第四等相關性狀。分好之卡片，仍用橡皮圈紮好，可當

作記錄副本，為隨時參考之用。凡重要試驗記錄，必備副本，俾正本可謹慎收藏，以備不時之需。故卡片之為用，非但便於填寫及校對相關表，且在研究性狀時，又可代替記錄副本之用，是則抄寫卡片雖費時間，而所得亦甚大也。

相關表填好後，即可求相關係數，計算法詳見於表36。表中x值代表每株燕麥之穀粒平均量，單位為厘，y代表麥桿之平均高度，單位為公分。表中f，D_y，fD_y，及fD_y^2與 D_x，fD_x，及fD_x^2等各項，算法與求標準差之方法相同。所用者為單位進級法，(unit-step method) 求得σ_y為 1.081，σ_x為1.056，惟相關係數之公式為 $r=\dfrac{\frac{\Sigma P}{N}-c_xc_y}{\sigma_x\sigma_y}$ 故求得σ_x及σ_y外尚須求$\frac{\Sigma P}{N}$，而ΣP即為$\Sigma(D_{xa}D_y)$，此數可分兩步求之。先求D_{xa}，再求$D_{xy}D_y$之積，求D_{xa}之步驟，較為繁複，茲將算法，另詳附表。

y 組	y組內之x次數乘D_x之積	總和或D_{xa}
55.0-59.9	2×+1	+ 2
60.0-64.9	2×-1,5×0,3×+1,1×+2	+ 3
65.0-69.9	1×-2,12×-1,22×0,8×+1,2×+2	- 2
70.0-74.9	3×-2,27×-1,52×0,43×+1 10×+2,2×+3,2×+4,1×+5	+ 49
75.0-79.9	11×-1,60×0,42×+1,15×+2,3×+3,1×+5	+ 75
80.0-84.9	1×-2,2×-1,25×0,28×+1,14×+2,2×+3,1×+4	+ 62
85.0-89.9	4×0,2×+1,1×+3	+ 5
		+196 - 2 +194

觀表36y55.0—59.9一組內共有次數2個，而此兩次數皆在x組15項下，再沿D_x一行，查得x組值15項內，D_x爲1，故2乘1等於+2。又y60.0—64.9一組內，共有11個，其中2個在x組13項下，而此項之D_x爲－1，故2乘－1等於－2；5個在x組14項下，而此項之D_x爲0，故5乘0等於0；3個在x組15項下，而此項之D_x爲1，故3乘1等於3；1個在x組16項下，而此項之D_x爲2，1乘2等於2，今以－2，0，+3，及+2相加，而得+3。其餘各組，依法計算，求得D_{xs}各行之值而相加，得D_{xs}和爲194，此數既爲各項D_x乘次數之總和，故宜與fD_x總和相等。苟兩個答數ΣD_{xs}及ΣfD_x不相等，則計算必有錯誤，須重算。若fD_x總和與D_{xs}總和相等，則知計算無訛，而可進求$D_{xs}D_y$值。其法卽以D_{xs}之各數，乘同行之D_y，而將其結果寫在$D_{xs}D_y$項內。例如D_{xs}第一行爲+2，D_y爲－3故$D_{xs}D_y$爲－6。求得$D_{xs}D_y$總和或ΣP爲204，此爲各個數離假均數之總和，以總數N除之，得$\Sigma P/N$ .0510000，此積數既由假定均數求得，故須以校正量c_x及c_y之積校正之。以各數代入公式：

$$r=\frac{\frac{\Sigma P}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r=\frac{\frac{204}{400}-(.485\times.540)}{1.056\times1.081}=0.217$$

0.217卽爲相關係數，不必再以組距乘之，此點極爲重要，希讀者注意。用單位進級法求標準差時，所得結果，須以組距乘之，上章曾一再詳言，惟相關係數之結果，不可以組距相乘，卽ΣP及$\sigma_x\sigma_y$亦均不必以組距乘之。其理由則因相關係數爲$\Sigma P-c_xc_y$與$\sigma_x\sigma_y$之比，今$\Sigma P-c_xc_y$及

$\sigma_x\sigma_y$既皆以單位進級法求得，若$\sigma_x\sigma_y$以組距乘之，$\Sigma P-C_xC_y$亦須以組距乘之，分子與分母以同一組距相乘，結果與不乘相等。若乘標準差而忘乘$\Sigma P-c_xc_y$，則反生錯誤，故在求相關係數時，不必以組距乘之，而求標準差時，則標準差與其校正量，皆須以組距相乘。關於此點，初習者每易弄錯，是宜切實注意者。相關係數 r 既爲0.217，可知燕麥桿高與籽重，確有相當關係，至於兩者之關係密切與否，可從相關係數之最高值比較而得。若係完全相關，其係數當爲1，舉例證明如下。

x	y
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

上表載 x 值等於1，y值亦等於1，若x值進 1 而成2，則y值亦進 1 而成2，總之x以 1 遞進，y值亦以 1 遞進，至x值爲10，y值亦爲 10 而止。今以上表列成相關表如表37，直軸代表x值，橫軸爲y值，第一個x等於1，y亦等於1，故相關表左手第一個方格內宜劃一直，第二個x爲2，y 亦爲2，故第二直線與第二橫線所成之方格內宜劃一直，餘可類推。相關表排好，相關係數，即可用上法求得。

表 37. 完全正相關表舉例

		x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	x 9	x 10	f	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或ΣP
y	1	1										1	−4	−4	16	−4	16
	2		1									1	−3	−3	9	−3	9
	3			1								1	−2	−2	4	−2	4
	4				1							1	−1	−1	1	−1	1
	5					1						1	0				
	6						1					1	1	1	1	1	1
	7							1				1	2	2	4	2	4
	8								1			1	3	3	9	3	9
	9									1		1	4	4	16	4	16
	10										1	1	5	5	25	5	25
														15	85	15	85
														−10		−10	
														5		5	
f		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10					
D_x		−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5						
fD_x		−4	−3	−2	−1		1	2	3	4	5	= 5					
fD^2_x		16	9	4	1		1	4	9	16	25	= 85					

$$c_x = \frac{5}{10} = .5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{85}{10} - (.5)^2} = \sqrt{8.50 - .25} = \sqrt{8.25}$$

$$c_y = \frac{5}{10} = .5$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{85}{10} - (.5)^2} = \sqrt{8.50 - .25} = \sqrt{8.25}$$

公式爲

$$r = \frac{\frac{\Sigma P}{N} - (c_x c_y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

以所得值代入

$$r = \frac{\frac{85}{10} - (.5 \times .5)}{\sqrt{8.25} \times \sqrt{8.25}}$$

$$= \frac{8.50 - .25}{8.25}$$

$$= \frac{8.25}{8.25} = 1.00$$

用相關係數公式，逐步求得結果如下。假定均數爲5，x及y之校正量皆爲0.5，x及y之標準差皆爲$\sqrt{8.25}$，ΣP爲85，N爲10，今以各數代入公式：

$$r=\frac{\frac{\Sigma P}{N}-(c_x c_y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r=\frac{\frac{85}{10}-(.5\times .5)}{\sqrt{8.25}\times\sqrt{8.25}}=\frac{8.50-.25}{8.25}=1.00$$

若上舉例題x與y值完全相關時，相關係數爲1，故r值最大爲1，兩種發生正相關時，其r值總在0.0至1.0之間，是以正相關之最小值當爲0.0最大值爲1.00。

今若另有一問題，當y爲1時，x爲10，y爲2時，x爲9，至y爲10時，x爲1，一增一減，適成下列兩行：

x	y
10	1
9	2
8	3
7	4
6	5
5	6
4	7
3	8
2	9
1	10

表 38. 完全負相關表舉例

		x 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	j	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或ΣP
y	1										1	1	−4	−4	16	4	−16
	2									1		1	−3	−3	9	3	−9
	3								1			1	−2	−2	4	2	−4
	4							1				1	−1	−1	1	1	−1
	5						1					1	0				
	6					1						1	1	1	1	−1	−1
	7				1							1	2	2	4	−2	−4
	8			1								1	3	3	9	−3	−9
	9		1									1	4	4	16	−4	−16
	10	1										1	5	5	25	−5	−25
														15	85	10	−85
f		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10		−10		−15	
														5		= 5	
D_x		−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4						
fD_x		−5	−4	−3	−2	−1		1	2	3	4	=−5					
fD^2_x		25	16	9	4	1		1	4	9	16	=85					

$$c_x=\frac{-5}{10}=-.5$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{85}{10}-(-.5)^2}=\sqrt{8.50-.25}=\sqrt{8.25}$$

$$c_y=\frac{5}{10}=.5$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{58}{10}-(.5)^2}=\sqrt{8.50-.25}=\sqrt{8.25}$$

公式爲

$$r=\frac{\frac{\Sigma P}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

以所得值代入

$$r=\frac{\frac{-85}{10}-(-.5\times.5)}{\sqrt{8.25}\times\sqrt{8.25}}$$

$$=\frac{-8.25-(-.25)}{8.25}$$

$$=\frac{-8.25}{8.25}=-1.00$$

若將上列各數依次排列，得相關表如表38，表 38 所求得各數，填入求r公式中，得結果如下：

$$r=\frac{\frac{\Sigma P}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r=\frac{-85-(-.5\times.5)}{\sqrt{8.25}\times\sqrt{8.25}}$$

$$=\frac{-8.50-(-.25)}{8.25}$$

$$=-1.00$$

因ΣP之值爲負，故相關係數亦爲負，此可知相關不定爲正，有時亦可爲負，而負相關之係數最大爲 −1.00，故 r 之限度爲 1.00 至 −1.00。換言之r值之變動，總不出乎 0 至 1.00，1.00 至 −1.00 而已。r之值爲正號時成正相關，意即甲數增加則乙數亦隨之而增；若 r 之值爲負號時，卽爲負相關，意卽甲數增加則乙數隨減。

表 39 爲另一相關表，示高粱每穗脫粒後之重量，與每穗未脫粒前之重量關係。

計算步驟詳表 39 中，算法與前同，茲不復贅。求得之 r=.938，此數較表 36 所得之相關係數高數倍。查 r 之最高值爲1.00，今所得者爲.938，可知全穗重量及籽粒重量之相互關係，實頗密切。

表39上有一點極宜注意者，卽y校正量爲正號，而x 校正量爲負號，故其積 c_xc_y 爲負。今將此負號之 c_xc_y 與正號之 $\frac{D_xD_y}{N}$ 相減，照代數減法，一正一負相減時，宜將兩數相加，故 $\frac{D_xD_y}{N}-(c_xc_y)$ 實爲 $\frac{D_{xa}D_y}{N}+c_xc_y$。演算時數目前之正負號既宜十分注意，而相乘相除後之符號，亦極須留

表 39. 高粱脫粒後之籽粒重量與未脫粒之全穗相關表

x代表籽粒重量　　y代表全穗重量

Y	x 2.00-9.99	10.00-17.99	18.00-25.99	26.00-33.99	34.00-41.99	42.00-49.99	50.00-57.99	58.00-65.99	f	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或ΣP
3.00-10.99	130								130	−2	−260	520	−260	520
11.00-18.99	70	289							359	−1	−359	359	−429	429
19.00-26.99		178	138						316	0			−178	0
27.00-34.99			168	41					209	1	209	209	41	41
35.00-42.99				84	3				87	2	174	348	90	180
43.00-50.99				3	37	2			42	3	126	378	83	249
51.00-58.99					7	15			22	4	88	352	59	236
59.00-66.99						1	1		2	5	10	50	7	35
67.00-74.99							2	2	4	6	24	144	18	108
75.00-82.99							1		1	7	7	49	4	28
											638	2409	302	1826
f	200	467	306	128	47	18	4	2	1172		−619		−867	
											19		−565	
D_x	−2	−1	0	1	2	3	4	5						
fD_x	−400	−467		128	94	54	16	10	= −565					
fD^2_x	800	467		128	188	162	64	50	= 1859					

$$c_x=\frac{-565}{1172}=-.482$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1859}{1172}-(-.482)^2}=\sqrt{1.586177-.232324}=1.164$$

$$c_y=\frac{19}{1172}=.016$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{2409}{1172}-(.016)^2}=\sqrt{2.055461-.000256}=1.434$$

$$r=\frac{\frac{1826}{1172}-(-.482\times.016)}{1.164\times1.434}$$

$$=\frac{1.558020-(-).007712}{1.669176}$$

$$=\frac{1.565732}{1.669176}=.938$$

意。校正量既有正有負，故 c_x 與 c_y 相乘，可有下列四種結果之可能，今以數字舉例如下。若差數平均積 $\frac{\Sigma D_{xa}D_y}{N}$ 爲 +10，校正量之積 c_xc_y 爲 +1，則相減而成 9；若差數平均積爲 −10，校正量積爲 +1 則 −10 減 +1 而成 −11，若平均積爲 +10 而校正量爲 −1，則相加而成11；若平均積及校正量皆爲負，則相減而成 −9。又

$$
\begin{aligned}
+\times+&=+\\
-\times-&=+\\
-\times+&=-\\
+\times-&=-
\end{aligned}
$$

表 40 爲燕麥籽粒數與其重量之關係，x代表每株之籽粒數，y 代表每株籽粒之平均重量，以𪏭爲單位，各步計算法及結果，皆詳載於表中。末項 $D_{xa}D_y$ 之總和爲負號，而校正量之積 c_xc_y 亦爲負號，故 $-D_{xa}D_y$ 減 $(-c_xc_y)$ 實成 $-D_{xa}D_y+c_xc_y=-\Sigma P.\Sigma P$ 既爲負號，被 $\sigma_x\sigma_y$ 除之，其商仍爲負號，故 r 爲負，而相關爲負相關，此可知每株燕麥之粒數增加時，其籽粒之平均重量有減輕之趨勢。

用單位進級法求得之相關係數，不必以組距乘之，前曾詳述。今更以表 41 之結果，證明如下。表 41 上之 x 軸及 y 軸並無組距，x 及 y 之相關係數則爲.665。

相關表上所以註明組值者，無非爲排列次數之用，故相關表一經排好，組值卽無用處。求相關係數時可根據表上次數逐步算得，組值大小與係數無涉，故相關係數旣不必乘組值，而表上有否組值，亦不必顧及也。今在表 42 再舉一例以明相關係數之用處，x 代表某區棉花之總產量，y代表某區第一次摘棉之產量，求得r值爲 .644，可知兩者之相關程度頗高。

表 40.　燕麥每株粒數與籽粒重量相關表

x代表每株籽粒數；　y代表每株籽粒平均重量(糎)

y ＼ x	0.0 49.9	50.0 99.9	100.0 149.9	150.0 199.9	200.0 249.9	250.0 299.9	300.0 349.9	350.0 399.9	400.0 449.9	450.0 499.9	f	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或ΣP
11.50-12.49			1								1	-5	- 5	25	- 2	10
12.50-13.49		1	2			1					4	-4	- 16	64	- 6	24
13.50-14.49	1	1	1	5	1	4	1	1	1		16	-3	- 48	144	- 1	3
14.50-15.49		2	7	9	6	15	7	2	1	1	50	-2	-100	200	15	-30
15.50-16.49		2	16	12	20	11	7	3	1		72	-1	- 72	72	-12	12
16.50-17.49		5	22	24	25	11	14	1	1		103	0			-37	0
17.50-18.49	1	7	21	22	20	9	3				83	1	83	83	-74	-74
18.50-19.49		1	12	11	5	6	1			1	37	2	74	148	-25	-50
19.50-20.49		2	6	6	3	1		1			19	3	57	171	-20	-60
20.50-21.49			4	5	1						10	4	40	160	-13	-52
21.50-22.49			3	1							4	5	20	100	- 7	-35
22.50-23.49											0	6	0	0	0	0
23.50-24.49				1							1	7	7	49	- 1	- 7
f	2	21	95	96	81	58	33	8	4	2	400		281	1216	15	-308
D_x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5			-241		-198	49
fD_x	-8	-63	-190	-96		58	66	24	16	10=	-183		40		-183	-259
fD^2_x	32	189	380	96		58	132	72	64	50=	1073					

$$c_x=\frac{-183}{400}=-.457$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1073}{400}-(-.457)^2}=\sqrt{2.682500-.208849}=1.573$$

$$c_y=\frac{40}{400}=.100$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1216}{400}-(.100)^2}=\sqrt{3.040000-.010000}=1.741$$

$$r=\frac{\frac{-259}{400}-(-.457\times.100)}{1.573\times1.741}$$

$$=\frac{-.647500-(-).045700}{2.738593}$$

$$=\frac{-.601800}{2.738593}=-.220$$

附註。　表中籽粒係數得之粒數，本無小數。惟為避免誤謬起見，組限仍寫小數點，例如第　組0.0－49.9意即凡數目之在50以下者皆屬此組，又第二組50.0－99.9凡50起至100之數皆屬之。

表 41. 不用組距求相關係數

x代表燕麥每莖之小穗數， y代表每株總產量(克)

y	x								f	D_y	fD_y	fD^2_y	D_{xa}	$D_{xa}D_y$ 或ΣP
	3								3	−2	−6	12	−9	18
	4	13	14	11	6	1		1	50	−1	−50	50	−40	40
	2	7	30	40	19	6	2		106	0			−13	0
		1	13	31	45	16	3		109	1	109	109	71	71
			2	15	33	20	9	1	80	2	160	320	102	204
					9	18	11	4	42	3	126	378	94	282
						4	2	1	7	4	28	112	18	72
							1	1	2	5	10	50	7	35
						1			1	6	6	36	2	12
f	9	21	59	97	112	66	28	8	400		439	1067	294	734
											−56		−62	
											383		232	
D_x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4						
fD_x	−27	−42	−59		112	132	84	32 =	232					
fD^2_x	81	84	59		112	264	252	128 =	980					

$$c_x=\frac{232}{400}=.580 \qquad c_y=\frac{383}{400}=.957$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{980}{400}-(.580)^2}=\sqrt{2.450000-.336400}=1.454 \qquad \sigma_y=\sqrt{\frac{1067}{400}-(.957)^2}=\sqrt{2.667500-.915849}=1.323$$

所得各值不必以組距相乘，可逕代入求r之公式內：

$$r=\frac{\frac{734}{400}-(.580\times.957)}{1.454\times1.323}=\frac{1.835000-.555060}{1.923642}=\frac{1.279940}{1.923642}=.665$$

表 42. 摘棉總產量 x 與首次摘棉量 y 之相關表

y \ x	100.0 149.9	150.0 199.9	200.0 249.9	250.0 299.9	300.0 349.9	350.0 399.9	400.0 449.9	450.0 499.9	500.0 549.9	550.0 599.9	600.0 649.9	650.0 699.9	700.0 749.9	750.0 799.9	800.0 849.9	850.0 899.9	f
0.0- 24.9	1	1		3		1	1										7
25.0- 49.9		1	2	5	3	3	3	2		2							21
50.0- 74.9		1	6	7	8	1	4	3	1		1	1					33
75.0- 99.9			3	11	2	19	10	4	3	1	1			1			55
100.0-124.9			1	7	10	14	12	10	11	5	4	1					75
125.0-149.9			1	1	6	14	14	13	11	5	3	4	1				73
150.0-174.9				2		7	11	11	9	4	7	3	3		2		59
175.0-199.9					2	3	2	7	5	13	3	3	1		1		40
200.0-224.9								5	3	5	5	6	4	2		1	31
225.0-249.9							1	2	4	8	4	1	1	3			24
250.0-274.9								1	6	1	1	4	1				14
275.0-299.9								1	1	1			1				4
300.0-324.9									2		3						5
325.0-349.9												1			1	1	3
350.0-374.9														1			1
375.0-399.9												2	1				3
400.0-424.9														2			2
f	1	3	13	36	31	62	58	59	56	45	32	26	13	9	4	2	450

各數用單位進級法求得

$c_x = 1.000$　　$c_y = -.691$

$\sigma_x = 2.811$　　$r = .644$　　$\sigma_y = 2.787$

計算相關係數時，r值一比率而已，觀圖16更可明瞭。圖16取材於表37。

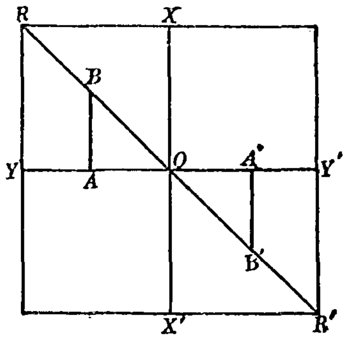


圖 16.

在圖16上先畫一RR'線，此線須穿過各行之各平均數而與代表x及y兩平均數之xx'及yy'線相切，若在YY'線A點上畫一垂直線，而與RR'線之B點相切，則成一OAB之三角形。OA及AB為不及x與y之平均數之距離，故為負號，若在YY'線A'點上畫一垂直線，使與RR'線上之B點相切，則OA'及A'B'為超過x及y平均數之距離，故為正號。RR'線既係穿過各行之各平均數者，故 $\frac{OA}{AB}$ 之比，可以代表x及y兩性狀之關係，在此情形下，OA等於AB，故 $\frac{OA}{AB}$ 之比為1.00，此為完全正相關應得之r值。同時OA可以代表x上任何價值，AB可以代表y之任何價值，是以吾人可將x及y之值代入OA及AB，而令 $r=\frac{x}{y}$ 代表x對於y之普通關係，或 $r=\frac{y}{x}$ 而代表y對於x之關係，今以表38各值，根據上述例子而求相關，其r值仍為1，惟其符號則為負號而已。

此種比率表示兩種性狀之關係，其比值根據研究時所用之度量而

定，因欲避免此種測度之阻礙，則 x 及 y 之值宜用同一測度，此可用圖 17 來證明之，圖 17 取材於表 39。

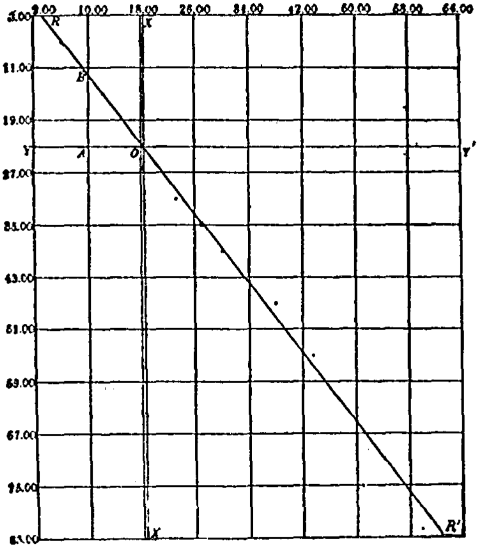


圖17　高粱脫粒後之籽粒重量與全穗重量關係

RR′ 係一適合各平均數之直線，（記線之法容後詳論）在 YY′ 線上劃一A點，此點處於x值等於 10 之地位上。由此A點畫一垂直線，令與 RR′線上之B點相切，因A點係在 x值爲10之地位，故自 x 平均數至A點之距離，當爲 8.144 (18.144－10.00) 量得AB之長爲 10.880，今以OA除 AB得 8.144/10.880＝.749。此比值可以代表x 及y之關係，故OA及AB以x或y之任何值代入之，當得同樣之比值.749。

苟兩個變異之差異用標準差來測量，而兩個標準差σ_x及σ_y復相同，

則逕從 $\frac{OA}{AB}$ 之比求之，可得近似之相關係數。若兩個標準差不相同，則 OA 與 AB須各以其標準差除之，而後相比成爲 $r=\frac{OA/\sigma_x}{AB/\sigma_y}$ 之公式。

表39之$\sigma_x=1.164$以組距8乘之，得9.312，$\sigma_y=1.434$ 以組距 8 乘之，得 11.472，以各值代入上列公式：

$$r=\frac{8.144/9.312}{10.880/11.472}=\frac{0.875}{0.948}=0.923$$

此數 0.923 與表 39 所求得之相關係數 0.938 相差無幾，故相關係數亦可用上列比式來代表之。

迴歸線（Regression Line）——相關係數之效用在能表示所研究材料之相關程度，相關係數之另一重要用處，在能根據以往之經驗，推測同樣材料之結果。例如預知某地某時季雨量與小麥產量相關後，即可從雨量記錄而推測產量多少。又若人之高度與其重量有相當關係，則旣知人羣之重量後，即可推測其高度，此種問題即可用分析相關數之迴歸線來解釋之。

圖17之直線乃依照各點而得者，不甚準確，凡迴歸線之用來推測數目者，當用較爲準確之方法求得之。玆詳述於下：

玆假定一極簡單之迴歸線，各行之平均數適皆在此直線上，例如圖18。（用余爾氏圖）

令斜線 RR 之一端直達直線 MM_x，而爲BMA角之觸線，亦爲 $\frac{AB}{BM}$ 之比，今此數以 b_x 代表之，令 x 之相差數乃自 x 平均數 (M_x) 量得，而 y 之相差數乃自 y 平均數(M_y)量得，是以 y 之任何一行，在具有 N 次數時，可得下列之結果。

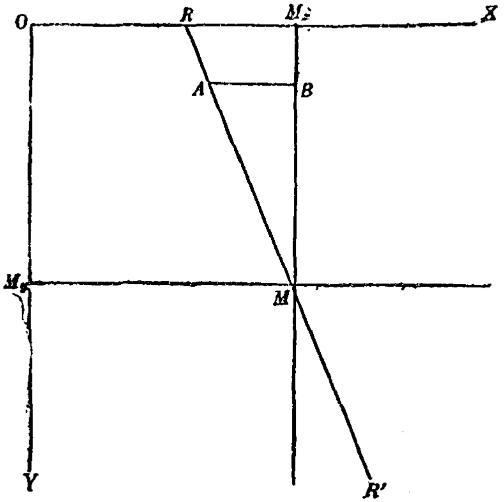


圖 18

$$\Sigma(x)=nb_1y$$

此值旣爲任何行之數值，則表內全數當爲：

$$\Sigma(x)=b_1\Sigma(ny)$$

y 旣代表 y 之離均差，故在相關表之全數，正 y 離均差當與負 y 離均差之數目相等，正負相消而

$$\Sigma(ny)=0$$

且 $\Sigma(x)=b_1\Sigma(ny)=0$

現已知x爲量自x平均數之差數，而Σx又等於零，故直線BM必經過 x 平均數，是以M_x確係 x 之平均數而無疑。

用同樣方法可證明凡經過諸縱行各平均數之直線，亦穿過此M點。由此可知凡迴歸線皆將交切於 M 點，而 M 點實爲全次數分配之平均。

數。換言之各迴歸線將交切於一點，此點卽 x 平均數直線及 y 平均數直線之交切點。

今試將求b_1之步驟列舉於下。b_1値可從xy之離均差積求得之，此積數可以 P 字代表之。

故　$p=\Sigma xy/N$ ……(1)

已知　$\Sigma(x)=nb_1y$ ……(2)

y次數分配任何行之差數之積

以 yx(2)　$\Sigma(xy)=nb_1y^2$ ……(3)

此代表任何行 x 與 y 之積，若求全表上 x 與 y 之積數當爲

$$\Sigma(xy)=b_1\Sigma(ny^2)$$

惟　$y^2=\sigma^2y$ ……(4)

以(4)y^2之値代入(3)$\Sigma(xy)=nb_1\sigma^2y$ ……(5)

$$b_1\sigma^2y=\frac{\Sigma(xy)}{n} \quad\cdots\cdots(6)$$

以 (1) 代入 (6) $b_1\sigma^2y=p$ ……(7)

$$b=p/\sigma^2y \quad\cdots\cdots(8)$$

沿用相關係數之公式

$$r=\frac{\frac{\Sigma xy}{n}}{\sigma_x\sigma_y} \quad\cdots\cdots(9)$$

以 (1) 代入 (9) $r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}$ ……(10)

$$p=r\sigma_x\sigma_y \quad\cdots\cdots(11)$$

以 (11) 代入 (8) $b_1=\frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sigma^2_y}$

故　$b_1=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ……(12)

惟 $$b_1=\frac{AB}{BM}$$

AB量自x尺度，BM量自y尺度，故MM_1線與RR線間之任何距離與BM段所量出之距離相比之結果與AB比BM之結果相同。今若以AB代表x間之任何差數，而BM代表y間之任何差數，則b_1或卽等於x/y，以x/y代入(12)則 $x/y=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

故 $$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

x代表離x平均數之差數，而y則爲離y平均數之差數，在圖示其地位時，吾等須知其原有之價値或單位，故吾等須注意其原用之尺度。玆不妨暫定：

$$x=X-M_x,\ y=Y-M_y\cdots\cdots\cdots(14)$$

以(14)代入(13) $(X-M_x)=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-M_y)\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$

在此公式中 M_x 及 M_y 代表x及y之平均數。

σ_x 及 σ_y 代表x與y之標準差，r爲相關係數，上列公式係x在y上之迴歸線。

用同樣原理求得y在x上之迴歸線之公式爲：

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$Y-M_y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-M_x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

玆將上列公式用表36之各數代入

$M_x=14.485\cdots\cdots\cdots$已校正之$M_x$

$M_y=75.200\cdots\cdots\cdots$ 已校正之M_y

凡求迴歸線時，其標準差須各以其組距乘之故 $\sigma_x=1.056\times1=$

$1.056, \sigma_y = 1.081 \times 5 = 5.405$

茲將平均數，標準差，及 r 各值代入 x 在 y 上之迴歸線公式中。

$$X - 14.485 = .217 \frac{1.056}{5.405} (Y - 75.200)$$

$$X - 14.485 = .217 \times .195 (Y - 75.200)$$

$$X - 14.485 = .042 (Y - 75.200)$$

$$X - 14.485 = .042Y - 3.158$$

$$X = .042Y + 11.327 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

若欲將所求得之 x 線及 y 線與相關表內各數相配合，可將擬定之 y 值代入上列 x = 042Y+11.327之方程式而求x值。

例若 Y = 60

$$X = .042(60) + 11.327$$

$$X = 2.520 + 11.327$$

$$X = 13.847$$

若 Y = 85

$$X = .042(85) + 11.327$$

$$X = 3.570 + 11.327$$

$$X = 14.897$$

若 Y = 75.200

$$X = .042(75.200) + 11.327$$

$$X = 3.158 + 11.327$$

$$X = 14.485$$

若將上列x 及 y各值，在相關圖上依次記好，而以線連之，並引申至圖

之盡頭，此線即爲迴歸線。

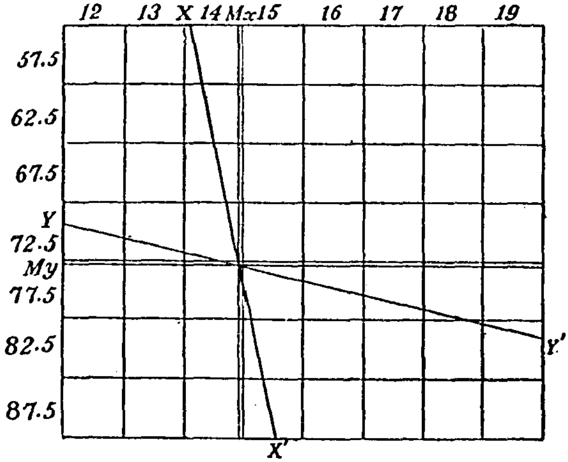


圖19 表36資料所配合之迴歸線。xx'表示 x 在 y 上之迴歸，YY'表示 y 在 x 上之迴歸。

$$Y-75.200=.217\ \frac{5.405}{1.056}(X-14.485)$$

$$Y-75.200=.217\times 5.118(X-14.485)$$

$$Y-75.200=1.111(X-14.485)$$

$$Y-75.200=1.111X-16.093$$

$$Y=1.111X+59.107$$

Y值不能從 x 在 y 上之迴歸方程式內求得，須另列一 y 在 x 上之迴歸方程式，而後將 x 各值一一代入以求Y值，其法與上述者相同。

$$Y=1.111X+59.107$$

若 X=13

$Y=1.111(13)+59.107$

$Y=14.443+59.107$

$Y=73.550$

若 $X=18$

$Y=1.111(18)+59.107$

$Y=19.998+59.107$

$Y=79.105$

若 $X=14.485$

$Y=1.111(14.485)+59.107$

$Y=16.093+59.107$

$Y=75.200$

若從 $Y=75.200$(y 之平均數)而求 X,則

$X=14.485$(x 之平均數)。

若從 x 之平均數 14.485 求 y 之平均數,則

Y 仍等於 75.200。

此可知 x 及 y 之迴歸線皆交切於一點,而此點又為 x 平均數及 y 平均數所交切之點。將所求得之 Y 三點用直線連之,則得 y 在 x 上之迴歸線,亦即預測線,今試根據 x 在 y 上之迴歸來求出 y 為 80.0—84.9 之一組時, x 當為何數。以 y 之組值 82.5 代入方程式:

若 $Y=82.5$

$X=.042(82.5)+11.327$

$X=3.465+11.327$

$$X=14.792$$

此數14.792爲 x 之推算值，今查得Y在80.0--84.9一組時，x值爲14.849，此數與推算數14.792相差無幾。

用迴歸線所預測之數目，與實在數目總略有出入，而在相關表上，首尾各組之值相差之數目尤大。此因首尾各組之個數少，故影響較大。若計算相關係數時所代表之個數愈少，則預測數與實在數相差亦愈大。惟無論次數增加之至如何程度，預測數與實在數總略有出入，其相差之程度或可以下列公式決定之。

$$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$$

S_x爲預測值之標準差，名爲 x 行之標準差，若將表36之 x 在 y 之各值代入上列公式：

$$S_x=1.056\sqrt{1-(.217)^2}=1.031$$

此數1.031爲 x 預測數目之標準差，即預測數目與實在數目相差爲1.031 其關係當在下章詳述。

預測 y 值在 x 上之差數，可用下列公式：

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

S_y爲 y 預測數之標準差，名爲 y 行之標準差，若將表36之 y 各數一一代入，則當 x 等於13，y 之預測平均數爲73.550，實在之 y 平均數則爲72.407。

$$S_y=5.405\sqrt{1-(.217)^2}=5.275$$

預測數73.550與72.407之差爲1.143，此數小於S_y或標準差5.275。若以表39之平均數，標準差，相關係數等代入 x 在 y 之迴歸方程式內得

$$X-18.144=.938\frac{9.312}{11.472}(Y-23.128)$$

$$X-18.144=.938\times.812(Y-23.128)$$

$$X-18.144=.762(Y-23.128)$$

$$X-18.144=.762Y-17.624$$

$$X=.762Y+.520$$

擬定Y各值而代入之，得x計算數如下：

當 $Y=11.00$ $\qquad X=.762(11)+.520$

$$X=8.382+.520$$

$$X=8.902$$

當 $Y=75.00$ $\qquad X=.762(75)+.520$

$$X=57.150+.520$$

$$X=57.670$$

當 $Y=23.128$ $\qquad X=.762(23.128)+.520$

$$X=17.624+.520$$

$$X=18.144$$

以表 39 各數代入，求得 y 在 x 上之迴歸方程式爲：

$$Y-23.128=.938\frac{11.472}{9.312}(X-18.144)$$

$$Y-23.128=.938\times1.232(X-18.144)$$

$$Y-23.128=1.156(X-18.144)$$

$$Y-23.128=1.156X-20.974$$

$$Y=1.156X+2.154$$

擬定 x 各值而代入之，得Y

當X＝10.00 $Y=1.156(10)+2.154$

$Y=11.560+2.154$

$Y=13.714$

當X＝58.00 $Y=1.156(58)+2.154$

$Y=67.048+2.154$

$Y=69.202$

當X＝18.144 $Y=1.156(18.144)+2.154$

$Y=20.974+2.154$

$Y=23.128$

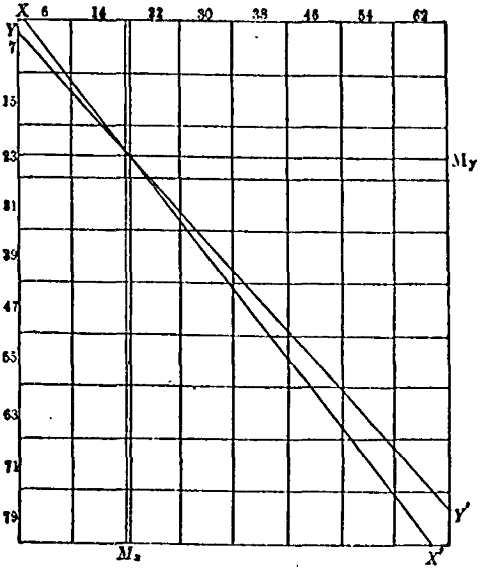


圖20 表39資料所配合之迴歸線。XX′表示x在y上之迴歸，YY′表示y在x上之迴歸。

此又得同樣之結果，凡 x 平均數為 18.144 時，迴歸線經過 y 之平均數 23.128，當 y 之平均數 23.128 被選時，x 之計算值為其平均數 18.144，此表示 x 平均數與 y 平均數兩迴歸線交切於同一點上。

上列預測各點，若用直線相連，即成二直線，見圖 20。

迴歸線除用以預測 x 或 y 之價值外，尚有別種用度，若用表 42 之平均數及標準差等代入 x 在 y 上之迴歸線方程式內，得下列各數：

$$X-475.000=.644\frac{140.550}{69.675}(Y-145.225)$$

$$X-475.000=.644\times2.017(Y-145.225)$$

$$X-475.000=1.299(Y-145.225)$$

$$X-475.000=1.299Y-188.647$$

$$X=1.299Y+286.353$$

選定 y 各值而求 x 之預測值：

當 $Y=25.0$　　$X=1.299(25)+286.353$

$X=32.475+286.353$

$X=318.828$

當 $Y=300.0$　　$X=1.299(300)+286.353$

$X=389.700+286.353$

$X=676.053$

仍用表 42 之資料代入 y 在 x 上之迴歸方程內：

$$Y-145.225=.644\frac{69.675}{140.550}(x-475.000)$$

$$Y-145.225=.644\times.496(X-475.000)$$

$$Y-145.225=.319(X-475.000)$$

$$Y-145.225=.319X-151.525$$

$$Y=.319X-6.300$$

選定 x 各値而求 y 之預測値:

當 $X=150.0$ $\quad Y=.319(150.0)-6.300$

$Y=47.850-6.300$

$Y=41.550$

當 $X=750.0$ $\quad Y=.319(750.0)-6.300$

$Y=239.250-6.300$

$Y=232.950$

爲欲明瞭預測數與實在數之關係，今以 y 組距 100.0—124.9 之中點代入，而得 x 預測値爲 432.490，此組內之 x 平均數爲 431.000。

由 S_x 之公式求得預測値標準差爲107.521:

$$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}=107.521$$

預測x均數爲432.490，實在x均數爲431.000，相差之數，在預測値標準差之內。

預測値標準差之意義，可用圖21之散點說明之。

在上圖中每一點代表一個個數，例如在 y45.0—49.9一組內有二個個數，係在x組 30.0—39.9內。其平均數，標準差，及 r 旣經決定，復求得 y 在 x 之迴歸線 RR'，再由公式求得其預測値之標準差爲 4.733。($S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}=4.733$)。

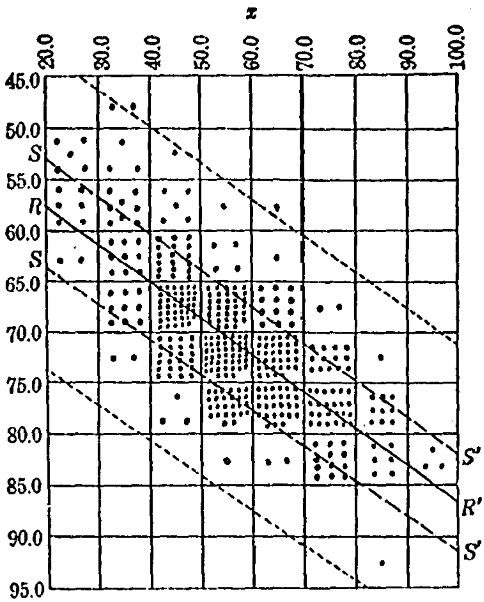


圖21 散點圖表示燕麥兩種性狀之關係。x代表每莖粒數，y代表每株高度(公分)。每一點代表一個數目．RR'綫表示x在y上之迴歸，RR'綫之上下各畫一SS'綫，SS'綫離RR'綫1σ，或一個預測標準差，在SS'綫之上下另畫一綫，此綫離RR'爲3σ或三個預測標準差。

在此迴歸線RR'之兩邊，於4.733距離上下，各畫一SS'線，復在RR'線之兩邊於3倍其距離4.733處上下各畫一線，在此兩綫中，幾將表上所有個數完全包括在內。至此吾人可回憶標準差之解釋：凡6倍標準差或3倍環均數上下之標準差所成之面積，可將百分之九十九個記分包括在內之一語，爲非訛．

上舉各例證明迴歸線可作預測期望數之用，故苟在普通環境內，有充分之觀察時，可用迴歸線來預測將來之結果。例如每年雨量與小麥產量經多年之記載後，學者卽可憑此記載，求得相關而從是年雨量之多少，推測同年小麥之生產。凡作此種預測時，其預測之標準差，當時顧及。

相關係數旣爲一種比率，故與單位無關，不同單位之事實，亦可相比。例如人羣之重量與高度之相關係數，可與右臂長度與食指長度之相關係數直接比較，雖所用之單位不同亦無妨，此點當於下章詳論之。

第七章

簡單相關(續)

第六章詳述直線相關之測量方法，及相關係數 r 對於兩種性狀之關係。根據一性狀之價值，用迴歸線 (regression line) 來推測第二性狀之價值，亦曾討論及之。有時記分之數目太小，不夠列一相關表，而其簡單關係又須決定，則用配合線 (fitted line) 來圖示，較為合宜。第六章圖 17. 所畫之配合線僅照圖中各點之遠近而畫成，故不甚準確，若根據最小平方 (least square) 之數學原理來用公式求一配合線，較為妥當。最小平方之原理及公式何來，此篇擬不贅述，總而言之，凡用最小平方法所求得之線，最為配合，因僅有此一線，其與各點距離之總和為最小。

直線(Straight Line)——本章首先討論之配合線當為直線。引證直線之如何配合，可假定下列諸點 (5, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1. 詳見圖 22) 而演算之。

代表 y 之第一價值為 5，此點當在第一縱坐標 (first ordinate)，y 第二值亦為 5，此點當在第二縱坐標 (second ordinate) 上，其餘各點，依次類推。此法以第一縱坐標為始點，亦即為起點，× 在此縱坐標上

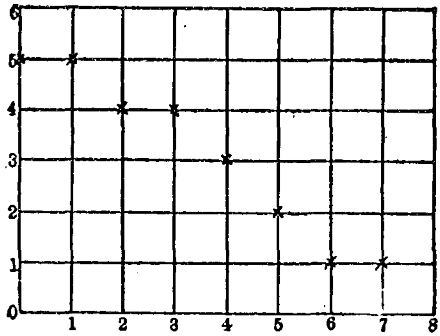


圖 22. 圖示直線配合之散點

爲 0，×之第二點爲 1，第三點爲 2，餘照此遞進。

若不以 0 而以 1 爲縱坐標之始點亦可，惟×之第一點亦當改爲 1，依次遞進爲 2, 3, 4 等數。若各縱坐標之距離皆相等，則×値可以單位遞進，在配合直線時最好能將各縱坐標排成同一距離，俾×得以單位遞進，若此點未能辦到，而致×不能按級遞進，則 y 之各距離亦必先有一定之規定。配合直線之公式爲：

$$y = a + bx$$

照此公式 y 爲未知數，須從 x 値求得之。x 値爲所求之 y 離開其始點之距離，爲已知數。a，b 爲兩個未知數，用此以構成求 y 之公式，若已知 a 及 b 之値，則 y 之値可照 x 所選定之値而求得之。b 決定直線傾斜度 (lino siopo)，故 b 爲負號，則線向下趨，b 爲正號，則線向上趨。

以已知之 x 及 y 値代入方程式 $y = a + bx$ 內，

從第一個觀察數起逐一代入：

$$5 = a + b(0)$$
$$5 = a + b(1)$$
$$4 = a + b(2)$$
$$4 = a + b(3)$$
$$3 = a + b(4)$$
$$2 = a + b(5)$$
$$1 = a + b(6)$$
$$1 = a + b(7)$$

總數 $25 = 8a + 28b$

若以每一方程式依次用 b 之係數乘之，在此方程中，b 之係數卽爲 x 值，其結果爲：

$$5(0) = a(0) + b(0)(0)$$
$$5(1) = a(1) + b(1)(1)$$
$$4(2) = a(2) + b(2)(2)$$
$$4(3) = a(3) + b(3)(3)$$
$$3(4) = a(4) + b(4)(4)$$
$$2(5) = a(5) + b(5)(5)$$
$$1(6) = a(6) + b(6)(6)$$
$$1(7) = a(7) + b(7)(7)$$

將各方程式歸併而得

$$0 = 0$$
$$5 = 1a + 1b$$

$$8=2a+4b$$
$$12=3a+9b$$
$$12=4a+16b$$
$$10=5a+25b$$
$$6=6a+36b$$
$$7=7a+49b$$
總和 $60=28a+140b$

此兩個總和卽成爲兩個方程式，第一方程式係將 y，a 及 x 之各值相加，a 之各項係數皆爲 1，故 8 個方程相加而成 8a。換言之 a 之係數卽爲方程數，故普通公式第一項可用 Σa 表示之。b 之係數卽爲 x 總和，今有 x 值爲 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 相加則成 28，卽爲 x 之係數。故普通公式第二項 b 之係數爲 $\Sigma(x)$。今將第一方程 $25=8a+28b$ 易以 x y 及 Σ 而後遷項，則成：

$$\Sigma a+\Sigma(x)b=\Sigma y$$

第二方程式 a 之係數爲 x 值之總和而 b 之係數爲 x 值平方總和，故第二方程式經遷項後，變成

$$\Sigma(x)a+\Sigma(x^2)b=\Sigma xy$$

上列二方程式用以求直線時，可先求得 x 值，x^2 總和，y 總和及 xy 之總和，若以此等數目代入上列普通方程式中，可求得 a 及 b 之值。實用時可不必將各方程式一一寫出，祇要將 y, a, x, x^2, xy 各項之值一一算出，如表 43：

以表 43 上之總數代入方程式內

表 43.

直線配合之必需項目

y	a	x	x^2	xy
5	1	0	0	0
5	1	1	1	5
4	1	2	4	8
4	1	3	9	12
3	1	4	16	12
2	1	5	25	10
1	1	6	36	6
1	1	7	49	7
25	8	28	140	60

方程式 I　$8a+28b=25$

方程式 II　$28a+140b=60$

用代數內之消去法及代數法，可求得 a 與 b 之值：

7×方程式 I　$56a+196b=175$

2×方程式 II　$56a+280b=120$

相減　$-84b=55$

$b=-0.655$

以 b 值代入上列方程式中，或仍用消去法皆可求得 a 值。

5×方程式 I　$40a+140b=125$

$28a+140b=60$

$12a=65$

$a=5.417$

以 a 值及 b 值代入求直線之方程式， $y=a+bx$，故此直線之方程式爲：

$$y=5.417-0.655x$$

a 值代表直線之始點，b 表示直線方向之上下，意即 $x=o$，y 縱坐標爲 5.417，當 $x=1$，$y=5.417-(.655\times1)=4.762$，故 x 之兩點一點爲 0，一點爲 1，而所求得直線 y 之兩點，一點爲 5.417，一點爲 4.762。已知兩點之地位，卽可畫一直線。再求得末一縱坐標之地點爲 $x=7$，$y=5.417-(.655\times7)=.832$。此第三點可用作校對，若計算無誤，此第三點當在線上。所配合之線見圖 23：

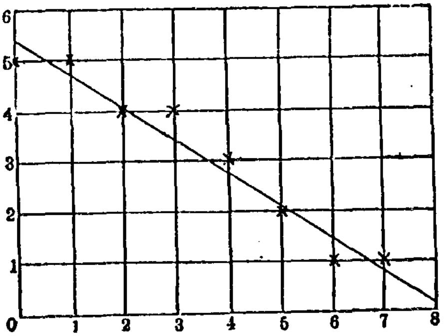


圖 23. 圖 22. 各點之直線配合圖

若觀察數目頗多時，x 及 x^2 之值可在表 I. 上查得之。100 以內之數目，可在皮爾生氏生物統計檢數表 XXVIII (Pearson's Tables for Statisticians and Biometricians) 中檢查。

上列各數 Σx 及 Σx^2 之值亦可由下列關係中求得之。

$$N\text{連續數之總和}=N\frac{(N+1)}{2}$$

$$N\text{普通數之平方總和}=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

若求 x 值 1 至 7 之總和，將 $N=7$ 代入上列第一方程式：

$$7\left(\frac{8}{2}\right)=28$$

若求 x^2 值之總和，以 $N=7$ 之數代入上列第二方程式

$$\frac{7(7+1)(14+1)}{6}=140$$

此種直線可用以測知各數之趨向，若兩個性狀之直線皆求得後，可知兩個性狀之相互關係，詳見圖 24. 資料取自第六章第 14. 圖，圖中直線表示摘棉平均產量與首次摘棉量之關係。

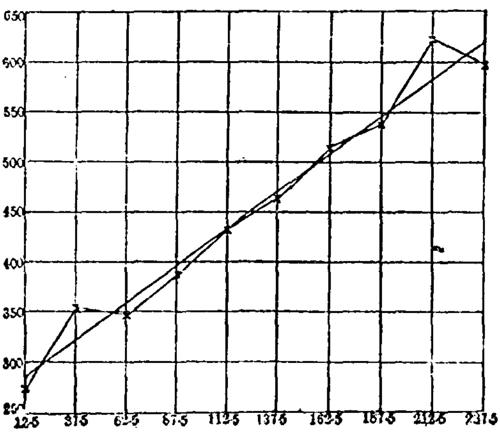


圖 24. 圖 14 各點之直線配合圖

(圖示棉花首次摘花量與總產量之關係)

表 44.

圖 24 直線配合之必需項目表

首次摘棉之中值	總產量之平均數 y	n	x	x^2	xy
12.5	275.0	1	0	0	0
37.5	356.0	1	1	1	356.0
62.5	344.7	1	2	4	689.4
87.5	385.0	1	3	9	1155.0
112.5	431.0	1	4	16	1724.0
137.5	462.7	1	5	25	2313.5
162.5	514.0	1	6	36	3084.0
187.5	537.5	1	7	49	3762.5
212.5	623.4	1	8	64	4987.2
237.5	595.8	1	9	81	5362.2
總數	4525.1	10	45	285	23433.8

用以求直線之 y, ax, x^2, xy 等值,詳載表 44. 若以之代入方程式得下列結果:

方程式 I　$Na+\Sigma xb=\Sigma y$

$10a+45b = 4525.1$

方程式 II　$\Sigma xa+\Sigma x^2b=\Sigma xy$

$45a+285b=23433.8$

以 4.5 ×方程式 I　$45a+202.5b= 20362.95$

方程式 II　$45a+285b = 23433.80$

相減　$-82.5b=-3070.85$

$b= 37.222$

以 b 值代入方程式 $10a+45\times37.222= 4525.1$

$$10a+1674.990=4525.1$$

$$10a=2850.110$$

$$a=285.011$$

求直線之方程式為　$y=285.011+37.222x$

當　$x=0$　$y=285.011+37.222(0)=285.011$

當　$x=9$　$y=285.011+37.222(9)=620.009$

直線亦可若迴歸線之用來預測結果，其用法當在表 45 上引證之。表中所載者為美國伊利諾省埃巴乃農事試驗場(Illinois Agricultural Experiment Station, at Urbana, Illinois,) 以增加玉米油質為目的之育種試驗。表 45. 所載記錄共有九個時期，每一時期包括三年，所列重量為三年之平均量。

根據頭上七時期之結果，求得直線之方程式為：

$$y=5.569+0.506x$$

表 45.

觀察數與直線推測數之比較表

年份	觀察數	計算數	推測值
1898	5.17	5.569	
1901	6.21	6.075	
1904	6.92	6.581	
1907	7.33	7.087	
1910	7.43	7.593	
1913	8.05	8.099	
1916	8.50	8.605	
1919	9.23		9.111
1922	9.96		9.617

試觀表中頭上七期之計算數與觀察數頗相符合，計算數第一項爲 5.569，b 爲二點間之距離，b 既爲 .506，故 5.569 加上 .506 卽爲第二點之地位 6.075。

根據七季之結果，用上列方程式所求得之第八及第九兩季之預測數，與觀察數相差頗微，若計算預測數目時，可將已知之直線再引申至下一點。（每點距離爲 b，卽等於 .506）其算法係在第七期之計算重量 8.605 下，加上 .506，得 9.111。或用方程式：

$y=5.569+(.506\times7)=9.111$，此預測數 9.111 可與觀察數 9.23 相比較。再將直線引申至第九點，則所得之數目，爲第九期之預測線數。$(9.111+.506=9.617)$。或用方程式得：

$y=5.569+(.506\times8)=9.617$，此預測數可與觀察數 9.96 相比較，所得預測數與觀察數皆相差不遠。吾等所宜注意者，卽用直線預測數目，祇宜於尋常環境下行之，若有特殊情形足使歷年記錄超出常軌而生更動，則以直線預測，卽不可靠。

直線之用度可再以表 46. 之記錄引證之。表中所載者爲伊利諾農事試驗場兩年來同一小區內之玉米產量。

用直線以比較每一小區在兩個不同年中之產量關係，可以二法行之。一法係用方格紙將1895年之產量寫於左邊，而將1896年之產量寫於右邊，然後將每年每區產量逐一在圖上點記，諸點相連而成直線，如圖25。

各小區間兩年間之關係，可在兩線之傾斜度上測度之。圖 25. 之兩直線，向同一方向傾斜，可知各區之環境適應性，第一年與第二年實有同一趨向。

表 46.

同區玉蜀黍兩年產量記錄表

（表中數字用作圖 25. 及圖 26. 之直線配合資料）

原來記錄			照1895年產量記錄所重排之記錄		
區號	1895年	1896年	區號	1895年	1896年
101	30.0	87.9	103	25.7	89.8
102	29.1	89.5	104	26.3	94.8
103	25.7	89.8	102	29.1	89.5
104	26.3	94.8	101	30.0	87.9
105	30.3	96.9	105	30.3	96.9
106	31.1	99.5	106	31.1	99.5
107	37.1	94.6	109	34.3	103.9
108	34.6	92.7	108	34.6	92.7
109	34.3	103.9	110	36.3	102.2
110	36.3	102.2	107	37.1	94.6

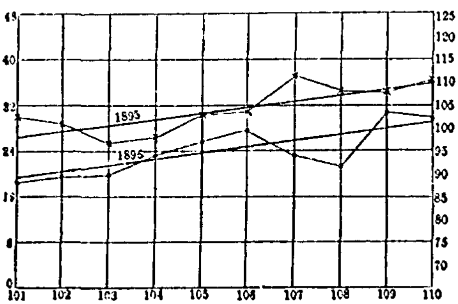


圖 25. 用表 46.第二第三項之資料所配合之直線圖，兩線傾斜度大致在同一趨向中，故第一年與第二年之產量有相互關係。

第二種用直線以比較關係之方法，則爲先將 1895 年之各區產量，由少至多，依次排列，見表 46. 右邊一幀，而將小區之號碼，一一塡在產量之左一行。

1896 年之各小區產量照 1895 年所排列，小區號碼逐一塡入表中最末一項，照此法則僅求出 1896 年之產量直線，即可知兩年之關係。因第一年 1895 年之各區照其產量大小而排列，故其所成之直線傾向，自應逐漸向上，今用上述求直線之普通方程式，求得 1896 年產量所成之直線如下：

$$y = 90.774 + .979x$$

所求得之直線，詳圖 26。第一年之直線傾向係遞升者，第二年所求得之直線傾向亦係上升，可知兩個不同年之同區產量自成關係。

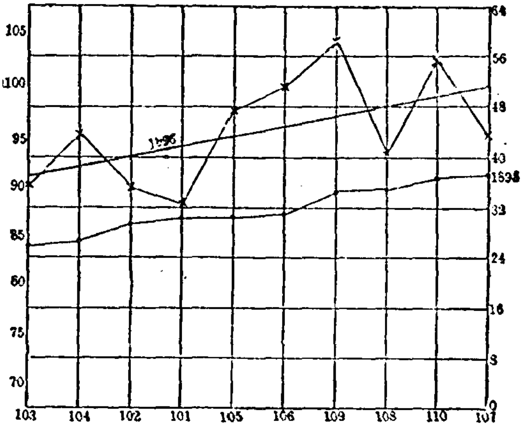


圖 26. 用表 46. 末一項之資料所配合之直線 1895 年之各區產量已依照產量排好，今 1896 年所配合之直線與 1895 年之直線成同一趨向，故兩年產量有相互關係。

表 47.

美國農部小麥播種量試驗之產量記錄表

(表中資料用作配合直線及拋物線)

每英畝播種量(配克)	七年平均產量	根據直線之計算量	根據二次拋物線之計算量	根據三次拋物線之計算量
2	8.9	10.610	9.157	8.758
3	10.3	11.021	10.538	10.669
4	12.3	11.432	11.677	12.006
5	12.9	11.843	12.574	12.865
6	13.1	12.254	13.229	13.342
7	13.5	12.665	13.642	13.533
8	13.8	13.076	13.813	13.534
9	13.6	13.487	13.742	13.441
10	12.7	13.898	13.429	13.350
11	13.5	14.309	12.874	13.357

拋物線 (Parabola)——直線之為用,頗有窮期,今試以表 47 之資料,以直線配合之,頗難得完美之結果。表 47 第一項載每英畝之播種量,第二項載實際產量(七年平均量),第三項即為用直線求得之推算產量,與實際產量相較,不甚符合。此種資料若以曲線 (curved line) 或拋物線 (parabola) 配合之,較為合適。故若在求直線之方程式內,再加上一項而使所求得之直線略成弧形,為用較廣。求此種彎曲形線之方程式,為 $y=a+bx+cx^2$。

此可稱為二次拋物線(second order parabola),直線則又名為一次拋物線 (first order parabola)。在此方程式內共有三個未知數 a, b, c; 如將 a, b, c 三數求出、y 可根據所擬定之 x 值求得之。現既

有三個未知數，故須用三個方程式來解決之。至於如何造成此三個方程式，則本章將略而不述，玆僅將三個方程式列舉如下：

方程式 I　$\Sigma a+\Sigma(x)b+\Sigma(x^2)c=\Sigma y$

方程式 II　$\Sigma(x)a+\Sigma(x^2)b+\Sigma(x^3)c=\Sigma xy$

方程式 III　$\Sigma(x^2)a+\Sigma(x^3)b+\Sigma(x^4)c=\Sigma x^2y$

照求直線之同樣步驟，排成項目如下：

$y \quad a \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad xy \quad x^2y$

用表 47 之記錄，求得各項之數目詳下表：

用表 47 資料所算出之直線配合之必需項目

y	a	x	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
8.9	1	0	0	0	0	0	0
10.3	1	1	1	1	1	10.3	10.3
12.3	1	2	4	8	16	24.6	49.2
12.9	1	3	9	27	81	38.7	116.1
13.1	1	4	16	64	256	52.4	209.6
13.5	1	5	25	125	625	67.5	337.5
13.8	1	6	36	216	1296	82.8	496.8
13.6	1	7	49	343	2401	95.2	666.4
12.7	1	8	64	512	4096	101.6	812.8
13.5	1	9	81	729	6561	121.5	1093.5
124.6	10	45	285	2025	15333	594.0	3792.2

若以上列各總數代入上列三個方程式內得：

方程式 1　$10a+45b+285c=124.6$

方程式 II　$45a+285b+2025c=594.6$

方程式 III　$285a+2025b+15333c=3792.2$

用代數消去法及代入法求得：

$$a = 9.157$$

$$b = 1.502$$

$$c = -0.121$$

將 a, b, c 各值代入二次拋物線之方程式內：

$$y = 9.157 + 1.502x - .121x^2$$

由二次拋物線所求得之產量，載表 47 第四項內。

由二次拋物線所得之推算產量與實際產量之差異，較直線求得之推算產量與實際產量之差異為小。

表 47 上有一點須注意者，即用 10 配克 (Peck) 種籽所收之產量，較 11 配克所穫之產量為高。此種情形本非普通，惟為引證高級拋物線之易於配合此種特殊情形起見，故特援用此種材料為例題。若將二次拋物線之方程式再加高一級，而成三次拋物線 (third order parabola)，從三次拋物線方程式求得之曲線，其配合程度較二次拋物線所得者為適合。三次拋物線之方程式為：

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

此方程式內有未知數 a, b, c, d 四個，其值須一一求出，三次拋物線之方程式與二次拋物線方程式之差異，僅多末一項之 dx^3，此猶若二次拋物線方程式與直線方程式相較，僅多一項 cx^2 而已。其中 a 及 bx 雖相同，惟其值則不能借假。換言之若以直線方程式內之 a 值及 bx 值代入二次或三次拋物線方程式內，即為極大錯誤，此吾等所宜注意而每次須將 a, b, c, d 各未知數分別求出。三次拋物線既有四個未知

數 a, b, c, d,自須以四個普通方程式來演算之。各方程如下:

$$\text{方程式 I}\quad \Sigma a+\Sigma(x)b+\Sigma(x^2)c+\Sigma(x^3)d=\Sigma y$$

$$\text{方程式 II}\quad \Sigma(x)a+\Sigma(x^2)b+\Sigma(x^3)c+\Sigma(x^4)d=\Sigma xy$$

$$\text{方程式 III}\quad \Sigma(x^2)a+\Sigma(x^3)b+\Sigma(x^4)c+\Sigma(x^5)d=\Sigma x^2y$$

$$\text{方程式 IV}\quad \Sigma(x^3)a+\Sigma(x^4)b+\Sigma(x^5)c+\Sigma(x^6)d=\Sigma x^3y$$

欲解決此種方程式須先算出下列各項之總數:

$$y \quad a \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \quad xy \quad x^2y \quad x^3y$$

今求得各值為

$y = 124.6$

$a = 10$

$x = 45$

$x^2 = 285$

$x^3 = 2025$

$x^4 = 15333$

$x^5 = 120825$

$x^6 = 978405$

$xy = 594.6$

$x^2y = 3792.2$

$x^3y = 26972.4$

將以上各數代入四個方程式內得:

$$\text{方程式 I}\quad 10a+45b+235c+2025d=124.6$$

$$\text{方程式 II}\quad 45a+285b+2025c+15333d=594.6$$

方程式 III $285a+2025b+15333c+120825d=3792.2$

方程式 IV $2025a+15333b+120825c+978405d=26972.4$

求得 a, b, c, d 之各值如下：

$$a=8.758$$

$$b=2.230$$

$$c=-.335$$

$$d=.016$$

以 a, b, c, d 之值代入三次拋物線，得方程式爲：

$$y=8.758+2.230x-.335x^2+0.016x^3$$

若 $x=0$　　$y=8.758$

$x=1$　　$y=10.669$

照此以 $x=0$ 至 9 之各值代入，求得 y 各值詳見表 47 第五項。

若以上述播種量例題，以三次拋物線之方程式求之，用 10 配克種籽所得之產量，較用 11 配克所得者雖略爲降低，惟其低跌之程度，則較用二次拋物線求得者爲佳。此種突然降跌之現象，雖屬偶然，惟若遇此種例外趨向時，用多次拋物線來配合較單次拋物線爲適合。若再加一次，便成四次拋物線，其方程式爲：

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

次數愈多，計算愈繁，故在應用時，求 y 至三四次拋物線以上是否值得，尚屬疑問。

相關比 (Correlation Ratio)——從上述各線之用法，可知兩性狀之相互關係，有時用曲線配合，較直線爲宜，此種不能用直線來表示之

相互關係，在統計上名爲非直線相關（non-linear corrolation）。

第六章所述之相關係數及迴歸線計算法，皆假定相關表上之 x 各行平均數及 y 各行平均數，均在一直線上，故用 r 值來決定兩數相關或預測數目，乃專指直線相關或直線迴歸而言。求各行之標準差，實即測量各散點至迴歸線之距離，凡係直線相關，其迴歸線亦爲直線。求標準差公式爲：

$$S_x = \sigma_x\sqrt{1-r^2}$$

$$S_y = \sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

今以此公式平方而後遷項

$$S^2_x = \sigma^2_x(1-r^2)$$

$$S^2_y = \sigma^2_y(1-r^2)$$

$$S^2_x = \sigma^2_x - r^2\sigma^2_x$$

$$S^2_y = \sigma^2_y - r^3\sigma^2_y$$

$$r^2\sigma^2_x = \sigma^2_x - S^2_x$$

$$r^2\sigma^2_y = \sigma^2_y - S^2_y$$

故 $$r^2 = \frac{\sigma^2_x - S^2_x}{\sigma^2_x}$$

$$r^2 = \frac{\sigma^2_y - S^2_y}{\sigma^2_y}$$

$$r_{xy} = \sqrt{\frac{\sigma^2_x - S^2_x}{\sigma^2_x}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{S^2_x}{\sigma^2_x}}$$

$$r_{yx} = \sqrt{\frac{\sigma^2_y - S^2_y}{\sigma_y}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{S^2_y}{\sigma^2_y}}$$

上列二公式表示 x 或 y 散點對於 x 或 y 標準差之比。第一公式表示 x 對於 y 之關係，第二公式表示 y 對於 x 之關係。今以 S_x 及 S_y 代表 x 及 y 對於最適合線之分離情形，故所成之公式可用作相關比之普通測驗，無論直線或非直線皆適用之。

有時相互關係以用曲線表示實較直線為適宜，各散點對於直線之距離，常較其對於曲線之距離為大。今所用之相關係數 r，乃根據各行之平均數皆在一直線上而算出，故 r 之值自較用曲線所測得之結果為低。吾人已知用曲線來配合諸縱行横行之平均數，確較直線為適合，皮爾生氏曾擬得一種相關比，可用以測量任何型類線與其散點之關係，此種相關比之符號為希臘字母"η"，讀音為"愛太"。

用上述求 r 之公式而以 η 代入得：

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{S^2_x}{\sigma^2_x}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第一公式}$$

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{S^2_y}{\sigma^2_y}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第二公式}$$

第一公式為 x 對於 y 之相關比；

第二公式為 y 對於 x 之相關比。

若係直線相關，係數 r 即等於相關比 η，在每一相關表中，r 值僅有一個，η 值則有兩個。

為便於計算起見，η_{xy} 及 η_{yx} 之公式，可改作下列兩種公式：

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma f_y(m_x-M_x)^2}{N}}}{\sigma_x}$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma n_x(m_y-M_y)^2}{N}}}{\sigma_y}$$

在此公式中 n_y 代表橫行之次數總和，n_x 代表縱行之次數總和，m_y 為 x 在 y 上之平均數，m_x 為 y 在 x 上之平均數，M_x 為 x 記分之平均數，M_y 則為 y 記分之平均數，N 等於記分總數，σ_x 為 x 分配之標準差，σ_y 則為 y 分配之標準差，故上列公式又可成為：

$$\sigma_{m_x}=\sqrt{\frac{\Sigma n_y(m_x-M_x)^2}{N}}$$

$$\sigma_{m_y}=\sqrt{\frac{\Sigma n_x(m_y-M_y)^2}{N}}$$

相關比之公式又可成為：

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{m_x}}{\sigma_x}$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{m_y}}{\sigma_y}$$

其計算步驟詳載於表 48。

表 48 內求平均數 m_x 及 m_y 之方法，已詳第四章地位常數，求標準差 σ_x 及 σ_y 已詳第五章離中差，相關係數 r 之求法亦詳上章，故不復贅。今僅將 m_x, D, D^2 及 fD^2 各式算出，說明如下：

今以表 48. 之 y 欄 0.0－0.9 一組內之 x 值作例，求m_x：

V	f	fV
27.5	1	27.5
32.5	10	325.0
37.5	25	937.5
42.5	19	807.5
47.5	19	902.5
52.5	4	210.0
	78	3210.0

3210.0/78=41.154

表48 相關比計算法，x代表燕麥植株之高度，y代表每株燕麥之產量。

y \ x	25.0–29.9	30.0–34.9	35.0–39.9	40.0–44.9	45.0–49.9	50.0–54.9	55.0–59.9	60.0–64.9	65.0–69.9	70.0–74.9	75.0–79.9	f	m_x	m_x-M_x 或 D	D^2	fD^2
0.0—0.9	1	10	25	19	19	4						78	41.154	−13.829	191.241	14916.798
1.0—1.9	1				20	40	28	6	1			96	53.437	−1.546	2.390	229.440
2.0—2.9						3	22	29	16	2		72	61.944	6.961	48.456	3488.832
y 3.0—3.9								11	22	4		37	66.554	11.571	133.888	4953.856
4.0—4.9									5	5	2	12	71.250	16.267	264.615	3175.380
5.0—5.9										2	2	4	75.000	20.017	400.680	1602.720
6.0—6.9											1	1	77.500	22.517	507.015	507.015
f	2	10	25	19	39	47	50	46	44	13	5	300				28874.041

f	m_y	m_y-M_y 或 D	D^2	fD^2
2	1.000	−.917	.841	1.682
10	.500	−1.417	2.008	20.080
25	.500	−1.417	2.008	50.200
19	.500	−1.417	2.008	38.152
39	1.013	−.904	.817	31.863
47	1.479	−.438	.192	9.024
50	1.940	.023	.001	.050
46	2.609	.692	.479	22.034
44	3.205	1.288	1.659	72.996
13	4.038	2.121	4.499	58.487
5	5.300	3.383	11.445	57.225
300				361.793

$M_x=54.983$

$\sigma_x=10.950$

$r=.865$

$M_y=1.917$

$\sigma_y=1.215$

$$\sigma_{m_x}=\sqrt{\frac{28874.041}{300}}=9.811$$

$$\eta_{xy}=\frac{9.811}{10.950}=.896$$

$$\sigma_{m_y}=\sqrt{\frac{361.793}{300}}=1.098$$

$$\eta_{yx}=\frac{1.098}{1.215}=.904$$

其他各組之 m_x，照樣一一算出，而填入表內第二項 m_x 項下。m_y 之算法與此相同，惟所取資料，爲 x 欄內之 y 值而已。第三項之 D 爲平均數 M_x 與各項 m_x 之相較，D^2 卽爲 D 之自乘，fD^2 則爲每行 D^2 與同行 f 之相乘積。求得 fD^2 之總和爲 28874.041，此數以次數和 300 除之而後開方，得 σ_{mx} 爲，9.811。求 η_{xy} 之公式爲 $\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$ 故 $\eta_{xy}=\frac{9.811}{10.950}=0.896$。

用同樣方法求得 y 對於 x 之相關比如下：

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}=\frac{1.098}{1.215}=0.904$$

所得之相關比 0.896 及 0.904，皆較相關係數 0.865 爲大。

苟無分離，則在相關比公式內之分子與分母應相等，比值應爲 1。相關比僅爲兩個標準差之比，無正負號，不若相關係數之有正負號，可以指示兩個數目之關係究竟爲正爲負。

求兩數之相關程度時，須將材料整理，排成相關表，較易明瞭。蓋不排相關表而求相關係數，則卽得 r 值亦不知所研究材料之相關現象爲何如，究爲直線相關抑爲非直線相關，故研究相關性狀時，僅從觀察資料以斷定其關係，頗難得準確之結果。

相關係數之値與相關比之値，常不相同，今更以表 49 之資料來引證之。

用同樣方法求得

$$\eta_{xy}=.647,\quad \eta_{yx}=.714$$

此表所得之相關比，雖仍較相關係數爲高，惟其中 η_{xy} 之值幾與相關係數 r 之値相等，$\eta_{xy}=.647$；$r=.635$。此或因一個性狀之相關

表 49.

蕎麥(Buck wheat)之產量(克)與株數之關係

x = 產量　　y = 株數

y \ x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	f
0	4																4
1	1																1
2	6																6
3	8	7	3	1													19
4	2	8	12	7	5	2	4	1									41
5	2	9	15	17	23	13	8	5	1	1	1	1					96
6	1	3	11	19	21	23	23	6	9	3	4	6		1	2		132
7	1		2	11	15	21	22	21	12	7	8	4	2	3			129
8			2	1	2	4	7	11	11	8	5	1	7	3	2		64
9						1		2	2	1	3	1			1	1	12
10						1			1		1						3
11										1							1
	25	27	45	56	66	65	64	46	36	21	22	13	9	7	5	1	508

$r = .635$　　$\eta_{xy} = .647$　　$\eta_{xy} = .714$

近乎直線，而其他一性狀之相關則與直線相離較遠，故計算 η 時須將 η_{xy} 及 η_{yx} 皆算出爲宜。

相關比値與相關係數究竟相差多少，其差異是否顯著，可從兩個相關比値之平方積，與相關係數之平方積相較而得。凡所研究之兩個性狀，其關係越近直線，則 η^2 與 r^2 應相等，而 η^2-r^2 等於 0。若兩個性狀之關係離直線愈遠，則 η^2-r^2 之差亦愈大。差異之顯著與否，又可用下列公式來求出兩個標準差之相差而後比較之。用公式所得結果雖不十分準確，惟用之者衆，今姑列述於下：

$$\sigma\,(\eta^2-r^2)=2\sqrt{\frac{\eta^2-r^2}{N}}$$

表 48　$\eta_{yx}=.904$　　$r=.865$

$$\sigma\,(\eta^2-r^2)=2\sqrt{\frac{(0.904)^2-(.865)^2}{300}}$$

$$=0.030$$

η^2 與 r^2 之差爲 .069

照例 η^2-r^2 之差比 $\sigma(\eta^2-r^2)$ 大三倍時，其差異方爲顯著，

今　$\sigma\,(\eta^2-r^2)=.030$

3 乘 $\sigma\,(\eta^2-r^2)=.090$

今所求得之 $\eta^2-r^2=.069$

.069 小於 .090，故差異不顯著。

η^2 與 r^2 之差既不到 $\sigma_{\eta^2-r^2}$ 之三倍，則 η 與 r 之相差卽不顯著。故在本例題，相關比雖較相關係數略大，惟差異並不顯著。

$\eta_{yx}=.714$

$$r=.635$$

$$\eta^2-r^2=.107$$

$$\sigma_{(\eta^2-r^2)}=2\sqrt{\frac{.714-.635}{30}}=.029$$

3 乘 .029＝.087

故差異 .107＞.087

此例題中之相關比與相關係數有顯著之差異，故測量此兩個性狀時，以用相關比較妥。關係相關比與相關係數之差異，當在第十三章中再詳論之。總而言之，用相關比來測量相關程度，總較相關係數與直線爲可靠，卽關係現象之極近直線相關者，亦仍以相關比來測量較爲妥當。

皮爾生氏對於相關比，曾擬有校正法，其公式爲

$$\text{校正的 } \eta^2=\frac{\eta^2-\frac{(K-3)}{N}}{1-\frac{(K-3)}{N}}$$

在公式內 K 代表整列數目，例如表 48. 若求校正的 η^2_{xy}，則因 y 共有 7 組，故 K＝7。求校正 η_{yx} 則因 x 有 11 組，故 K＝11，今試求校正 μ_{xy}。已知未校正前之 $\eta_{xy}=0.896$

$$\text{校正的 } \eta^2=\frac{(.896)^2-\frac{7-3}{300}}{1\quad-\frac{7-3}{300}}$$

$$=\frac{.802816-.013333}{1\quad-.013333}$$

$$=.800151$$

$$\text{校正的 } \eta=\sqrt{.800151}$$

$$=0.895$$

0.895 與 0.896 相差雖僅千分之一，爲數不大，惟若所計算之次數少而整列多時，校正數將較此爲大。

曲迴歸線 (Curved Regression Lines)——吾人已知若係直線相關，可根據甲性狀而用迴歸線來預測乙性狀，其實在非直線相關中，吾人亦可用迴歸線來推測結果，此種迴歸線名曲迴歸線，費許氏 (Fisher) 有配合曲迴歸線之方法發表，鐵背氏 (Tippett) 引申之以表示其用法，今將敍述配合曲迴歸線之方法如下。照鐵背氏之記法，曲迴歸線之普通方程式當爲：

$$Y=a+bt+ct^2+dt^3$$

令 y ＝相關表上一個整列之平均數，若爲未排列之記分，則爲任何行之價值。

t ＝任何整列離中間一整列之差數，其數可以單位進級法記之，故若整列數爲奇數，則中間一整列之差爲 0，在其上者爲 +1，+2，+3……在其下者爲 −1，−2，−3……若整列數爲偶數，則中間二整列之平均數爲中間數，在其上者爲 +0.5，+1.5 +2.5……在其下者爲 −0.5，−1.5，−2.5……

上列方程式亦可改成

$$Y=A+BT_1+CT_2+DT_3$$

在此方程內 $T_1=(t-M_t)=t$，因 M_t 爲 t 之平均數＝0

$$T_2=t^2-\frac{N^2-1}{12}$$

$$T_3=t^3-\frac{3N^2-7}{20}t$$

A, B, C, D 之值可從下列關係求得之

$$A=\frac{\Sigma(y)}{N}$$

$$B=\frac{12}{N(N^2-1)}\Sigma(yT_1)$$

$$C=\frac{180}{N(N^2-1)(N^2-4)}\Sigma(yT_2)$$

$$D=\frac{2800}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}\Sigma(yT_3)$$

為便於計算起見，B, C, D 之值可從下列方程式求之，N 為整列之數目。

$$B=\frac{12}{N(N^2-1)}\Sigma(yt)$$

$$C=\frac{180}{N(N^2-1)(N^2-4)}\left\{\Sigma(yt^2)-\left(\frac{N^2-1}{12}\right)\Sigma(y)\right\}$$

$$D=\frac{2800}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}\left\{\Sigma(yt^3)-\left(\frac{3N^2-7}{20}\right)\Sigma(yt)\right\}$$

若求較高一級之曲線則除 B, C, D 外，尚需：

$$T_4=t^4-\frac{3N^2-13}{14}t^2+\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}$$

及

$$E=\frac{44100}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)(^2-16)}\Sigma(yt_4)$$

今以表 48 x 整列內之 y 次數，代入上列方程式中，以明配合曲迴歸線之用法。其所需要之項目為 y, t, t^2, t^3, yt, yt^2, yt^3。

由表 48 查得 m_y 之值而填在下表 y 項內，並算得其他各項之結果如下：

y	t	t^2	t^3	yt	yt^2	yt^3
1.00	−5	25	−125	−5.00	25.00	−125.00
.50	−4	16	−64	−2.00	8.00	−32.00
.50	−3	9	−27	−1.50	4.50	−13.50
.50	−2	4	−8	−1.00	2.00	−4.00
1.01	−1	1	−1	−1.01	1.01	−1.01
1.48	0	0	0	0	0	0
1.94	1	1	1	1.94	1.94	1.94
2.61	2	4	8	5.22	10.44	20.88
3.20	3	9	27	9.60	28.80	86.40
4.04	4	16	64	16.16	64.64	258.56
5.30	5	25	125	26.50	132.50	662.50
總數 22.08				48.91	278.83	854.77

求得總數爲 $\Sigma y=22.08$

$$\Sigma yt=48.91$$

$$\Sigma yt^2=278.83$$

$$\Sigma yt^3=854.77$$

將上列各總數代入 A, B, C, D 之方程式中,

$$A=2.007$$

$$B=.445$$

$$C=.068$$

$$D=-.003$$

以 A, B, C, D 之值代入普通方程式:

$$Y=A+BT_1+CT_2+DT_3$$

T 值須照各行 t 值而定、故 Y 值亦須依其行數逐一算出,例如第一行 $t=-5$

$$T_1 = t = -5$$

$$T_2 = t^2 - \frac{N^2-1}{12} = 25 - \frac{121-1}{12} = 15$$

$$T_3 = t^3 - \frac{3N^2-7}{20}t = -125 - \frac{363-7}{20} \times -5 = -36.0$$

以各值代入普通方程式此第一行Y值當為:

$$Y = 2.007 + (.445 \times -5) + (.068 \times 15) - (.003 \times -36.0)$$
$$= 2.007 - 2.225 + 1.020 + .108 = .910$$

若算第十一行時 $t = 5$

$$T_1 = 5$$

$$T_2 = 25 - \frac{121-1}{12} = 15$$

$$T_3 = 125 - \frac{363-7}{20} \times 5 = 36.0$$

以各值代入普通方程式

$$Y = 2.007 + (.445 \times 5) + (.068 \times 15) - (.003 \times 36\ 0)$$
$$= 2.007 + 2.225 + 1.020 - .108 = 5.144$$

t 值雖同為 5,當其為負號時,Y值僅為 0.910, 當 t 值為正號時,Y值乃大至 5.144。

今將用表 48 資料所求得之各種迴歸線,集輯於附表 50. 中,凡用各種方程式計算迴歸線,數目前之正負號,須特別注意,因一正一負,影響結果頗大也。

若欲知y豎列內之x平均數,可用同樣方法求得之。若以表 48 之值代入上列方程式,則求得:

表 50.

用表 48 x列資料所配合之各線記錄

x列每單蒸發不均衡量	直線推測數	二次拋物線推測數	三次拋物線推測數	曲迴歸線推測數
1.00	-.216	.708	892	.910
.50	.229	.635	.616	.613
.50	.674	.608	.536	.525
.50	1.119	.717	.634	.626
1.01	1.564	.962	.892	.900
1.48	2.009	1.343	1.292	1.327
1.94	2.454	1.860	1.816	1.890
2.61	2.899	2.513	2.446	2.572
3.20	3.344	3.302	3.164	3.353
4.04	3.789	4.227	3.932	4.217
5.30	4.234	5.288	4.792	5.144

$A = 63.829$

$B = 5.764$

$C = -0.859$

$D = 0.150$

將此數代入普通方程式，卽得y之値，詳載表 51 第二項內，第一項係觀察數，可資比較。

用上法所配成之曲迴歸線見圖 27。

用曲迴歸線方法所求得之結果與觀察數頗相符合，此種方法，適用於任何相關表，卽未歸組之記分，亦可用之，曲迴歸線且可替代拋物線來觀察成列之記錄，例有一曾經數年觀察之結果記錄，可以中間一年結果為 0，前於此年或後於此年者為 −1，−2 或 1，2。任何年與中間年之

表 51.

用曲迴歸線來配合表48.y列資料之結果

y 列每棵燕麥之平均高度	用曲迴歸線計算結果
41.2	41.342
53.4	53.201
61.9	61.542
66.6	67.265
71.2	71.270
75.0	74.457
77.5	77.726

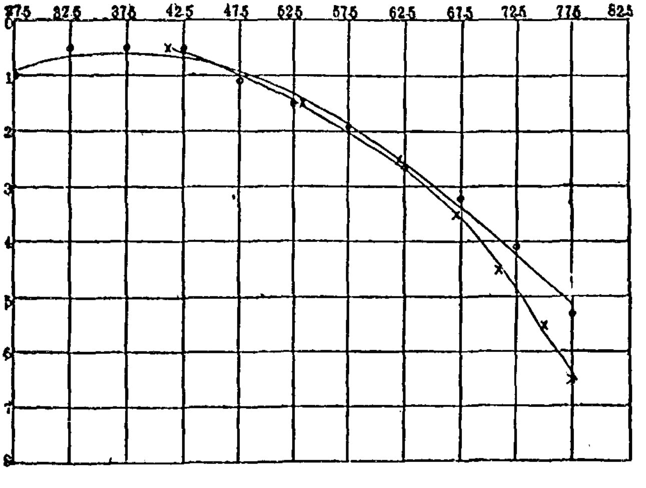


圖 27. 配合表 48. 資料之曲迴歸線○代表每盆平均產量，×代表每棵平均高度

距離，皆可以 t 字代表之。

今試觀表 50 用直線，拋物線，及曲迴歸線等方法所求出之各種結果比較，則曲迴歸線較其他各線爲合配，直線所得之結果與觀察數相離最遠，二次及三次拋物線所得者較佳，惟終不若曲迴歸線之各點，皆與觀察數相差無幾。

此種曲迴歸線與普通迴歸線同，亦可用來預測數目，其本行各點離開曲迴歸線之程度，可用測驗普通迴歸線標準差之公式求得之（詳見第六章第 114 頁。）

用曲迴歸線之方程來配合各點，有一頗顯著之便利，即計算較多一次之拋物線時，祇須在方程式上加添一項，而不必更動其他各項之數目，苟若第 135 頁所述之用 $y=a+bx+cx^2\cdots\cdots$ 公式來計算拋物線，則添一新項卽須更動方程式中其他各項。此乃 $Y=a+bt+ct^2\cdots\cdots$ 之方程式較勝於 $y=a+bx+cx^2\cdots\cdots$ 方程式處。

等級相關（Correlation from Ranks）——根據各項之地位及價値而決定其相關量之各種方法，已在本章詳述，有時爲便於計算起見，相關量亦可單就各項之地位（position）或等級（rank）而計算之，法較簡捷，相關量之大概可以一索卽得。此法爲舒比門氏（Spearman）所擬定，其法詳見表 52，表中所用資料，爲同一小麥品種用不同之種植法（三行區，單行區）所得之產量記錄。

表 52 內之各區次序，照產量之多少而定，排次序時以最小者或最大者爲第一皆可，惟表 52 則以最多之產量爲第一。三行區中第三小區之產量最高排爲第一，次多數者（在表上爲第二小區之產量）爲第二，

表52.

用等級法計算相互關係

三行區 (1)	單行區 (2)	(1)之等級 x	(2)之等級 y	x—y 或 D	D^2
36.7	34.1	6.5	7	−.5	.25
42.5	40.6	2	3	−1.0	1.00
44.9	41.0	1	2	−1.0	1.00
41.0	42.4	3	1	2.0	4.00
32.6	31.7	9	8	1.0	1.00
40.0	36.5	5	5	0	0
40.5	36.4	4	6	−2.0	4.00
36.7	37.6	6.5	4	2.5	6.25
34.0	31.6	8	9	−1.0	1.00
31.3	28.1	11	12	−1.0	1.00
32.2	30.7	10	10	0	0
31.2	29.9	12	11	1.0	1.00
29.6	23.7	13	13	0	0
					$\Sigma D^2=20.50$

$$r_r=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

$$r_r=1-\frac{6\times 20.50}{13(169-1)}=1-\frac{123.00}{2184}=.944$$

若有數區產量相同，則等級亦相同。例如第三項內有兩個 6.5 級，此因三行區中第一及第八兩區之產量同爲 36.7 英斗，較此數略高者即爲第六行，其產量爲 40.0，第六行之等級爲 5 級，故第一及第八行之等級應當一爲 6；一爲 7，今兩行之產量既相同，故以 6 與 7 兩級平均而成 6.5。若有數區相同之產量，則可將其蟬聯之等級平均數爲此數區同產量之等級，例若產量爲 36.7 之小區共有三個，則等級當爲 6，7，8 三數之平均數 7。

第二項之產量（單行區）等級，用同樣方法排定之。兩次之等級既定，乃互相比較，將其差數記錄在第五項下，各行之差數平方後，其總和即為 ΣD^2。求等級相關係數之符號為 r_r，其公式為：

$$r_r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

茲將各值代入得：

$$r_r = 1 - \frac{6 \times 20.50}{13(169-1)} = 1 - \frac{123.00}{2184} = .944$$

若數目不大，用此法求相關量，確較簡易，惟所得之數僅為相關係數之近似數，故是法僅示人以相關之大概情形，不能用以替代相關係數及相關比，來求兩數之相關狀況。

另一種用等級相關求相關量之方法詳表 53，其資料為小麥三行區試驗產量記錄。

表內第一項為每一品種之三行平均產量，第二項則為中間一行之平均產量，等級之決定與上表所述者同，其相關量為 .975。

用等級相關法所求得之相關量，既為相關係數之近似數、用等級相關所得之數，可根據下列關係來校正之：

$$r = 2\ \sin\left(\frac{\pi r_r}{6}\right)$$

例如表 53　$r_r = .975$

$$r = 2\ \sin\left(\frac{\pi .975}{6}\right)$$

π 為 $180°$ ($180° = \pi$ radians)

是以　$$\frac{180 \times .975}{6} = 29.25°$$

表 53.

用等級法計算相互關係之又一例

諸行平均	中間行平均	諸行等級 x	中間行等級 y	x－y 或 D	D^2
47.0	53.6	5	2	3	9
27.6	31.2	19	17	2	4
41.4	47.1	10	8	2	4
36.9	45.0	13	9	4	16
11.5	12.4	27	26	1	1
49.8	53.0	4	3	1	1
29.0	32.8	16	16	0	0
22.4	27.3	23	19	4	16
45.1	48.8	7	6	1	1
12.1	12.1	26	27	—1	1
52.9	54.7	1	1	0	0
25.5	25.2	21	23	—2	4
17.0	15.9	24	25	—1	1
36.3	38.3	14.5	13	1.5	2.25
36.3	37.6	14.5	14	.5	.25
46.0	47.5	6	7	—1	1
51.9	51.9	2	5	—3	9
15.6	16.1	25	24	1	1
28.3	26.5	18	20	—2	4
23.1	25.3	22	22	0	0
28.4	28.3	17	18	—1	1
26.8	25.8	20	21	—1	1
38.6	37.5	11	15	—4	16
38.4	40.3	12	12	0	0
8.2	7.2	28	28	0	0
4.8	4.3	29	29	0	0
51.8	52.0	3	4	—1	1
42.3	43.5	8	10	—2	4
42.2	43.0	9	11	—2	4
					$\Sigma D^2=102.50$

由三角對數表找得

$$\text{Log sin } 29.25^\circ = 9.68897 - 10$$

查普通對數表則此數爲 .4886

若以 $.4886 \times 2$ 卽得 .9772，此數卽爲從 r_r 校正後所得之 r 值。附錄表 III 有 r_r 與 r 之對照表。

舒比門另有一種簡單方法 (foot-rule method)。亦可用來求 r，此法較求 r_r 之方法更簡，而所得之結果，亦不若 r_r 之準確。用此法所得者僅爲相關之大概，故其正確程度實不能與其他相關測量相比較，惟其法甚簡，在急欲知相互關係時，不妨用之。此法將甲性狀等級之高於乙性狀等級之次數相加，而計算之。今以表 53 之例題來說明其算法。表 53 之記錄中用第二法種植之結果，有高於第一法者，亦有相等或低於第二法者。用舒氏簡法求 r 時，僅將表中 D 項下有正號各數相加，其和卽爲 G。故表 53 $G = 3+2+2+4+1+1+4+1+1.5+.5+1=21$

以 G 值代入公式 $r_g = 1 - \dfrac{6\Sigma(G)}{N^2-1}$

得 $$r_g = 1 - \frac{6 \times 21}{(29)^2-1} = 1 - \frac{126}{841-1}$$

$$= 1 - \frac{126}{840} = 1 + 0.15 = 0.850$$

以 r_g 化成 r，其公式爲 $r = \sin(\frac{\pi}{2} r_g)$

今 $r_g = .850$， π 爲 180° 故

得 $\dfrac{180^\circ}{2} \times .850 = 76.50^\circ$

$$\text{Log sin } 76.50^\circ = 9.98843 - 10$$

普通 $\log r$ $=.9737$

故 $r=.9737$ $r_y=.850$

照表 53. $r_r=.975$

$r=.9737$

$r_g=.850$

r_r 與 r 相差無幾，而 r_r 與 r_g 及 r 與 r_g 則相差皆鉅。

相依係數 Coefficient of Contingency）——吾人所研究之問題，有時其性狀祇有質的相關，而無數的相關。例如人類眼珠之顏色與髮色之關係並無數量可稱，因難分組故普通求相關係數之 r 公式即不合用。有時一個性狀果能以數目分類，而另一性狀祇能以大綱分別，另有一種問題雖兩種性狀皆可以數目分別，惟爲計算便利起見可分成數大組而求其關係。

皮爾生氏曾介紹一種測驗方法，來解決此種問題，此種常數即名爲相依係數。今即以皮爾生氏之資料，在表 54 中引證其算法。表中示爲善運動之一組者，兄有 1066 人，弟亦有 1066 人。其中 906 人爲兄弟皆善運動。今假定此種性狀，皆無關係，故先分別求其推測數。試求第一縱行，第一橫行內之兩無相關的推測數。法以橫行之總人數與縱行之總人數相乘，而以全人數除之。今橫行之總人數爲 1066，縱行之總人數亦爲 1066，兩者相乘而以總人數 1690 除之得 672.400。

$$\frac{1066\times1066}{1690}=672.400$$

此即爲第一組內假定甲乙兩人完全不相關時之推測數，此數填入第一縱行與第一橫行所成之方格內 906 觀察數下。兩數相較（906－672.400）

表 54.

接觸係數計算法

（表中記錄兩兄弟之運動技能）

次兄	長兄 善運動	長兄 兩可	長兄 不善運動	總數
善運動	906 672.400	20 66.231	140 327.369	1066
兩可	20 66.231	76 6.524	9 32.246	105
不善運動	140 327.369	9 32.246	370 159.385	519
總數	1066	105	519	1690

$$\frac{\left(n_{rc}-\frac{n_r n_c}{N}\right)^2}{n_r n_c}$$

$(\ \ 233.600)^2/1136356=.0480$

$(-\ 46.231)^2/\ 111930=.0191$

$(-187.369)^2/\ 553254=.0635$

$(-\ 46.231)^2/\ 111930=.0191$

$(\ \ 69.476)^2/\ \ 11025=.4378$

$(-\ 23.246)^2/\ \ 54495=.0099$

$(-187.369)^2/\ 552254=.0635$

$(-\ 23.246)^2/\ \ 54495=.0099$

$(\ \ 210.615)^2/269361=\underline{.1647}$

$\phi^2=.8355$

$\phi^2=.8355$

$$C_1=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}=\sqrt{\frac{.8355}{1.8355}}=.675$$

而得差數 233.600，此數自乘而以此行之總數 1066 與縱行之總數 1066 乘積除之得 .0480。

$$\frac{(233.600)^2}{1066\times1066}=\frac{(233.600)^2}{1136356}=.0480$$

其他各縱行與各橫行之推測數用同一方法求得之，為明瞭計算起見，試再求第二縱行第一橫行之推測數，此格之觀察數為 20。

第一橫行之總和為 1066，第二縱行之總和為 105，故此格之完全不相關的推測數為 66.231

$$\frac{1066\times105}{1690}=66.231$$

$$\frac{(20-66.231)^2}{1066\times105}=.0191$$

若此項算法以公式表明之，則為 $\dfrac{\left(n_{rc}-\dfrac{n_r n_c}{N}\right)^2}{n_r n_c}$。$n_{rc}$ 為某橫行與某縱行所成一方格內之觀察數，例如 906。$n_r n_c$ 為某橫行之總和與某縱行總和之積例如 1066×1066。N 為次數總和，例如 1690。

用同樣方法求得各橫行各縱行方格內之商數後，一一相加，而得總和 0.8355，此數皮爾生氏以 ϕ^2 代表之，故求 ϕ^2 之公式又為：

$$\phi^2=\frac{X^2}{N}$$

$$\phi^2=\frac{X^2}{N}=\Sigma\frac{\left(n_{rc}-\dfrac{n_r n_c}{N}\right)^2}{n_r n_c}$$

此即為求均方相依數（mean square contingency）之公式，若求均方相依係數（mean square contingency coefficient）其公式當為：

$$C_1=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}$$

表 54. 所求得之 ϕ^2 爲 .8355，以之代入上列公式得 C_1 爲 .675。

$$C_1=\sqrt{\frac{.8355}{1+.8355}}=.675$$

此卽用皮爾生氏公式所求得之均方相依係數。

今再用余爾氏（Yule）所建議之公式求相依係數，所得結果實相同。余爾氏之公式爲 $C_1=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$。先照皮爾生氏方法求得各不相關之推測數。觀察數分別自乘而各以推測數除之，若表 55 所載者。

表 55.

用余爾氏接觸係數計算法所得之結果

觀察數平方計算數	結　果
$(906)^2/672.400$	1220.756
$(20)^2/\ 66.231$	6.039
$(140)^2/327.369$	59.871
$(20)^2/\ 66.231$	6.039
$(76)^2/\ 6.524$	885.346
$(9)^2/\ 32.246$	2.512
$(140)^2/327.369$	59.871
$(9)^2/\ 32.246$	2.512
$(370)^2/159.385$	858.926
	S=3101.872

$$C_1=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$$

$$C_1=\sqrt{\frac{3101.872-1690}{3101.872}}$$

$$=.675$$

表 54 第一方格之觀察數為 906,推測數為 672.400, 故表 55.第一組之值為 $\frac{(906)^2}{672.4}=1220.756$

照樣將每組之值求得,相加之總和,即為公式內之 S ,各項算出,得總和或 S 為 3101.872。

$$S=3101.872,\quad N\ 為記分總數=1690$$

以之代入公式中得

$$C_1=\sqrt{\frac{3101.872-1690}{3101.872}}=.675$$

此 C_1 之值與用第一法所求得者相同。

表 56.所載者為小麥籽粒色澤與小麥產量之關係, 此種題目即不能用普通方法求相關係數,因色澤僅能以紅白兩類表示之,產量則可以數目表示,故本題將用求相依係數法來計算之。表 56 左邊各項為品系產量超過標準產量之數目,右邊為品系產量不及標準產量之數目。

照上法求得 $\phi^2=0.343$　求 ϕ^2 之公式為 $\Sigma\frac{\left(n_{rc}-\frac{n_r n_c}{N}\right)^2}{n_r n_c}$ 以 ϕ^2 代入皮爾生氏之求均方相依公式中 $C_1=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}$;得 C_1 為 .505。

$$C_1=\sqrt{\frac{.343}{1.343}}=.505$$

若用余爾氏法,則求得 $S=479.763$, 以之代入余爾氏之求接觸係數公式得 C_1 為 .506

$$C_1=\sqrt{\frac{479.763-357}{479.763}}$$

$$=0.506$$

表 56.

小麥籽粒色澤與產量關係

（產量爲比較標準品種之增減產量）

籽粒色澤	與標準品種相較後之增減數									總數
	10.0 以上	5.0 9.9	0 4.9	0 −4.9	−5.0 −9.9	−10.0 −14.9	−15.0 −19.9	−20.0 −24.9	−25.0 以上	
紅	4	8	33	17	24	9	1	3	0	99
	1.109	2.218	11.092	16.084	27.176	27.454	10.815	2.218	.832	
白	0	0	7	41	74	90	38	5	3	258
	2.891	5.782	28.908	41.916	70.824	71.546	28.185	5.782	2.168	
總數	4	8	40	58	98	99	39	8	3	357

相依係數自有其解決特殊問題之用處，至於因分類不同所發生之變動，可用下列公式校正之。令R代表列數，C代表行數；

$$\frac{(R-1)(C-1)}{N}$$

從 ϕ^2 減此校正量卽得校正的 ϕ^2，以此校正的 ϕ 代入 C_1 公式內卽得校正的 C_1。

照第一例題，縱行數與橫行數皆為 3，

$$\frac{(R-1)(C-1)}{N}=\frac{(3-1)(3-1)}{1690}=.0024$$

從 ϕ^2 減 .0024，

$$.8355-.0024=.8331$$

$$\text{故校正的 } C_1=\sqrt{\frac{.8331}{1.8331}}=.674$$

此校正後之數與未校正者相差極微，僅小數第三位略有更動而已。

再以第二例題來校正之：

橫行數 $=R=2$，　縱行數 $=C=9$

$$\text{故}\qquad \frac{(R-1)(C-1)}{N}=\frac{(2-1)(9-1)}{357}$$

$$=.022$$

$$\text{校正}\qquad C_1=.493$$

此數與未校正者相差有 .012 之距，故用校正量後，C_1 可減少 .012。

相依係數之結果，常為分組所影響，若在正常次數分配中，C_1 之值頗與 r 之值相同，故凡用相依係數求相關，資料之次數宜大。普通求

相依係數以用 5 橫行 5 縱行可成 25 方格之次數爲宜，若 4 行 4 列者衹能成 16 方格，數目實太小，求相依係數之結果，便難準確。解釋結果須特別注意，以免錯誤。

第　八　章

複相關與淨相關

第六第七兩章所述者爲簡單相關，(Simple correlation) 故僅爲兩個性狀之關係，其實吾人所研究之問題，關係之複雜遠在二個以上。例如預測作物產量之多少，其有關係之因子甚爲複雜，非僅兩量一端而已。諸如陽光，土壤，溫度等等，對於作物之豐歉，皆有重大影響，故此種數個因子影響於一種性狀之問題甚爲普通。爲解決此種問題起見，本書除述簡單相關以外，當另將複相關之意義及計算方法詳述之。

複相關爲測量數種變量 (Variable) 對於一種變量之相關量，今爲解釋便利起見，以表 57 之資料作例，而分別演算之。表中所載者共有四個性狀，試以 A，B，C，Y 四字代替之。A 代表每英斗重量，B 每百粒麥籽之重量，C 麥桿之重量，Y 25 種燕麥產量克數。今將分求 A，B，C 各種性狀對於產量 Y 之影響，及三種性狀之相互關係對於 Y 聯合發生之影響。

一個性狀之影響 (Effect of one variable)——在推算 A，B，C 三個性狀對於產量之影響時，先分求一個性狀之影響，例如每英斗之重量(A)與產量之簡單相關。求兩個性狀相關所需要之各項目，詳載於表

58，若求標準差，祇須將表中末一方程式例如 $\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}$ 以 $\sqrt{N-1}$ 除之卽得。

表 57.

用以分析複相關之二十五個燕麥品種

觀察數	每英斗重量(磅) A	每百粒籽重量(克) B	莖稈重量(噸) C	每英斗產量 Y
1	30.50	2.234	.87	47.5
2	30.80	2.074	1.00	55.5
3	31.62	2.250	1.57	60.4
4	31.81	2.490	1.49	61.9
5	31.50	2.584	1.60	70.2
6	31.81	2.518	1.56	66.8
7	34.81	2.492	1.37	62.4
8	31.75	2.774	1.38	56.6
9	33.69	2.616	1.42	68.0
10	32.62	2.700	1.44	67.6
11	31.04	2.764	1.37	63.8
12	32.75	2.760	1.42	60.5
13	32.00	2.644	1.51	63.6
14	31.50	2.734	1.63	67.3
15	31.94	2.710	1.40	68.1
16	31.56	2.274	1.53	65.4
17	32.50	2.850	1.44	66.8
18	32.44	2.824	1.52	65.1
19	34.00	2.584	1.44	71.3
20	32.75	2.614	1.50	73.0
21	34.69	2.830	1.41	70.2
22	33.06	2.844	1.39	69.5
23	29.75	2.230	1.02	50.9
24	30.37	2.066	.87	46.3
25	33.00	2.844	1.32	66.1

表 58. 求簡單相關係數所需之符號及數值

	A	B	C	Y
個數	$N = 25$			
數值總和	$\Sigma A = 805.16$	$\Sigma B = 64.234$	$\Sigma C = 34.47$	$\Sigma Y = 1575.7$
平均數	$M_a = 32.206$	$M_b = 2.569$	$M_c = 1.379$	$M_y = 63.028$
總和×均數	$(\Sigma A)M_a = 25930.98$	$(\Sigma B)M_b = 165.02$	$(\Sigma C)M_c = 47.53$	$(\Sigma Y)M_y = 99313.22$
總和×相關數之均數	$(\Sigma A)M_y = 50747.62$ $(\Sigma A)M_b = 2068.46$ $(\Sigma A)M_c = 1110.32$	$(\Sigma B)M_y = 4048.54$ $(\Sigma B)M_c = 88.58$	$(\Sigma C)M_y = 2172.58$	
相關數乘積之總和	$\Sigma AY = 50894.36$ $\Sigma AB = 2073.21$ $\Sigma AC = 1113.00$	$\Sigma BY = 4075.67$ $\Sigma BC = 89.27$	$\Sigma CY = 2202.36$	
數值平方之總和	$\Sigma A^2 = 25968.68$	$\Sigma B^2 = 166.53$	$\Sigma C^2 = 48.60$	$\Sigma Y^2 = 100648.49$
數值平方——(總和×均數)	$\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a = 37.70$	$\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b = 1.51$	$\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c = 1.07$	$\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y = 1335.27$
平方根	$\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a} = 6.14$	$\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b} = 1.23$	$\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c} = 1.03$	$\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y} = 36.54$

從上列各值求得之簡單相關係數

$r_{ay} = .654$　　$r_{by} = .604$　　$r_{cy} = .791$

$r_{ab} = .629$　　$r_{bc} = .543$

$r_{ac} = .424$

在討論淨相關時，A，B，C，及 Y 以 1,2,3,4 代表之。

第六章所述之求簡單相關公式為 $r_{xy}=\dfrac{\dfrac{\Sigma D_xD_y}{N}-(c_xc_y)}{\sigma_x\sigma_y}$，(英文本 97 頁)惟為便於本例題之計算起見，簡單相關亦可成為下列公式：

$$r_{ya}=\frac{\Sigma AY-(\Sigma A)M_y}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}\ \sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}$$

若求 A B 兩性狀之關係其公式當為

$$r_{ab}=\frac{\Sigma AB-(\Sigma A)M_b}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}\ \sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}$$

其他兩性之簡單相關，可照上列公式更易數字而推算之。若求每英斗重量與產量之關係，可以表 58 A 字項下及 Y 字項下各數代入求 r_{ya} 之公式內。

$$r_{ya}=\frac{50894.36-50747.62}{6.14\times 36.54}=\frac{146.74}{224.36}=.654$$

若求每英斗重量與每百粒麥籽之重量相關，則以 A 字項下及 B 字項下各數代入之：

$$r_{ab}=\frac{2073.21-2068.46}{\sqrt{25968.68-25930.98}\ \sqrt{166.53-165.02}}=.629$$

其他各數之相關用同一方法算出，其結果載表 58 之下面。

每英斗重量與燕麥產量之相關係數既為 0.654，即可知燕麥產量之多少與燕麥每斗之重量有相當關係。吾人不妨根據此種關係來求迴歸線，由迴歸線即可從每英斗之燕麥重量來推測產量多少，求迴歸線之方法，曾於第六章詳述，其公式為：

$$Y_a = M_y + r\frac{\sqrt{\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma A^2 - (\Sigma A)M_a}}(A - M_a)$$

根據A值，Y_a 卽爲根據 A 値所推測得來之 Y 値，玆將表 58 各數代入上列公式：

$$Y_a = 63.028 + .654\frac{36.54}{6.14}(A - 32.206) = 63.028 + (.654 \times 5.951)(A - 32.206) = 63.028 + 3.892(A - 32.206)$$

$$= 63.028 + 3.892A - 125.346$$

$$Y_a = 3.892A - 62.318$$

從表 57 查得A 第一行觀察値爲 30 50，以之代入上列方程式而得 Y_a 之値。

$$Y_a = (3.892 \times 30.50) - 62\ 318 = 56.388$$

若將表 57 "A" 項下各品種之觀察値，逐一代入 Y_a 之方程式中，所得各值卽爲預測値，載表 59 P 字項下。爲計算便利起見，小數點以算至一位爲止。

此種預測値與觀察値比較後之差數，載表 59 第三項。差數左邊之符號正負互見，若小數點多算幾位，則正負數適相消，而差異總數爲零。

在上列方程式中，A 之係數 3.892 卽爲迴歸係數，(regression coefficeint)亦卽每一個單位重量之產量差異。例如表57，品種1之每斗重量爲 30.50 時，預測產量爲 56.388 (表59)，品種 5 之每斗重量爲 31.50，預測產量爲 60.280。(表57)品種 1 與 5 之每斗重量相差爲31.50－30.50＝1，故相差爲一個單位，而品種 1 與品種 5 之預測產量之相差爲 3.892，(60.280－56.388＝3.892)。此可知兩品種間每英斗重量之差爲 1 時，產量之差卽爲 3.892 克。

表 59.

實得產量及根據一、二、三、三個變量所得之預測值與預測機誤

實得產量 O 1	據根每英斗重量(A)之預測產量 P 2	預測機誤 O—P 3	根據(A)及(B)每百粒重量之預測產量 P 4	預測機誤 O—P 5	根據(A)( )及(C)麥稈重量之預測產量 P 6	預測機誤 O—P 7
47.5	56.4	−8.9	55.2	−7.7	47.8	− .3
55.5	57.6	−2.1	54.5	1.0	51.1	4.4
60.4	60.7	− .3	58.4	2.0	65.5	−5.1
61.9	.61.5	.4	60.5	1.4	64.4	−2.5
70.2	60.3	9.9	61.3	8.9	66.3	3.9
66.8	61.5	5.3	61.5	5.3	66.0	.8
62.4	73.2	−10.8	69.3	−6.9	68.5	−6.1
56.6	61.3	−4.7	63.7	−7.1	62.3	−5.7
68.0	68.8	− .8	67.5	.5	67.2	.8
67.6	64.6	3.0	65.4	2.2	65.4	2.2
53.8	62.0	−8.2	64.2	−10.4	62.5	−8.7
60.5	65.1	−4.6	66.3	−5.8	65.3	−4.8
63.6	62.2	1.4	63.2	.[illegible]	65.5	−1.9
67.3	60.3	7.0	62.7	4.6	67.1	.2
68.1	62.0	6.1	63.6	4.5	63.1	5.0
65.4	60.5	4.9	58.5	6.9	64.5	.9
66.8	64.2	2.6	66.5	.3	65.3	1.5
65.1	63.9	1.2	66.1	−1.0	66.9	−1.8
71.3	70.0	1.3	68.0	3.3	68.3	3.0
73.9	65.1	8.8	64.9	9.0	66.9	7.0
70.2	72.7	−2.5	72.2	−2.0	69.5	.7
69.5	66.4	3.1	67.9	1.6	65.5	4.0
50.9	53.5	−2.6	53.2	−2.3	49.4	1.5
46.3	55.9	−9.6	53.3	−7.0	47.3	−1.0
66.1	66.1	0.0	67.8	−1.7	63.8	2.3

每一相關，例有兩個迴歸方程，故從 A 推測 Y 後，尙須求從 Y 推測 A 之迴歸方程，其方程式爲：

$$A_y = M_a + r\frac{\sqrt{\Sigma A^2 - (\Sigma A)M_a}}{\sqrt{\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)M_y}}(Y - M_y)$$

將表58之各數代入得：

$$A_y = 32.206 + .654\frac{6.14}{36.54}(Y - 63.028) = 32.206 + (.654 \times .168)(Y - 63.028) = 32.206 + .110(Y - 63.028)$$

$$= 32.206 + .110\,Y - 6.933$$

$$A_y = .110Y + 25.273$$

Y係數 .110 可用爲迴歸係數，表示兩品種間產量差異爲一時，每英斗重量差異當爲 0.110。至於根據 Y 推測 A 之各値，因無用處可以不必算出。

欲知相關係數 r 及兩個迴歸係數 3.892 與 .110 之關係，可將兩數相乘而後開方卽得，因相關係數亦卽兩個迴歸係數之幾何平均數，此種結果並可用來校對迴歸係數之對否。

$$r_{ya} = \sqrt{3.892 \times .110} = .654$$

表 59 第三項內 Y 之 O－P 値（觀察數 observed value 與推測數 predicated value 之相較）亦不爲小，故差異究竟何如，可先求得推測數之標準差來比較之。其公式爲：

$$\sigma_{y.a} = \sqrt{\frac{(1-r^2)(\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)M_y)}{N-2}}$$

在此公式內 N－2 用以代替 N，在下列公式內，N 將以 N－3，N－4

代替之。其理由當在第十三章內詳述之。

將表 58 之各數代入公式中得：

$$\sigma_{y.x}=\sqrt{\frac{[1-(.654)^2](1335.27)}{25-2}}=\sqrt{\frac{.572\times1335.27}{23}}$$

$$=\sqrt{\frac{763.774}{23}}=\sqrt{33.207565}=5.763$$

推測數之標準差為 5.763。標準差亦可用另法求之。其法係將表 59 第三項之 (O－P) 值逐行自乘相加，而以 N－2 除之，然後開方即得。兩法所得結果實相同，惟第二法較第一法為繁複耳。

根據迴歸線所求得之推測標準差為 5.763，此數較由平均數求得之 Y 標準差 7.459 為低，由此可知每英斗之重量變異與籽粒之產量變異有相當關係也。今若以 5.763 與 7.459 相比，其百分數為：

$$\frac{100\times5.763}{7.459}=77.26$$

故新標準差為原有標準差之百分之 77.26，若原有標準差為 100 分之 100，則用每英斗重量來估計之新標準差，可減少百分之二十二有餘 (22.74%)。

測量此種折減百分率，可用下列普通公式來計算之，由 σ_y 至 $\sigma_{y.x}$ 所減低之百分數等於：

$$100\left[1-\sqrt{\frac{N-1}{N-2}(1-r^2)}\right]$$

茲求得 $r_{yx}=.654$，$N=25$ 則

$$100\left[1-\sqrt{\frac{25-1}{25-2}[1-(.654)^2]}\right]=22.72$$

用此法所求得之減低百分率為 22.72，此數較上述之 22.74 略小，實為小數去留關係所致，而非根本有何不同處。若 N 數目大則 $\frac{N-1}{N-2}$ 之關係小而用普通公式所求得者幾與直接相比而得者相同，若相關低而次數又少，則用公式求删減百分數時，差異較直接求得者為大。

茲將衛來斯氏（Wallace）及舒乃特氏（Snedecor）所列之折減百分率錄下，以資參考。

表 60.

期望之差誤輕減百分數得自$\frac{\text{平均數標準差}}{\text{預測數標準差}}$

N＝100

r	輕減百分數	r	輕減百分數
.30	4.1	.92	60.6
.40	7.9	.94	65.7
.50	13.0	.95	68.6
.55	16.1	.96	71.9
.60	19.6	.97	75.6
.65	23.6	.98	80.0
.70	28.2	.99	85.8
.75	33.5	.995	90.0
.80	39.7	.999	95.5
.85	47.1	.9995	96.8
.90	56.2	.9999	98.6

A 或 B 與 Y 之簡單相關已求得後，可進而計算 A 與 B 兩種變異對於 Y 之影響，同時亦可從 A 與 B 兩種觀察數用迴歸線來推測 Y 之

價值。A與Y，B與Y，及A與B之相關係數，已在表58求出，茲錄之如下。

$$r_{ay} = .654$$

$$r_{by} = .604$$

$$r_{ab} = .629$$

考 r_{ay} 即為 r_{ya}；r_{by} 亦即 r_{yb}；r_{ab} 與 r_{ba} 同，兩個變異孰前孰後，初無關係，求得兩數相關以後，可用以求 β_{ya} 與 β_{yb} 之值，此兩值亦即標準淨迴歸係數，其方程式為：

方程式 I $\beta_{ya} + r_{ab}\beta_{yb} = r_{ya}$

方程式 II $r_{ab}\beta_{ya} + \beta_{yb} = r_{yb}$

先解決 β_{ya}

用　方程式　I，$\beta_{ya} + r_{ab}\beta_{yb} = r_{ya}$

以 r_{ab} 乘方程式 II，$r^2_{ab}\beta_{ya} + r_{ab}\beta_{yb} = r_{ab}r_{yb}$

與方程式 I 相減　$\beta_{ya} - r^2_{ab}\beta_{ya} = r_{ya} - (r_{ab}r_{yb})$

加括弧　$\beta_{ya}(1 - r^2_{ab}) = r_{ya} - (r_{ab}r_{yb})$

以$(1 - r^2_{ab})$除之　$\beta_{ya} = \dfrac{r_{ya} - (r_{ab}r_{yb})}{1 - r^2_{ab}}$

用同樣方法求得　$\beta_{yb} = \dfrac{r_{yb} - (r_{ab}r_{ya})}{1 - r^2_{ab}}$

將 r_{ya}，r_{yb} 及 r_{ab} 等已知數代入 β_{ya} 公式內：

$$\beta_{ya} = \frac{.654 - (.629 \times .604)}{1 - (.629)^2} = .454$$

以相關係數代入 β_{yb} 之方程式內：

$$\beta_{yb} = \frac{.604 - (.629 \times .654)}{1 - (.629)^2} = .320$$

求 β 值亦可以 r 值直接代入普通方程式而計算之如下：

方程式 I　$1.000\beta_{ya}+.629\beta_{yb}=.654$

方程式 II　$.629\beta_{ya}+1.000\beta_{yb}=.604$

用代數相消法及代入法，求得　$\beta_{ya}=.454$

$\beta_{yb}=.320$

β 值求得後，即可根據兩變量，variable，而用迴歸係數之方程式來估計 Y 值。求兩個變量之迴歸係數，與求一個者不同，今將求多數迴歸方程之公式列下：

$$Y_{ab}=M_y+\beta_{ya}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}}(A-M_a)$$

$$+\beta_{yb}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}(B-M_b)$$

Y_{ab} 乃根據 A 及 B 兩個變量之觀察數來推測 Y 值。

將已知數代入上列公式：

$$Y_{ab}=63.028+.454\frac{36.54}{6.14}(A-32.206)+.320\frac{36.54}{1.23}(B-2.569)$$

$$=63.028+(.454\times5.951)(A-32.206)+(.320\times29.707)$$
$$(B-2.569)$$

$$=63.028+2.702(A-32.206)+9.506(B-2.569)$$

$$=63.028+2.702\,A-87.021+9.506\,B-24.421$$

$$Y_{ab}=2.702A+9.506\,B-48.414$$

查表57第一品種 A 與 B 之觀察數爲 30.50 及 2.234，以之代入 Y_{ab} 之方程式內，即得推測的 Y 值：

$$Y_{ab}=2.702(30.50)+9.506(2.234)-48.414=55.2$$

用表 57 A 及 B 之觀察數逐行代入 O 求 Y_{ab} 之方程式內，所得之 Y 推測數，載表 59 第四項內。此種推測數卽係根據每英斗重量及每百粒重量所預測之產量記錄。

至此吾等可討論複相關係數。

迴歸方程僅能指示如何根據兩種變量之觀察數而推算第三變量之估計量，而未能將三者之關係表現出之。此種測驗實有待於複相關，今將敍述複相關係數之計算法，以明變異數之關係程度。求複相關係數之方程式爲：

$$R^2=r_{ya}\beta_{ya}+r_{yb}\beta_{yb}$$

若將已知各數代入得 R^2 爲 .700

$$R^2=(.654\times.454)+(.604\times.320)$$

$$=.296916+.193280=.490196$$

$$R=\sqrt{.490196}=.700$$

以此複相關係數 R 值與前求得之兩數相關係數 r 值相較，則前者 (R=.700) 較後者 (r=.654) 大 .056，R 爲 A 及 B 對於 Y 之相關量，r 則爲 A 或 B 對於 Y 之相關量。R 旣大於 r 是可知燕麥產量與每英斗重量及百粒之重量之相關，較燕麥產量與每英斗重量之簡單相關爲大，故預測數目時，多根據一種變量之相互關係，結果卽較佳。

根據兩個變量來推測產量之估計差誤，詳載表 59 第五項內，其數目較第三項內之根據一個變量來推測之估計差誤略小。

求推測標準差之公式爲：

$$\sigma_{y.ab}=\sqrt{\frac{[1-R^2][\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y]}{N-3}}$$

他已知數代入後，求得推測數之標準差爲 5.564，以此數與由平均數求得之標準差 7.459 相比，所減百分率爲 25 有奇。

$$\frac{100\times5.564}{7.459}=74.59 \qquad \text{公式見第 172 頁}$$

若以平均數之標準差爲百分之百，則用二個變量時，其推測數之標準差僅爲百分之 74.59，故減少百分之 25.41。欲知二個以上變量對於一個變量之影響，可在前用之標準淨迴歸係數（partial regression coefficient）之方程上加添項數而求之，凡添一個變量，則添一個項數，添二個變量，則添二個項數，三個變量影響於第四個變量之方程爲：

$$\beta_{ya}+r_{ab}\beta_{yb}+r_{ac}\beta_{yc}=r_{ya}$$

$$r_{ba}\beta_{ya}+\beta_{yb}+r_{bc}\beta_{yc}=r_{yb}$$

$$r_{ca}\beta_{ya}+r_{cb}\beta_{yb}+\beta_{yc}=r_{yc}$$

四個變量影響於第五個變量之方程式爲：

$$\beta_{ya}+r_{ab}\beta_{yb}+r_{ac}\beta_{yc}+r_{ad}\beta_{yd}=r_{ya}$$

$$r_{ba}\beta_{ya}+\beta_{yb}+r_{bc}\beta_{yc}+r_{bd}\beta_{yd}=r_{yb}$$

$$r_{ca}\beta_{ya}+r_{cb}\beta_{yb}+\beta_{yc}+r_{cd}\beta_{yd}=r_{yc}$$

$$r_{da}\beta_{ya}+r_{db}\beta_{yb}+r_{dc}\beta_{yc}+\beta_{yd}=r_{yd}$$

五個變量影響於第六個變量之方程式爲：

$$\beta_{ya}+r_{ab}\beta_{yb}+r_{ac}\beta_{yc}+r_{ad}\beta_{yd}+r_{ae}\beta_{ye}=r_{ya}$$

$$r_{ba}\beta_{ya}+\beta_{yb}+r_{bc}\beta_{yc}+r_{bd}\beta_{yd}+r_{be}\beta_{ye}=r_{yb}$$

$$r_{ca}\beta_{ya}+r_{cb}\beta_{yb}+\beta_{yc}+r_{cd}\beta_{yd}+r_{ce}\beta_{ye}=r_{yc}$$

$$r_{da}\beta_{ya}+r_{db}\beta_{yb}+r_{dc}\beta_{yc}+\beta_{yd}+r_{de}\beta_{ye}=r_{yd}$$

$$r_{ea}\beta_{ya}+r_{eb}\beta_{yb}+r_{ec}\beta_{yc}+r_{ed}\beta_{yd}+\beta_{ye}=r_{ye}$$

六個變量影響於第七個變量之方程式爲:

$$\beta_{ya}+r_{ab}\beta_{yb}+r_{ac}\beta_{yc}+r_{ad}\beta_{yd}+r_{ae}\beta_{ye}+r_{af}\beta_{yf}=r_{ya}$$

$$r_{ba}\beta_{ya}+\beta_{yb}+r_{bc}\beta_{yc}+r_{bd}\beta_{yd}+r_{be}\beta_{ye}+r_{bf}\beta_{yf}=r_{yb}$$

$$r_{ca}\beta_{ya}+r_{cb}\beta_{yb}+\beta_{yc}+r_{cd}\beta_{yd}+r_{ce}\beta_{ye}+r_{cf}\beta_{yf}=r_{yc}$$

$$r_{da}\beta_{ya}+r_{db}\beta_{yb}+r_{dc}\beta_{yc}+\beta_{yd}+r_{de}\beta_{ye}+r_{df}\beta_{yf}=r_{yd}$$

$$r_{ea}\beta_{ya}+r_{eb}\beta_{yb}+r_{ec}\beta_{yc}+r_{ed}\beta_{yd}+\beta_{ye}+r_{ef}\beta_{yf}=r_{ye}$$

$$r_{fa}\beta_{ya}+r_{fb}\beta_{yb}+r_{fc}\beta_{yc}+r_{fd}\beta_{yd}+r_{fe}\beta_{ye}+\beta_{yf}=r_{yf}$$

變量增加時,求相關係數之方程式項目可隨之增添,惟若儘量加添,數目益多,計算愈繁,終非長策,故統計學者已擬有較簡單之方法來解決之,後當詳述。

欲求A,B,C三個變量對於第四個變量Y之影響,可以表58所列之相關係數,代入上列第一組方程式內。

$$\beta_{ya}+r_{ab}\beta_{yb}+r_{ac}\beta_{yc}=r_{ya}$$

方程 I $\quad 1.000\beta_{ya}+.629\beta_{yb}+.424\beta_{yc}=.654$

方程 II $\quad .629\beta_{ya}+1.000\beta_{yb}+.543\beta_{yc}=.604$

方程III $\quad .424\beta_{ya}+.543\beta_{yb}+1.000\beta_{yc}=.791$

重列方程 II $\quad .629\beta_{ya}+1.000\beta_{yb}+.543\beta_{yc}=.604$

而以 $.629\times$ I $\quad .629\beta_{ya}+.396\beta_{yb}+.267\beta_{yc}=.411$

相消 $\quad .604\beta_{yb}+.276\beta_{yc}=.193\cdots\cdots\cdots(1)$

重列方程III $\quad .424\beta_{ya}+.543\beta_{yb}+1.000\beta_{yc}=.791$

而以.424×I　$.424\beta_{ya}+.267\beta_{yb}+0.180\beta_{yc}=.277$

相消　$.276\ {}_{yb}+0.820\beta_{yc}=.514$………(2)

以.604乘(2),以.276乘(1):

$$(2\quad .167\beta_{yb}+.495\beta_{yc}=.310$$

$$(1)\quad .167\beta_{yb}+.076\beta_{yc}=.053$$

相消　$.419\beta_{yc}=.257$

$$\beta_{yc}=.613$$

以β_{yc}值代入(1)

$$.604\beta_{yb}+.169\quad =.193$$

$$.604\beta_{yb}=.024$$

$$\beta_{yb}=.040$$

以β_{yb}及β_{yc}之值代入I

方程I　$1.000\beta_{ya}+(.629\times.040)+(.424\times.613)=.654$

$$\beta_{ya}=.369$$

用A與B二個變量來預測產量之迴歸方程式為:

$$Y_{ab}=M_y+\beta_{ya}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}}(A-M_a)$$

$$+\beta_{yb}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}(B-M_b)$$

今有A,B,C三個變量故其迴歸方程當比此多一項,而為:

$$Y_{abc}=M_y+\beta_{ya}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}}(A-M_a)$$

$$+\beta_{yb}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}(B-M_b)$$

$$+\beta_{yc}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c}}(C-M_c)$$

將表 58 之已知數及 β 值代入，得：

$$Y_{abc}=63.028+.369\frac{36.54}{6.14}(A-32.206)$$

$$+.040\frac{36.54}{1.23}(B-\ 2.569)$$

$$+.613\frac{36.54}{1.03}(C-\ 1.379)$$

將各項歸併而得：

$$Y_{abc}=2.196A+1.188\,B+21.747\,C-40.737$$

將表 57 所列 A，B，C 各值分行代入，得根據三個變量所推測之產量記錄，結果載表 59 第六項。表 57 A，B，C 各項內之第一行觀察數爲 30.50，2.234 及 0.87，代入 Y_{abc} 之迴歸方程式得：

$$Y_{abc}=2.196(30.50)+1.188(2.234)+21.747(.87)-40.737$$

$$=47.8$$

表 59 第六項各數，頗與觀察數相近似，此可知根據三個變量來推測產量，較用兩個變量來推測產量爲準確。

求三個變量之相關係數與二個變量之求法大致相同，其公式爲：

$$R^2=\beta_{ya}r_{ay}+\beta_{yb}r_{by}+\beta_{yc}r_{cy}$$

將已知數代入得：

$$R^2=(.369)(.654)+(.040)(.604)+(.613)(.791)=.750369$$

$$R=\sqrt{.750369}=.866$$

每莢斗重量及每百粒籽之重量與產量之相關係數爲 .700，而現在所求得者爲 .866，可知三個變量之相關係數，較兩個變量爲高。相關係數8.66同時亦爲推測數(表59第六項)與觀察數(表59第一項)之相關量。故變量加多時，推測數與觀察數亦較相近，而相關係數亦增高。一個變量與產量之相關係數爲 .654，二個變量與產量之相關爲 .700，三個變量與產量之相關爲 .866，逐漸增加，顯而易見。

若欲知第三個變量(麥桿重量)加入後，平均可減少估計差誤至如何程度，仍照上法先求得估計差誤後，再與平均數之百分數相較，即得：

$$\sigma_{y.abc}=\frac{\sqrt{(1-R^2)(\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y)}}{N-4}$$

$$\sigma_{y.abc}=\frac{\sqrt{(1-.866)(100648.49-99313.22)}}{25-4}$$

$$\sigma_{y.abc}=3.987\cdots\cdots\text{估計標準差}$$

觀察數之平均標準差爲 7.459，故估計標準差爲百分之 53.45。

$$\frac{100\times3.987}{7.459}=53.45$$

根據三個變量所得之標準差，較從平均數求得之標準差減少差異百分之 46.55，是可知產量之多少，與此三種變量皆有關係。

其關係之程度，可用下列普通公式求之：

$$100\times1-\sqrt{1-R^2}\ \text{註3}$$

今將複相關之係數代入得：

$$100\times1-\sqrt{1-(.866)^2}\ =50.00$$

此表示燕麥產量百分之五十，受三種變量——每莢斗重量，每百粒

重量，及麥桿之重量，一一之影響。尚有百分之五十之產量，則爲其他未計及之因子所左右，而此種性狀，則猶未被分析也。

上述各例表明用複相關計算法，如何可求得數個性狀影響於一個性狀之關係，若燕麥之重量，除受上述三種性狀外，尚有其他因子之影響時，亦可依法算出。複相關之用度頗廣，例如研究農業經濟內之佃農收入，則對於田地之大小，農工之多少，牲口之數目，及各種農作物之產量等等，皆與佃農收入有關。若用複相關來求其結果，頗易明瞭，複相關之用處果大，惟上述算法實太緊複，茲另擬簡法，詳見表 61。

表 61 有 A，B，C，D 及 Y 五項，代表四種性狀及產量，表上末一項之 S 內各數，卽爲前五項之總和。第一行 50+20+2+25+1.0=98.0 卽爲 5 項下第一行之値。故 S 一項有兩種用處，除用作變量之一，而爲計算之數字外，尚可用來校對上列各項之正誤。例如 S 之總和爲 4051.1，此數宜與 A，B，C，D，Y 各項相加之和相同。

計算數個變量之複相關及迴歸係數仍照懷來斯氏及舒乃特氏所介紹之方法來求各種有關係之相關係數及 β 値，其所需項目及結果，載表 62, 63, 64, 65。表 62 及 63 表示求相關係數時之各種步驟，表 64 及 65 示 β 値之計算法與結果，凡表中所載之項目及記號等，可用作計算複相關之範本，表中所載 A，B，C 等項目隨變量之多少而定，若有五個變量則項目便爲 A，B，C，D，E 五項。

表內所用記號及公式之意義，與普通統計所用者同。例如 M 代表平均數，故 M_A 爲 A 性狀之平均數，ΣA 則性狀 A 之總和，餘類推。用表 61 記錄所算得之結果載表 63。

表 61.

25株燕麥之產量記錄用以引證複相關之分析

燕麥號碼	燕麥高度(公分) A	每桿燕麥之小穗數 B	幹　數 C	每幹平均籽粒 D	籽粒產量(克) Y	S
1	50	20	2	25	1.0	98.0
2	59	20	2	45	2.5	128.5
3	63	24	3	43	2.5	135.5
4	66	30	4	42	3.0	145.0
5	52	18	2	28	1.5	101.5
6	69	40	5	40	4.0	158.0
7	71	40	6	30	4.0	151.0
8	74	40	5	60	5.2	184.2
9	78	44	4	75	6.0	207.0
10	55	24	3	34	2.0	118.0
11	84	51	4	90	7.0	236.0
12	60	25	3	37	2.0	127.0
13	80	50	6	52	6.0	194.0
14	64	30	4	40	3.0	141.0
15	70	35	4	45	4.2	158.2
16	79	45	5	68	6.5	203.5
17	77	50	6	50	5.0	188.0
18	65	35	5	40	3.2	148.2
19	67	32	3	50	3.5	155.5
20	70	38	5	40	4.5	157.5
21	84	50	5	80	7.2	226.2
22	76	45	4	65	4.8	194.8
23	73	44	6	42	5.0	170.0
24	72	36	4	45	4.5	161.5
25	75	43	6	35	4.0	163.0
總數	1733	909	106	1201	102.1	4051.1

表 62.

求複相關係數時所用之符號 依次排列)

A	B	C
總和 ΣA 均數 M_a	ΣB M_b	ΣC M_c
$A_1 \Sigma A^2$ $A_2 (\Sigma A) M_a$ $A_3 \Sigma A^2-(\Sigma A) M_a$ $A_4 \sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A) M_a}$	ΣAB $(\Sigma A) M_b$ $\dfrac{\Sigma AB-(\Sigma A) M_b}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A) M_a} \quad \sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B) M_b}}$	ΣAC $(\Sigma A) M_c$ $\dfrac{\Sigma AC-(\Sigma A) M_c}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A) M_a} \quad \sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C) M_c}}$
B_1 B_2 B_3 B_4	ΣB^2 $(\Sigma B) M_b$ $\dfrac{\Sigma B^2-(\Sigma B) M_b}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B) M_b}}$	ΣBC $(\Sigma B) M_c$ $\dfrac{\Sigma BC-(\Sigma B) M_c}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B) M_b} \quad \sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C) M_c}}$
C_1 C_2 C_3 C_4		ΣC^2 $(\Sigma C) M_c$ $\dfrac{\Sigma C^2-(\Sigma C) M_c}{\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C) M_c}}$
D_1 D_2 D_3 D_4		
Y_1 Y_2 Y_4 Y_3		

表 62.（續）

D	Y	S
ΣD M_d	ΣY M_y	ΣS M_s
ΣAD $(\Sigma A)M_d$ $\Sigma AD-(\Sigma A)M_d$ $\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}\quad\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}$	ΣAY $(\Sigma A)M_y$ $\Sigma AY-(\Sigma A)M_y$ $\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}\quad\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}$	ΣAS $(\Sigma A)M_s$ 校對處
ΣBD $(\Sigma B)M_d$ $\Sigma BD-(\Sigma B)M_d$ $\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}\quad\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}$	ΣBY $(\Sigma B)M_y$ $\Sigma BY-(\Sigma B)M_y$ $\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}\quad\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}$	ΣBS $(\Sigma B)M_s$ 校對處
ΣCD $(\Sigma C)M_d$ $\Sigma CD-(\Sigma C)M_d$ $\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c}\quad\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}$	ΣCY $(\Sigma C)M_y$ $\Sigma CY-(\Sigma C)M_y$ $\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c}\quad\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}$	ΣCS $(\Sigma C)M_s$ 校對處
ΣD^2 $(\Sigma D)M_d$ $\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d$ $\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}$	ΣDY $(\Sigma D)M_y$ $\Sigma DY-(\Sigma D)M_y$ $\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}\quad\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}$	ΣDS $(\Sigma D)M_s$ 校對處
	ΣY^2 $(\Sigma Y)M_y$ $\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y$ $\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}$	ΣYS $(\Sigma Y)M_s$ 校對處

表 63. 用表61資料及表62之符號所求得之數值及相關係數

	A	B	C	D	Y	S
總和	1733	909	106	1201	102.1	4051.1
均數	69.320	36.360	4.240	48.040	4.084	162.044
A_1	122203	65207	7558	86105	7442.4	288515.4
A_2	120131.56	63011.88	7347.92	83253.32	7077.572	280822.252
A_3	2071.44	2195.12	210.08	2851.68	364.828	7693.148
A_4	45.5131	2291.8713	289.8593	3067.3955	376.8894	
		$r_{ab}=$ .9578	$r_{ac}=$ .7248	$r_{ad}=$ .7776	$r_{ay}=$ .9680	
B_1		35587	4117	46380	4098.5	155389.5
B_2		33051.24	3854.16	43668.36	3712.356	147297.996
B_3		2535.76	262.84	2711.64	386.144	8091.504
B_4		50.3563	320.7042	4057.6553	416.9955	
			$r_{bc}=$ .8196	$r_{bd}=$ .6683	$r_{by}=$ .9260	
C_1			490	5190	467.0	17822
C_2			449.44	5092.24	432.904	17176.664
C_3			40.56	97.76	34.096	645.336
C_4			6.3687	513.1828	52.7386	
				$r_{cd}=$ .1905	$r_{cy}=$ .6465	
D_1				64189	5463.5	207327.5
D_2				57696.04	4904.884	194614.844
D_3				6492.96	558.616	12712.656
D_4				80.5789	667.2658	
					$r_{dy}=$ .8372	
Y_1					485.55	17956.95
Y_2					416.9764	16544.6924
Y_3					68.5736	1412.2576
Y_4					8.2809	

表 63 S 項之用意有二，其一爲校對數目之用，S 項內第一行爲前幾項數目之總和，例如 S 之總和爲 4051.1，若此數以次數和 25 除之，所得之商，當與 A, B, C, D, Y 五個平均數之總和相等。A_1 爲 A^2 總和，A_2 爲 $(\Sigma A)\ m_a$ 見表 61，故 A_1 及 A_2 皆可從記錄表內直接算出。A_3 爲 A_1 與 A_2 之差異，故 A_3 又可若 S 之用來校對 A_1 及 A_2 之正誤。A, B, C, D, Y 各項之 A_3 相加總和，即等於 S 項下之 A_3。故

$$\begin{array}{lcccccc} & A & B & C & D & Y & =S \\ A_3 & 2071.44+ & 2195.12+ & 210.08+ & 2851.68+ & 364.828 & =7693.148 \end{array}$$

在表 62, 63 及 64 中間空白極多，例如在 A 項下之 B_1, B_2, B_3, 及 B_4 即無數目，此因其數目已在他行下算出，免致重複，故缺而不填。例如 ΣAB 即等於 ΣBA，故 ΣBA 項下即空出，若欲校對 S 項下 B_1 之值，可將 B_1 行內 B, C, D, Y 各值相加，再加 B 項下之 A_1 值：

$$35587+4117+46380+4098.5+65207.0=155389.5$$

B_3 行內之 S 值，應與 B_3 行內之 B, C, D, Y 及 B 項內 A_3 值相加之和相等，若校對 C_3 之正誤，可將 C_3 行內之 C, D, Y 及 C 項內 A_3 值相加，其和應與 C_3 行內之 S 相等。

以 S 一項來校對各數，確甚方便，於數目大時爲尤有用。計算各項數目時，小數點多算幾位，與 S 校對時較易符合。表 63 內各項之值，皆算至小數四位，故與 S 項校對時，結果相符。若僅算至三位小數，則結果與 S 項內所得者未免略有出入，所差若極微小，則總結算時無甚影響，若與 S 項校對時確有相當差異，則計算有誤，須重行校對。

S 項下各數校對完畢，即可計算相關係數。若求 A 與 B 之相關係數，

可將 B 項下之 A_3 以 B 項下之 A_4 除之。r_{ac} 之相關係數則以 C 項下之 A_3，被 C 項下之 A_4 除之即得。B_1 與其他各數之相關係數以 B_3 項下各值，與 B_4 項下者相除而得。其餘各相關係數，可用同樣方法求出。結果載表 63。A, B, C, D, Y 之標準差可以表中每項之末一數目除 $\sqrt{N-1}$ 而得。

各數之相關係數既求得，可照表 64 各公式算出迴歸係數或 β 值。各步算法詳載於表上各行內。若將表 63 之相關係數代入，而照各步驟計算，所得結果即為表 65 1 行至 17 行行內所載者。凡 A 與 A 之相關，必為完全相關，其係數為 1.000，載表 65 行 1。其他各性狀凡屬完全相關時，其係數皆為 1.000。

進行各步驟之計算時，須十分小心，並宜利用 S 項來校對各值。表 65 S 項下各數，與表 63 S 項下各數不同。表 65 內 S 項下第一數，為第一行內各相關係數之總和。S 項下第二數(第三行之 S 數目)為 B 相關係數之總和，因 B A 之相關係數與 A B 同，故以 B 項第一行之數加上 B, C, D, Y 項下之各 B 相關係數即得。換言之即以行 1 之 B .9578 加行 3 之 B 1.0000 + C .8196 + D .6683 + Y .9260 之總和。

例如　.9578 + 1.0000 + .8196 + .6683 + .9260 = 4.3717

S 項內第七行係 C 之相關係數總數，包括 C 項內行 1 及行 3 之 A C 與 B C 相關係數，及行 7 之三個相關係數。

上已言之，欲與 S 項內各數校對無訛，則小數點須多算幾位，本例題算至四位小數為止，在 S 項內，因小數點四捨五入，略有差異。例如表 65 算至四位小數止，S 項內之數目與上項諸數相加之和，未能適合，若算至六個小數點時，兩者即符合。

表 64.

求 β 值所用之符號及方針表

說明	區塊	行	A	B	C	D	Y	S
加入A相關係數	A	1	1	r_{ab}	r_{ac}	r_{ad}	r_{ay}	←→總和
改符號		2	-1	$-r_{ab}$	$-r_{ac}$	$-r_{ad}$	$-r_{ay}$	
加入B相關係數	B	3		1	r_{bc}	r_{bd}	r_{by}	↑——→總和
以B字項下第1行乘第2行($-r_{ab}$)而將結果寫在B字項下		4		$(-r_{ab})\times r_{ab}$	$(-r_{ab})\times r_{ac}$	$(-r_{ab})\times r_{ad}$	$(-r_{ab})\times r_{ay}$	$(-r_{ab})\times$總和
以B字項下3行之數與4行之數相加		5		(bb)	(5_c)	(5_d)	(5_y)	(5_s)
以B字項下(bb)值除第五行之數而將其商數改變符號		6		-1	(bc)	(bd)	(by)	校對處
加入C相關係數	C	7			1	r_{cd}	r_{cy}	↑——→總和
以C字項下第1行乘第2行($-r_{ac}$)		8			$(-r_{ac})\times r_{ac}$	$(-r_{ac})\times r_{ad}$	$(-r_{ac})\times r_{ay}$	$(-r_{ac})\times$總和
以C字項下第6行bc乘第5行		9			$(bc)\times(5_c)$	$(bc)\times(5_d)$	$(bc)\times(5_y)$	$(bc)\times(5_s)$
以C字項下第7,第8,及第9三行相加		10			(cc)	(10_d)	(10_y)	(10_s)
以 cc 之值除第10行而將其商數改變符號		11			-1	(cd)	(cy)	校對處
加入D相關係數	D	12				1	r_{dy}	↑——→總和
以D字項下第1行乘第2行($-r_{ad}$)		13				$(-r_{ad})\times r_{ad}$	$(-r_{ad})\times r_{ay}$	$(-r_{ad})\times$總和
以D字項下第5行乘第6行(bd)		14				$(bd)\times(5_d)$	$(bd)\times(5_y)$	$(bd)\times(5_s)$
以D字項下第10行乘第11行(cd)		15				$(cd)\times(10_d)$	$(cd)\times(10_y)$	$(cd)\times(10_s)$
以D字項下第12,13,14及15各行相加		16				(dd)	(16_y)	(16_s)
以dd之值除第16行而將其商數改變符號		17				-1	(dy)	校對處
$\beta_{yd}=-dy$		d				β_{yd}	(-dy)	
β_{yc}=c行內之D項及Y項之相加數		c			β_{yc}	$\beta_{yd}\times(cd)$	(-cy)	
β_{yb}=b行內之C項D項Y項之相加數		b		β_{yb}	$\beta_{yc}\times(bc)$	$\beta_{yd}\times(bd)$	(-by)	
β_{ya}=a行內之B項C項D項Y項之相加數		a	β_{ya}	$\beta_{yb}\times(-r_{ab})$	$\beta_{yc}\times(-r_{ac})$	$\beta_{yd}\times(-r_{ad})$	(r_{ay})	

表 65.

用表 63 之數值根據表 64 之排列求得之 β 值

説明	區塊	行	A	B	C	D	Y	S
加入A相關係數	A	1	1.0000	.9578	.7248	.7776	.9680	4.4282
改符號		2		-.9578	-.7248	-.7776	-.9680	
加入B相關係數	B	3		1.0000	.8196	.6683	.9260	4.3717
以B字項下第1行乘第2行(-.9578)而將結果寫在B字項下		4		-.9174	-.6942	-.7448	-.9272	-4.2413
以B字項下3行之數與4行之數相加		5		.0826	.1254	-.0765	-.0012	.1304
以B字項下(.0826)值除第5行之數而將其商數改變符號		6		-1.0000	-1.5182	.9262	.0145	-1.5787
加入C相關係數	C	7			1.0000	.1905	.6465	3.3814
以C字項下第1行乘第2行(-.7248)		8			-.5253	-.5636	-.7016	-3.2096
以C字項下第6行(-1.5182)乘第5行		9			-.1904	.1161	.0018	-.1980
以C字項下第7,第8,及第9三行相加		10			.2843	-.2570	-.0533	-.0262
以(.2843)之值除第10行而將其商數改變符號		11			-1.0000	.9040	.1875	.0922
加入D相關係數	D	12				1.0000	.8372	3.4736
以D字項下第1行乘第2行(-.7776)		13				-.6047	-.7527	-3.4434
以D字項下第5行乘第6行(.9262)		14				-.0709	-.0011	.1208
以D字項下第10行乘第11行(.9040		15				-.2323	-.0482	-.0237
以D字項下第12,13,14及15各行相加		16				.0921	.0352	.1273
以(.0921)之值除第16行而將其商數改變符號		17				-1.0000	-.3822	-1.3822
$\beta_{yd}=.3822$		d				.3822	.3822	
$\beta_{yc}=.3455-.1875=.1580$		c			.1580	.3455	-.1875	
$\beta_{yb}=-.2399+.3540-.0145=.0996$		b		.0996	-.2399	.3540	-.0145	
$\beta_{ya}=-.0954-.1145-.2972+.9680=.4609$		a	.4609	-.0954	-.1145	-.2972	.9680	

求 β 值時各數之正負號須特別注意。表 65 Y 項下 D, C, B, A 各區之末行數目，更改其正負號，塡入 Y 項內末一格 d, c, b, a 之四行中。例如D區內末行數爲 $-.3822$，塡入 d 格內則成 .3822；C 區末行爲 .1875 塡入 C 行則成 $-.1875$；B 區末行爲 .0145 塡入 b 格爲 $-.0145$；A 區末行爲 $-.9680$ 塡入 a 格爲 .9680。復將 Y 項下 d 行內 .3822一數，塡入 D 項 d 行內，此數卽爲 β_{yd} 之值，若將此數以 D 項下 C, B, A 各區之末一數目分別乘之，得 .3455, .3540, $-.2972$, 依次塡入 D 項下 c b a 各行內。D 項內之 D 區末一數目爲 1.0000, 故略而不算。因以 1 乘任何數，其積總與其原數相等。D項及Y項之 C 行數目相加得 .1580, (.3455 $-.1875=.1580$) 此數可塡入 C 字項 c 行內爲 β_{yc} 之值，此數 .1580 與C字項內 B 區之末一數 -1.5182 相乘，得 $-.2399$, 可塡入 C 字項下 b 字行內，再C字項 A 區末一數爲 $-.7248$，與 β_{yc} 值 .1580 相乘，得 $-.1145$, 可塡入 C 字項下 d 字行內，今將 d 字行內 Y, D, C 各項之值相加，得 .0996，此爲 B_{yb} 值，記錄在 B 字項 b 字行內。以 B_{yb} 值乘 B 項內 A 字行末一數目 $-.9578$，得 $-.0954$，記錄在 B 字項 a 字行內，將 a 字行B,C, D, Y 各項之值相加，得 .4609，此爲 β_{ya} 之值，記錄在A字項 a 字行內。

β_{yd} β_{ya} 等數亦可由第 1 行，第 6 行，第 11 行及第 17 行內各數求得，自第 17 行起改變符號得；

$$1.0000\beta_{yd}=.3822 \qquad \beta_{yd}=.3822$$

在行 11 內改變符號得：

$$1.0000\beta_{yc}-.9040\beta_{yd}=-.1875$$

以 β_{yd} 之值 .3822 代入上列方程式：

$$1.0000\beta_{yc}-.9040\times.3822=-.1875$$

$$\beta_{yc}=.1580$$

在第 6 行內改變符號得：

$$1.0000\beta_{yb}+1.5182\beta_{yc}-.9262\beta_{yd}=-.0145$$

以 β_{yc} 值(.1580)及 β_{yd} 值(.3822)代入求得：

$$\beta_{yb}=.0996$$

在第 1 行內

$$1.0000\beta_{ya}+.9578\beta_{yb}+.7248\beta_{yc}+.7776\beta_{yd}=.9680$$

以 β_{yb} (.0996)，β_{yc}(.1580) 及 β_{yd}(.3822) 代入得：

$$\beta_{ya}=.4609$$

是以表65以第 6 行與第 1 行相較，則第 6 行所列各數所成 β 值之方程式少一 β_{ya}。第11行所列各數所成之方程式則少 β_{ya} 及β_{yb}。17 行所成之方程式，則僅求得 β_{yd} 而已。

β 值既求得後，即可根據四種有關係之性狀，用迴歸方程式來預測每株之多少，其方程式爲：

$$\begin{aligned}Y_{abcd}=M_y&+\beta_{ya}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}}(A-M_a)\\&+\beta_{yb}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}(B-M_b)\\&+\beta_{yc}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma C^2-(\Sigma C)M_c}}(C-M_c)\\&+\beta_{yd}\frac{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}{\sqrt{\Sigma D^2-(\Sigma D)M_d}}(D-M_d)\end{aligned}$$

以表63及65之值代入得：

$$Y_{abcd}=4.084+.4609\frac{8.2809}{45.5131}(A-69.320)$$

$$+.0996\frac{8.2809}{50.3563}(B-36.360)$$

$$+.1580\frac{8.2809}{6.3687}(C-4.240)$$

$$+.3822\frac{8.2809}{80.5789}(D-48.040)$$

$$Y_{abcd}=.0839A+.0164B+.2054C+.0393D-5.0871$$

以各種品種 A, B, C, D 之觀察數逐一代入，卽可求得Y之推測數，其步驟曾詳述本章上篇，故不復贅。

求得簡單相關係數及 β 值後可由下列公式求得複相關係數：

$$R^2=\beta_{ya}r_{ay}+\beta_{yb}r_{by}+\beta_{yc}r_{cy}+\beta_{yd}r_{dy}$$

以已知數代入，求得 R 爲 .9801。

$$R^2=(.4609\times.9680)+(.0996\times.9260)+(.1580\times.6465)$$

$$+(.3822\times.8372)=.960506$$

$$R=\sqrt{.960506}=.9801$$

根據此複相關係數 R 之值，可決定產量受各變異影響之程度。從普通公式求得燕麥產量約有百分之 80.15 與所觀察之四種變異有相互關係，其未計及者，約佔百分之 20。

$$100\times1-\sqrt{1-(.9801)^2}=80.15$$

淨相關 Partial Correlation　上面所述者爲數個性狀影響於一個性狀之關係。惟此外尙有一種方法，目的在求兩種變異之關係，而將

足以影響此種關係之因子，一律除出或令之固定，不發生影響。

吾人決定兩種性狀之相關時，對於其他有影響之因子，每忽而不計，至於淨相關則不然。在計算兩種材料之相關時可將其他因子除開，是以用淨相關所決定之兩種材料之關係，與其他因子無關。吾人普通求兩種性狀之相關時，雖欲對於第三者之影響，摒除不顧而不可得，惟玆用求淨相關係數之方法，則可不計及別種因子，而淨算兩種材料之相關。

淨相關之算法，可以下列例題說明之。表57之材料曾用以計算複相關者，爲便利計，求淨相關時用數目字1, 2, 3, 4來替代A, B, C, Y。故(1)代表每莖斗之產量，(2)代表每100籽粒之重量，(3)麥桿之重量，(4)籽粒產量。A與B之簡單相關係數 r_{ab} 當寫作 r_{12}, A與C之相關係數則爲 r_{13}, A與D則爲 r_{14}, B與C爲 r_{23}, 餘類推。第一步算法係用求簡單相關係數之方法來算出另級相關係數 (zero order coefficient) 如 r_{13} r_{23} 等值。求淨相關時所用附註可寫作 $r_{12\cdot4}$, $r_{12\cdot3}$ 等。r_{12} 代表所求之兩種材料之相關係數，.4代表被摒除之有關係數，即產量因子，此爲初級淨相關係數 (first order coefficient)。

求初級淨相關係數時，用另級相關係數來計算之，其公式爲：

$$r_{12\cdot4}=\frac{r_{12}-(r_{14}\times r_{24})}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{24}}}$$

$r_{12\cdot4}$ 之淨相關係數，與 $r_{21\cdot4}$ 之淨相關同。因1與2代表A與B兩種材料，求A與B之相關即求B與A之相關耳。若寫作下列公式所得結果，與上述公式所得者無異。

$$r_{21\cdot4}=\frac{r_{21}-(r_{24}\times r_{14})}{\sqrt{1-r^2_{24}}\sqrt{1-r^2_{14}}}$$

公式內所寫 r 附註數目，全視所求之淨相關為何數而定。例如所求者為 2 與 3 兩種性狀之相關，所摒除者為第 4 性狀則淨相關係數之符號當為 $r_{23\cdot4}$，公式內分子所用之符號為第二個性狀及第三個性狀 r_{23}，第二個與第四個性狀之相關（或 r_{24}），與第三個與第四個性狀之相關（或 r_{34}），分母內所用者當為第二與第四之相關及第三與第四性狀之相關，其公式當為：

$$r_{23\cdot4}=\frac{r_{23}-(r_{24}\times r_{34})}{\sqrt{1-r^2_{24}}\sqrt{1-r^2_{34}}}$$

茲將表 58 之易度相關係數代入求 $r_{12\cdot4}$ 之公式內：

$$r_{12\cdot4}=\frac{.629-(.654\times.604)}{\sqrt{1-(.654)^2}\sqrt{1-(.604)^2}}=0.388$$

此表示 (1) 與 (2) 摒除 (4) 影響後之相關亦即每英斗重量與每百籽粒之重量摒除籽粒產量之影響後之相關，——簡言之，即若有產量大致相等之燕麥多種，其每英斗重量與每百籽粒之重量相關當為 0.388。

此意可再用迴歸方程來解釋之，此與以前所述之迴歸方程用意相同，即先根據產量而分別求每英斗之估計重量，及每百粒籽之重量。或根據產量而求每英斗之估計重量與每百粒籽之重量，以表 58 各值代入下列方程式。

$$A_y=M_a+r_{14}\frac{\sqrt{\Sigma A^2-(\Sigma A)M_a}}{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}(Y-M_y)$$

$$B_y=M_b+r_{24}\frac{\sqrt{\Sigma B^2-(\Sigma B)M_b}}{\sqrt{\Sigma Y^2-(\Sigma Y)M_y}}(Y-M_y)$$

注意 A，B，Y 即 1，2，4 故

$$A_y = 32.206 + .654\frac{6.14}{36.54}(Y - 63.028)$$

$$B_y = 2.569 + .604\frac{1.23}{36.54}(Y - 63.028)$$

或

$$A_y = 32.206 + .110Y - 6.933 = .110Y + 25.273$$

$$B_y = 2.569 + .020Y - 1.261 = .020Y - 1.308$$

用此種迴歸方程，可預測莢斗之重量及百粒籽之重量，以此兩種預測值與觀察值相較，即得兩種預測差異。一種為每莢斗預測重量與每莢斗觀察重量之差異，一種為每百粒籽之預測重量與觀察重量之差異，此種估計差異為去掉產量影響後所賸餘之差異。

每莢斗重量與每百粒籽重量之預測差異，可照品種號碼並行排列，相併成對，此種相互關係即為將產量影響摒除後之淨相關。若將兩種預測差異之簡單相關算出，其結果當與用上列公式所求得之 $r_{12\cdot4}$ 之值相符合。此證明淨相關之意義，祇求兩種材料之相關而已。

用上列淨相關之公式，可將四種材料之一級淨相關係數，逐一求出。今有四個變量，可有十二種不同的第一級淨相關 $r_{12\cdot3}$, $r_{12\cdot4}$, $r_{13\cdot2}$, $r_{13\cdot4}$, $r_{14\cdot2}$, $r_{14\cdot3}$, $r_{23\cdot1}$, $r_{23\cdot4}$, $r_{24\cdot1}$, $r_{24\cdot3}$, $r_{34\cdot1}$, $r_{34\cdot2}$。r_{12} 與 r_{21} 同，故既有 $r_{12\cdot3}$ 與 $r_{12\cdot4}$ 不必再算 $r_{21\cdot3}$ 或 $r_{21\cdot4}$。今所求者為各除掉第三種關係後之兩種性狀的淨相關，故若將所計算之材料，照表 66 排列，結果較易求出。

表 66 之第一二兩項為另級相關或簡單相關係數，第一項為另級相關下之附註之符號，例如 12 代表第一性狀與第二性狀之相關，第二項為相關係數，例如 .629 即為第一性狀與第二性狀之簡單相關係數，第二項所列之相關係數乃由表 58 所鈔來者。

表 66. 另級附註，另級相關係數，及計算初級相關係數之各種步驟

另級附註 1	另級相關係數 2	$\sqrt{1-r^2}$ 3	分子之乘積 4	分子全數 5	分母 6	初級附註 7	初級相關係數 8
12 13 23	.629 .424 .543	 .906 .840	.230	.399	761	12.3	.524
12 14 24	.629 .654 .604	 .756 .797	.395	.234	.603	12.4	.388
13 12 32	.424 .629 .543	 .777 .840	.342	.082	.653	13.2	.126
13 14 34	.424 .654 .791	 .756 .612	.517	−.093	.463	13.4	−.201
14 12 42	.654 .629 .604	 .777 .797	.380	.274	.619	14.2	.443
14 13 43	.654 .424 .791	 .906 .612	.335	.319	.554	14.3	.576
23 21 31	.543 .629 .424	 .777 .906	.267	.276	.704	23.1	.392
23 24 34	.543 .604 .791	 .797 .612	.478	.065	.488	23.4	.133
24 21 41	.604 .629 .654	 .777 .756	.411	.193	.587	24.1	.329
24 23 43	.604 .543 .791	 .840 .612	.430	.174	.514	24.3	.339
34 31 41	.791 .424 .654	 .906 .756	.277	.514	.685	34.1	.750
34 32 42	.791 .543 .604	 .840 .797	.328	.463	.669	34.2	.692

第三項為$\sqrt{1-r^2}$之值，此數即為公式內之分母，第四項為公式內分子之乘積，亦即為第一第三兩相關係數之乘積，例如第一組為$r_{13} \times r_{23}$，或為 .424×.543 得 .230。第五項為分子之答數，亦即第二項之簡單相關減去第四項分子乘積後之差數例如 .629－.230＝.399。第七項為第六項之分母係得自第三項內兩個$\sqrt{1-r^2}$之乘積，例如 .906×.840＝.761。第八項之初級淨相關係數為第五項除第六項之商數，.399÷.761＝.524。

第七項之初級係數附註乃根據另級附註而定，試觀第七項第一格附註 1，2 兩字，即第一項第一附註 1 2，至 12.3 之".3"字，乃根據第一項內第一格之第三附註之末一字而定。今再看第七項第二格，因第一項第二格之第一附註為12，故第七項第二格內之第一附註亦為12，第一項第二格第三附註之末一字為 4，故第七項第二格內之小數附註為 .4，連成 12.4。又第一項第一格內共有附註三個12，13及23，而第三個附註23表示第一第二兩個附註之第二性狀 2 與 3 之關係，照此推算除表 66 所載初級附註外，尚有 31.2 及 32.1 等淨相關可求，惟 31.2 與 13.2 無異，32.1 與 23.1 無異，故表中均略而不載。

初級淨相關之算法，既已明瞭，今當敍述高級淨相關之算法。二級淨相關係數(partial correlation coefficient of the second order)可根據初級淨相關係數而求得之。故凡求高級 higher order 淨相關係數，須先求得其下一級之淨相關，例如求二級淨相關係數，須知初級淨相關係數。求二級淨相關係數之方程式為:

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-(r_{14\cdot3}\times r_{24\cdot3})}{\sqrt{1-r^2_{14\cdot3}}\sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}}$$

將初級淨相關係數代入得：

$$r_{12\cdot34}=\frac{.524-(.576\times.339)}{\sqrt{1-(.576)^2}\sqrt{1-(.339)^2}}=\frac{.524-.195}{.817\times.941}=\frac{.329}{.769}=.428$$

除掉第三第四兩性狀之影響外，第一性狀與第二性狀之淨相關為.428，$r_{12\cdot34}$之公式又可將初級淨相關係數之項目略加更動而成下列公式：

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot4}-(r_{13\cdot4}\times r_{23\cdot4})}{\sqrt{1-r^2_{13\cdot4}}\sqrt{1-r^2_{23\cdot4}}}=\frac{.388-(-.201\times.133)}{\sqrt{1-(-.201)^2}\sqrt{1-(.133)^2}}$$

$$=\frac{.388-(-).027}{.980\times.991}=\frac{.415}{.971}=.427$$

任用何種排法，所得結果，大致相同。故兩種排法一齊算出，可用作校對之用，其他二級之淨相關係數，亦可根據初級相關係數來排成方程式如下：

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-(r_{14\cdot2}\times r_{34\cdot2})}{\sqrt{1-r^2_{14\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{34\cdot2}}}$$

或　$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot4}-(r_{12\cdot4}\times r_{32\cdot4})}{\sqrt{1-r^2_{12\cdot4}}\ \sqrt{1-r^2_{32\cdot4}}}$$

又　$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-(r_{13\cdot2}\times r_{43\cdot2})}{\sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{43\cdot2}}}$$

或　$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot3}-(r_{12\cdot3}\times r_{42\cdot3})}{\sqrt{1-r^2_{12\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{42\cdot3}}}$$

計算二級相關係數時，亦先以材料排列成表較為便捷。

表67內之第一二兩項為初級相關係數，第一項載初級相關之附註，第二項即為表66之初級淨相關係數，其他各項與求初級相關時各項相

同。二級相關係數之附註及相關係數載第七第八兩項內。

表 67.

另級附註，另級相關係數，及計算二級相關係數之各種步驟

另級附註 1	另級相關係數 2	$\sqrt{1-r^2}$ 3	分子之乘積 4	分子全數 5	分母 6	二級附註 7	二級相關係數 8
12.3 14.3 24.3	.524 .576 .339	 .817 .941	.195	.329	.769	12.34	.428
13.2 14.2 34.2	.126 .443 .692	 .897 .722	.307	−.181	.648	13.24	−.279
14.2 13.2 43.2	443 .126 .692	 .992 .722	.087	.356	.716	14.23	.497
23.1 24.1 34.1	.392 .329 .750	 .944 .661	.247	.145	.624	23.14	.232
24.1 23.1 43.1	.329 .392 .750	 .920 .661	294	.035	.608	24.13	.058
34.1 32.1 42.1	.750 .392 .329	 .920 .944	.129	.621	.868	34.12	.715

淨相關係數可算至三級 third order 或三級以上。三級淨相關係數之公式可從二級淨相關係數公式擴充之如下：

$$r_{12\cdot345}=\frac{r_{12\cdot34}-(r_{15\cdot34})(r_{25\cdot34})}{\sqrt{1-r^2_{15\cdot34}}\sqrt{1-r^2_{25\cdot34}}}$$

高級淨相關係數之普通公式為.

$$r_{12\cdot345\cdots n}=\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{\sqrt{1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)}}\sqrt{1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}}$$

若將此普通公式與三級相關係數之公式相比較，極易明瞭。普通公

式內左邊一項 r 之附註內有 N，而右邊一項分子分母內，皆有 N－1 字樣，此表示 r 之附註可至N次數，今以分子中第一數 $r_{12\cdot345\cdots N-1}$ 與三級相關係數 $r_{12\cdot34}$ 相較，可知在三級時左邊 r 附註為 $r_{12\cdot345}$，分子第一數便為 $r_{12\cdot34}$，在此方程中 N 為 5，N－1 為 4，故淨相關係數公式內之附註，視所求 r 附註而定，分子分母附註之末一字較 r 附註末一字之數目少一。r 附註末一字苟為 7，分子分母附註之末一字當為 6。

求高級淨相關係數，亦以列表計算為便，若算三級淨相關時，可將二級相關係數之各數排列成表，詳見表 67。

凡淨相關係數之級數愈高，所需之另級相關係數亦愈多。例如求一級淨相關係數所需之另級相關係數為 r_{12}，r_{13}，r_{23} 三種，若算二級淨相關係數，則所需之另級相關係數之數目較多 r_{12}，r_{13}，r_{14}，r_{23}，r_{24}，r_{34} 等六個，下列公式示另級相關係數之數目：

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

N 代表淨相關之級數，例如求三級淨相關，則 $N=3$。

$$\frac{(3+2)(3+1)}{2}=10$$

此卽謂求三級淨相關係數時，需十個另級相關係數。

今當討論淨相關係數及迴歸係數之關係。第一步先從下列公式求得三種變量 1, 2, 4 之迴歸方程式

$$r_{12\cdot4}=\frac{r_{12}-(r_{14}r_{24})}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{24}}}$$

求 β 方程式之各種步驟，曾詳述於第 182 頁，故若求變量 1, 2 4 之迴歸係數，其方程式卽為

$$\beta_{12\cdot4}=\frac{r_{12}-(r_{24}r_{14})}{1-r^2_{24}}$$

$$\beta_{14\cdot2}=\frac{r_{14}-(r_{42}r_{12})}{1-r^2_{42}}$$

上列方程式所用之 $\beta_{12\cdot4}$ 及 $\beta_{14\cdot2}$ 等為 β 之完全寫法，以前所用者皆為 β 之縮形寫法。普通計算時 β 所指之各種性狀常不在其附註內完全寫出。因完全寫出，未免太麻煩也。今試寫一二個 β 之完全寫法以資參考，例如表 64, 65 載有 β_{ya} 及 β_{yb}，若完全寫出，當為 $\beta_{ya\cdot bcd}$ 及 $\beta_{yb\cdot acd}$ 其餘所載 β 可照此類推，關係 β 之價值其附註極有關係，β_{ya} 與 β_{ay} 之價值並不相同，因 β_{ay} 表示根據 Y 做單位之 A 種變化，β_{ya} 則為以 A 做單位所生之 Y 變化。

今將表 58 所載相關係數代入以求 β 值

$$\beta_{12\cdot4}=\frac{.629-(.604\times.654)}{1-(.604)^2}=.368$$

$$\beta_{14\cdot2}=\frac{.654-(.604\times.629)}{1-(.604)^2}=.431$$

用同樣方法可求得 $\beta_{21\cdot4}$ 及 $\beta_{24\cdot1}$ 之值。

$$\beta_{21\cdot4}=\frac{r_{21}-(r_{14}r_{24})}{1-r^2_{14}}$$

$$\beta_{24\cdot1}=\frac{r_{24}-(r_{41}r_{21})}{1-r^2_{41}}$$

以已知數代入：

$$\beta_{21\cdot4}=.409$$

$$\beta_{24\cdot1}=.337$$

用上列第一第二兩方程式所求得之 β 值，可列出下列迴歸方程式。

由此方程式可推測額到產量關係時之每英斗重量，方程式內之 A 即 1，B 即 2 Y 即 4。

$$A = M_a + \beta_{12\cdot4}\frac{\sqrt{\Sigma A^2 - (\Sigma A)M_a}}{\sqrt{\Sigma B^2 - (\Sigma B)M_b}}(B - M_b)$$

$$+\beta_{14\cdot2}\frac{\sqrt{\Sigma A^2 - (\Sigma A)M_a}}{\sqrt{\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)M_y}}(Y - M_y)$$

以已知數代入得 A：

$$A = 32.206 + .368 \times \frac{6.14}{1.23}(B - 2.569) + .431 \times \frac{6.14}{36.54}(Y - 63.028)$$

$$= 32.206 + .368 \times 4.992(B - 2.569) + .431 \times .168(Y - 63.028)$$

$$= 32.206 + 1.837(B - 2.569) + .072(Y - 63.028)$$

$$= 32.206 + 1.837B - 4.719 + .072Y - 4.538$$

$$= 1.837B + .072Y + 22.949$$

由第三第四 B 值可推測額到產量關係後之百粒籽之重量：

$$B = M_b + \beta_{21\cdot4}\frac{\sqrt{\Sigma B^2 - (\Sigma B)M_b}}{\sqrt{\Sigma A^2 - (\Sigma A)M_a}}(A - M_a)$$

$$+\beta_{24\cdot1}\frac{\sqrt{\Sigma B^2 - (\Sigma B)M_b}}{\sqrt{\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)M_y}}(Y - M_y)$$

將已知數代入得 B：

$$B = 2.569 + .082A - 2.641 + .011Y - .693$$

$$= .082A + .011Y - .765$$

今試用 $\beta_{12\cdot4}$ 及 $\beta_{21\cdot4}$ 求得 1 與 2 之淨相關係數為：

$$r_{12\cdot4} = \sqrt{\beta_{12\cdot4}\beta_{21\cdot4}} = \sqrt{.368 \times .409} = .388$$

.388 為淨相關係數，此可表示無論簡單相關係數或淨相關係數，其

相關係數及迴歸係數間之關係皆相同。

若用第一迴歸係數方程式中 B 之係數 1.837，及第二迴歸係數方程式 A 之係數 .082 相乘，而求其方根，卽得淨相關係數 $r_{12\cdot4}$ 之值，故：

$$r_{12\cdot4}=\sqrt{1.837\times.082}=.388$$

此數 .388 與上列方程式求得者相同。

由上述各節可知簡單相關法可引申爲複相關法來計算數個性狀影響於一個性狀之關係；淨相關可摒除第三者之影響，而專求兩種變異之關係。

複相關與淨相關雖可解決一部份之變異相關，惟其效用亦有相當限度。第一凡計算複相關或淨相關所研究之材料之個數或次數須多，第二各變量相關所成之迴歸線須接近直線，則所得複相關或淨相關之結果尙準確。若所成之迴歸線略與直線相離，則所測得之結果，便不可恃，亦僅示人以約略之關係而已。故求複相關以前，宜先以各變量之另級相關來測量其離直線之差異，若有離直線之現象，則以改用測量非直線相關之方法來計算之爲妥。愛賺凱兒 Ezekiel 對此曾有詳細之討論，學者可以之作參考。

第　九　章

機誤之意義

測量事物或計算數目果宜力求準確，惟無論如何精細，或許有之錯誤，總所難免。例有兩人測量麥桿之長短，所量尺寸，殊難分毫皆同。又若以等量之硝酸銀、請著名之化學專家用精緻之天秤儀器及最新最善之化驗方法來化驗內含純銀之分量，所得結果，亦難人人相同。此種不能避免之差異原因，半或由於每人所取之材料內含純銀之成分及試驗者之技術未必全同，半實由於偶然差異之存在，爲不能避免之事實。蓋卽由一人以同一材料，複試幾次，所得結果，亦未必歷次盡同。爲彌補缺陷而求準確起見，祇有多做幾次試驗，而取其均數，較根據一次試驗，而遽下斷語者爲愈。

此種結果不同之現象，非獨在化學試驗有之，卽在物理試驗，生物試驗，農村調查等結果中，亦常見之。此種以同樣材料，用同樣方法，作精密試驗而猶不能避免之差誤，在統計上名爲離差 (deviation)，同時又名爲觀察差誤 error of observation，此種差誤影響於結果之準確者頗大。今旣不能使之完全消滅，惟有設法令減少而已。增加試驗次數，而審愼舉行之確爲減少差誤之一種辦法，惟無論試驗至若干次數，總不能

每次相同。苟遇數次試驗，結果完全相同，則其中反或有弊，須詳加審查。

觀察差誤雖為不可避免之事實，惟吾人在觀察試驗結果時，切不可因此而疏忽從事，無論測量或記載何種試驗，須力求準確週密，蓋吾人力求精確，尚有上述不能避免之錯誤，若疏忽從事，則差以毫釐，謬以千里，試驗結果，毫無價值矣。

觀察差誤又可以打靶來作比喻，打靶者之目的雖在中的，惟拉弓放矢，中的者果有，而不中的者亦復不少。試驗之人猶放矢之人，試驗目的在求準確結果，猶之矢人之求能中矢點，惟所作試驗與正實數目，總難完全相同，至於相差多少，則視所試驗之材料，測量，及記載方法而定。

今試以二人比射為喻，每人試射十次，而比較其未射中之次數及離中距。表 68 A 字項下記第一人未射中之次數及其離中距，B 字項下記第二人之結果。

表 68

兩人比射之離中距及次數

A	B
0	2
3	3
4	2
2	4
3	3
4	2
5	3
0	4
5	2
1	2
27	27

此種未能中的之數，可喻之為觀察差誤，表 68 A 項下有離差為零者二次，故知甲曾射中二次，惟彼在未射中之八次中，有二次竟離的至

五尺之鉅；乙雖十次皆未射中，惟未射中之離中距確不若甲之鉅。

今若將A項及B項離中差之平均數，來比較二射者之能力，則答數皆為 2.7，故或可斷語兩射者之能力實相等。若以此喻試驗，則或可謂結果相同。惟試以中點之範圍大小來比較其結果，則兩人之能力實不相同。甲曾有兩矢落於離的五尺距離之點上，是則甲之離中點範圍，實較乙為大，故若求離均平方數而比較之，較以均數比較為合理。今試以 A 之離中距離一一自乘相加，則得平方和 105，B 之離中距平方和為 79.0，各以 10 除之，得 A 之離中距平方均為 10.5，B 之平方均為 7.9，以之開方，則 A 為 3.24，B 為 2.81。A 射箭之離均差較 B 為大，故 A 之能力較 B 為差。試驗結果亦同一例耳，試驗之是否可蒙，須視結果之差異範圍而定。

A	A^2	B	B^2
0	0	2	4
3	9	3	9
4	16	2	4
2	4	4	16
⋮	⋮	⋮	⋮
	ΣA^2		ΣB^2

$$A=\sqrt{10.5}=3.24 \qquad B=\sqrt{7.9}=2.81$$

今試再用一簡單之例子以解釋觀察差誤之意義，或離中差異之趨勢。今試以擲銅元來作比喻，以銅元擲桌上，所見之銅面非字即像，一銅元如此，數百銅元亦如此，故將數百銅元擲桌上，所見者亦僅兩種，非

字卽像耳。今試以銅元八枚，隨意拋擲，所見之銅面有字亦有像，若以此八枚銅元、繼續拋擲二千次，而記錄其每次所得之結果，則半字半像之次數最多，三字五像或五像三字次之，二字六像或六字二像又次之，一字七像或七字一像，及全字或全像則最少，此種試驗結果，表示一種常態分佈之現象，若所擲結果，恰與理想相同，則當成爲表 69 所列之分配式。

表 69

擲八枚銅元至二千次之有像次數分配表

像面枚數	所得次數	二項式開展 $2,000(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^8$ 之次數
0	11	7.8125
1	62	62.5000
2	196	218.7500
3	421	437.5000
4	574	546.8750
5	467	437.5000
6	203	218.7500
7	55	62.5000
8	11	7.8125

表中第三項所得者係照二項式開展公式 (Binomial formula) 算出之結果，第二項所記者爲擲銅元之結果，第二項各數與第三項相比，非完全相同，是可知雖就擲銅元之簡單問題而論，理想與事實亦難完全相同。故若遇生物問題，社會問題，或經濟等複雜問題，理論與事實相差必更大。

表 69 示觀察差誤有造成對稱曲線 (symmetric curve) 之趨勢，若擲銅元之次數增加，則觀察數將逐漸趨近對稱曲線，而與表上第三項各數相符。在試驗數目大時，觀察差誤大半成對稱曲線，而數目小時則不

然。普通言之，此種差誤所形成之對稱分配，(symmetrical distribution) 卽為常態分配，(normal distribution) 而此種常態分配，則常作為差誤的常態曲線(normal curve of error) 計算觀察差誤時，可用分析差誤曲線之方法來解決之。

測量一種事物或記錄一種觀察，皆有不能避免之差誤，而在研究生物問題時，僅抽樣試驗，一以概百，相當差誤，更所難免。例如研究一種人類或一個城市內之人民高度，勢不能將全市人民，一一測量，故必抽樣測量，而取其平均數以代表全市人民之高度。今若測量二千人，而求得其平均數為 67.8 吋，此數僅為所測驗之二千人之平均高度，並非全市人民或某種人類各個人之高度。換言之，此二千人之平均高度，果為 67.8 吋，另一二千人之平均高度，未必卽為此數，若將測量之二千人更易數人，則其平均高度，或非 67.8 吋矣。

是以欲得準確之數目，須將全市人民一一測量，方為可靠，惟測量全市人民，又不為事實所許，惟有將此二千人以多量幾次，求得其總平均數而為全市人民高度之代表。

今試擲銅元八枚至 20 次而記錄字面次數如下：

字面之可能次數	字面實得次數
0	0
1	1
2	2
3	4
4	4
5	7
6	2
7	0
8	0

求得平均數為 4.0，若再擲一次所得字面為 3，則平均數即由 4.0 改為 3.95，若第 21 次所得字面適為 4，則均數仍為 4.00，可無更動。故均數之多少，全恃所擲字面之數目而定，今若以八枚銅元連擲五個 20 次，分記其字面次數，而計算其平均數，如表 70：

表 70.

擲銅元八枚五回試驗之結果

（每回試驗擲二十次）

像面枚數	每回試驗之結果				
	第一回	第二回	第三回	第四回	第五回
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
2	2	3	1	2	4
3	4	4	6	3	4
4	4	5	3	7	3
5	7	3	8	3	7
6	2	4	1	3	2
7	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0
平均數	4.00	4.20	3.95	4.10	3.95

第一回平均數為 4.00，其餘各回之平均數並非 4，而為與 4 相近似之數 4.20, 3.95, 4.10 等，今以擲銅元之簡單問題為喻，而每回所得之平均數，亦難相同，複雜之社會問題，生物問題之各項統計，結果自更難盡同矣。

標準誤及機誤(Standard error and Probable error)——試驗差誤因種種關係，實不能避免已如上述，惟差誤程度，究有何種方法可以測量，常數(constant)之可恃性 (reliability)，究有何法可以決定之。此種測驗變異或測驗常數可恃性之測量法，即為標準誤及機誤。近數年來，

學者對於田間試驗之分析，用標準差者果多。惟機誤仍有相當地位，機誤之求法，係由標準差乘常數 .6745 而得。

今再以表 70 擲銅元之例題來引證標準誤或機誤用法，平均數爲 4.00，標準差(Standard deviation)爲 1.34，此數示我人以單次試驗各數與離均數之大意，故亦爲單次試驗之標準誤，機誤爲標準誤之 .6745 倍，故本例題單次試驗之機誤爲 1.34 × .6745 = .90，若以公式表演之，當爲：

$$P.E._s = \pm 0.6745\sigma$$

公式內所以用±符號而不單用正號或負號者，因吾人僅知單次試驗之離均差 (deviation from mean) 爲 1.34，而不知其爲大於均數，抑小於均數，故以常數 .6745 相乘時，加以±符號，意即所得之機誤，大於均數與小於均數之可能性實相同。

$.6745\sigma$ 旣爲單次機誤 (probable error of a single observation)，而試驗之可靠性，又常與試驗之次數有關，故根據單次機誤及試驗次數，卽可求得平均機誤 (probable error of the mean)，若列成公式，則爲：

$$P.E._M = \pm .6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{ 或 } \pm\left(\frac{P.E._s}{\sqrt{N}}\right)$$

由上列公式可知試驗之可靠性，與試驗次數之平方根成比例。今以表70之試驗次數，及單次機誤代入上列公式，卽得平均機誤爲：

$$P.E._M = \pm .6745\frac{1.34}{\sqrt{20}} = \pm 0.20$$

平均數爲 4.0，若加 .20 則爲 4.20，減 .20 則爲 3.80，意卽連擲 20 次，則所得平均數，有一半機會在 4.20 與 3.80 之間。

求得平均機誤後，吾人所急欲知之第二問題，即爲試驗均數之在 M 士P.E.$_M$ 之範圍內者究有多少，範圍外者究有多少，試觀下列常態弧線：

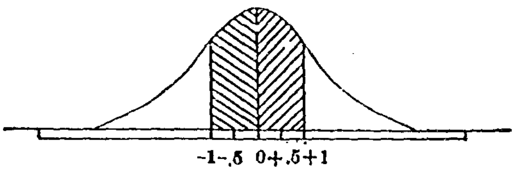


圖 28. 圖示離均用爲一倍機誤時所包括之弧線範圍

吾人已知標準差乘 .6745，又等於對稱分配之四分位差 (quartile deviation)，(見第二章)而四分位差所包括之觀察次數，常爲全次數之半數。四分位差原等於單次機誤，故若以下列常態曲線來表示之，尤爲明瞭。圖內所示 －1至＋1 之中間面積，即爲在機誤範圍內之次數，兩邊之面積，爲不在機誤範圍內之次數。中間面積與兩邊面積適相等，故在機誤對稱分配範圍內之次數，與在機誤範圍以外之次數實相等。

若將擲銅元八枚之試驗，行至多數次，有一半次數之平均數將在平均機誤之範圍內。若在本例題，則平均在 3.80 至 4.20 之間者當有一半次數，今試擲八枚銅元至 194 個 20 次，而將每 20 次之有字平均次數，記錄於表 71。求得平均數(每 20 次之平均數)爲 4.0，標準差 .29，單次機誤爲 .20，此數與僅擲銅元 20 次之平均機誤適相同。照上述理想，擲銅元至 194 個 20 次時，宜有 97 個 20 次之平均數在4.0士.20之間 (4.20 －3.80)，而 97 個 20 次之平均數不在 4.0士.20 之間。今試一一數之，計平均數在 4.20 至3.80 之間者，恰有 97 個，而不在 4.20 至 3.80 之間者，亦適得 97 個，理論與事實適相符合，實爲難得之巧事。由此可知若同樣

之試驗重複至多數次時，根據一個試驗，即可概知在機誤範圍以內及範圍以外之次數多少。惟此種預測能否準確，在試驗次數之多少極有關係，凡第一次測驗材料之個數多，而抽樣又屬正常，足以代表其他各次試驗之現象者，預測結果，比較準確。若首次測驗之觀察數少，而抽樣又屬反常，難以代表全體材料之現象者，推測結果，便難準確。

表 71.

194 次試驗之平均數分配表

（每擲銅元八枚至二十次爲一試驗）

3.40	3.70	3.85	4.00	4.15	4.30
3.40	3.70	3.85	4.00	4.15	4.30
3.45	3.70	3.85	4.00	4.20	4.35
3.45	3.70	3.85	4.00	4.20	4.35
3.45	3.70	3.85	4.00	4.20	4.35
3.50	3.70	3.85	4.00	4.20	4.35
3.50	3.75	3.85	4.00	4.20	4.35
3.50	3.75	3.85	4.00	4.20	4.35
3.55	3.75	3.90	4.00	4.20	4.35
3.55	3.75	3.90	4.05	4.20	4.40
3.55	3.75	3.90	4.05	4.20	4.40
3.55	3.75	3.90	4.05	4.20	4.40
3.55	3.75	3.90	4.05	4.20	4.40
3.60	3.75	3.95	4.05	4.20	4.40
3.60	3.75	3.95	4.05	4.20	4.40
3.60	3.75	3.95	4.05	4.20	4.40
3.60	3.75	3.95	4.05	4.20	4.40
3.60	3.75	3.95	4.05	4.20	4.45
3.65	3.75	3.95	4.05	4.20	4.45
3.65	3.75	3.95	4.05	4.20	4.45
3.65	3.80	3.95	4.05	4.20	4.45
3.65	3.80	3.95	4.05	4.25	4.45
3.65	3.80	3.95	4.10	4.25	4.45
3.65	3.80	3.95	4.10	4.25	4.50
3.65	3.80	3.95	4.10	4.25	4.50
3.65	3.80	3.95	4.10	4.25	4.50
3.65	3.80	4.00	4.10	4.25	4.50
3.65	3.85	4.00	4.15	4.25	4.50
3.65	3.85	4.00	4.15	4.30	4.55
3.65	3.85	4.00	4.15	4.30	4.55
3.65	3.85	4.00	4.15	4.30	4.60
3.65	3.85	4.00	4.15	4.30	4.60
3.65					4.60

$$M = 4.00$$

$$S.D. = .20$$

$$P.E._1 = .20$$

機誤指示平均數或標準差之可靠性．機誤越小，表示結果越準確，若有兩個平均數，一則為 40±4，一則為 40±1，則後者比前者為準確，因後者之機誤比前者小，故所得均數，較為可靠。故在計算均數時，宜將機誤亦連帶寫出，例如第一次擲銅元之均數，宜寫作 4.00±.20，而並非 4.00。

表　72.

同品種黃豆樣品之平均數分配表

179.8	212.0	221.9	234.1
181.5	212.1	222.8	236.5
196.1	212.2	222.9	236.7
196.4	213.7	223.2	2[illegible]7.1
20[illegible].7	214.3	223.9	237.7
201.7	216.3	224.1	237.9
202.7	216.5	224.3	238.1
205.9	216.5	224.5	239.8
207.2	217.3	224.7	240.5
207.4	217.6	225.0	241.6
208.3	217.8	225.9	242.5
208.8	218.7	229.8	244.9
209.8	218.9	229.8	247.3
209.8	219.1	230.5	249.2
210.6	220.1	232.0	249.2
211.4	220.9	232.2	251.9
211.5	221.4	233.0	253.3
211.7	221.4	233.9	262.9

今試另舉一例，以明機誤之算法及用法。以同品種之黃豆，分種於同面積之各小區內，記錄其各區產量後，用隨機取樣法每十小區計算一平均數，而將各平均數記錄於表72內。表內72組均數之平均數為 222.7 標準差為 15.92，單次機誤為：

$$P.E._s = \pm .6745 \times 15.92 = \pm 10.74$$

此單次機誤卽爲每一平均數之機誤，故此72組均數之平均數範圍，當爲211.96至233.44，照理論72組均數中，應有一半在此範圍內，一半在此範圍外。

$$222.7 - 10.74 = 211.96$$

$$222.7 + 10.74 = 233.44$$

今以表72所載各均數一一數點，凡數目之在上述平均數範圍內者有35個，不在其內者有37，此又與理論內外各36之數相接近。

用數點法求機誤(probable error by counting)——四分位差旣與機誤數相等，故機誤亦可從四分位差反求得之。

表73爲240小區燕麥之產量記錄，次序依產量之多少而依次排定，表中旣共有240組，則四分之一當爲60組，故第一四分位數當在第60組與61組之間，查得第60及第61組之產量同爲59.4，故兩組之平均產量亦爲59.4。

$$\frac{59.4 + 59.4}{2} = 59.4$$

第三分位數則在第179與180組之間，兩組之平均數爲：

$$\frac{70.8 + 71.0}{2} = 70.9$$

求四分位差之公式爲：

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

故 $$Q = \frac{70.9 - 59.4}{2} = 5.75$$

$Q = P.E._s$ 故 $P.E._s = \pm 5.75$ 此卽爲用點數法求得之 $P.E._s$ 也。

表 73.

240 區同品種燕麥之產量記錄表

35.6	57.6	61.2	65.0	69.2	73.2
42.2	58.0	61.2	65.4	69.4	73.4
44.6	58.4	61.6	65.6	69.4	73.4
46.8	58.4	61.6	65.6	69.4	73.6
49.0	58.4	61.6	65.6	69.6	73.6
49.4	58.4	61.6	66.0	69.6	73.6
49.4	58.4	62.0	66.0	69.6	73.8
49.6	58.4	62.0	66.0	69.8	74.0
49.6	58.4	62.0	66.2	69.8	74.4
49.8	58.6	62.2	66.4	69.8	74.4
50.0	58.6	62.4	66.4	69.8	75.2
51.0	58.6	62.4	66.6	70.0	75.2
51.4	58.6	62.6	66.6	70.0	76.0
51.6	58.8	62.6	66.6	70.0	76.0
51.8	59.0	62.6	66.8	70.0	76.2
52.2	59.0	62.6	67.0	70.4	76.4
52.4	59.0	62.8	67.0	70.4	76.6
52.6	59.0	62.8	67.0	70.4	76.8
52.6	59.2	63.0	67.4	70.8	76.8
52.8	59.4	63.0	67.4	70.8	77.2
53.0	59.4	63.2	67.4	71.0	77.2
53.0	59.6	63.4	67.4	71.0	78.0
53.4	59.6	63.6	67.6	71.0	78.0
54.2	60.0	63.6	67.6	71.0	78.6
54.2	60.0	63.8	67.6	71.0	79.0
55.2	60.0	64.0	67.8	71.2	79.4
55.2	60.4	64.0	68.0	71.2	79.6
55.2	60.4	64.0	68.0	71.2	79.6
55.4	60.4	64.2	68.0	71.4	79.8
55.4	60.4	64.2	68.0	71.8	80.0
55.6	60.4	64.4	68.2	72.0	80.4
56.2	60.4	64.4	68.4	72.0	80.4
56.6	60.4	64.4	68.4	72.0	80.6
56.8	60.4	64.6	68.4	72.2	80.8
56.8	60.8	64.6	68.4	72.2	81.4
57.0	60.8	64.6	68.6	72.4	82.0
57.0	61.0	64.8	68.8	72.6	82.2
57.0	61.0	64.8	69.0	72.8	82.6
57.2	61.2	64.8	69.0	73.0	83.2
57.6	61.2	65.0	69.2	73.2	83.4

較點所得之機誤(PE_s)為±5.75

計算所得之機誤(PE_s)為±5.68

今再從均數及標準差求機誤，而比較兩者之結果：

均數 $=65.1$

標準差 $=8.42$

機誤 $=.6745\times 8.42=5.68$

由此可知點數求得之機誤，與由標準差求得之機誤，頗相類似。

照理論240小區產量中應有120小區之產量在均數±機誤之範圍內，此例題之均數為65.1，故減去或加上機誤5.68後，均數範圍為59.42—70.78。今數得表73中有117小區之產量在此範圍內，123小區在此範圍外，此又與理論數120相差不遠。凡試驗次數多而分配又為相對的，所得之觀察數，大概與理論數相差不遠；若次數少而分配又非對稱，結果便多差異。

若將機誤兩倍之而後從平均數內加減，則得平均數範圍為53.74至76.46。

均數 $=65.1$

機誤 $=5.68$，兩倍之得11.36

$65.1-11.36=53.74$

$65.1+11.36=76.46$

表73之240組內有193組之均數在此範圍內，47組在此範圍外，193與47之比卽為4.11與1之比，換言之卽全體均數在53.74—76.46之內與不在其內之機偶（Odds）為4.11與1之比。

機偶之計算（Calculation of Odds）——假定觀察數多而成對稱分配時，全體均數在範圍內外之機偶，可根據機偶表計算。附錄表VI曾示

其概要。表內各值，假定弧線之面積爲 100,000，若知 $\frac{x}{\sigma}$ 之值卽可求得 x 至平均數距離內應包括之面積有多少。

表中第一項收 $\frac{x}{\sigma}$ 之值，例若 $x=.9$，$\sigma=1.5$ 則 $\frac{x}{\sigma}=\frac{.9}{1.5}=.6$ 從表中 $\frac{x}{\sigma}$ 項找到 .6 之一行，循此行向右看去，找得面積爲 22575，此卽爲 x 至均數距離內所應包括之面積。惟離平均數之距離有左右兩面，而 22575 則僅爲一邊之面積，故兩面之面積當爲 $22575\times2=45150$。若以百分數表示，則包括之面積爲百分之四十五，故已知 $\frac{x}{\sigma}$ 之值，卽可由附錄表 VI，求出應包括之面積。

明乎此，卽可證明當 P.E. 爲 $.6745\sigma$ 時，應包括之面積爲 $\frac{50}{100}$，而機偶則爲 1:1，其算法爲：

當	$\frac{x}{\sigma}=.675$	面積$=25016$
	$\frac{x}{\sigma}=.674$	面積$=24984$
相差	.001	32
用2除之	.0005	16
故	$\frac{x}{\sigma}=.6745$	面積應爲 $24984+16=25000$

弧線之總面積爲 100,000，故 25000 爲全面積之四分之一，換言之卽 $\frac{x}{\sigma}$ 爲 .6745 時，$\frac{1}{4}$ 之面積當在範圍之內，惟離均數之距離有左右兩邊，故均數之左邊面積旣有 $\frac{1}{4}$ 在範圍之內，右邊面積亦有 $\frac{1}{4}$ 在範圍之內，左右兩面共有個數之在範圍內者，應爲全面積之 $\frac{1}{2}$，以數目表示，

則爲50000，以百分數表示則爲$\frac{50}{100}$。

又若$\frac{x}{\sigma}$爲 1，表中所載面積爲 08268，故凡$\frac{x}{\sigma}=1$，或 x 與標準差相等時，當有全個數之$\frac{68}{100}$包括在範圍之內。

若已知數爲均數至標準差之距離 x，及標準差 σ，則可從$\frac{x}{\sigma}$之比，直接向表中求機偶；若所知者爲 x 及P.E；則可將所得之$\frac{x}{P.E.}$乘.6745後，再從表中求之。例若$x=3$，$\sigma=1.5$，$\frac{x}{\sigma}=2.00$，而機誤或$P.E.=\sigma.6745$，故機誤卽爲 $1.5\times.6745=1.012$，$\frac{x}{P.E}=\frac{3}{1.012}=2.964$ 若用標準差則$\frac{x}{\sigma}$之比爲 2.00，若用機誤則$\frac{x}{P.E.}=2.964$，而 $2.964\times.6745=1.999$。故若小數點多算幾位，此數與$\frac{x}{\sigma}$之値 2.00 相同。

再舉一例以明從機偶表求機偶。$\frac{x}{P.E}=2.00$ 故$\frac{x}{\sigma}=2.00\times.6745=1.3490$

查附錄表 VI

當$\frac{x}{\sigma}=1.350$時		面積$=41149$
當$\frac{x}{\sigma}=1.329$時		面積$=40808$
相較	.021	341

所求之$\frac{x}{\sigma}=1.349$ 故與 1.329 相差爲 .020

直接相比：

$$\frac{.020}{.021}\times341=325$$

以此數 325 加入面積 40808 中，得$\frac{x}{\sigma}=1.349$ 時之面積爲41133，

以2乘之得82266。若從全面積100,000中減去82266則得17734，此可知凡包括在範圍以內之面積爲82266，範圍以外者爲17734，若以比率表示，則爲 82266 : 17734 或 4.64 : 1。此數與上列燕麥例題之機偶 4.11 : 1 相較，則前者比後者略高，卽期望之機偶，比觀察所得之機偶略高。

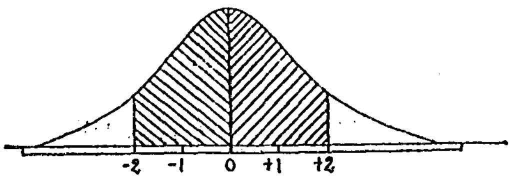


圖 29，圖示離均距爲兩倍機誤時所包括之弧線面積

今試求 $\frac{D}{P.E.}=3.0$ 時，或離差大至比機誤大3倍時，其機偶爲何。

$3\times.6745=2.0235$，因表VI無 2.0235 之面積，故須從最近之數目 $\frac{x}{\sigma}$ 値 2.040 及 2.019 中求面積而推算之：

	$\frac{x}{\sigma}=2.040$	面積=47932
	$\frac{x}{\sigma}=2.019$	面積=47826
相較	$=.021$	面積= 106

$2.0235-2.019=.0045$

$\frac{.0045}{.021}\times 106=23$

$47826+23=47849$

$47849\times 2=95698$ 此爲範圍以內之面積，

$100000-95698=4302$，此為範圍以外之面積。

下圖 30 詳示其面積之大小，若化成機偶，則 $95698/4302=22.25:1$。

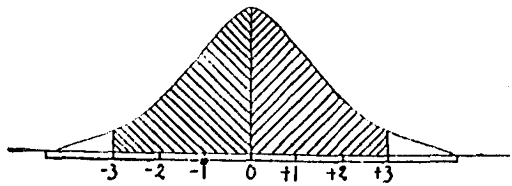


圖 30. 圖示離均用為三倍機誤時所包括之弧線面積

凡離差大至比機誤大三倍時，在二十三次試驗中，有一次偶然發現之可能。

四倍機誤時之機偶亦可用上法求得之。茲算得其機誤為 142.27:1。凡離差大至比機誤大四倍之情形在 143 次中有一次偶然發現之可能。

上舉各例，示機偶之算法普通數目可從下列之簡單機偶表中（表 74）求得之。

附錄表 VII 有較詳細之機誤機偶對照表，皮爾生氏書內所載之機誤機偶對照表，尤為詳盡學者可以之作參考。機偶之用意，在指示試驗者所得結果之可靠性，意即凡所得之試驗結果，純屬機會關係而生之偶然差異，可大至何數，

機偶究竟大至多少，則試驗結果方算可靠，實為吾人急欲考慮之問題。照統計學者之經驗，30:1 為機偶之標準比例，若機偶為 30:1，則面積之在範圍之外者有 $\frac{1}{31}$，面積之在範圍之內者有 $\frac{30}{31}$，今既假定總面積為 100000，故在範圍之外者等於 $100000\times\frac{1}{31}=3226$，在範圍之

內者爲 100000－3226＝96774。從附錄表 VI 反求得面積爲 $\frac{96774}{2}$ ＝ 48387 時，$\frac{x}{\sigma}$ 之値爲 2.141，故 $\frac{D}{P.E.}=\frac{2.141}{.6745}=3.174$。當離差 D 與機誤 P.E. 之比爲 3.174 時，機偶爲 30:1。普通常以機偶 30:1 爲離差與機誤之比 3.2，其實 $\frac{D}{P.E.}$ 爲 3.2 時，機偶每較 30:1 略大，詳見表 74。

表 74.

根據附錄表 VI 之機率所求得之 $\frac{D}{P.E}$ 機偶表

機誤均數之差異或機誤的離差	兩個機誤之差異*	由機會造成的對於上述差異之機偶
1.00	1.41	1.0:1
1.25	1.77	1.5:1
1.50	2.12	2.2:1
1.75	2.47	3.2:1
2.00	2.83	4.6:1
2.20	3.11	6.3:1
2.40	3.39	8.5:1
2.60	3.68	11.6:1
2.80	3.96	16.0:1
3.00	4.24	22.2:1
3.20	4.52	31.4:1
3.40	4.81	44.8:1
3.60	5.09	64.9:1
3.80	5.37	95.3:1
4.00	5.66	142.3:1
4.50	6.36	415.7:1
5.00	7.07	1314.8:1
5.50	7.78	4999.0:1
6.00	8.48	16665.7:1

* 中間一項之値係得自 $\sqrt{2}$ 乘第一項之値。

各種常數之機誤(Probable Errors of Different Constants)——在抽取樣子來統計結果時，各種不能避免之差誤極多，故機誤之發生，非僅平均數有之，即標準差，變量係數 (coefficient of variability) 等皆有之。今將求各種常數之機誤公式，列舉於下。

求平均數機誤之公式爲：

$$P.E._M = \pm .6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

用第五章表 30 之資料求 PE_m：

均數＝275.4375

σ ＝ 49.274

C ＝ 17.889

275.4375 雖爲 400 區黃豆之平均產量，惟並非每區黃豆產量，皆爲此數。若將其機誤求得而從平均數加減之，所得結果卽爲平均數之限度。凡全數之一半個數之產量，當與此限度之數相彷彿，今舉例如下：

$$P.E._M = \pm .6745 \frac{49.274}{\sqrt{400}}$$

$$= \pm 1.6618$$

故平均數當爲 275.4375±1.6618 而非 275.4375。

計算機誤時小數點之位數，須與常數相同。爲準確計，以較常數多算一位爲妥。

求標準差機誤之，公式爲：

$$P.E._\sigma = \pm .6745 \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

若從機誤求之，則公式爲：

$$P.E._\sigma = \pm \frac{P.E._M}{\sqrt{2}}$$

以標準差 ＝49.274 及 N＝400 之值代入之，得：

$$P.E._\sigma = \pm .6745 \frac{49.274}{\sqrt{800}} = \pm 1.175$$

標準差之限度爲 49.274＋1.175 至 49.274－1.175，故討論標準差時，其正實數當爲 49.274±1.175 而非 49.274

當N少於10，求變量係數機誤 coefficient of variability 之公式爲：

$$P.E._c = \pm .6745 \frac{C}{\sqrt{2N}}$$

若 N 大於 10 時公式應爲．

$$P.E._c = \pm .6745 \frac{C}{\sqrt{2N}} \left[1 + 2\left(\frac{C}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$ 註

若將表 30 變量係數 17.889 代入第一公式：

$$P.E._c = \pm .6745 \frac{17.889}{\sqrt{800}} = \pm .427$$

惟 N＝400 大於 10，故應改用第二公式：

$$P.E._c = \pm .6745 \frac{17.889}{\sqrt{800}} \left[1 + 2\left(\frac{17.889}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm .427 \times 1.032 = \pm .441$$

求相關係數機誤之公式爲：

$$P.E._r = \pm .6745 \frac{(1 - r^2)}{\sqrt{N}}$$

以第六章表 36 之 r 値 .217 代入，得：

$$P.E._r = \pm .6745 \frac{1 - (.217)^2}{\sqrt{400}} = \pm .032$$

此表示，若有同樣材料儘量試驗，則有一半數其相關係數當在 .217±.032 之範圍內

吾人在應用機誤來論斷相關係數之範圍時，須注意機誤之限度，若

所試驗之次數不多，則用機誤來論斷範圍，極爲危險。因觀察數少時，機誤本身即不可靠，（蓋 .6745 之常數乃根據大量觀察數之成爲對稱分配者而立論，若係小量觀察數或非對稱分配，則常數 .6745 本身，即發生問題）。固論其他。費許氏對於此層，曾在彼所著論中，一再言之，凡從少量次數求得相關係數時，學者切勿可盲用標準差來論斷其準確程度，爲便於論斷相關係數之可靠性起見，Fisher 氏曾立一機率表此表曾經舒乃特氏(Snedecor)修改而補充之，現載於本書附表 XI。表中第一項爲次數自由度(degree of freedom) 其意義當在第十三章內詳述之，凡簡單相關之自由度爲次數減 2。表中載兩種數目，一種以深墨印出，一種用淺墨印出，淺墨代表相關量顯著程度之低值，深墨代表相關量顯著程度之高值。

表中頂格塡註變量之數目，凡屬簡單相關，所用變量僅兩個，故可從第二項中求之。頂格內註有一"2"字，即兩個變量之意。淨相關係數之顯著程度，亦可在此項內求之。淨相關係數之次數自由度，爲觀察次數減去淨相關內所用之變量數目。求複相關時，視所用變量之多少而定，若變量數目有六個，則當在頂格註一"6"字之項內，就其次數自由度，求顯著程度。

今以第六章表 36 之相關係數，來引證顯著對照表之用法，r＝.217，N＝400，因變量數有 2，故次數自由度爲 400－2＝398。查附錄表 XI "2"字項下無 398 之自由度，其最近之自由度爲 400，故即從 400 一行內查檢，求得低值爲 0.098，高值爲 0.128，此可知若兩數全無相關，因偶然關係，亦可有 .128 之相關現象。現在 r 之值爲 .217，大於 .128，

故兩數確有相關，而相關確爲顯著。

多數相關顯著測驗之應用法，當以第八章表 57 之各值引證之：

A, B, C 三個變量，對於產量 Y 之相關爲 .866, N=25, 因變量共有四個，故次數自由度爲 25－4=21, 在表 XI 次數自由度 21, 向右看至標題 4 之一項內，檢得低值爲 .552, 高值爲 .641, 今相關係數 .866 高於 .641, 故此四個變量確有相關，且極顯著。

檢表 XI 來決定相關係數之可靠程度，較根據標準差或機誤來論斷其準確性爲可靠，尤其在次數不多時用機誤來測驗相關之可靠與否，甚爲危險。檢表之法學者宜習用之，研究相關比與相關係數之差異而知離直線相關之距離之顯著與否，可用下列公式求得標準差，而從表中求其顯著程度。

$$\sigma\eta^2-r^2=2\sqrt{\frac{\eta^2-r^2}{N}}\sqrt{(1-\eta^2)^2-(1-r^2)^2+1}$$

若所求者爲機誤則以 .6745 乘 $\sigma\mu^2-r^2$ 卽得。

故 $$P.E.\eta^2-r^2=\pm.6745\times2\sqrt{\frac{\eta-r^2}{N}}\sqrt{(1-\eta^2)-(1-r^2)^2+1}$$

若爲簡單之推測，$\sqrt{(1-\eta^2)^2-(1-r^2)^2+1}$ 可算作 1，而成簡單公式爲：

$$P.E._{\eta^2-r^2}=\pm.6745\times2\sqrt{\frac{\eta^2-r^2}{N}}$$

$$\sigma_{\eta^2-r^2}=2\sqrt{\frac{\eta^2-r^2}{N}}$$

今以第七章表 48 之 $\eta_{yx}=.904$, 及 $r=.865$ 兩值，代入上列求 $P.E.\eta^2-r^2$ 之第一公式內：

$$P.E._{\eta^2-r^2}=\pm.6745\times2\sqrt{\frac{(.904)^2-(.865)^2}{400}}$$

$$\sqrt{(1-(.904)^2)^2-(1-(.865)^2)^2+1}$$

$$P.E._{\eta^2-r^2}=\pm.0202$$

代入第二個簡單之公式.

$$P.E._{\eta^2-r^2}=\pm.0205$$

用簡單公式求得之標準誤爲 .0304，化成機誤，則爲 .0205。此數與 .0202 相差僅 .0003，若算至小數三位止，則兩者竟相同，故兩個公式所得結果，相差極有幾也。

求常數機誤之各種方法除上述公式外，尙有比較兩個常數之機誤公式，在統計學上，用者頗廣，今述之於下。

求兩個機誤相差之公式爲：

$$P.E._{相差}=\sqrt{E_1^2+E_2^2}$$

例有兩個品種經同樣試驗後，所得之每小區平均產量爲 55±2.0 及 50±1.5 英斗，今試求兩個品種之產量差異顯著與否。

$$55\pm2.0$$

$$50\pm1.5$$

$$5\pm\sqrt{(2.0)^2+(1.5)^2}$$

$$=5\pm\sqrt{6.25}$$

$$=5\pm2.5$$

$$\frac{D}{P.E.}=\frac{5}{2.5}=2.0$$

凡差異大於機誤兩倍時,機偶爲 4.64:1 或 9:2, 此卽謂純因機會或偶然關係,每十一次試驗中有二次差異有大至機誤兩倍之可能。故此兩品種之差異,在統計上並不顯著。今試再舉一例,設有兩種結果其平均數及標準差爲 6.950±.166 與 5.405±.129。此兩種結果是否取材於同一材料,可從其差異之顯著與否而定。求得兩者之相差爲 1.545±.210。

$$
\begin{array}{r}
6.950 \pm .166 \\
5.405 \pm .129 \\
\hline
1.545 \pm \sqrt{(.166)^2+(.129)^2} \\
= 1.545 \pm .210
\end{array}
$$

$$\frac{D}{P.E.}=\frac{1.545}{.210}=7.3+$$

兩數之差異較機誤之差異大七倍。查表 XII 差異較機誤大至七倍時,機偶爲 427000:1。此卽爲純係偶然所致,則每 42 萬次試驗中,或須有一次差異大至機誤 7 倍之現象發生。差異至 7 倍之大,實屬罕見,故差異爲極顯著。故可斷語兩種樣品之來源必不相同。

今若比較此兩種材料相關係數則:

$$
\begin{array}{r}
.769 \pm .012 \\
.680 \pm .018 \\
\hline
.089 \pm \sqrt{(.012)^2+(.018)^2} \\
= .089 \pm .022
\end{array}
$$

$$\frac{D}{P.E.}=\frac{.089}{.022}=4.05$$

查表　機偶爲 158:1

差異頗大，故可斷語此兩種樣品必非取自同一材料。

求兩數或諸數之機誤總和，與上述之求兩個機誤之相較法，大致相同。例有下列各個平均數及機誤，今試求總和：

平均數	機誤	(機誤)²
43.9	1.25	1.5625
36.5	1.06	1.1236
36.9	1.25	1.5625
51.9	.51	.2601
41.2	.72	.5184
總和 210.4		$=\sqrt{5.0271}$
		$=$ 2.24

Σ機誤=2.24

五組均數之總和爲 210.4，機誤總和爲 2.24，故每組平均均數爲 $\frac{210.4}{5}$ $=42.08$，每組平均機誤爲 $\frac{2.24}{5}=0.45$。求得平均數爲 42.08±.45。苟確知各平均數及其機誤係在同一環境下求得者，可用下列公式求機誤平均數和：

$$\text{平均數}=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2+E_3^2\cdots+E_n^2}}{N}$$

苟各平均數之來源各不相同，則求諸組平均機誤之公式宜爲：

$$\text{平均數}=\frac{\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}\cdots}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\cdots}$$

$$P.E._{平均數}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\cdots}}$$

公式內 A, B, C 代表各平均數，a, b, c 代表各機誤，用第二公式所得之各組均數之平均數及其平均機誤為 45.72±.35，此數與第一公式所得之 42.08±.45 相差有 3.5 之鉅。用第二公式計算時，每一平均數以其機誤相除，故遇平均數大而機誤小之組值，影響於總數平均數特大。例如第四組平均數最大 (51.9) 機誤則最小、(僅 0.51) 故其影響於總平均數者特大，致結果加大。

用第二公式求總均數及其機誤時，係將各個均數與其機誤逐一比較，而後平均之。故第二公式可補第一公式之不足。若計算者確知某數之值特高，或確知某數比其他各數特別準確，卽不宜用第一公式來混統加起，宜各以其機誤除之而後相加。第二公式確較第一公式為有用。

求各種常數之機誤，及其差異之各種計算法，均分別敍述，玆更將其公式彙列於表 75，至算法之意義及來源，因限於篇幅，略而不詳。

觀上列例題及公式，知各種常數皆有限度。惟有標準差或機誤，始能知可靠之程度。我人所試驗者無論動物靜物、變異總所難免，故不特常數有機誤，卽機誤本身，亦非固定不變，而亦有機誤，求機誤的機誤 (probable error of probable error) 之公式為：

$$P.E.的P.E._s=\pm.4769\frac{P.E._s}{\sqrt{N}}$$

（若觀察數小，分母當為$\sqrt{N-1}$而非$\sqrt{N}$。）

表 75.

各種常數之機誤公式表

常　　　數	機　　　誤
單次觀察	$.6745\sigma$
平均數	$.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
中位數	$.8453\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
標準差	$.6745\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$
四分位數(正常分配)	$.9191\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
中四分位數	$.5306\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
變量係數	$.6745\frac{\;}{\sqrt{2N}}\left[1+2\left(\frac{C}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
	$.6745\frac{C}{\sqrt{2N}}$ (若 C 小於 10，則所得者係一槪數)
相關係數	$.6745\frac{(1-r^2)}{\sqrt{N}}$
等級相關	$.7063\frac{(1-r^2)}{\sqrt{N}}$
相關率	$.6745\frac{(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}$ (槪數)
迴歸係數 β_{xy}	$.6745\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1-r^2}{N}}$
機誤之變異	$.4769\frac{P.E._s}{\sqrt{N}}$ (數目小時以 $\sqrt{N-1}$ 代替 $\sqrt{N}$)
兩個機誤之和或兩個機誤之較 (A±a 及 B±b)	$\sqrt{a^2+b^2}$
數個平均數及其機誤之總和第一法 $M=\dfrac{\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^5}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$

數個平均數及其機誤之總和第二法 $M=\frac{\Sigma(M_1+M_2+M_3 \cdots +M_n)}{N}$	$\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2+E_3^2 \cdots +E_n^2}}{N}$
兩個機誤之乘積$(A\pm a\times B\pm b)$	$\sqrt{(Ab)^2+(Ba)^2}$
三個機誤之乘積$(A\pm a, B\pm b, C\pm c)$ ……	$\sqrt{(BCa)^2+(ACb)^2+(ABc)^2}$
兩個機誤之相除商$\left(\frac{B\pm b}{A\pm a}\right)$ …………… …	$\frac{\sqrt{\left(\frac{Ba}{A}\right)^2+b^2}}{A}$

以表30之P.E.ₐ值代入得：

$$\text{P.E.的P.E.}_s=\pm.4769\frac{33.235}{\sqrt{400}}=.793$$

上述各種求機誤之公式，果可用來測驗試驗結果之可靠性，惟結果之可靠與否，還在試驗本身，至於機誤則僅指示其可靠程度之大概而已。故主持試驗者，對於所取樣本，務求其能代表全體材料，所舉次數宜多，觀察宜頻，俾所得結果，確能代表普通現象，若所取樣本已不可靠，則雖計算所得之機誤極小，亦不能盲斷其為準確合宜也。

第　十　章

曲線配合

試驗結果若用曲線配合，可知結果之大概趨勢，而預測將來現象。作者曾於第七章內將直線及拋物線（parabolas）之配合法，詳細論及，今更將敍述常用配合公式之如何應用及重要曲線之如何配合，本書因限於篇幅，各公式之如何演譯，不克一一敍述。

一種特殊形態之曲線，自有一種特殊分析方法。故在配合曲線之前，須先決定一種常數。(constant)。所常用以決定曲線種類時之常數爲β值，即β_1及β_2之值是也。其計算法，係先根據假定均數，求出下列各動差（Moments）。

$$v_1=\frac{\Sigma fD}{N}$$ 或每組次數乘平均差之平均積。

$$v_2=\frac{\Sigma fD^2}{N}$$ 或每組次數乘平均差平方之平均積。

$$v_3=\frac{\Sigma fD^3}{N}$$ 或每組次數乘平均差三次方之平均積。

$$v_4=\frac{\Sigma fD^4}{N}$$ 或每組次數乘平均差四次方之平均積。

求平均差之方法，已在第四章詳述。用單位進級法，而以校正量校

正之，較爲便捷。均差總和前之符號，須十分注意，因若係負號，則V_1及V_3之值，當爲負號。

V_1至V_4之值求得後，即可求μ_2至μ_4之值，此即離其均數之動差。

$$\mu_1=0$$

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1 2\nu_2-3\nu_1^4$$

若次數分配內之組距甚大，或所求之曲線之首尾兩端皆逐漸下拖，則μ_2及μ_4之值，當加以校正，此名爲薛拍氏校正法（Sheppard's Correction），其方程式當改成：

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2-\frac{1}{12}$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4-\frac{1}{2}(\nu_2-\nu_1^2)+\frac{7}{240}$$

β_1及β_2之值，用上列μ值，以下列公式求得之。

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

自β_1及β_2外，κ_1及κ_2之值，有時亦甚需要，可用下列公式求之：

$$\kappa_1=2\beta_2-3\beta_1-6$$

$$\kappa_2=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)}\text{或}\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)\kappa_1}$$

有數種曲線求配合時，須先求得理論衆數（theoretical mode）此可根據衆數＝均數－d之方程式來算出。

$$d=\frac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{2(5\mu_2\mu_4-6\mu_3^2-9\mu_2^3)}$$

凡遇不對稱之分配，其離開對稱分配之偏斜程度，即爲偏斜度。(Skewness) 偏斜度又可稱爲均數與衆數之相差與標準差之比，故偏斜度之測量，可以下列公式求出。

$$偏斜度=\frac{均數-衆數}{標準差}$$

苟偏斜度之符號無錯，則從β 值求之，較爲可靠，其公式爲：

$$偏斜度\ \text{Skewness}=\frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

β 及 κ 值求得後，可根據第 236 頁所載之表上各值，審定曲線之類別。表上所載公式及規範，僅限於本篇所論述之曲線，若有皮爾生(Pearson) 表時，查表中各數來決定曲線之種類，較用公式來求 β 值爲便利。若配合多數曲線，則皮爾生表實不可不備，因各值詳載表中，檢閱即得，自較計算爲易。

曲線配合之用意，在根據小樣試驗來概想整個事物之現象或根據一二試驗之所示，來推測同類材料之結果。吾人所觀察事物之結果，既不相同，所用以配合之曲線，自難盡同，大別之可分爲主要及變異兩大類。今就兩類中擇其性質重要而用度較廣者，舉例配合之。凡所求得之推測數，各與其觀察數並列表中，以資比較。本篇所引證之各種曲線，僅適於尋常統計之用，若遇繁雜問題，須另覓高深之參考書來解決之。

本文首先論述之曲線，當爲曲線第一種 (curve of Type I) 此爲三種主要曲線之一，其步驟詳述於下。

表示求各種曲線所需之方程式，始點，及規範

類數	方程式	始點	規範
主要類			
I	$Y=Y_0(1+x/a_1)^{m_1}(1+x/a_2)^{m_2}$	衆數	κ_2 負
.IV	$Y=\frac{Y_0}{[1+(x/a)^2]^m}e^{-v\ \tan-x/a}$	均數+(va/r 乘組距)	$\kappa_2>0$ 及 <1
VI	$Y=Y_0(x-a)^{q_2}x^{-q_1}$	均數$-\mu_1'$	$\kappa_2>1$
變化類			
常態曲線	$Y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2\sigma^2)}$	衆數(=均數)	$\kappa_2=0,\beta_1=0,\beta_2=3$
II	$Y=Y_0(1-x^2/a^2)^m$	衆數(=均數)	$\kappa_2=0,\beta_1=0,\beta_2<3$
III	$Y=Y_0(1+x/a)^{\gamma a}e^{-\gamma x}$	衆數	$2\beta_2=6+3\beta_1$
V	$Y=Y_0x^{-p}e^{-\gamma/x}$	曲線終點	$\kappa_2=1$

曲線第一種

曲線第一種之全距離（range），兩端皆有限制，成爲不相對或偏態弧形，其方程式爲：

$$Y = Y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

m_1及m_2所用之常數及求法如下：

$$r = \frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{-\kappa_1}$$

$$\omega = 4+\left[\frac{(\beta_1)}{4}\ \frac{(r+2)^2}{r+1}\right]$$

$$\epsilon = \frac{r^2}{\omega}$$

$$b^2 = \mu_2\omega(r+1)$$

$$b = \sqrt{b^2} = \text{全距離}$$

$$m'_{1,2} = \frac{r\pm\sqrt{r^2-4\epsilon}}{2}$$

$$m'_1-1=m_1,\quad m'_2-1=m_2$$

何者爲m_1，何者爲m_2，可照下列定律決定之。當μ_3係正號時，m_2大於m_1；當μ_3爲負號時，m_1大於m_2，所謂m_2大於m_1或m_1大於m_2者，乃實際數目較大之謂。例如μ_3爲正號時，m_1及m_2皆爲負號，則m_1之數目，雖較m_2爲大，而實際則m_2大於m_1。蓋-1實際小於-2，雖就數目字言，則2大於1也。

$$a_2 = \frac{b}{\frac{m_1}{m_2}+1} = \text{自衆數至全距高限之距離}\ (+)$$

$a_1 = b - a_2 =$ 衆數至全距低限之距離(－)

$$Y_0 = \frac{N}{b} \frac{m_1^{\ m_1} m_2^{\ m_2}}{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}} \frac{\Gamma(m_1+m_2+2)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}$$

n 爲總個數，b 爲全距離，m_1 及 m_2 可用上列公式求得之。

Γ 值，可從皮爾生氏生物統計表第 XXXI (Pearson's Tables for Statisticians and Biometricians) 表中查得，若總個數 n 比 12 猶大，可用下列近似數求 Γ：

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi}\ \left(\frac{\sqrt{n^2+n+1/6}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

n+1 爲 Γ 所須決定之值　$\pi = 3.1416 =$ 常數

從 Y_0 值可得　$\kappa = \dfrac{Y_0}{a_1^{\ m_1} a_2^{\ m_2}}$

衆數＝平均數－d

而　$d = \dfrac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{2(5\mu_2\mu_4-6\mu_3^2-9\mu_2^3)}$

且衆數亦即爲起點數。

茲用下列燕麥產量之記錄，引證曲線第一種之配合法。

求 Y 之公式爲：$Y = Y_0\ \left(1+\dfrac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\dfrac{x}{a_2}\right)^{m_2}$

燕麥產量（瓦）	f
0.00—0.99	3
1.00—1.99	50
2.00—2.99	106
3.00—3.99	109
4.00—4.99	80
5.00—5.99	42
6.00—6.99	7
7.00—7.99	2
8.00—8.99	1
	總和 400

先求Y_0,其公式為$Y_0=\frac{N}{b}\,\frac{m_1^{\ m_1}m_2^{\ m}}{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}}\,\frac{\Gamma(m_1+m_2+2)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}$

V	f	D	fD	fD^2	fD^3	fD^4
.5	3	−3	−9	27	−81	243
1.5	50	−2	−100	200	−400	800
2.5	106	−1	−106	106	−106	106
3.5	109	0				
4.5	80	1	80	80	80	80
5.5	42	2	84	168	336	672
6.5	7	3	21	63	189	567
7.5	2	4	8	32	128	512
8.5	1	5	5	25	125	625
	N=400		Σ=−17	701	271	3605

從上表各總和求得各動差,為:

$$\nu_1=\frac{fD}{N}=\frac{-17}{400}=-.0425$$

$$\nu_2=\frac{fD^2}{N}=\frac{701}{400}=1.7525$$

$$\nu_3=\frac{fD^3}{N}=\frac{271}{400}=0.6775$$

$$\nu_4=\frac{fD^4}{N}=\frac{3605}{400}=9.0125$$

以上列數目代入求μ_2, μ_3, μ_4之公式內,

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$$

$$=1.7525-(-.0425)^2=1.7507$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$$

$$=.6775-3(-.0425\times1.7525)+2(-.0425)^3=.9008$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$
$$= 9.0125 - 4(-.0425)(.6775) + 6(-.0425)^2(1.7525) - 3(-.0425)^4 = 9.1469$$

以 μ 值代入 β_1 及 β_2 之公式內：

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$
$$= \frac{(0.9008)^2}{(1.7507)^3} = .1512$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$
$$= \frac{9.1469}{(1.7507)^2} = 2.9843$$

以 β 值代入 κ_1 及 κ_2 之公式內

$$\kappa_1 = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6$$
$$= 2(2.9843) - 3(.1512) - 6 = -.4850$$

$$\kappa_2 = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)\kappa_1}$$
$$= \frac{.1512(2.9843+3)^2}{4(4\ 2.9843) - 3\ .1512))\,(2(2.9843) - 3(.1512) - 6)}$$
$$= -.2430$$

爲便於計算起見，茲將求得之常數，排列如次

$$\mu_2 = 1.7507$$
$$\mu_3 = .9008$$
$$\mu_4 = 9\ 1469$$
$$\beta_1 = .1512$$
$$\beta_2 = 2.9843$$

$$\kappa_1 = -.4850$$

$$\kappa_2 = -.2430$$

以常數代入求 r, ω, 等公式，可得 m_1 及 m_2 之值：

$$r = \frac{6(\beta_2 - \beta\ -1)}{-K_1}$$

$$= \frac{6(2.9843 - .1512 - 1)}{-(-.4850)} = 22.6775$$

$$\omega = 4 + \left[\frac{(\beta_1)}{4}\ \frac{(r+2)^2}{r+1}\right]$$

$$= 4 + \left[\frac{.1512}{4}\ \frac{(22.6775+2)^2}{22.6775+1}\right] = 4.9722$$

$$\epsilon = \frac{r^2}{\omega}$$

$$= \frac{(22.6775)^2}{4.9722} = 103.4289$$

$$b^2 = \mu_2 \omega (r+1)$$

$$= 1.7507 \times 4.9722 \times (22.6775+1) = 206.1079$$

$$b = \sqrt{b^2}$$

$$= \sqrt{206.1079} = 14.3565$$

$$m'_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4\epsilon}}{2}$$

$$= \frac{22.6775 \pm \sqrt{(22.6775)^2 - 413.7156}}{2}$$

$$= \frac{22.6775 \pm 10.0276}{2}$$

而　$$\frac{22.6775 + 10.0276}{2} = 16.3525$$

$$\frac{22.6775-10.0276}{2}=6.3249$$

查μ_3係正號，故m_2須大於m_1，

16.3525 當爲m'_2，

6.3249 當爲m'_1。

$$m_1=m'_1-1$$

$$=6.3249-1=5.3249_{\circ}$$

$$m_2=m'_2-1$$

$$=16.3525-1=15.3525$$

$$a_2=\frac{b}{\dfrac{m_1}{m_2}+1}$$

$$=\frac{14.3565}{\dfrac{5.3249}{15.3525}+1}=10.6597$$

$$a_1=b-a_2$$

$$=14.3565-10.6597=3.6968$$

$$Y_0=\frac{N}{b}\,\frac{m_1{}^{m_1}\,m_2{}^{m_2}}{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}}\,\frac{\Gamma(m_1+m_2+2)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}$$

$$=\frac{400}{14.3565}\,\frac{(5.3249^{5.3249})(15.3525^{15.3525})}{(5.3249+15.3525)^{5.3249+15.3525}}$$

$$\frac{\Gamma(5.3249+15.3525+2)}{\Gamma(5.3249+1)\,\Gamma(15.3525+1)}$$

計算Y_0時，可將各値用對數算之：

對數 400 $=2.6020600$

對數 5.3249 $=.7263115$, $.7263115\times5.3249=3.8675361$

對數 15.3525 $=1.1861791$, $1.1861791\times15.3525=18.2108146$

$$\Gamma(5.3249+15.3525+2)=\Gamma 22.6774$$

Γ22.6774 大於 12 故可用近似數之方程式求之:

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1/6}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Γ 22.6774 之 n，當爲 21.6774，因求 Γ 之函數時，其 n 較 Γ 內數少 1，故:

$$\sqrt{n^2+n+1/6}=\sqrt{469.9097+21.6774+.1667}=\sqrt{491.7538}$$

$$\text{對數}\sqrt{491.7538}=1.3458738$$

$$\text{對數}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1/6}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}=(1.3458738-.4342945)\times 22.1774=20.2164588$$

$$\text{對數}\sqrt{2\pi}=.399090$$

$$\text{對數}\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1/6}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}=.399090+20.2164588=20.6155488$$

$$\therefore\quad \text{對數}\ \Gamma(5.3249+15.3525+2)=20.6155488$$

$$\text{對數}\ 14.3565=1.1570485$$

$$\text{對數}\ (5.3249+15.3525)^{5.3249+15.3525}$$

$$=\text{對數}20.6774\times 20.6774$$

$$=1.3154959\times 20.6774$$

$$=27.2010349$$

求 Γ (5.3249+1) 時，因 Γ 數 6.3249 小於 12，故可用下法求之:

$$\Gamma 6.3249=\ \text{對數}\ 5.3249\ \text{或}\ .7263115$$

$$+\ \text{對數}\ 4.3249\ \text{或}\ .6359761$$

+對數 3.3249 或 .5217786

+對數 2.3249 或 .3664043

+對數 1.3249 或 .1221831

+ Γ 1.3249 或 $\bar{1}$.9513421

將上列各對數相加得 2.3239957，即為 Γ6.3249 之對數。Γ(15.3525+1) 之數，大於 12，故須用求近似數之方程式計算之：

$$n=15.3525$$

$$\sqrt{(n^2+n+1/6)}=\sqrt{235.6993+15.3525+.1667}=\sqrt{251.2185}$$

$$\text{對數}\sqrt{251.2185}=1.2000258$$

$$\text{對數}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1/6}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}=(1.2000258-.4342945)\times 15.8525$$

$$=12.1387554$$

$$\text{對數}\sqrt{2\pi}=.399090$$

$$\text{對數}\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{(n^2+n+1/6)}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}=.399090+12.1387554$$

$$=12.5378454。$$

求對數 Y_0 所需各項之對數歷舉於下：

$$\text{對數}\ N=2.6020600$$

$$\text{對數}\ {m_1}^{m_1}=3.8675361$$

$$\text{對數}\ {m_2}^{m_2}=18.2108146$$

$$\text{對數}\ \Gamma(m_1+m_2+2)=20.6155488$$

附註　Γ1.3249 之值，由皮爾生氏生物統計學第 XXXI 表查得，若無此書時，仍可用近似數方程式求之，若數目小，皮氏表上之數，亦非十分可靠

反對數　b　$= \bar{2}.8429515$

反對數 $(m_1+m_2)^{m_1+m_2} = \overline{28}.7989651$

反對數　$\Gamma(m_1+1)$　$= \bar{3}.6760043$

反對數　$\Gamma(m_2+1)$　$= \overline{13}.4621546$

對數 $Y_0 = 2.0760350$

$$\kappa = \frac{Yo}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}$$

對數 $\kappa = 2.0760350 - ($對數$3.6968 \times 5.3249)$

$+($對數$10.6597 \times 15.3525)$

對數 $\kappa = \overline{17}.2739632$

求得 κ 值後 Y 之值可照下頁所列表求出。表中第二項 x 值爲衆數（卽始點 origin）之離縱坐標距離。

衆數＝平均數－d

平均數＝3.4575

$$d = \frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{2(5\mu_2\mu_4 - 6\mu_3^2 - 9\mu_2^3)}$$

$$= \frac{.9008(9.1469 + 9.1950)}{2(80.06754 = .8684 - 48.2931)} = .3070$$

故　　衆數 $= 3.4575 - .3070$

$= 3.1505$

求曲線第一種 Y 值所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V	x	a_1+x	對數 $a_1+x)$	對數 (a_1+x) 乘m_1	a_2-x	對數 (a_2-x)	對數 (a_2-x) 乘m_2	第5項＋第8項＋對數 κ＝對數 Y	計算數 Y	觀察數 Y
.5	−2.6505	1.0463	.0196562	1046673	13.3102	1.1241846	17.2590441	.6376746	4.34	3
1.5	−1.6505	2.0463	.3109693	1.6558864	12.3102	1.0902651	16.7382949	1.6681385	46.57	50
2.5	−.6505	3.0463	.4837727	2.5760413	11.3102	1.0534703	16.1734028	2.0234073	105.54	166
3.5	.3495	4.0463	.6070581	3.2325237	10.3102	1.0132671	15.5561832	2.0626701	115.52	109
4.5	1.3495	5.0463	.7029731	3.7432615	9.3102	.9689590	14.8759430	1.8931677	78.19	80
5.5	2.3495	6.0463	.7814897	4.1613545	8.3102	.9196115	14.1183356	1.5536533	35.78	42
6.5	3.3495	7.0463	.8479611	4.5153081	7.3102	.8639293	13.2634740	1.0527459	11.29	7
7.5	4.3495	8.0463	.9055962	4.8222092	6.3102	.8000431	12.2826617	.3788341	2.39	2
8.5	5.3495	9.0463	.9564710	5.0931124	5.3102	.7251109	11.1322651	1.4993407	.32	1

曲線第四種

曲線第四種之全距離並無限制，其方程式為：

$$Y=\frac{Y_0}{[1+(x/a)^2]^m}e^{-v\tan^{-1}x/a}$$

因　$x=a\tan\theta$

而　$$\frac{1}{[1+(x/a)^2]^m}=\cos^{2m}\theta$$

故　$Y=Y_0\cos^{2m}\theta e^{-v\theta}$

求本曲線所用常數之方程式為：

$$r=\frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{2\beta_2-3\beta_1-6}$$

$$m=\tfrac{1}{2}(r+2)$$

$$Z=\frac{r^2}{1-\left[\frac{\beta_1}{16}\frac{(r-2)^2}{r-1}\right]}$$

$v=\sqrt{(Z-r^2)}$（v之符號照 μ_3 符號而定，若 μ_3 為正，則 v 為負，μ_3 為負，則 v 為正。）

$$a=r\sqrt{\frac{\mu_2(r-1)}{Z}}$$

求 Y_0 可以

當　$\tan\phi=\frac{v}{r}$

對數 $\tan\phi=\log\frac{v}{r}$

而 ϕ 之度分秒，可由三角角度上求對數 tan ϕ 而得之。表中所載之分與秒，若欲變成度時，可將分以 60 乘之使成秒，而與原有之秒數相加，再將此總和以 3600 除之，其商卽爲度。

若有皮爾生氏之生物統計表 LIV，可以檢查 F(r,v) 之對數時，Y_0 之值可用下列公式得之：

$$Y_0=\frac{N}{n}\frac{1}{F(r,v)}$$

假定 n 代表 ϕ 之整數，m 代表 r 之整數

對數 F(r,v) 之 ϕ 值及 r 值，可從皮爾生氏表 LIV 上查得之。求 F(r,v) 值之法如下：

$\phi(n)$ 及 $r(m)$ 稱爲 μ_{00}

$\phi(n)$ 及 $r(m+1)$ 稱爲 μ_{01}

$\phi(n+1)$ 及 $r(m)$ 稱爲 μ_{10}

$\phi(n+1)$ 及 $r(m+1)$ 稱爲 μ_{11}

又

$p=\phi$ 之小數下數目，

$r'=r$ 之小數下數目，

$q=1-p$

$s=1-r'$

若將 μ 之各值以 p,q 等值乘之如下表，其總和卽爲對數 F(r'v)

$q\ s\ \mu_{00}$

$q\ r'\ \mu_{01}$

$p\ s\ \mu_{10}$

$p\ r'\ \mu_{11}$

總和＝對數 $F(r,v)$

所得之結果準確與否，可用下法決定之、若最大係數與 ϕ 及 r 之値相近，則結果認爲可靠，

以所得値代入下列公式得：

$$Y_0=\frac{N}{aF(r,v)}$$

此種曲線之始點與平均數之距離。爲 $\frac{va}{r}$ 乘組距。

故 始點＝平均數＋$\frac{va}{r}$乘組距

求始點時須注意 v 之符號，

因衆數＝平均數－d

故 $d=\frac{2va}{r(r+2)}$乘組距 （照 μ_3 之符號而定）

當 $\tan\phi=\frac{v}{r}$時，Y_0 之概數，亦可用下列之方程式求得之：

$$Y_0=\frac{N}{a}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\frac{e^{(\cos^2\phi)/3r-1/12r-\phi v}}{(\cos\phi)^{r+1}}$$

茲將燕麥麥桿之高度記錄，來引證第四種曲線之計算法。

麥 稈 高 度 (公分)	f
25.00—29.99	4
30.00—34.99	7
35.00—39.99	27
40.00—44 99	76
45.00—49.99	151
50.00—54.99	237
55.00—59.99	196
60 00—64.99	83
65 00—69.99	27
70.00—74.99	15
75.00—79.99	2
	總和 825

所得常數爲：

$$\mu_2 = 2.3795$$

$$\mu_3 = -.2620$$

$$\mu_4 = 20.1425$$

$$\beta_1 = 0051$$

$$\beta_2 = 3.5575$$

$$\kappa_2 = .0035$$

從上列常數求得各值：

$$r = \frac{6(3.5575-.0051-1)}{1\ 0997} = 13.9260$$

$$m = \frac{1}{2}(13.9260+2) = 7.9630$$

$$Z = \frac{(13.9260)^2}{1-\left[\frac{.0051}{16}\cdot\frac{(13.9260-2)^2}{13.9260-1}\right]} = 194.5756$$

$v = \sqrt{194.5756-(13.9260)^2} = .8013$ (所用正負宜與μ_3相反，若μ_3為+則v為－)

$$a = 13.9260\sqrt{\frac{2.3795(13.9260-1)}{194.5756}} = 5.5370$$

$$\operatorname{Tan}\phi = \frac{.8013}{13.9260} = .0575$$

對數 $\tan\phi = 8.7596678$

ϕ 之度數 $= 3^\circ\ 17'\ 27''$ 或 3.2908°

$n = 3$

$m = 13$

$p = .2908$

$r' = .9260$

$q = 1-.2908 = .7092$

$s = 1-.9260 = .0740$

以皮爾生氏表所查得之 F(r,v) 值，代入 ϕ 及 r，得下列各種結果：

$\phi(3)r(13)$，或 $\mu_{00} = 9.8400592$

$\phi(3)r(14)$，或 $\mu_{01} = 9.8260558$

$\phi(4)r(13)$，或 $\mu_{10} = 9.8465615$

$\phi(4)r(14)$，或 $\mu_{11} = 9.8321212$

以之代入卽得：

$$q\ s\ \mu_{00}=(.7092)(.0740)(9.8409592)=9.9916504$$

$$q\ r'\ \mu_{01}=(.7092)(.9260)(9.8260558)=9.8857708$$

$$p\ s\ \mu_{10}=(.2908)(.0740)(9.8465615)=9.9967011$$

$$p\ r'\ \mu_{11}=(.2908)(.9260)(9.8321212)=9.9547902$$

總和 $=$ 對數 $F(r,v)$ $=9.8289125$

從 $Y_0=\frac{N}{aF(r,v)}$ 之公式 求得對數 Y_0 爲 2.3442669

對數 $N=2.9164539$

反對數 $a=1.2567255$

反對數 $F(r,v)=\ \underline{.1710875}$

對數 $Y_0=2.3442669$

用求 Y_0 概數之普通公式

$$Y_0=\frac{N}{a}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\ \frac{e^{(\cos^2\phi\ /3r-1/12r-\phi v}}{(\cos\phi)^{r+1}}$$

求得對數 Y_0 爲：

$N=825$

$a=5.5370$

$r=13.9260$

$2\pi=6.2831854$

$e=2.7182818$

$\tan\phi=3^0\ 17'\ 27''=.0574348$

對數 $\cos\phi=9.9992833$

對數 $\cos^2\phi = 9.9985666$

$\cos^2\phi = .9967$

$v = .8013$

對數 r (13.9260) $= 1.1438264$

對數2π(6.2831854) $= .7981799$

對數$\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} = .1728232$

$$\frac{\cos^2\phi}{3r} = \frac{.9967}{41.7780} = .0239$$

$$\frac{1}{12r} = \frac{1}{167.1120} = .0060$$

$$\phi v = (.0574348)(.8013) = .0460$$

$$\frac{\cos^2\phi}{3r} - \frac{1}{12r} - \phi v = .0239 - .0060 - .0460 = -.0281$$

$e^{-.0281} =$ (對數 e)$(-.0281) = (.4342945)(-.0281) = -.0122037$

$= \bar{1}.9877963$

反對數 $\cos\phi^{\,r+1} = (9.9992833)(14.9260) = 9.9893025$

$= .0106975$

對數 N $= 2.9164539$

反對數 a $=\bar{1}.2567255$

對數 $\sqrt{\frac{r}{2\pi}}=.1728232$

對數 $e^{(\cos^2\phi)/3r-1/12r-\phi v}=\bar{1}.9877903$

反對數 $(\cos\phi)^{r+1}=.0106975$

對數 $Y_0=2.3444964$

此數與用 $Y_0=\frac{N}{aF(r,v)}$ 之公式所求得之對數 $Y_0=2.34442669$

頗相符合。

$$\text{始點}=52.9910+\frac{(.8013)(5.5370)}{13.9260}\times\text{組距}=54.5840$$

$$d=\frac{2(.8013)(5.5370)}{13.9260(13.9260+2)}\times\text{組距}=-.2000$$

d 值之正負符號與 μ_3 同

$$\text{乘數}=52.9910-(-.2000)=53.1910$$

今將各項列成表格，載第 255 頁，每項之值，可依次求出。x 為由始點至縱坐線之距離，求第三項內 x/a 值，以先求得 $\frac{1}{(a)(5)}$ 而以 x 乘之較為便捷。Y_0 值 $=2.3442669$，乃用以決定第 11 項之對數 Y_0 之值者。

求曲線第四種 Y 值所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
V	x	$\tan\theta$ $=x/a$	對數 $\tan\theta$	$\theta°$	對數 $\cos\theta$	對數 $\cos\theta$ 乘 2m	θ IN RADIANS	$v\theta$	對數 $e^{-v\theta}$	第 7 項＋第 10 項＋對數 Y_0＝對數 Y	計算數 Y	觀察數 Y
27.5	—27.0840	—.9777	9.9902056	44°21′14″	9.8543277	$\bar{3}$.6800230	—.7741214	—.6203035	.2693944	.2936843	1.97	4
32.5	—22.0840	—.7972	9.9015673	38°33′43″	9.8931705	$\bar{2}$.2986334	—.6730329	—.5393013	.2342156	.8771159	7.54	7
37.5	—17.0840	—.6167	9.7900739	31°39′44″	9.9300099	$\bar{2}$.8852377	—.5526100	—.4428064	.1923084	1.4219130	26.42	27
42.5	—12.0840	—.4362	9.6396857	23°34′ 1″	9.9621768	1.3976277	—.4113208	—.3295914	.1431397	1.8850343	76.74	76
47.5	— 7.0840	—.2557	9.4077307	14 20′36″	9.9862470	$\bar{1}$.7809697	—.2503384	—.2005962	.0871178	2.2123544	163.06	151
52.5	— 2.0840	—.0752	8.8762178	4°18′ 2″	9.9987755	$\bar{1}$.9804986	—.0750589	—.0601447	.0261205	2.3508860	224.33	237
57.5	2.9160	.1053	9.0224284	6° 0′40″	9.9976055	$\bar{1}$.9618652	.1049137	.0840673	$\bar{1}$.9634900	2.2696221	186.05	196
62.5	7.9160	.2858	9.4560622	15°57′ 0″	9.9829501	$\bar{1}$.7284633	.2783800	.2230659	$\bar{1}$.9031237	1.9758539	94.59	83
67.5	12.9160	.4663	9.6686654	24°59′59″	9.9572767	$\bar{1}$.3195887	.4363275	.3496292	$\bar{1}$.8481580	1.5120136	32.51	27
72.5	17.9160	.6468	9.8107700	32°53′41″	9.9241085	$\bar{2}$.7913520	.5741212	.4600433	$\bar{1}$.8002057	.9358246	8.63	15
77.5	22.9160	.8273	9.9176630	39°36′ 3″	9.8867749	$\bar{2}$.1967771	.6911649	.5538304	$\bar{1}$.7594745	.3005185	2.00	2

曲線第六種

曲線第六種之全距離一端有限制。其方程式為：

$$Y = Y_0(x-a)^{q_2}x^{-q_1}$$

求此種曲線時，需用下列常數：

$$r = \frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{-\kappa_1}$$

$$\omega = 4+\left[\frac{\beta_1}{4}\ \frac{(r+2)^2}{r+1}\right]$$

$$\epsilon = \frac{r^2}{\omega}$$

上列三種常數，已於計算曲線第一種時求得。惟求 r 及 ϵ 之值，若在曲線第六種時，則當為負號。

$1-q_1$ 及 q_2+1 為 $Z^2-rZ+\epsilon$ 之方根 $=0$

計算 $Z_1Z_2 = \dfrac{r\pm\sqrt{r^2-4\epsilon}}{2}$

而 $q_1 = 1-Z_1$

$q_2 = Z_2-1$

在去方根時，須切記 ϵ 及 r 皆為負號。

又因 $r = -q_1+q_2+2$

故 q_1 必大於 q_2+2

Z_1 及 Z_2 必依此決定，庶可與上列條件相符合，而令 $1-q_1$ 及 r 皆為負號。

$$a^2 = \frac{\mu_2 r^2(r+1)}{(1-q_1)(1+q_2)}$$

$$a = \sqrt{a^2} \qquad \text{（始點至全距末端之距離）}$$

$$Y_0 = \frac{N^{(aq_1-q_2-1)}\Gamma q_1}{\Gamma(q_1-q_2-1)\Gamma(q_2+1)}$$

始點至平均數之距離，為 μ_1'

而 $\mu_1' = \dfrac{a(q_1-1)}{q_1-q_2-2}$

計算上列公式時，a 之符號，須依 μ_3 之符號而定。

始點＝平均數－μ_1'，（注意 μ_1' 之符號）

乘數＝平均數－$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mu_3}{\mu_2}\quad\dfrac{r+2}{r-2}\right]$

玆用燕麥麥桿數之記錄，引證曲線第六種之計算法。

麥　桿　數	f
1	1
2	57
3	184
4	111
5	33
6	11
7	2
8	1
	總數 400

求得常數如下：

$$\mu_2 = .9819$$

$$\mu_3 = .8733$$

$$\mu_4 = 4.3992$$

$$\beta_1 = .8057$$

$$\beta_2 = 4.5630$$

$$\kappa_1 = .7089$$

$$\kappa_2 = 1.0264$$

以各數代入 r 方程式，得

$$r = \frac{6(4.5630 - .8057 - 1)}{-.7089} = -23.3373$$

$$\omega = 4 + \left[.2014 \ \frac{(-23.3373+2)^2}{-23.3373+1} \right] = -.1050$$

$$\epsilon = \frac{(-23.3373)^2}{-.1050} = -5186.9486$$

$$Z_1 Z_2 = \frac{-23.3373 \pm \sqrt{(-23.3373)^2 - (-20747.7944)}}{2}$$

$$Z_1 = -84.6282$$

$$Z_2 = 61.2909$$

$$q_1 = 1 - (-84.6282) = 85.6282$$

$$q_2 = 61.2909 - 1 = 60.2909$$

$$a^2 = \frac{.9819(-23.3373)^2(-23.3373+1)}{(1-85.6282)(1+60.2909)} = 2.3030$$

$$a = \sqrt{2.3030} = 1.5176 \text{(用 } \mu_3 \text{ 之符號)}$$

$$Y_0 = \frac{400(1.5176^{85.6282-60.2909-1})\Gamma 85.6282}{\Gamma(85.6282-60.2909-1)\Gamma(60.2909+1)}$$

用對數，求 Y_0

對數Y_0 = 29.4279775

$$\mu_1' = \frac{1.5176(85.6282-1)}{(85.6282-60.2909-2)} = 5.5033$$

始點 = 3.4100 − 5.5033 = −2.0933

$$\text{衆數} = 3.4100 - \frac{1}{2}\left[\frac{.8733}{.9819} \quad \frac{-23.3373+2}{-23.3373-2}\right] = 3.0355$$

下列表格，表示求曲線第六種所需之各項列及計算法，x 爲自始點至縱坐線之離差。

常態曲線

常態曲線之組距兩端皆無限制，且相對稱。

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

配合常態曲線時，須求得 μ, β, κ 等常數，及平均數，離中差 σ，與 Y_0，Y_0 可從公式 $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 求得之。

求曲線第六種所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
V	x	x－a	對數x	對數x－a	(對數x－a)q_2	$\left(\frac{1}{\text{對數x}}\right)q_1$	第六項＋第七項＋對數Y_0＝對數Y	計算數Y	觀察數Y
1	3.0933	1.5757	.4904220	.1974735	11.9058550	$\overline{42}.0060469$	$\bar{1}.3398794$	.22	1
2	4.0933	2.5757	.6120736	.4108953	24.7732474	$\overline{53}.5892394$	1.7904643	61.73	57
3	5.0933	3.5757	.7069993	.5533611	33.3626387	$\overline{61}.4609225$	2.2515387	178.46	184
4	6.0933	4.5757	.7848526	.6604575	39.8195771	$\overline{68}.7944846$	2.0420392	110.16	111
5	7.0933	5.5757	.8508483	.7462994	44.9950625	$\overline{73}.1433916$	1.5664316	36.85	33
6	8.0933	6.5757	.9081256	.8179420	49.3144593	$\overline{78}.2388395$	.9812763	9.58	11
7	9.0933	7.5757	.9587215	.8794228	53.0211921	$\overline{83}.9064037$	.3555733	2.27	2
8	10.0933	8.5757	1.0040332	.9332696	56.2676641	$\overline{86}.0264443$	$\bar{1}.7220859$	.53	1

下列例證用來表示各項之如何排法，及各值之求法。下表所列者爲擲八枚銅元至 2000 次時所得之結果。

字面次數	f
0	11
1	62
2	196
3	421
4	574
5	467
6	203
7	55
8	11
	總數 2,000

求得

$$\mu_2 = 1\ 94412$$

$$\mu_3 = -.15724$$

$$\mu_4 = 11.19834$$

$$\beta_1 = \ 00336$$

$$\beta_2 = 2.96284$$

$$\kappa_2 = -.02989$$

$$\text{平均數} = 4.01950$$

從上列各常數之數值，即可預測此曲線將成一常態曲線。

$$\sigma \ = 1.39432$$

$$Y_0 = \frac{2000}{(1.39432)(2.506628)} = 572.23952$$

常態曲線之縱坐線，可直接從下列方程式中求之：

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

此方程式又可寫作

$$Y = Y_0 \frac{1}{e^{x^2/2\sigma^2}} \qquad Y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Y_0 之值可照上列公式算出，x 之各值可根據 $\frac{1}{e^{x^2/2\sigma^2}}$ 而得之，若用對數計算，則 $\frac{1}{e^{x^2/2\sigma^2}}$ 之一部份，可寫作 $\frac{(\log\frac{1}{e})\, x^2}{2\sigma^2}$，較爲方便，茲將第一個 x 值代入公式中，得：

$$\frac{(9.5657055-10)\ 4.0195)^2}{2(1.39431)^2} = \bar{2}.1954326$$

對數 $\bar{2}.1954326 = .01568$，故：

$$Y = (572.23952)(.01568) = 8.97$$

其他 x 各值，可以同樣方法求出，若用皮氏（Pearson）表 II 求 Z 值；尤爲便捷，其公式爲：

$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$，此可分作兩部計算，$\frac{N}{\sigma}$ 爲一部，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ 爲又一部，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ 之數，可從皮爾生氏表上之 z 值按照 $\frac{x}{\sigma}$ 而求得之。所求得之數以 $\frac{N}{\sigma}$ 之值乘之，即爲

Y值。今以V值等於3爲例，從皮爾生氏表，算出Y值：

$$x = V - M$$

$$V = 3,\ M = 4.0195$$

$$x = 3 - 4.0195 = -1.0195$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{-1.0195}{\sigma} = -.73118$$

查皮爾生氏第II表：

當 $x = .73118$ 時，$z = .3053633$

而 $\frac{N}{\sigma} = 1434.3910$

故 $Y = 1434.3910 \times .3053633$

$= 438.01$

下表示求常態曲線時所需之各項列及其算法

1	2	3	4	5	6
V	f	V—M 或 x	x/σ	皮爾生氏第II表之z值照$\frac{x}{\sigma}$查出	Y 以第5項乘$\frac{N}{\sigma}$
0	11	—4.0195	—2.88277	.0062570	8.97
1	62	—3.0195	—2.16557	.0382451	54.86
2	196	—2.0195	—1.44838	.1397594	200.47
3	421	—1.0195	— .73118	.3053633	438.01
4	574	— .0195	— .01399	.3988984	572.18
5	467	.9805	.70321	.3115498	446.88
6	203	1.9805	1.42041	.1454797	208.67
7	55	2.9805	2.13760	.0406168	58.26
8	11	3.9805	2.85480	.0067860	9.73

曲線第二種

曲線第二種之全距分配是對稱而其兩端有限制。其方程式為：

$$Y = Y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

求x值所需之常數如下：

$$m=\frac{5\beta_2-9}{2(3-\beta_2)}$$

$$a^2=\frac{2\mu_2\beta_2}{3-\beta_2}$$

$$a=\sqrt{a^2}$$

$$Y_0=\frac{N\Gamma(2m+2)}{a2^{2m+1}[\Gamma(m+1)]^2}$$

曲線之兩端為 $M-a$ 及 $M+a$，求$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m$ 時以列成

$\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)及\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]^m$式為簡便

玆以燕麥每一麥穗之小穗平均數記錄來引證此種曲線之計算法。用薛柏氏 Sheppards 校正法計算時，所需之常數為

平均小穗數	f
10.00-14.99	8
15.00-19.99	28
20.00-24.99	57
25.00-29.99	100
30.00-34.99	115
35.00-39.99	102
40.00-44.99	61
45.00-49.99	26
50.00-54.99	3
	總數 500

$\mu_2 = 2.5877$

$\mu_3 = -.4235$

$\mu_4 = 17.1827$

$\beta_1 = .0104$

$\beta_2 = 2.5660$

$\kappa_2 = -.0088$

從上列常數求得 m, a, Y_0 之值爲：

$$m = \frac{12.8300-9}{2(3-2.5660)} = 4.4124$$

$$a^2 = \frac{(5.1754)(2.5660)}{3-2.5660} = 30.5993$$

$$a = \sqrt{30.5993} = 5.5317$$

$$Y_0 = \frac{500\Gamma(8.8248+2)}{(5.5317)(2^{8.8248+1})[\Gamma(4.4124+1)]^2}$$

Y_0 值以對數計算之較便，其法從對數分子各數之和，減去對數分母各數之和卽得：

對數 $Y_0 = 2.0642153$

求 x 各值時所需各項，詳列下表。x 各值，照離均差而定，第二種曲線之衆數與均數兩點相印合，故衆數與均數之數目相差極微。表中組值寫在第一項，各組之組距爲 5，若用單位進級法求 x，可先以組值與均數相較，而後以 5 除之，例如第一行

$V = 12.5$

均數 $= 32.3400$

$V -$ 均數 $= -19.8400$

$$x = \frac{V - \text{均數}}{5} = \frac{-19.8400}{5} = -3.9680$$

求曲線第二種 Y 值所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
V	x	x/a	1+x/a	1−x/a	對 數 (1+x/a)	對 數 (1−x/a)	第6項+第7項	第8項乘m	第9項+對數 Y_0=對數Y	計算數 Y	觀察數 Y
12.5	-3.9680	-.7173	.2827	1.7173	9.4513258	.2348462	9.6861720	$\bar{2}$.6152653	.6794806	4.78	3
17.5	-2.9680	-.5365	.4635	1.5365	9.6660497	.1865326	9.8525823	$\bar{1}$.3495341	1.4137494	25.93	28
22.5	-1.9680	-.3558	.6442	1.3558	9.8090207	.1321956	9.9412163	$\bar{1}$.7406228	1.8048381	63.80	57
27.5	- .9680	-.1750	.8250	1.1750	9.9164539	.0700379	9.9864918	$\bar{1}$.9403964	2.0046117	101.07	100
32.5	.0320	.0058	1.0058	.9942	.0025116	9.9974738	9.9999854	$\bar{1}$.9999356	2.0641509	115.92	115
37.5	1.0320	.1866	1.1866	.8134	.0743043	9.9103042	9.9846085	$\bar{1}$.9320865	1.9963018	99.15	102
42.5	2.0320	.3673	1.3673	.6327	.1358638	9.8011978	9.9370616	$\bar{1}$.7222906	1.7865059	61.17	61
47.5	3.0320	.5481	1.5481	.4519	.1897990	9.6550423	9.8448413	1.3153778	1.3795931	23.97	26
52.5	4.0320	.7289	1.7289	.2711	.2377699	9.4331295	9.6708994	$\bar{2}$.5478765	.6120918	4.09	3

曲線第三種

曲線第三種之全距分配，僅限於一個方向，其方程式爲：

$$Y = Y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a_e-\gamma x}$$

計算時用下列常數：

$$\gamma = \frac{2\mu_2}{\mu_3}$$

$$p = \left(\frac{4}{\beta_1}\right)-1$$

$$a = \frac{p}{\gamma}$$ （由衆數至兩限之距離）

$$Y_0 = \frac{N}{a}\left\{\frac{p^{p+1}}{e^p\Gamma(p+1)}\right\}$$

其始點係在衆數，衆數離均數之距離爲$\frac{1}{\gamma}$。

茲以500株燕麥之產量，引證曲線第三種之計算法(附燕麥產量表)

總產量（克）	f
0.00- 1.99	87
2.00- 3.99	192
4.00- 5.99	128
6.00- 7.99	71
8.00- 9.99	12
10.00-11.99	7
12.00-13.99	3
	總數 500

求得常數如下：

$$\mu_2 = 1.3134$$

$$\mu_3 = 1.3033$$

$$\mu_4 = 7.0092$$

$$\beta_1 = .7497$$

$$\beta_2 = 4.0633$$

由上列常數求得 γ, p, a, 及對數 Y_0 各值如下：

$$\gamma = \frac{2.6268}{1.3033} = 2.0155$$

$$p = \frac{4}{.7497} - 1 = 4.3355$$

$$a = \frac{4.3355}{2.0155} = 2.1511$$

$$Y_0 = \frac{500}{2.1511} \quad \frac{4.3355^{5.3355}}{2.7182818^{4.3355}\Gamma(4.3355+1)}$$

若以 Y_0 用對數計算，則得：

$$\text{對數}Y_0 = 2.2774059$$

$$\text{平均數} = 4.0480$$

$$\text{衆數} = 4.0480 - \left(\frac{1}{2.0155} \times \text{組距}\right) = 3.0556$$

下列表格，表示求曲線第三種所需之各項列及計算法，x 爲自衆數至縱坐標之離差，以單位遞進，爲計算便利起見，求 y 之方程式又可寫作下式：

$$Y = \frac{Y_0}{a^p}(1+x)^p e^{-(x\gamma)}$$

求曲線第三種 Y 值所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
V	x	a+x	對數(a+x)	對數(a+x)p	xγ	對數e$^{-(x\gamma)}$	第5項+第7項+對數Y_0/a^p=對數Y	計算數 Y	觀察數 Y
1.0	-1.0278	1.1233	.0504958	.2189245	-2.0715	.8996411	1.9537215	89.89	87
3.0	-.0278	2.1233	.3270114	1.4177579	-.0560	.0243205	2.2772343	189.34	192
5.0	.9722	3.1233	.4946137	2.1443977	1.9595	$\bar{1}.1489999$	2.1285535	134.45	128
7.0	1.9722	4.1233	.6152449	2.6673943	3.9750	$\bar{2}.2736794$	1.7762296	59.74	71
9.0	2.9722	5.1233	.7095498	3.0762532	5.9905	$\bar{3}.3983588$	1.3097679	20.41	12
11.0	3.9722	6.1233	.7869855	3.4119756	8.0060	$\bar{4}.5230382$	.7701697	5.89	7
13.0	4.9722	7.1233	.8526812	3.6967993	10.0215	$\bar{5}.6477177$	.1796729	1.51	3

曲線第五種

曲線第五種之全距離，僅限於一端，其方程式為：

$$Y = Y_0 x^{-p} e^{-\gamma/x}$$

計算時用下列常數：

$$p = 4 + \frac{8+4\sqrt{4+\beta_1}}{\beta_1}$$

$$\gamma = (p-2)\sqrt{\mu_2(p-3)}$$

γ 之符號，與 μ_3 之符號相同。

$$Y_0 = \frac{N\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)}$$

$$\text{始點} = \text{均數} - \frac{\gamma}{p-2}$$

其始點卽在曲線之末端。

茲以燕麥之平均高度，引證曲線第五種之計算法(附燕麥高度表：)

燕麥平均高度 (公分)	f
45.00-49.99	2
50.00-54.99	9
55.00-59.99	21
60.00-64.99	34
65.00-69.99	97
70.00-74.99	123
75.00-79.99	89
80.00-84.99	24
85.00-89.99	0
90.00-94.99	1
	總數 400

求得常數如下：

$$\mu_2 = 1.9319$$

$$\mu_3 = -1.4316$$

$$\mu_4 = 13.1697$$

$$\beta_1 = .2843$$

$$\beta_2 = 3.5287$$

$$\kappa_2 = 1.1171$$

從上列常數，求得 p, γ, 及 Y_0 之值如下：

$$p = 4 + \frac{8+4\sqrt{4+.2843}}{.2843} = 61.2620$$

$$\gamma = (61.2620-2)\sqrt{1.9319(61.2620-3)} = -628.7283$$

$$Y_0 = \frac{(400)(-628.7283)^{61.2620-1}}{\Gamma(61.2620-1)}$$

若以對數，求 Y_0，則得：

對數 $Y_0 = 90.6358432$

平均數 $= 70.8375$

$$\text{始點} = 70.8375 - \left(\frac{-628.7283}{61.2620-2} \times \text{組距}\right) = 123.8840$$

下列表格，表示求曲線第五種所需之各項列及計算法 x 爲自始點至縱坐標之離差，其組間差以單位遞進。

求曲線第五種 Y 值所需各項列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
V	x	對數 x	$\frac{1}{\text{對數}x}$	$\left(\frac{1}{\text{對數}x}\right)^{p}$	$\frac{\text{對數}e\gamma}{x}$	$\frac{1}{\frac{\text{對數}e\gamma}{x}}$	第5項＋第7項＋對數 Y_0＝對數 Y	計算數 Y	觀察數 Y
47.5	−15.2768	1.1840324	8.8159676	$\overline{73}$.4638071	17.8737198	$\overline{18}$.1262802	.2259305	1.68	2
52.5	−14.2768	1.1546309	8.8453691	$\overline{71}$.2650018	19.1256614	$\overline{20}$.8743386	.7751836	5.96	9
57.5	−13.2768	1.1230934	8.8769066	$\overline{69}$.1970521	20.5661939	$\overline{21}$.4338061	1.2667014	18.48	21
62.5	−12.2768	1.0890852	8.9109148	$\overline{67}$.2804625	22.2414019	$\overline{23}$.7585981	1.6749038	47.30	34
67.5	−11.2768	1.0521859	8.9478141	$\overline{65}$.5409874	24.2137169	$\overline{25}$.7862831	1.9631137	91.86	97
72.5	−10.2768	1.0118579	8.9881421	$\overline{62}$.0115613	26.5698703	$\overline{27}$.4301297	2.0775342	119.55	123
77.5	− 9.2768	.9673982	9.0326018	$\overline{60}$.7352515	29.4339905	$\overline{30}$.5660095	1.9371042	86.52	89
82.5	− 8.2768	.9178625	9.0821375	$\overline{57}$.7699075	32.9901946	$\overline{33}$.0098054	1.4155561	26.03	24
87.5	− 7.2768	.8619404	9.1380596	$\overline{53}$.1958072	37.5238075	$\overline{38}$.4761925	.3078429	2.03	0
92.5	− 6.2768	.7977383	9.2022617	$\overline{49}$.1289563	43.5019823	$\overline{44}$.4980177	$\overline{2}$.2628172	.02	1

除上述數種曲線外，尚有一種亦極普通，蓋吾人在分析試驗結果時，常遇一種記錄，其開端之數目遞增極速，入後則漸慢。故其所成之曲線，開始彎曲較快，而入後則漸慢。此種曲線，雖類似拋物線，(parabola)而實非拋物線。若用對數曲線(logrithmic curve)來配合，實較第二第三級拋物線(second or third order parabola)為宜。對數曲線之式樣頗多。而本篇所介紹者，尤適於上列現象之用。今試以下列觀察數引證之：

y
5
7
9
10
11
12
13

首列三數，遞升甚速，以下四數，遞升較慢。

求對數曲線之公式為：

$$y = a + bx + c\ \text{對數}\ x$$

x 卽為始點至縱坐標之距離，a 係常數，b 及 c 則決定曲線之方向。公式中既有三個未知數，故當有三個方程式。茲列舉如下：

公式 I $\Sigma a + \Sigma(x)b + \Sigma(\text{對數}x)c = \Sigma y$

公式 II $\Sigma(x)a + \Sigma(x^2)b + \Sigma(x\text{對數}x)c = \Sigma(xy)$

公式 III $\Sigma(\text{對數}x)a + \Sigma(x\text{對數}x)b + \Sigma(\text{對數}x)^2c = \Sigma(y\text{對數}x)$

爲計算便利起見，可先排成以下之項列：

y a x xy x^2 (對數x) (x對數x) 對數x^2 (y對數x)

對數x，x對數 x，及對數 x^2 各項可從附錄表 II 中檢查而得。末項之值，係對數 x 與同行 y 之相乘積。各數求出後，須逐行相加。其步驟如下：

	y	a	x	xy	x^2	(對數x)	(x對數x)	對數x^2	(y對數x)
	5	a	1	5	1	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000
	7	a	2	14	4	.3010300	.6020600	.0906191	2.1072100
	9	a	3	27	9	.4771213	1.4313639	.2276447	4.2940917
	10	a	4	40	16	.6020600	2.4082400	.3624762	6.0206000
	11	a	5	55	25	.6989700	3.4948500	.4885591	7.6886700
	12	a	6	72	36	.7781513	4.6689078	.6055194	9.3378156
	13	a	7	91	49	.8450980	5.9156860	.7141906	10.9862740
總數	67	7	28	304	140	3.7024306	18.5211077	2.4890091	40.4346613

以各數代入方程式，即得：

公式 I　$7a+28b+3.7024306c=67$

公式 II　$28a+140b+18.5211077c=304$

公式 III　$3.7024306a+18.5211077b+2.4890091c=40.4346613$

求 c

公式 II　$28a+140b+18.5211077c=304$

公式 I×4　$28a+112b+14.8097224c=268$

相減　$28b+3.7113853c=36$ ……………………(1)

III×7	$25.9170142 + 129.6477539b + 17.4230637c = 283.0426291$
1×3.7024306	$25.9170142a + 103.6680568b + 13.7070923c = 248.0628502$
相減	$25.9796971b + 3.7159714c = 34.9797789 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$
(2)×28	$727.4315188b + 104.0219992c = 979.4338092$
(1)×25.9796971	$727.4315188b + 96.4206659c = 935.2690956$
相減	$7.6013333c = 44.1647136$
	$c = 5.81$

以之代入 (1) $28b + 21.5631 = 36$

$$28b = 14.4369$$

$$b = .5156$$

以 b 及 c 代入 1

$$7a + 14.4368 + 21.5111 = 67$$

$$7a = 31.0521$$

$$a = 4.4360$$

故本曲線之方程式爲

$$y = 4.4360 + .5156x + 5.81 \text{ 對數} x$$

以 x 及對數 x 之各值代入，卽得：

			計算y	觀察y
因	x_1	$4.4360+.5156+5.81(.0000000)=$	4.95	5
	x_2	$4.4360+1.0312+5.81(.3010300)=$	7.22	7
	x_3	$4.4360+1.5468+5.81(.4771213)=$	8.75	9
	x_4	$4.4360+2.0624+5.81(.6020600)=$	10.00	10
	x_5	$4.4360+2.5780+5.81(.6989700)=$	11.07	11
	x_6	$4.4360+3.0936+5.81(.7781513)=$	12.05	12
	x_7	$4.4360+3.6092+5.81(.8450980)=$	12.96	13

以此種對數曲線配合數值，有時較用簡單拋物線來配合爲合適。若用以配合肥料問題及作物生長速率等結果，尤爲適宜。對數曲線，與其他各種曲線相同，學者以之配合結果時，可將數種曲線相試探，而擇其最適合者用之。

第十一章

配合之適度

第十章曾敍述如何將各種曲線來配合各種不同之次數分配。在配合曲線時觀察數與計算數常不能完全吻合，故其吻合之程度，究竟如何，實有研究之必要。此種研究卽爲配合之適度研究或 x^2 測驗。其適合程度全憑理論曲線與實際曲線之吻合現象而定。配合適宜度或 x^2 測驗之用度頗廣，惟本章則僅介紹數個例題，以示 x^2 測驗在農業上之應用而已。

爲檢查便利起見，愛爾頓氏 (Elderton) 曾撰一機率表 (probability)，表中詳載各種適合現象之 P 値，根據 P 値，卽可知觀察數與計算數之適合程度。P 値之最高數爲 1.00，故配合至任何適合程度，P 値總不能大過百分之百。若用 χ^2 測驗而求得 P 値爲百分之七十五，卽可知觀察數與計算數之適合程度頗高。求 χ^2 之公式爲：

$$\chi^2=\Sigma\frac{(o-c)^2}{c}$$

o ＝觀察數　　c＝計算數

照上列公式，可知求 χ^2 之算法，係將各組之觀察數與計算數相較

自乘後，各以其計算數除之，其總和即爲 χ^2。

玆以第十章所載曲線第一種各值，來引證配合適宜度之計算法，其步驟載表 76。

表 76.

以曲線第一種之結果來示曲線配合適宜度之算法

觀察數 o	計算數 c	(o－c)	$(o-c)^2$	$\frac{(o-c)^2}{c}$
3	4.34	－1.34	1.7956	.414
50	46.57	3.43	11.7649	.253
106	105.54	.46	.2116	.002
109	115.52	－6.52	42.5104	.368
80	78.19	1.81	3.2761	.042
42	35.78	6.22	38.6884	1.081
7	11.29	－4.29	18.4041	1.630
2	2.39	－ .39	.1521	.064
1	.32	.68	.4624	1.445
				$\chi^2=5.299$

從愛爾頓表査得：

當 $n'=9$ 而 $\chi^2=5$ P＝.757576

$n'=9$ 而 $\chi^2=6$ P＝.647232

相差 .110344

$\chi^2=5.299$, $\chi^2=5$

則 .757576－(.110344×.299)＝.724583

故 P＝.725.

表中第一項爲各組之觀察數，第二項係計算數，第三項爲 o－c，即各組觀察數與計算數之差，第四項爲 $(o-c)^2$，即爲相較數之自乘方，此每組方數復以其同組之計算數除之，而列入第五項即末一項，將

此末項之各組數字相加，其總和卽爲 χ^2 求得本例題之 χ^2 等於 5.299。

求得 χ^2 值後，可從愛爾頓表檢查 P 值，此表載於皮爾生氏統計學家及生物統計學家適用表 (Pearson's Tables for Statisticians and Biometricians) 之一書內。表左載 χ^2 值，表之首行爲 n' 值，n' 代表組值，在費許氏所著研究用統計法 (Statistical Methods for Research Workers) 一書內，亦有一表，爲測驗配合適度之用。惟此表與 Elderton 之表排法不同，表內縱列各行爲 n 值，此 n 值代表自由度 (degree of freedom)，表之橫行頂格列 P 值，表內所註各數爲 χ^2 值。

若以本列題求得之 χ^2 值 5.299，查愛爾頓表，得 P 值爲 0.725，意卽純因偶然或樣品關係，此種小小差異，在百次試驗中，有發生七十二次之可能。換言之卽觀察數與計算數之差異極小，故堪稱合配。

P 值究竟大至何數，曲線始稱配合，想爲讀者所急欲知之問題。惟適合程度初難規定，故愛爾頓氏曾謂，確定配合 P 值，實爲不可能之事實。蓋全表僅能測量機率而已。

機偶 (odds) 之比爲 30:1 或 20:1，則適合之可能性小，故結果難稱圓滿，若機偶之比爲 10:1，則適合之可能性大，結果較稱滿意。究竟 P 值低至何數，則結果便算不可靠，而須去消，初無一定。費許氏曰，吾人所欲知者，非 P 之眞正價値，乃用 χ^2 測驗而求得 P 值後，可從 P 值之大小，推測觀察數之近理與否，有何疑竇與否。若 P 值在 0.1 與 0.9 之間，則成功之可能性較大，假定之理論與事實相去不遠，若 P 值在 0.02 之下，則假定之理論與事實相去甚遠。吾人雖以 P 值 = .05 之數爲適合點，惟學者對此不可過於固執，而遽視爲去捨之確定界線。而誤認

χ^2 稍高之値，爲理論完全與事實不符也。

總之吾等所測量者，乃全次數分配之觀察數與計算數之適合程度，而非局部的適合程度。故有時觀察曲線與計算曲線確甚符合，而 P 値則甚低。凡遇此種特殊現象，P 値之低大概由於 χ^2 値之高，而 χ^2 値之高則大概受一二特高特低組値之影響。若將此種可疑之組値與其附近各組相歸併，而使每組之次數常在十個以上，則結果必較圓滿。今試以本例題頭上二組併成一組，而使此組內共有 53 個次數，末三組併成一組，而使組內共有十個次數，歸併後之 χ^2 爲 3.494，P 爲 0.626。

若用費許氏表檢查 χ^2 之値，吾人須記明，表上所載之 n，係指自由度，而非組數。所謂自由度者，卽組數減去常數後之賸餘數。例如以 10 組之次數分配來配合一常態曲線，已決定之常數爲均數，標準差，及總數，此三個常數中每一數有一自由度，今已決定，故賸餘之自由度當爲 $10-3=7$ 惟若用愛爾頓表查 P 値，當用 n' 來求之，n' 卽爲自由度加 1，故 $n'=n+1$。

若所配合之次數僅有一個常數規定，（例若兩次數之總和相等）則自由度爲組數減一。例作曼特爾氏遺傳研究，若試驗結果分成四組。三組之値並不固定，故其自由度爲三。

求 χ^2 之 P 値，總以向費許氏(Fisher) 或 Elderton 表檢查之較妥。惟若此表不在手邊時，下列求 P 値之表，亦可應用。

表上第一項載各個自由度，第二及第三項載兩種 χ^2 値。第二項之 χ^2 表示可能性頗高，第三項 χ^2 表示可能性平常。凡 χ^2 等於或小於第二項所載之數目時，適合度高，比較結果頗相吻合。當 χ^2 大於第二項之

數目而等於或小於第三項之數目時，配合程度爲尙佳，換言之第二項 χ^2 值所得之 P 值高，第三項所得之 P 值較低。若 χ^2 大於第三項之數目，則所比較之結果卽爲不圓滿。換言之，卽觀察所得者，與理論所得者不相符合。

1 自由度 n	2 高機率之 χ^2 值	3 次高機率之 χ^2 值
1	.2	3.0
2	.7	4.7
3	1.4	6.3
4	2.2	7.8
5	3.0	9.3
6	3.8	10.7
7	4.7	12.0
8	5.5	13.4
9	6.4	14.7
10	7.3	16.0
11	8.1	17.3
12	9.0	18.6
13	9.9	19.8
14	10.8	21.1
15	11.7	22.3
16	12.6	23.6
17	13.5	24.8
12	14.4	26.0
19	15.3	27.2
20	16.3	28.4
21	17.2	29.6
22	18.1	30.9
23	19.0	32.0
24	19.9	33.1
25	20.9	34.5
26	21.8	35.5
27	22.7	36.7
28	23.6	38.0
29	24.6	39.0
30	25.6	40.4

若 n 大於 30,其結果可假定 $\sqrt{2\chi^2}$ 是循均數而作常態分配,此數與標準差爲 1 之常數 $\sqrt{2n-1}$ 相等。若差異在 2 以上則所得之 χ^2 值爲顯著.例似 $\chi^2=60.5$, $n=41$,則

$$\sqrt{2\chi^2}=\sqrt{2(60.5)}=11.00$$

$$\sqrt{2n-1}=\sqrt{2(41)-1}=9.00$$

相較 $11.00-9.00=2.00$ 若標準差爲 1,則成 2.0 ± 1.0

相較數 2.00 爲標準誤 (Standard error) 1.00 之兩倍,故差異跡近顯著。

曲線配合適宜度之應用在統計上,頗爲重要。有種次數分配與數種曲線皆相近似,學者頗難決定何種曲線最爲配合時,可將各種近似之曲線,一一算出,用配合適宜度方法來與觀察數相較,而將 P 值最高之曲線決爲中選。惟配合曲線頗費時間,故學者當酌量情形行之。若所配合之曲線極多,則爲計算省時起見,所得 P 不妨即以其 P 值較低者用之。惟若時間許可總以一一配合而選其最適當者用之。

配合適宜度之用處,不僅限於選定曲線型類,尚可用來比較兩種試樣是否來源於一種材料,或測驗材料,是否同質 (homogeneity)。此法在計算遺傳問題之質量性狀中,頗有用處。比較此種結果時所用之 χ^2 公式爲:

$$\chi^2=\left(\Sigma\frac{(f_A/N_A-f_B/N_B)^2}{f_A+f_B}\right)N_AN_B$$

f_A=A 分配, f_B=B 分配, N_A=A 組值總和, N_B=B 組值總和。其算法頗簡單詳見表 77。

表 77.

用曲線配合適宜度來比較兩種次數分配 *

1	2	3	4	5	6	7	8	9
組	f_A	f_B	f_A+f_B	f_A/N_A	f_B/N_B	$f_A/N_A-f_B/N_B$	$(f_A/N_A-f_B/N_B)^2$	$\frac{(f_A/N_A-f_B/N_B)^2}{f_A+f_B}$
9	3	1	4	.0476	.0143	.0333	.00110889	.0002772
10	8	5	13	.1270	.0714	.0556	.00309136	0002378
11	14	8	22	.2222	.1143	.1079	.01164241	.0005292
12	13	9	22	.2063	.1286	.0777	.00603729	.0002744
13	16	25	41	.2540	.3571	−.1031	.01062961	.0002593
14	8	20	28	.1270	.2857	−.1587	.02518569	.0008995
15	1	2	3	.0159	.0286	−.0127	.00016129	.0000538
	$N_A=63$	$N_B=70$						$\Sigma=.0025312$

$\chi^2=.0025312\times63\times70=11.1626$　　$P=.084082$

*愛末遜氏之試驗資料

本問題係研究玉蜀黍穗長之遺傳。表中第一項示各組之長度，以公分計。第二項及第三項爲兩個第三代後裔之次數分配，第四項記兩個分配之各組和數。第五第六項分記第一第二兩個分配，對於總和之百分率。第七項記第五項與第六項之各組相較數。第八項爲第七項之自乘方。第九項則爲自乘方被第四項之各值所除之答數。用此法所求得之 χ^3 爲 11.1626，共分七組，故自由度爲六，本問題之用意在決定此兩種次數分配是否相同若不同之程度確甚顯著，則可知此兩後裔之遺傳組織，實不相同。苟兩個次數分配之結果大致相同，則可知兩後裔之遺傳組織相同，而必來自一個親系。

今已求得 $\chi^2=11.1626$，由愛爾頓表求得 P 值如下：

若 $n'=7,\quad \chi^2=11\quad$ 則 $P=.088376$

$n'=7,\quad \chi^2=12\quad$ 則 $P=.061969$

相較 $.026407$

今 $\chi^2=11.1626$

$$P=.088376-(.026407\times.1626)=.084082$$

P 值僅爲 0.084，惟 P 值雖低，尚未低至顯著程度，故此兩種樣品，是否同質，尚難定斷。即根據此 P 值所決定之機偶亦僅 11 比 1，差異尚不顯著。今若根據均數及機誤來比較結果，則因均數未能表示全次數分配之現象，故結果便不相同。

B 組之均數 $=12.71\pm.11$

A 組之均數 $=11.94\pm.12$

相差 $0.77\pm.16$

相差與機誤之較爲 4.8，相差大於機誤幾至五倍，兩均數之差異甚爲顯著。故用兩種方法（χ^2 測驗及均數差異）來測驗同一例題之結果，而答語並不相同，例如表 77，根據 χ^2 測驗，差異並不顯著，而根據均數比較，則差異又顯著。此蓋由 χ^2 測驗乃依據全次數分配之整個現象而定，均數則僅爲次數之平均數而已，故不能代表全盤次數之整個現象。其測驗便不及 χ^2 之可靠。每有兩種次數分配，其均數並不相同，而次數分配之曲線狀態，則其實相同。同時亦有均數相同，而分配狀態並不相同。總之 χ^2 測驗之眞意義乃在比較分配之全部現象，故較以均數代表者爲週到。

配合適宜度之方法，尙可用來配合曼特爾之性狀分離研究。凡擬定一種說論來解釋試驗所得之結果時，可將理論比值與觀察比值分別求得，而並列表中。然後用 χ^2 測驗法，來比較理論與事實之適合程度。今以燕麥色澤遺傳之研究，來引證此法之應用。

穀之色澤	觀察數 o	計算數 c	(o−c)	$(o-c)^2$	$\frac{(o-c)^2}{c}$
黑色	230	231	−1	1	.0043
灰色	57	58	−1	1	.0172
黃色	21	19	2	4	.2105
					$\chi^2=.2320$

第一項所填者爲觀察數，第二項所填者爲根據理論而得之計算數。假定三數之比爲 12:3:1，則計算數即根據此比而算出。用上述方法求得 χ^2 爲 0.2320 凡 χ^2 值之小於 1 者，愛爾頓表未曾載入，故當在費許

氏表中求之。本例題共分為三組，故自由度為 2，費許氏表上之 n 係指自由度而非組數，故本例題之 n 當為 2。當 n=2，P=.90 時，χ^2=.211；當 P=.80 時，χ^2=.446。χ^2 值 .2320 之 P 值，當在 0.80 與 0.90 之間，故吻合之可能性頗高，此表示理論與事實相符合。

此可知配合適宜度用度頗廣，既可應用於曲線之配合，復可用作比較相類似之結果。吾等應用適宜度配合法時，對於結果之解釋，須十分留心。誠如上述，配合與否，並無一定之界線，究竟在於何種界線之上，始為合適，在何種界線之下，為不合適，初無規定。因吾人所比較者為整個的次數分配，其中一二組之特殊情形，或足以使全盤結果統受影響，而波及 χ^2 之大小，與 P 值之高低。如能將此種意義，常記腦中，則配合適宜度之應用，庶無流弊。

本章所論及者，僅為一二例題，略示配合適宜度之用法而已。至於詳細問題，則在 Fisher's 最近著作"Statistical Methods for Research Workers"一書中，論敘頗詳。學者可以之為參考。關於此類問題，皮爾生氏在 Biometrika 第 26 號中亦有詳細之敘述。

第十二章

小樣品分析與機率之應用

本書上半部所敘述之曲線分析，相關係數，及曲線配合等，皆爲大量試驗分析之用。惟吾人在研究農業及生物問題時，常因種種關係，祇能取樣試驗，就樣子所得結果，一以概百而已。近數年來，此種抽樣試驗之統計，漸爲學者所注意，其用法及可靠之限度，作者當於本篇及下篇詳細敍述。凡所引證之例題，雖大半取材於農藝研究之結果，惟其他農業或生物試驗，例如肥料試驗，營養試驗，病蟲害防治試驗等等，皆與所引證之問題大同小異，故讀者儘可觸類旁通，引證借用。

關於機誤之意義及常數之機誤公式，作者曾於第九章內作簡單之敍述。至於計算抽樣試驗之機誤，近數年來學者頗多新穎之貢獻，今當根據歷史，分別敍述。

巴珊兒氏彼得氏之公式 (Bessel's and Peter's Formulas) —— 巴珊兒氏及彼得氏之公式，爲計算小樣 small sample 機誤之老法。第九章曾約略述及，機誤之求法爲標準差乘 .6745 或± .6745σ。

當從眞實平均數求標準差時，其公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f D^2}{N}}$$

故單次機誤之公式，常爲 $\pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma f D^2}{N}}$，若所取材料未曾分組，則求單次機誤之公式爲：

$$\pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N}}$$

其實試驗數目之眞實均數，頗難求得，此點在第九章亦曾論及。惟因眞數之不易求得，故在求得均數或其他常數後，尙須求其機誤，此常數土機誤之値，即爲眞實常數之近似數。苟 N 値漸大，觀察差誤之平方和漸與眞實差誤之平方和相近。若 N 値小，則巳知差誤之平方總和未能與眞實差誤之平方總和相近似，故小樣試驗之巳知差誤平方總和，常較眞實差誤之平方總和爲小。

關於此種因小樣試驗而生之差誤，學者曾設法校正。惟經實地經驗及數理證明，$\frac{\Sigma D^2}{N}$ 旣能代表大樣試驗之眞實差誤之平方和，則以 $\frac{\Sigma D^2}{N-1}$ 代表小樣試驗之眞實差誤平方和，亦頗近似。巴珊兒氏曾根據此概數列出下列求小樣試驗機誤之公式：

$$P.\ E._s = \pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1}}$$

此公式與第九章所列公式之不同點，在乎前者用 N－1 爲分母，而後者則以 N 爲分母。查普通試驗之求平均機誤 probable error of the mean 公式爲 $\frac{\text{單次機誤}}{\sqrt{N}}$，故小樣試驗之平均機誤，亦爲 $\frac{\text{小樣單次機誤}}{\sqrt{N}}$。茲將求單次機誤與平均機誤之方法用下列例題引證之。表中所載者爲同品種小麥之十區產量。

表 78.

用巴珊兒氏及彼得氏方法計算機誤

度　量	離均差 D	D^2
38	0	0
40	2	4
40	2	4
42	4	16
39	1	1
35	−3	9
32	−6	36
28	−10	100
42	4	16
44	6	36
380	$\Sigma+D=38$	$\Sigma D^2=222$

均數＝38

巴珊兒氏公式：

$$P.E._s=\pm.6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1}}=\pm.6745\sqrt{\frac{222}{9}}=\pm3.35$$

$$P.E._m=\pm.6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N(N-1)}}=\pm.6745\sqrt{\frac{222}{90}}=\pm1.06$$

彼得氏公式：

$$P.E._s=\pm.8453\frac{\Sigma+D}{\sqrt{N(N-1)}}=\pm.8453\frac{38}{\sqrt{90}}=\pm3.39$$

$$P.E._M=\pm.8453\frac{\Sigma+D}{N\sqrt{N-1}}=\pm.8453\frac{38}{10\sqrt{9}}=\pm1.07$$

先用普通求均法將各組值相加，而以組數除之。再從均數求得各組之離均差 (deviation from the mean) D，記在第二項內。將 D 值按組平方之，而以其答數相加，卽爲 D^2 之總和。求得均數爲 38，D^2 總和爲 222。若以此數代入下列公式，則得單次機誤：

$$P.\ E._s = \pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1}}$$

$$P.\ E._s = \pm .6745\sqrt{\frac{222}{9}} = \pm 3.35$$

此數卽爲小樣單次機誤。在本試驗中此數卽爲每一產量之機誤。照第九章所述，觀察數之一半數目，當包括在均數加上或減去其機誤之範圍內。故 D 值內各數，當有一半數目小於機誤。此點雖對於小樣試驗，未能完全適合，惟大致則仍可用。今試數點表 78 之 D 項各值，則 D 值之在 3.5 內者，十組中確有五組，卽第 1，第 2，第 3，第 5，第 6，五組是。

若以已知各數代入巴珊兒氏之求平均機誤公式內，則得

$$P.\ E._M = \pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N(N-1)}}$$

$$= \pm .6745\sqrt{\frac{222}{10\times 9}} = \pm 1.06$$

若以單次機誤 3.35 以 N 方根除之答數亦相同。

$$P.\ E._M = \pm\frac{3.35}{\sqrt{10}} = \pm 1.06$$

總之本章所述之求機誤法，與九章所述之不同處，在前者以 N－1

爲分母，而後者則以 N 爲分母。凡取樣較小，差異之可能較大，今分母減小，則答數(卽機誤)可較大。以巴氏公式求機誤時，亦可逕從組值求出，先從產量一項，用普通法求得均數仍爲 38，再將每組組值或產量自乘，而後相加，得 $\Sigma V^2=14662$。以均數之平方數用組數乘之，得 14440，爲校正量。

從 ΣV^2 減去較正量，而以其較數以 $N-1$ 除之，去其方根而以 .6745 乘之，卽得單次機誤，其結果亦爲 ±3.35。

其公式爲　$P.E._s=\pm.6745\sqrt{\dfrac{\Sigma V^2-M^2N}{N-1}}$

ΣV^2 爲各組平方總和，M 爲均數，N 爲組數。以表 79 各數代入，得：

$$P.E._s=\pm.6745\sqrt{\frac{14662-14440}{9}}=\pm3.35$$

此機誤數與用前述之法所求得者相等。平均機誤亦可用各組自乘總和，而以下列公式求之：

$$P.E._M=\pm.6745\sqrt{\frac{\Sigma V^2-M^2N}{N(N-1)}}$$

以表 79 各數代入，得：

$$P.E._M=\pm.6745\sqrt{\frac{14662-14440}{90}}=\pm1.06$$

若用第五章所述之求標準差方法求單次機誤，其公式當爲：

$$P.E._s=\pm.6745\sqrt{\frac{N\Sigma V^2-(\Sigma V)^2}{N(N-1)}}$$

表 79.

從組值直接求機誤

測量 V	V^2
38	1444
40	1600
40	1600
42	1764
39	1521
35	1225
32	1024
28	784
42	1764
44	1936
總數380	$\Sigma V^2=14662$

均數=38

$M^2N=(38)^2\times 10=14440$

$$P.E._1=\pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma V^2-M^2N}{N-1}}$$

$$P.E._1=\pm .6745\sqrt{\frac{14662-14440}{9}}=\pm 3.35$$

$$P.E._M=\pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma V^2-M^2N}{N(N-1)}}$$

$$P.E._M=\pm .6745\sqrt{\frac{14662-14440}{90}}=\pm 1.06$$

用表 79 之數字，求得 ΣV^2 為 14662，$\Sigma V)^2$ 為 144400。N 為10，以之代入上列公式，得：

$$P.\ E._s = \pm .6745\sqrt{\frac{10(14662)-144400}{(10)(9)}} = \pm 3.35$$

若以 3.35 除 N 方根，即得平均機誤爲 ±1.06。

上述兩法之長處，在小數不必去掉，故結果較爲準確。若用巴珊兒氏法，則均數因去小數而不甚準確，離均差亦隨之而有差異，再將離差之小數去掉，不免稍有錯誤矣。或有對於上述方法，以數目大時，乘方較繁爲慮者。其實以計算機計算。便無問題矣。

彼得氏公式與巴珊兒氏公式不同處，在前者由離均差直接求機誤，而後者則由離均差自乘求機誤。彼得氏之單次機誤公式爲：

$$P.\ E._s = \pm .8453\frac{\Sigma + D}{\sqrt{N(N-1)}}$$

公式內之 +D 爲離均差相加時不計正負號而皆作正號之意。今將此公式以表 78 內諸數字計算之，均數及離均差業已求得，離均差之和 $\Sigma+D$ 爲 38，以之代入公式內，得

$$P.\ E._s = \pm .8453\frac{38}{\sqrt{90}} = \pm 3.39$$

彼得氏之求平均機誤公式爲：

$$P.\ E._M = \pm .8453\frac{\Sigma + D}{N\sqrt{N-1}}$$

若以表 78 各值代入則得：

$$P.\ E._M = \pm .8453\frac{38}{10\sqrt{9}} = \pm 1.07$$

彼得氏公式所用之常數爲 ±.8453，而巴珊兒氏所用者爲 ±.6745。

兩公式所得結果,大致相同,此因此兩公式之差異點,在一則用平均差 average deviation,一則用標準差 standard deviation,而平均差與標準差本有相互關係,其關係在第二章中,作者曾約略言之。凡在對稱分配中,平均差等於標準差之 0.7979,今巴珊兒氏由標準差求機誤之常數為 .6745,故彼得氏由均差求機誤之常數當為 .8453,試觀下列比例:

$$A.\ D.:S.\ D. = .7979:1$$

$$.7979:\ 1\ = .6745:x$$

$$x = .8453$$

故若用彼得氏公式 $\frac{\Sigma + D}{\sqrt{N(N-1)}}$ 之數,須以 .8453 乘之,始能將半數之個數,或曲線之半數,包括在均數±機偶之範圍內。

此兩法所得之結果常相類似,即在本例題所得者亦然,茲將用兩法所得結果,排列於第 80 表而比較之。

表 80.

用巴珊兒氏法求單次機誤及平均機誤與用彼得氏法求單次機誤及平均機誤之比較

單次機誤		平均機誤	
巴珊兒氏法	彼得氏法	巴珊兒氏法	彼得氏法
4.12	4.32	1.3	1.37
4.82	4.71	1.52	1.48
3.78	3.72	1.20	1.18
2.48	2.44	.78	.77
4.84	5.02	1.53	1.59
3.28	3.62	1.04	1.14
3.91	3.78	1.24	1.20
4.46	4.81	1.41	1.52
2.62	2.98	.83	.94
3.73	3.89	1.18	1.23
平均數 3.80	3.93	1.20	1.24

觀表 80 所示各種結果，可知用巴珊兒氏法或彼得氏法所得結果，相差極微，兩者所得結果之比為 1.00 至 1.03，若數目較大，其比約為 1.00 至 1.07。就準確而言，巴珊兒氏方法果較勝於彼得氏也。

附錄表 IV 及表 V 載 $\frac{.6745}{\sqrt{N-1}}$，$\frac{.6745}{\sqrt{N(N-1)}}$，$\frac{.8453}{\sqrt{N(N-1)}}$ 及 $\frac{.8453}{N(N-1)}$ 從 N 等於 1 至 N 等於 99 之各值，若知 N 值，卽可以表中查得之數乘 ΣD^2 而得巴珊兒氏公式之機誤，以表中數乘 $\Sigma+D$，卽得彼得氏公式之機誤。

差異之比較 Comparison of Differences——表 81 載兩種小麥品種之十區產量，今用此表之資料，示兩個平均機誤之比較。

品種 A 之產量與表 78 所載者相同，求得其均數與平均機誤為 38.00 ± 1.06，用同一方法求得品種 B 之均數及平均機誤為 34.00 ± 1.16，若以之代入第九章之機誤公式內，則得：

$$\text{P. E.}_{\text{相差}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \text{ 或 } \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \sqrt{(1.06)^2 + (1.16)^2} = 1.57$$

$$\text{品種A} = 38.00 \pm 1.06$$

$$\text{品種B} = 34.00 \pm 1.16$$

$$\text{差異} = 4.00 \pm 1.57$$

若欲決定兩品種間之差異是否顯著，可將相較數 4.00 被其機誤除之，而後求機偶 odds 卽得。求得 $\frac{4.00}{1.57} = 2.55$，$2.55 \times .6745 = 1.720$，從附錄表 VI，查得機偶為 10.70 : 1。若用附錄表 VII，機偶可直接查得，不必先以 .6745 乘之。照第九章所述，凡機偶大至 30 : 1，則差異為顯著，今品種 A 與品種 B 比較後之機偶，為 10.70 : 1，故差異為不

顯著。因 10.70 與 30 相差頗大，故可斷定其差異為不顯著。惟機偶大至 30 : 1 始稱顯著一語，亦僅為計算上便利而假定之界線而已。差異之顯著與否，初未能以簡單之數字表明之。故凡求得之機偶適在 30 : 1 之左右，則差異之顯著與否，未可憑數字而妄加論斷，其結果之是否顯著，須慎重考慮而後決定，蓋小數點去留之間，常能將機偶 29 : 1 與 30 : 1 相互更調，故 29 : 1 既不能絕對稱為不顯著，30 : 1 亦不能絕對稱為顯著。

表 81.

根據機誤比較兩品種之平均產量

品種 A	品種 B
38	37
40	37
40	40
42	40
39	32
35	30
32	31
28	22
42	36
44	35
均數 = 38.00	均數 = 34.00

品種A　38.00±1.06

品種B　34.00±1.10

相差　4.00±1.57

$$\frac{D}{P.E.}=\frac{4.00}{1.57}=2.55$$

機偶 10.70 : 1

其實比較 A 之機誤與 B 之機誤之公式，應寫作$\sqrt{A^2-2AB+B^2}$今簡作$\sqrt{A^2+B^2}$者，當於下列算法說明之。假定現有A與 B 兩品種之

產量記錄，令 D_A 代表 A 品種之離均差，D_B 代表 B 品種之離均差，D_{A-B} 為兩個離均差之差數，故

$$D_{A-B}=D_A-D_B$$

自乘則得 $D^2_{A-B}=D^2_A-2D_AD_B+D^2_B$

各組之總和

$$\Sigma D^2_{A-B}=\Sigma D^2_A-\Sigma 2D_AD_B+\Sigma D^2_B$$

以 N 除之 $\frac{\Sigma D^2_{A-B}}{N}=\frac{\Sigma D^2_A}{N}-\frac{\Sigma 2D_AD_B}{N}+\frac{\Sigma D^2_B}{N}$

因 $\frac{\Sigma D^2_{A-B}}{N}$，$\frac{\Sigma D^2_A}{N}$，$\frac{\Sigma D^2_B}{N}$ 等皆為標準差之平方，

故 $\frac{\Sigma D^2_{A-B}}{N}=\sigma^2_{A-B}$，$\frac{\Sigma D^2_A}{N}=\sigma^2_A$，$\frac{\Sigma D^2_B}{N}=\sigma^2_B$，

而 $\frac{\Sigma 2D_AD_B}{N}$ 為兩倍平均離中差之積，

又在相關係數 $r=\frac{\Sigma D_AD_B}{N\sigma_A\sigma_B}$，$r\sigma_A\sigma_B=\frac{\Sigma D_AD_B}{N}$ 故

$$\frac{\Sigma 2D_AD_B}{N}=2r(\sigma_A\sigma_B)$$

以之代入上列公式　$D^2_{A-B}=D^2_A+D^2_B-2D_AD_B$

成為　$\sigma^2_{A-B}=\sigma^2_A+\sigma^2_B-2r(\sigma_A\sigma_B)$

此為比較兩個機誤之完全公式，此公式與上述不完全公式之不同點，在前者除去兩數之相關，而後者則否。前者算法較簡單，後者較繁，惟若兩品種間確有相互影響，則用後式自較前式為可靠。蓋當相關數為正，所得機誤當較相關數為負時為小。換言之，即當相關為負時，吾等乃在減去一負的數目，減一負的相關，在實際上即增一相關之數，故求得

之標準差及機誤皆較大。

試驗結果之發生有相互關係，大概由於外界因子之相互作用，對於兩種試驗起同樣影響之所致。前述例題，係兩種小麥品種，各重複種植十區之產量，所種地之土壤肥力不同，故品種 A 及品種 B 之種在地之甲端者，其產量或較乙端爲佳。試驗產量記錄，兩品種之產量確有同起同落之現象，究竟兩品種間之相互關係，影響於兩者之差異，至如何程度，可用求機誤差異之完全公式 $\sigma^2_{A-B}=\sigma^2_A+\sigma^2_B-2r.\sigma_A\sigma_B$）求得其結果而知之。表中 $D^2_A=\sigma^2_A$ 爲 A 之各組離均差自乘相加，除以組數 10 之商。A 之各組離均差平方=222　故 $D^2B=\sigma^2_B=\frac{222}{10}=22.2$。用同一方法求得 B 之各組離均差平方總和爲 268，故 $D^2_A=26.8$。表 82 D_AD_B 項下其總和爲 204，以組數 10 除之，得 20.4。今以諸數代入上列公式 $\sigma^2_{A-B}=\sigma^2_A+\sigma^2_B-2r(\sigma_A\sigma_B)$

$$=22.2+26.8-2(20.4)$$

$$=49.0-40.8=8.2$$

$$\sigma_{A-B}=\sqrt{8.2000}$$

$$=2.86$$

2.86 係將相關影響去消後之 A 與 B 之相較標準差，相較數之平均機誤、可用下列公式求得之。

$$\pm.6745\frac{2.86}{\sqrt{N-1}}=\pm.643$$

相較數之機誤，亦可用下列公式求得之。

$$\Sigma D^2_{A-B}=\Sigma D^2_A+\Sigma D^2_B-\Sigma 2D_AD_B$$

將表 82 之各值代入上列公式。得：

表 82.

去消相互關係後求機誤平均差之方法

品種 A	品種 B	D_A	D^2_A	D_B	D^2_B	D_AD_B	A－B	D_{A-B}	D^2_{A-B}
38	37	0	0	3	9	0	1	-3	9
40	37	2	4	3	9	6	3	-1	1
40	40	2	4	6	36	12	0	-4	16
42	40	4	16	6	36	24	2	-2	4
39	32	1	1	-2	4	-2	7	3	9
35	30	-3	9	-4	16	12	5	1	1
32	31	-6	36	-3	9	18	1	-3	9
28	22	-10	100	-12	144	120	6	2	4
42	36	4	16	2	4	8	6	2	4
44	35	6	36	1	1	6	9	5	25
總數 380	340		222		268	204	40		82
以N (10) 除之 38	34		22.2		26.8	20.4	4		8.2000

$\sigma^2_{A-B}=\sigma^2_A+\sigma^2_B-2r(\sigma_A\sigma_B)=22.2+26.8-2(20.4)=49.0-40.8=8.2$

$\sigma_{A-B}=\sqrt{8.2000}=2.86 \qquad P.E._{A-B}=\pm.6745\frac{2.86}{\sqrt{N-1}}=\pm.643$

巴氏公式

$P.E._M=\pm.6745\sqrt{\frac{\Sigma I^2}{N(N-1)}}=\pm.6745\sqrt{\frac{82}{90}}=\pm.6745\sqrt{.911111}=\pm.6745\times.955=\pm.644$

$$\Sigma D^2_{A-B}=222+268-2(204)=82$$

82 係 ΣD^2_{A-B} 數，若以之代入相較數之平均機誤公式中，

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma D^2_{A-B}}{N(N-1)}}=\pm.6745\sqrt{\frac{82}{90}}=\pm.644$$

.644 與 .643 相差 .001 者，由於小數點之去捨所致。

上面所得之機誤，係將相關數除去後之機誤。此可知相關係數爲何，可以不必求出，祇要用上錄公式，設法除去便好。

今以除去相關數而得之機誤.644，與未除去相關數而以$\sqrt{E_1^2+E_2^2}$之簡法所求得之機誤 1.57 相比較，便知何法爲可靠。若將品種 A 產量平均數 38 英斗，與品種 B 產量平均數 34 英斗相比較，則兩者相差 4 英斗，以此數被機誤 0.64（小數點讀至二位止）除之，得$\frac{D}{P.E.}$之比爲 6.25。從附錄表 VI 求得機偶爲 40,000 : 1，若用簡法求得之機誤 1.57 除 4，則得$\frac{D}{P.E.}$之比或機偶爲 10.70 : 1。此證明除去相互關係後，A 品種與 B 品種間之差異，頗爲顯著。

上述完全公式之目的，在除去相關數，惟相關數之除去，亦可用較簡單之方法求得之。其法卽如表 82 之 A 與 B 分組相較，而將其較數列入 A－B 之一項內，相加時須注意其正負號，負則消去，正則相加，庶不致誤。A－B 之總和求得後，以組數 N 除之，卽得 A－B 平均數，再將各組離均差一一求得，而列入 D_{A-B} 之一項內。以 D_{A-B} 各値一一乘方而後相加，卽得 ΣD^2_{A-B}，此數與用長法所求得之 ΣD^2_{A-B} 相等。以此數代入巴珊兒氏公式，卽得平均機誤，此法較長法爲簡。

表 82 之 D_{A-B} 實等於 D_A-D_B，可用下例證明之。例如第一組組値 $D_A=0$，$D_B=3$，則 $D_A-D_B=0-3=-3$，而表上第九項 D_{A-B}

亦爲 -3。又第二組 $D_A=2$，$D_B=3$，$D_A-D_B=2-3=-1$，而表上第九項之 D_{A-B} 亦爲 -1。其他各組，若一一相較，答數正相同。

若將幾個同樣試驗歸併，而以機誤比較其差異，則另有一種算法。例有 A B 兩個品種之十區試驗產量記錄：

A＝66.6 英斗

B＝61.3 英斗

A 產量高於 B 爲 5.3 英斗。

從幾次試驗之結果，知同樣試驗之單次機誤爲 12%，今以此機誤比較本試驗之結果，其法如下：

N 次數之平均機誤爲 $\frac{P.E.}{\sqrt{N}}$，本試驗有十區，故其平均機誤當爲 $\frac{12}{\sqrt{10}}=3.80\%$。意即每一品種之平均機誤爲其平均數之百分之 3.80，若求兩品種間之機誤的差異，卽得 $3.80\times\sqrt{2}=5.37\%$。因機誤皆以百分率爲單位，爲便於比較起見，A 與 B 之差異 5.3 亦化成百分率，法卽以 B 之產量 61.3 除 5.3 乘 100 得 8.65%。D/P.E. 之比爲 $\frac{8.65\%}{5.37\%}=1.61$，從附錄查得機偶爲 3：1，是品種 A 與品種 B 之差異爲不顯著。

今以此試驗重複舉行而得每品種九區之平均產量爲：

A＝75.00　英斗

B＝69.40　英斗

A 比 B 多 5.60　英斗

$D=5.6/69.40\times100=8.07\%$　A 比 B 所多產量之百分率，用同一方法求得，兩品種間的機誤之差異爲 5.66。

$$P.\ E.\ 相差 = 12/\sqrt{9} \times \sqrt{2} = 5.66 \cdots\cdots 機誤之差異百分率$$

$$D/P.E.\ 相差 = \frac{8.07}{5.66} = <2\ 機偶極小，差異爲不顯著。$$

若將第一第二兩個試驗，合併而比較之，則得第一試驗 A 比 B 多 8.65%，N = 10，第二試驗 A 比 B 多 8.07%，N = 9。兩試驗結果之加權平均數爲：

$$\begin{array}{lr} 8.65 \times 10 = & 86.50 \\ 8.07 \times \ 9 = & 72.63 \\ \hline \text{相加} \quad 19 = & 159.13 \end{array}$$

求得兩試驗結果 A 比 B 平均高 $\frac{159.13}{19} \times 100 = 8.38\%$，

因單次機誤百分率 $= 12\%$，故 19 次平均機誤百分率 $= \frac{12}{\sqrt{19}} = 2.75\%$，

兩個機誤的差異百分率 $= 2.75\sqrt{2} = 3.89 = P.\ E.$ 相差，

$D/P.\ E.$ 相差 $= \frac{8.38}{3.89} = 2.15$。

查得機偶爲 5.8 : 1，此機偶較之上列任何試驗，分開求得者爲略大。惟 A 是否大於 B，尙無充分證據足以決定之。今將此試驗重行舉行，而得每品種之八區產量爲：

$$A = 28.8\ 英斗$$

$$B = 24.8\ 英斗$$

$$A大於B = 4.0\ 英斗$$

$$4.0/24.8 \times 100 = 16.13\% \cdots\cdots\cdots D$$

$$12/\sqrt{8}\times\sqrt{2}=6.00\%\cdots\cdots\text{P. E. 相差}$$

$$\frac{16.13}{6.00}=2.69\cdots\cdots\text{D/P. E. 相差}$$

機偶＝13.58：1 差異爲不顯著。

茲將三個試驗結果，歸併而求得其加權百分率及機誤如下：

$$8.65\times10=86.50$$

$$8.07\times9=72.63$$

$$16.13\times8=129.04$$

相加　$27=288.17$

求得三試驗結果之加權平均增加百分數爲 10.67%

$$288.17/27\times100=10.67\%$$

27 次平均機誤之兩數相差百分數爲 3.27%

$$12/\sqrt{27}\times\sqrt{2}=3.27\%$$

$$\text{D/P. E. 相差}=\frac{10.67}{3.27}=3.26$$

機偶大於 34：1，A 產量高出於 B 是顯著的。

觀於上舉例題可知當單獨試驗不能決定顯著之差異時，可將同樣試驗連續舉行數次，而將其結果歸併比較，則可得確定之差異。例若A果勝於 B，則因每次試驗 A 總比 B 多，故數次試驗歸併後之差異，自較單獨差異爲大。若在三個試驗中，有一次 A 之產量比 B 少，則歸併比較時，A 超出 B 之數，當減小，而差異便不顯著。

今再舉一例以示機誤之應用，若播種量爲 4 配克 pecks，在六個種籽量試驗中，得平均產量爲 16.8 英斗，若播種量爲 7 配克，其平均產量爲 20.80 英斗，求得產量差異爲 4.00 英斗，其百分數爲 23.81%。

$$20.80-16.80=4.00 \text{ 英斗}$$

$$4/16.8\times100=23.81\%$$

已知普通單次試驗之機誤爲 8%，

故兩個機誤之相較百分數爲 $8/\sqrt{6}\times\sqrt{2}=4.61\%$

D/P.E. 相差$=\dfrac{23.81}{4.61}=5.16$

此數之機偶大於 30：1，故 7 配克播種量所穫之產量，高於 4 配克所穫之產量，其差異爲顯著的。

惟在解決此項問題時，宜注目於盡將差異。用 7 配克種籽時，收穫產量果增加 4 英斗，惟播種量亦較用 4 配克時多用 3 配克。此數應當除去，始爲公允。3 配克等於$\frac{3}{4}$英斗，亦卽爲 0.75 英斗。將增加產量 4 英斗中，減去此多用之種籽量 0.75 英斗，則得 $4.00-0.75=3.25$ 英斗。再將此淨增之產量變成百分數，則得 $3.25/16.8\times100=19.35\%$。若以此數求相較比則得 4.20。

$$\text{D/P.E.相差}=\frac{19.35}{4.61}=4.20$$

機偶爲 215：1，此數仍極高，故差異仍爲顯著。凡計算此種試驗，以淨將差異來比較爲宜

機偶之檢討 D.scussion of Odds——普通求機偶時，常假定某數高於均數及低於均數之機會常相同。其實有數種試驗其結果偏重於一個方向，例有 A 及 B 兩小麥品種產量比較試驗，品種 A 之產量常高出於品種 B 之產量，故在比較結果時，A 之離中差與 B 之離中差相較，乃集中於正方向，而無負方向者。附錄表 VI 之機率表內各數，乃根據離中差是正負機會相等而列，故若遇上述例題便宜修改而用，蓋上述例題之

離中差是完全爲正，最線內一半面積，已固定，若圖 31 所示者是。

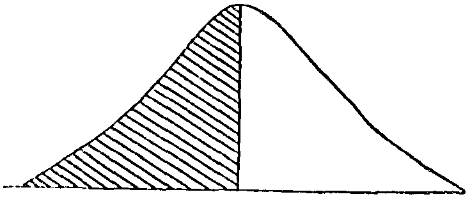


圖 31　圖示包括單方向離中差之曲線

當離中差集中於一個方向時，由機率表求機偶時，須用下列步驟。吾人已假定曲線之全面積爲 100,000，其半面積當爲 50,000。從表中求得$\frac{x}{\sigma}=.60$之值爲 22575，因一半面積或 50,000，已爲固定者，故須加在求得之面積上，而成爲 72575。

普通機率表皆依據一方向而定，例如皮爾生氏之表 II 卽是。故若以 50000 之數加在附錄表 VI 之各值上，答數當與皮爾生氏表所載者相同。惟表 VI 小數讀至五位止，而皮爾生表則以面積爲 1，小數點多讀幾位。

當$\frac{D}{P.E.}$之比爲 1，而以 .6745 之常數乘之，從機率表上求得面積爲 75000，如圖 32。

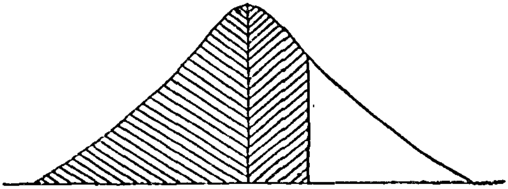


圖 32　圖示包括單方向離均差（離均差＝1 P. E.）之曲線面積

若將總面積 100000 減去 75000，得 25000。75000 與 25000 之比，爲 3：1，此卽爲機偶。

若離中差之方向爲可左可右，則$\frac{D}{P.E.}$之比爲 1 時，機偶爲 1:1，若離中差之方向爲一邊的，則機偶爲 3：1，玆將集中一個方向之離中差的機偶算出，如表 83。

表 83.

離差單方向時之機偶表

離均差等於機誤之倍數	兩個機誤之相差	純係機會所致之機偶
1.00	1.41	3.0:1
1.25	1.77	4.0:1
1.50	2.12	5.4:1
1.75	2.47	7.4:1
2.00	2.83	10.3:1
2.20	3.11	13.5:1
2.40	3.39	18.0:1
2.60	3.68	24.2:1
2.80	3.96	32.0:1
3.00	4.24	45.5:1
3.20	4.52	63.7:1
3.40	4.81	90.6:1
3.60	5.00	130.8:1
3.80	5.37	191.7:1
4.00	5.66	285.5:1
4.50	6.36	832.3:1
5.00	7.07	263 .6:1
5.50	7.[illegible]3	9999.0:1
6.00	8.48	33332.3:1

表 83 所列各數，僅適用於單方向差異之結果。例如上述肥料試驗

施肥與不施肥之比較,其差異當然爲單向的。故可從上表檢查機偶。若比較兩種不同肥料對於小麥產量之影響,則試驗差異有正有負,故上表便不合用。旣未能預知其離中差是正是負,故以查閱雙向機偶表爲妥。同一$\frac{D}{P.E.}$之比,從單向 one direction 表上所查得之機偶,較雙方表上所查得者爲大。例如$\frac{D}{P.E.}$之比爲2,單向表上查得機偶爲10.3 : 1,雙向 both direction 表則僅爲 4.64 : 1。故爲妥善計,若不能決定所比較之結果爲何種方向,則以用雙向表查機偶爲宜。若經數次試驗,有一種處理或品種,常佔優勝,則以用單向表爲妥。

觀察次數之決定 To determine the Required Number of Observations——試驗由多少次數,或多少區集, plot 始可達到準確程度,可從平均機誤之公式$\frac{P.E.}{\sqrt{N}}$反求出來。例似預知單次機誤百分數爲百分之十二,則重複試驗九次時,其平均機誤當爲$\frac{12}{\sqrt{9}}=4\%$。若欲將平均機誤減至百分之三,則區數宜用多少?可將上列機誤百分數12%代入求平均機誤百分數之公式$\frac{P.E.\%}{\sqrt{N}}$,得

$$\frac{12\%}{\sqrt{N}}=3\%$$

$$12=3\sqrt{N}$$

移項而自乘之　$$9N=144$$

$$N=16$$ 小區。

苟試驗環境不變,則雖區數加多,單次機誤仍不受影響。惟平均機誤則隨小區數之多少而有增減。小區增至 16 區時,平均機誤可減至 3%。

今再舉一例以明用單次機誤反求試驗次數之算法。上述兩個小麥品種比較試驗之例題中，第一次試驗之結果為：

品種A之平均產量＝66.6英斗

品種B之平均產量＝61.3英斗

故品種A比品種B高 5.3 英斗。照第一試驗看來，A比B高 8.65%，故差異並不顯著。今試求究竟須試驗至若干次數，或重複種多少小區，則A與B之產量方能得顯著之差異。今已知單次機誤為 12%，產量差異為8.65%，欲求差異之顯著機偶，須為 30：1，從表 74 查得機偶 31.4:1 時，$\frac{D}{P.E.}$差異之比為 4.52。此可知當 D/P.E. 之比為 4.52，則差異為顯著。

$$\frac{P.E.\%}{\sqrt{N}}=\frac{D\%}{\text{機偶為}30:1\text{時之}D/P.E.}$$

以已知數代入上列公式

$$\frac{12}{\sqrt{N}}=\frac{8.65}{4.52}$$

$$12=1.91\sqrt{N}$$

移項自乘　$3.65N=144$　　$\therefore N=39.45$

此表示根據一次試驗結果，若試驗環境無變動，則重複試驗至四十次，始能將 A B 之差異顯著表現。惟若將第一，二，三，三回試驗歸併計算，則A品種高於B品種不僅為 8.65%，而為 16.13%，故重複試驗至 27 次，卽能將差異表現。

下列之例題為飼料試驗問題，亦可用機誤分析來比較之。本例題每一處理用牲畜 4 口，每日平均增加重量及其機誤詳列於下表：

組	飼料	每日平均增加重量及機誤
I	苜蓿及玉米屑	2.20±.05
II	玉米屑	2.32±.06
III	甜苜蓿及玉米屑	2.45±.18
IV	牧草及玉米屑	2.49±.05

此試驗目的在比較基本飼料玉米屑，加上各種牧草之效用。第二組之牲畜飼料完全爲基本飼料玉米屑，第一，第三及第四組之三組，則在玉米屑外，加以牧草。今以第四組與第二組相比較。

組 IV　2.49±.05

組 II　2.32±.06

組 IV 大於組 II　.17±.08

$$D/P.E.=\frac{0.17}{0.08}=2.12$$ 差異並不顯著。

又第一組與第三組若與第二組相較，其差異亦爲不顯著。

吾等所欲決定者，爲試驗時宜用牲畜若干，方可辨別牧草之有效與否。原例題中雖僅有四組記錄，惟爲易於計算計，今再加上六組記錄，共成 10 組。每日每一試驗之平均增重量爲 22.35，每一組有牲畜 4 口，故若以每組之平均機誤以$\sqrt{4}$乘之，卽得每一牲畜之單次機誤。10 組共得單次機誤 18.8，每次平均則爲 1.88，每日增加重量爲 22.35，故 $\frac{1.88}{22.35}\times 100=8.41\%$，卽爲每一牲畜之單次機誤百分數。

再將組 IV 大於組 II 之數亦用百分數表示之則成：

$$\frac{2.49-2.32}{2.32}=\frac{0.17}{2.32},\quad \frac{0.\ 7}{2.32}\times 100=7.33\%\cdots\cdots\cdots D$$

假定所需要之機偶爲 30：1，則D/P. E.差異之比須爲 4.52。

$$\frac{P.E._1\%}{\sqrt{N}}=\frac{D\%}{\text{機偶爲}30:1\text{時之}D/P.E.}$$

$$\frac{8.41}{\sqrt{N}}=\frac{7.33}{4.52}$$

$$8.41=1.62\sqrt{N}$$

移項及自乘 $2.62N=70.73$

$$N=27.00$$

此表示欲求一 7.33% 之差異，每組須用牲畜 27。而此 7.33% 之差異，實極微小，在尋常環境下，此種微小之差異，頗難辨別。故若少用幾個牲畜，而多做數次試驗，將其結果歸併而比較之，差異較爲顯著，容易辨別。

凡計算用多少觀察數目方能測量差異時，須以不變更其所測量之差異百分數，及其單次機誤爲原則。若在特殊情形下，單次機誤須減小，而差異百分數仍須照舊，則所需區數便須加多而不與計算所得者相同。需要增加觀察數目時，若將每區面積增加，則單次機誤亦隨之而增，此由於面積既放大，所佔地方較多，若未設法避免土壤差異，則機誤必較大。

在用上列公式決定區數或觀察數時，以照計算所得之數目，多用幾區爲上。如上例小麥品種比較試驗計算所得爲 40 小區，則實際試驗時，不妨用 45 小區，其結果較爲可靠。

此幾十次之重複試驗，是否須在一年或同一環境中舉行，確成一問題。由數學的立場而言，在公式上初無必須一年舉行之必要。惟實地經

驗，曾示人以不同年份或不同環境易發生不同影響。故在數理上雖無同在一個情形下舉行之規定，而在實地試驗上則苟無困難，當以一年舉行為宜。若一年舉行為不可能，而須分作二三年試驗者，則每年種十六區，分三年種完，較每年種植四五區，而需多年種完者為佳。總之本公式之應用，乃依據所舉行之試驗，係在同一環境中舉行為原則。雖天然變動，時所難免，惟即此變動，亦將以大量試驗數目來減去或除去之。

上列例題係根據單次機誤而求$\frac{D}{P.E.}$差異之比。今若改用差異之機誤，則算法略有不同。A 與 B 品種比較試驗之單次機誤為 12%，故差異機誤百分數為：

$$12\sqrt{2}=16.97\%$$

因現所用者為差異機誤，而非單次機誤，故查表 74 時，須查第一項而非第二項。第一項較機偶為 31.4：1 時，比值為 3.2。今以差異的機誤及因子 factor)3.2 代入下列公式：

$$\frac{16.97}{\sqrt{N}}=\frac{8.65}{3.2}$$

$$16.97=2.70\sqrt{N}$$

移項及自乘　$7.29N=287.98$

$$N=\ 39.50$$

求得N次數，與上法用單次機誤所得者相同。

總之用此公式求N時，凡以單次機誤為分子，則須查表 74 第二項，若以差異的機誤為分子，則須查表 74 第一項，不可混亂。

若所舉行之試驗，甲品種或甲處理確能常勝於乙，則表 83 之單向

機偶表亦屬可用。惟雙向機偶表所求得之次數較多，離中差結果較爲可靠，故無論爲雙向抑單向皆可通用。

比較結果之另一法（Othor Methods of Comparing Results）——今試回憶表 82 所舉之例題，已去相關與未去相關時之機偶，完全兩樣。未去相關時，A與B之差異極小，已去相關後，機偶爲 40,000 : 1，此表示經幾次重複試驗後，A 確比 B 好，而此種差異並非出於偶然chance），確是兩種產量能力之差。

其實去相關後機偶大至如此程度，結果是否可靠，確屬疑問。並查此種機偶，乃根據常態機率表 probability table 而得，蓋吾等曾假定其標準是確切明顯者。惟考諸實際經驗，則小樣試驗之標準差，頗難確定，僅相知其大概而已。因確實標準差之不易覓得，故史蒂傾脫氏曾另以一字母 "S" 來代表小樣試驗標準差之估計量。S 之值極小且總勿與標準差 σ 相等。σ 果可循常態曲線而左右分佈，惟 S 則未必盡然，故 S 值之從小樣得來者，亦難用普通機率表來檢查之。史蒂傾脫氏對此問題，研究有年，而於隨意取樣中之 S 或 S^2 之分佈，尤爲注意。根據研究所得，彼曾另列一種機率值，來解釋小樣試驗之結果。

用史蒂傾脫氏之機率值來解釋小樣試樣之結果時，宜先求得平均數及標準差，而後決定均數與標準差之比。此比史蒂傾脫氏名之曰 Z 值。根據 Z 值及 N 次數，即可從史蒂傾脫氏之機率表求機率。機率求得後，機偶可用普通方法求得之。機偶之大小指示均數之差異。是由於偶然，抑由於特殊因子之影響。若機偶頗小，則知差異之發生，純屬偶然。若機偶頗大，則知差異之發生，必非完全偶然，品種間或處理間。必與有不同

之影響。史蒂頓脫氏所訂定之機率表，對於生物研究及農藝問題，極為有用。在比較A與B兩品種或處理時，可成對比較而計算之。惟此成對相較法，非史蒂頓脫氏所創舉，故不能認為史蒂頓脫氏方法之一部份。

今以表82之資料作例，用對比法逐步算出，詳見表84。(314頁)

其算法係將A之各組產量，與B之各組產量依次排列，成為第一第二兩項。同列之A值與同列之B值相減，而將其相較數寫於 A－B 或D之一項內。將諸列之D值相加，而得其總和為 40，以 10 除之，得D平均數為 4.00。第三步則自D項減去平均數 4.00，將其相較寫於 D_{A-B} 之一項內。第四步則以 D_{A-B} 逐列自乘，而將其乘積寫在D^2_{A-B}一項內。諸列之 D^2_{A-B} 相加，而得 D^2_{A-B} 之總和為 82。以10除之，得 D^2_{A-B} 平均數 8.2，若以 8.2 開方，則得 2.86，此數即為標準差σ。

$$Z=\frac{M}{\sigma}=\frac{4.00}{2.86}=1.40$$

從附錄表 VIII 之學生氏表查得

N＝10，　Z＝1.40，　機偶＝908：1

從Z值所查得之機偶，雖較從普通機率表查得者為低，惟其值仍高，足以表示差異之顯著。若取樣之數目增加，則從史蒂頓脫表所求得之值與從普通機率表所求得者頗相類似。凡N值大於 30，普通機率表略經變通，亦可應用。例有兩種小麥品種，每種重複種 30 區，所求之平均差異D為 30.9667，而標準差為 57.7878。史蒂頓脫氏表上之 N 值皆小於 30，惟為比較計，今用下法先求得新標準差而後相比：

$$\frac{57.7878}{\sqrt{30-3}}=11.1212,\qquad \frac{30.9667}{11.1212}=2.\ldots$$

表 84.

用史蒂頓脫氏方法來計算兩種穀類之產量差異

品種 A	品種 B	A－B或 D	D_{A-B}	D^2_{A-B}
38	37	1	−3	9
40	37	3	−1	1
40	40	0	−4	16
42	40	2	−2	4
39	32	7	3	9
35	30	5	1	1
32	31	1	−3	9
28	22	6	2	4
42	36	6	2	4
44	35	9	5	25
		10)40		10) 82
		均數＝4.00		8.2000
				$\sigma=\sqrt{8.2000}=2.86$

$$Z=\frac{M}{\sigma}=\frac{4.00}{2.86}=2.40$$

N＝10 機偶＝908：1

若查普通機率表，則機偶爲 367：1（附錄表 VI）。若從史蒂頓脫氏表則得機偶爲 242：1。從普通表查得之機偶較從史蒂頓脫氏表所查得者爲大，惟相差有幾。故N大於 30，無論何表，其機偶皆足以表示試驗差異之顯著與否。

表 85.

用史蒂頓脫氏方法來計算兩種播種量之結果差異

每英畝用9配克 A	每英畝用6配克 B	A－B	D_{A-B}	D^2_{A-B}
21.6	19.9	1.7	.6	.36
25.7	23.6	2.1	1.0	1.00
38.6	35.2	3.4	2.3	5.29
16.8	14.6	2.2	1.1	1.21
31.8	32.2	－.4	－1.5	2.25
41.4	41.0	.4	－.7	.49
33.5	35.4	－1.9	－3.0	9.00
		7)7.5		7)19.60
		均數＝1.1		2.80

$$\sigma=\sqrt{2.80}=1.7$$

$$Z=\frac{1.1}{1.7}=.65$$

N＝7　機偶近於 11：1

今再以小麥播種率之試驗，以引證學生法之用度。求得用九配克 peck 所穫之產量比用六配克所用之產量平均差異為 1.1，標準差為1.7，Z為 .65。詳見表 85。從表 VIII 查得N等於7時，機偶為 11:1，差異為不顯著。就實際而言，用 9 配克之播種量，較用 6 配克者實多用 .75 英斗，故所賺之產量內，應將此數除去。故若將平均差異減小而除標準差，則所得之機偶，較前得者更小。凡遇此種問題時，以自總差異中減去其所多之數而後相比，自較逐項相減為簡便，而結果則完全相同。

史蒂頓脫氏自介紹Z值後，復擬訂 "t" 值，求 "t" 之公式，為

$t=Z\sqrt{N-1}$。爲計算便利計，美國康乃爾大學作物育種學系曾將史蒂頓脫氏所列 t 表，重行計算，使機偶可以直接查閱。此改正表列入附錄表內 X之中。表之頂端載自由度N－1，第一項載 t 值，今試以表 84 之例題，來解釋表 IX 之用法。當Z值爲 1.40，N＝10，則 $t=1.40\sqrt{9}=4.20$。查表 IX：當 t＝4.20，N－1＝9，機偶＝832：1 此數與用 N＝10 之Z值所查得之機偶頗相類似。

若欲從標準差直接求 t，可用下列公式得之。

$$\sigma_{M_{A-B}}=\sqrt{\frac{\Sigma D^2_{A-B}}{N(N-1)}}\qquad t=\frac{M}{\sigma_{M_{A-B}}}$$

從表 82 之 ΣD^2_{A-B} 及表 84 之N值，求得標準誤爲 .95，以此數及表 82 之 M，代入 t 公式，得：

$$t=\frac{M}{\sigma_{M_{A-B}}}=\frac{4.00}{0.95}=4.21$$

此值與用 $t=Z\sqrt{N-1}$ 公式所求得者，大致相同，在此例題中，吾等假定A與B之間有相互關係，故可將兩者之差異，按列求出，成對比較。若遇甲種測驗與乙種測驗，兩無關係之問題，則用相對比較，便不合用。吾等所注意者，爲兩種測驗是否不同，而不同之程度，是否顯著而已。故若兩者無相關，宜另別法計算，其公式爲：

$$t=\frac{(M_A-M_B)\sqrt{N_1+N_2-2}}{\sqrt{\Sigma D^2_A+\Sigma D^2_B}}\sqrt{\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}}$$

仍用表 84 之例題，先分求其A之平均數，及B之平均數。再將A之離均差，及B之離均差，分別求出，自乘，而後相加，而得 ΣD^2_A 爲 222，及 ΣD^2_B 爲 268，詳見表 86（第 317 頁）。

公式內所載之 N_1 及 N_2 爲A之組數與B之組數，若將表 86 諸

數代入上列公式內，則得

$$t=\frac{38-34\sqrt{10+10-2}}{\sqrt{222+268}}\sqrt{\frac{(10)(10)}{10+10}}=\frac{4\sqrt{18}}{\sqrt{490}}\sqrt{\frac{100}{20}}=1.72$$

若兩組之組數相等，爲計算便利計，可將兩均數之差異標準差，先從下列公式求得之：

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{\Sigma D^2{}_A}{N(N-1)}+\frac{\Sigma D^2{}_B}{N(N-1)}}$$

表 86.

用史蒂頓脫氏"t"方法來比較兩個平均數之差異程度

品種 A	品種 B	D_A	D_B	$D^2{}_A$	$D^2{}_B$
38	37	0	3	0	9
40	37	2	3	4	9
40	40	2	6	4	36
42	40	4	6	16	36
39	32	1	-2	1	4
35	30	-3	-4	9	16
32	31	-6	-3	36	9
28	22	-10	-12	100	144
42	36	4	2	16	4
44	35	6	1	36	1
380	340			222	268

$N_1=10$　　　$N_2=10$

$$M_A=\frac{\Sigma A}{N_1}=\frac{380}{10}=38\qquad M_B=\frac{\Sigma B}{N_2}=\frac{340}{10}=34$$

$$t=\frac{(M_A-M_B)\sqrt{N_1+N_2-2}}{\sqrt{\Sigma D^2{}_A+\Sigma D^2{}_B}}\sqrt{\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}}$$

$$t=\frac{38-34\sqrt{10+10-2}}{\sqrt{222+268}}\sqrt{\frac{(10)(10)}{10+10}}=\frac{4\sqrt{18}}{\sqrt{490}}\sqrt{\frac{100}{20}}=1.72$$

自由度 $=N_1+N_2-2=18$

機偶好於18：1

將表 86 各數代入：

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{222}{90}+\frac{268}{90}}=2.33$$

$$t=\frac{M_D}{\sigma_D}=\frac{4.00}{2.33}=1.72$$

自由度爲 $N_1+N_2-2=10+10-2=18$。

從表 IX 查得 $t=1.72$，自由度爲 18，機偶爲 18：1。機偶頗小，故 A B 之間，差異不顯著，惟若假定 A B 之間有相互關係，而從 Z 值或 t 值求機偶，差異卽顯著。此可知同一題目，若所用算法不同，結果便異。故若用數種算法來比較差異，而得不同樣之結果時，吾人卽須注意其不同之原因，而決定其是非。凡用 Z 值及 t 值求機偶之方法，並不限於成對比較之試驗。若祇有一種處理時，上法仍可用。蓋其差異程度，可與另度相比較，卽受試驗處理與不受試驗處理之差異，是否顯著，亦可從 Z 值或 t 值求機偶而比較之也。

小樣試驗差異之顯著程度，又可從費許氏之"t"表求之。作者曾將此表之一部份，節錄於附錄表 X。吾等所欲知者，爲差異之顯著與否，故表中所載者僅 19 至 1（淺色字印）及 99 至 1（深色字印）之兩種機偶。表之左邊所載者爲自由度，檢查者於查得"t"值後，卽可照自由度向表上檢查。凡"t"值之小於表上所載各值時，差異卽爲不顯著。史帝頓脫氏之"t"，乃根據單向離均差而定，費許氏之"t"則根據雙向離均差而定。

求費許氏之"t"值當用下列公式：　$t=\frac{M\sqrt{N}}{s}$

M＝小樣平均數與全羣平均數之差，N＝觀察次數，s＝變異數之方根乃從離中差平方總和除自由度後開方而得，自由度爲觀察數減一。

今仍以表 84 之資料，用费許氏公式解釋之。附表 87 所載數字，全與表 84 所載者相同，故 M 值及 N 值兩者相同，惟费許氏用 s，而史蒂頓脫氏則用 σ 而已。

表 87.

用费許氏方法比較兩個平均數之差異程度

品種 A	品種 B	A－B或 x	x－M	$(x-M)^2$
38	37	1	-3	9
40	37	3	-1	1
40	40	0	-4	16
42	40	2	-2	4
39	32	7	3	9
35	30	5	1	1
32	31	1	-3	9
28	22	6	2	4
42	36	6	2	4
44	35	9	5	25
		$\Sigma x = 40$		$\Sigma(x-M)^2 = 82$

$N = 10 \qquad M = \frac{\Sigma(x)}{N} = \frac{40}{10} = 4$

$$\frac{s^2}{N} = \frac{\Sigma(x-M)^2}{N(N-1)} = \frac{82}{(10)(9)} = .911111$$

$$s = \sqrt{.911111}\,\sqrt{10} = (.955)(3.162) = 3.020$$

或

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-M)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{82}{9}} = 3.018$$

$$t = \frac{M\sqrt{N}}{s} = \frac{4\sqrt{10}}{3.018} = \frac{12.648}{3.018} = 4.19$$

或

$$t = \frac{M}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} = \frac{4}{\sqrt{.911111}} = 4.19$$

自由度 $= N-1 = 9$

機偶大於　99 : 1

表中 x，卽史蒂魏股氏之 D_{A-B} 或簡稱D，若將各已知數代入求 t 之公式中，求得 t 爲 4.19，此數與上述學生法由 $Z\sqrt{N-1}$ 求 t 之値相差極微。查表 X，凡自由度 9，而 t 値爲 3.250，則機偶爲 99：1。今 t 爲 4.19，故機偶必大於 99：1，而 A 與 B 之差異，必爲顯著。此法亦可用以測驗單向結果，而證明受處理對於未受處理者之顯著程度。

表 88.

用費許氏法比較兩個不成對結果之平均數之差異程度

品種 x_1	品種 x_2	x_1-M_1	x_2-M_2	$(x_1-M_1)^2$	$(x_2-M_2)^2$
81	35	27	-16	729	256
48	52	-6	1	36	1
46	75	-8	24	64	576
53	43	-1	-8	1	64
47	49	-7	-2	49	4
52	51	-2	0	4	0
52		-2		4	
379	305			887	901

$N'_1=7$　　　　$N'_2=6$

$$M_1=\frac{\Sigma(x_1)}{N'_1}=\frac{379}{7}=54 \qquad M_2=\frac{\Sigma(x_2)}{N'_2}=\frac{305}{6}=51$$

$$s^2=\frac{\Sigma(x_1-M_1)^2+\Sigma(x_2-M_2)^2}{(N'_1-1)+(N'_2-1)}=\frac{887+901}{6+5}=\frac{1788}{11}=162.545455$$

$$s=\sqrt{162.545455}=12.749$$

$$t=\frac{M_1-M_2}{s}\sqrt{\frac{(N'_1)(N'_2)}{N'_1+N'_2}}$$

$$t=\frac{54-51}{12.749}\sqrt{\frac{(7)(6)}{7+6}}=\frac{3}{12.749}\sqrt{\frac{42}{13}}=(.235)(1.797)=.422$$

自由度 $N=(N'_1-1)+(N'_2-1)=11$

機偶不顯著

上法因仍假定 A B 兩數之間，常有相關，故可成對比較。惟有時兩種處理乃全無相關，或兩種處理之試驗次數，多少不同而無從配對。費許氏爲便於解決此種問題起見，曾另立簡便方法，其公式爲：

$$N'_1=7 \qquad\qquad N'_2=6$$

$$M_1=\frac{\Sigma(x_1)}{N'_1}=\frac{379}{7}=54 \qquad M_2=\frac{\Sigma(x_2)}{N'_2}=\frac{305}{6}=51$$

$$s^2=\frac{\Sigma(x_1-M_1)^2+\Sigma(x_2-M_2)^2}{(N'_1-1)+(N'_2-1)}=\frac{887+901}{6+5}=\frac{1788}{11}$$

$$=162.545455$$

$$s=\sqrt{162.545455}=12.749$$

$$t=\frac{M_1-M_2}{S}\sqrt{\frac{(N'_1)(N'_2)}{N'_1+N'_2}}$$

$$t=\frac{54-51}{12.749}\sqrt{\frac{(7)(6)}{(7+6)}}=\frac{3}{12.749}\sqrt{\frac{42}{13}}=(.235)(1.797)=.422$$

自由度爲 $N=(N'_1-1)+(N'_2-1)=11$

$N'=$觀察數　$M_1=\frac{\Sigma(x_1)}{N'_1}$，　$M_2=\frac{\Sigma(x_2)}{N'_2}$

$$s^2=\frac{\Sigma(x_1-M_1)^2+\Sigma(x_2-M_2)^2}{(N'_1-1)+(N'_2-1)}$$

$$t=\frac{M_1-M_2}{s}\sqrt{\frac{(N'_1)(N'_2)}{N'_1+N'_2}}$$

自由度爲 $N=(N'_1-1)+(N'_2-1)$

計算各步詳載於表 88，求得"t"爲 .422，從表 X，查得自由度 11 時，最低値爲 2.201，今 t 値爲 .422，乃較最低之數猶低，故 A 與 B 之均數差異爲不顯著。

表 89 示費許氏第二法之用法。

表 89.

用費許氏第二法來比較兩個品種之差異程度

品種 x_1	品種 x_2	x_1-M_1	x_2-M_2	$(x_1-M_1)^2$	$(x_2-M_2)^2$
29.3	20.4	-1.7	-1.4	2.89	1.96
21.3	20.2	-9.7	-1.6	94.09	2.56
30.7	20.1	-.3	-1.7	.09	2.89
30.2	23.4	-.8	1.6	.64	2.56
36.4	23.7	5.4	1.9	29.16	.61
37.4	19.3	6.4	-2.5	40.96	6.25
35.6	25.1	4.6	3.3	21.16	10.89
27.8	18.7	-3.2	-3.1	10.24	9.61
24.7	17.4	-6.3	-4.4	39.69	19.36
36.3	29.6	5.3	7.8	28.09	60.84
309.7	217.9			267.01	120.53

$N'_1=10$　　　　$N'_2=10$

$$M_1=\frac{309.7}{10}=31.0 \qquad M_2=\frac{212.9}{10}=21.8$$

$$s^2=\frac{267.01+120.53}{9+9}=21.530000$$

$$s=\sqrt{21.5\,0000}=4.640$$

$$t=\frac{31.0-21.8}{4.640}\sqrt{\frac{(10)(10)}{10+10}}=4.443$$

自由度＝18

機偶大於 100：1

依法計算，求得"t"值爲 4.434 時，機偶大於 100：1，此種機偶足以表示兩數差異爲顯著而有餘。

若試驗結果可以兩兩比較者，可用費許氏第一法來解決之。若係重要試驗，則用第一法後，尚須以第二法來比較。因在甲法爲顯著時，在乙法或否，若兩個試驗中絕無相關者，僅可用第二法而不可用第一法。例

有兩種穀類產量記錄，第一類共試驗 20 次，第二類僅試驗 15 次，若此種試驗問題，其試驗地點及次數既不相同，以用第二法比較爲宜。

分析小樣試驗之各種方法，雖在本章一一敍述，惟科學智識，日新月異，新法實勝於舊法，故史蒂頓脫氏方法及費許氏方法，實較他法爲可恃。

再論機率之應用 Further Application of Probability ——皮爾生氏曾設法利用機率，來根據以往的經驗，預測將來結果。此法對於結果之成羣組報告者，尤爲有用，因此種結果不能以普通求機率之方法來測定之。

機率之用度除測驗兩數差異之顯著程度外，復可用以預測試驗之結果。皮爾生氏對於此點曾有詳細之論述。

例以 N 代表已知之第一樣品，p 代表成功之次數，q 代表失敗之次數，N，p，q 之關係當如下：

$$\bar{p}=\frac{p}{N} \quad 而 \quad \bar{q}=\frac{q}{N}$$

$$\bar{p}+\bar{q}=1$$

假定在同一材料內，另抽一樣，而以 m 代表已知之第二樣品，根據 p q N 等值，可用下列公式，求得第二樣品之預測均數。

$$預測均數 = m\bar{p}+\frac{m}{N+2}(\bar{q}-\bar{p})$$

衆數等於 $m\bar{p}+\bar{p}$ 之和，標準差可用下列公式求得之。

$$S.D.=\sqrt{m\left(\bar{p}+\frac{\bar{q}-\bar{p}}{N+2}\right)\left(\bar{q}-\frac{\bar{q}-\bar{p}}{N+2}\right)\left(1+\frac{m-1}{N+3}\right)}$$

本例題所述者爲二個小麥品種 Marquis, Turkey 之第三代雜交記錄，截至八月九日止，受病與不受病之數目分載表中。至八月十六日止

計共收穫小麥 3763 株，今擬預測不受病之株數，並證明受病與不受病之差異數是否顯著。

	無病者	有病或一半有病者	總　數
株　數	915	350	1263

今 p 代表不受病之株數，q 代表受病或半受病之株數，從第一公式求得：

$$\bar{p}=\frac{p}{N}=\frac{913}{1263}=.723$$

$$\bar{q}=\frac{q}{N}=\frac{350}{1263}=.277$$

以已知數代入第二公式即得預測均數M之值：

$$M=3763\times .723+\frac{3763}{1263+2}(.277-.723)=2719.322$$

$$\text{又衆數}=3763(.723)+.723=2721.372$$

$$\text{或衆數}=2721$$

求標準差

$$S.D.=\sqrt{3763\left(.723+\frac{-.446}{1265}\right)\left(.277-\frac{-.446}{1265}\right)\left(1+\frac{3762}{1266}\right)}$$

$$=54.73$$

$$P.E.=\pm .6745\sigma=\pm(.6745)(54.73)=\pm 36.92$$

八月十六收穫之株數如下表

	無病者	有病或一半有病者	總　數
株　數	3092	671	3763

是則第二次實收不受病之株數爲 3092，計算所得之期望數爲 2719.322±36.92。此可知受病與無病者之差異，頗爲顯著。此種不同，並非偶然，而係遺傳關係。且因第二次收穫株數內，有病者較少，故知成熟晚者，受害株數較少。

凡用此法來分析植物病害試驗，及植物在各種環境下對於病害之影響等問題，極爲有用。其他類似之問題，以此法分析亦可。今再以3：1之遺傳比率，來引證此法之用度。

計算曼特爾遺傳結果之機誤，可用下列公式，而以N爲觀察總數，p及q代表甲乙兩種觀察數。作比率用，或百分數用，可在下列公式決定之。

若以比率計算，則：

$$P.E.=\pm.6745\sqrt{\frac{pq}{N}}$$

若以絕對數計算，則：

(1) $P.E.=\pm.6745\sqrt{pqN}$(此處p及q代表期望的次數百分數)

(2) $P.E.=\pm.6745\sqrt{\frac{\text{期望數之積}}{N}}$

若以百分數計算，則：

$$P.E.=\pm.6745\sqrt{\frac{(pq)\text{in}\%}{N}}$$

吾等試應用上列公式，計算小麥粒色測驗之結果。今有小麥 200 株，其中 148 株是紅粒，52 株是白粒，其比率適成 3：1。第一公式 $P.E.=\pm.6745\sqrt{\frac{pq}{N}}$，求得其機誤爲：

$$P.\ E. = \pm .6745\sqrt{\frac{(3)(1)}{200}} = \pm .08$$

若求絕對數之機誤，可將3與1之比用百分數代表之。p等於.75，q等於.25，以此數代入第二公式

$$(1)\ P.\ E. = \pm .6745\sqrt{p\ q\ N} = \pm .6745\sqrt{(.75)(.25)(200)} = \pm 4.13$$

此絕對數機誤又可用第二公式求之，

$$(2)\ P.\ E. = \pm .6745\sqrt{\frac{\text{期望數甲乙之積}}{N}}$$

若共有200個數，則以3：1計，可得期望數爲紅粒150株，白粒50株，故機誤爲

$$P.\ E. = \pm .6745\sqrt{\frac{(150)(50)}{200}} = \pm 4.13$$

若用百分數，則因 $p = \frac{75}{100}, q = \frac{25}{100}$，故用第三公式

$$P.\ E. = \pm .6745\sqrt{\frac{(p\ q)\%}{N}} \text{求得}$$

$$P.\ E. = \pm .6745\sqrt{\frac{(.75)(.25)}{200}} = \pm .02$$

用上述之公式求機誤，果可測驗所擬遺傳解釋是否合於孟特爾定律。惟此法總不若第十一章所述曲線配合之適度爲合用。因配合適度乃依據全分配而定，是較機誤法之測試其比率或百分數者爲佳也。

今試以所算之機誤，來比較觀察數之差異顯著程度。根據觀察數，紅色者共148株，白色者有52株，其比率爲2.96：1.04，其機誤已用第一公式求得爲.08。而期望比爲3：1而3較2.96大.04；1較1.04小.04，故相差僅爲.04。$\frac{D}{P.E} = \frac{.04}{.08} = .5$，故差異並不顯著。其他根據絕對數目及百分數所求得之機誤，亦可用同樣方法來比較其差異之顯著與否。

第十三章

變異數分析

根據標準差及機誤來分析試驗結果，在統計上果有相當地位，惟用此方法來分析結果，難免將試驗中所遇各種變異，混統算入，致求出之試驗差誤，夾雜不純。爲補救此弊起見。斐許氏(Fisher)曾有變異數分析法之介紹，用是法可將試驗中所遇各種變異，逐步分出，賸下之差誤，始爲試驗差誤。斐許氏對此新法，曾與其同事一再研究而補充之，使合於分析各種試驗之用，而確定其新法之價值。

變異數分析法之立足點，在認定總變異(Variation)乃由多數因子所氣成，有數因子爲已知因子，其對於試驗之影響，或可設法提出，此點爲變異數分析法之主要貢獻。例似收割異品種之小麥數區，Plot而計算其產量結果，內中所有變異，包括品系間變異，(Variation between varieties)區集間變異(Variation due to blocks)等等，此種已知因子用變異數分析法，可一一求得，而從總變異(Total variation)中減去之，所賸餘的尚未分析之未知因子，統稱爲試驗變異，故 variation due to error of the experiment“變異”仍非單純而乃複雜者。

爲欲引申上述之意義今將總變異 Total variance 以 $\sigma^2{}_T$ 代表多

數變異因子之聚集成，照上述例題，總變異當爲：

$$\sigma^2_T=\sigma^2_V+\sigma^2_B+\sigma^2_R \text{ 等}$$

σ^2_V 及 σ^2_B 代表品種間之變異及區集間之變異 σ^2_R 爲其賸餘或即所稱之試驗變異。residue or variance due to error 上列方程表示各變異之集合性，及其可以分離之原則。其中有一部份因子果可逐一分析，倘有一部份難於認識之因子，無從分提，此種未能分析之因子，即名之曰差誤 (error)。

費許氏在引用變異數分析法時，復介紹一新名詞，名曰自由度，(degree of freedom) 自由度即爲組數或個數減去其已定之常數後餘下之數目。自由度之意義，可用下列設想來解釋之，例如測驗 10 區產量之結果，其所受處理 (treatment) 相同，其均數算已求得，故在此 10 個觀察中除去一個已定之常數外，有變動之自由性者，祇有 9 個，簡言之此 10 區之自由度爲 9，尋常自由度爲觀察數(組數品種或區數)減 1。

各種不同因子之影響於總變異，不僅限於變異數而兼及自由度。例有一試驗共有品種 5 個，重複種 5 區，故總數爲 25 區，試驗之總自由度爲 N－1 即24。至於品系之自由度爲 4，因共有品種 5 個，5 減 1 爲 4。區之自由度亦爲 4，因每品種重複 5 次，5 減 1 爲 4. 各種變異 (品種間之變異及區集間變異) 自總變異中減去時，其自由度亦當從總自由度內減去之。本例題則自總自由度 25 減去品種間變異之自由度 4 再減去區間變異之自由度 4，賸下之自由度成爲 6。此數即爲不能分析之未知因子之自由度。

凡自總變異數減去各種變異數後，苟所減去之各種自由度與所減去之各種變異數尚相稱配，則賸餘變異便因減去其有關係之因子而數目減小。

變異數分析之必要條件,即爲所分析之材料,必爲隨機取樣(random sample)者。若係田間試驗,小區或個數之排列均須隨機 (random), 而不可依次排列。凡區與區之間皆不能作順序之排列。(systematic arrangement)例如吾等作一5小區之5種處理試驗,其排列法必完全隨機,不能將5個處理依次排列,而後照樣重複5次,須將5個處理隨意排列。(arranged by random)在5區內用抽籤法將5種處理分寫在五個紙牌上,而隨意抽取之。第一張所抽得之處理,排在第一區內,第二張排在第二區內,有時亦可將5個處理數目寫在卡片上,5區數目亦寫在卡片上,紛亂之而後同時抽取。例若第一次抽得處理爲3,區數爲5,即可將第三種處理排於第五區內,又若處理爲5,而區數爲3時,則宜將第五種處理,排在第三區內。

變異數分析法之應用不僅限於田間試驗，其他類似之試驗皆可以此法分析之，故用度頗廣，變異數分析法乃一新發現之統計法，其用度正在窮出不盡也。

變異數分析法之應用(Application of Analysis of Variance)——今用表90 (330頁) 之資料,引證變異數分析法之用法,表中所載之資料,乃一5個品種,重複5次之試驗記錄。

表 90.

變異數分析法之應用

品種	區集 1	2	3	4	5	品種總和	平均數
A	51	45	48	48	54	246	49.2
B	47	50	50	54	52	253	50.6
C	48	51	50	51	55	255	51.0
D	52	47	49	55	56	259	51.8
E	48	47	49	50	57	251	50.2
區集總和	246	240	246	258	274	全數總和 1264	全數平均 50.56
平均數	49.2	48.0	49.2	51.6	54.8		

品種間之變異數平方和之計算法

品種平均－全數平均	D	D²
49.2－50.56	－1.36	1.8496
50.6－50.56	.04	.0016
51.0－50.56	.44	.1936
51.8－50.56	1.24	1.5376
50.2－50.56	－.36	.1296
	總和	3.7120
		×5
		18.5600

區集間之變異數平方和之計算法

區集平均－全數平均	D	D²
49.2－50.56	－1.36	1.8496
48.0－50.56	－2.56	6.5536
49.2－50.56	－1.36	1.8496
51.6－50.56	1.04	1.0816
54.8－50.56	4.24	17.9776
	總和	29.3120
		×5
		146.5600

分析之結果

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
品種間	4	18.5600	4.6400
品種內	20	221.6000	11.0800
區集間	4	146.5600	36.6400
區集內	20	93.6000	4.6800
差誤	16	75.0400	4.6900
總數	24	240.1600	10.0067

第一步係求得各品種之5區產量總和，與每區之5品種產量總和、並5區產量之每品種平均數，與5品種產量之每區平均數。試驗產量之總和爲1264，其平均數爲50.56，若求品種間之差異，則自5區產量之每種平均數49.2, 50.6, 51.0, 51.8 及 50.2，減去總平均數50.56，而得差數爲 −1.36, −2.56, −1.36, 1.04, 及 4.24。將此差異數各個自乘，而後相加，再以品種數乘之，即得品種間之 ΣD^2。求區集間差異與求品種間差異之步驟相同，由5品種產量之每區平均數減去總平均數，自乘相加，即得區間之 ΣD^2，若將各區產量一一自乘而後相加，再從其總和內減去其校正量，則所得結果正相同，若有計算機或巴氏方檢數表(Barlow's Table)，則第二法反較簡便。

例如各區產量自乘而相加之總和爲64148, $(51)^2+(47)^2+(48)^2+(52)^2\cdots\cdots\cdots\cdots=64148$，惟此各數自乘之總和，非從真真均數得來，故須減去校正量。校正量之求法有數種，可將諸產量之總數自乘，而以區數除之，或以諸產量之平均數自乘，而以區數乘之皆可。校正數亦可從總數與均數相乘而得，若所得均數係一畸零數，有小數不能除盡，則各數自乘而由其總和減去校正量，較用均數減去各數之法爲正確。

本問題之校正量爲63907.8400，此數係以總和數1264，自乘而後以區數25除之即得。從個數自乘之總和64148中減去63907.8400，得240.16 0，此數稱爲總數之平方總和，列在表90變異數分析末一行內。因共有25小區，故自由度爲24。

第二步係求品種之平方總和及區集之平方總和，其法係先求得各品種之產量與平均數相較之數，而以其差數自乘，後相加。例如品種A

之產量爲 49.2，減去均數 50.56，則得 1.36，5 個品種一一如法相減，而將其差數各個自乘後相加，則得品種間之差異自乘總和爲 3.7120，因每一均數係得自 5 個重複次數之產量，故須以 5 乘之，得 3.7120×5 等於 18.5600，因此數係得自眞正均數，故不必再除去校正量。現有品種數目爲 5，故自由度爲 4，此數及 18.5600 之數，記於表 90 變異數分析第一行。

品種間之變異亦可從下法求得之。將每一品種之 5 區總數自乘而後相加，因所求得之數係 5 區之總數，故其結果須以 5 除之，得商數 63926.4000。從此數減去校正量 63907.8400，得餘數 18.5600。

區集間變異之求法，與品種間變異之求法頗相類似，每一小區內有 5 個品種，故平方總和 29.3120 須以 5 乘之，其積爲 146.5600，此數記於表 90 變異數分析第三行內。因每品種有 5 小區，故自由度爲 4。

從 240.1600 之總數之平方總和減去 18.5600 及 146.5600 之和數 165.12，而得 75.0400。此爲隨機排列之變異平方，或卽稱爲差誤平方。因此數乃自總變異數減去品種及區間變異之和而得，故其自由度亦等於總自由度減去兩者之和。總自由度爲 24，品種及區集之自由度各爲 4，故賸餘之差誤自由度卽爲 16。

本試驗之分析更可進一步而求品種內之變異 (variation due to difference within varieties) 平方，及區集內之變異 (variation due to difference within blocks) 平方。求品種內變異平方，係須先求得一品種之 5 小區平均產量：

$$(51+45+48+48+54)/5=\frac{246}{5}=49.2$$

再以此平均數與同品種之各區產量逐一相較，而得 D 值（見 333 頁附表）自乘而得 D^2，其他 4 區集之數，用同一方法求得之。5 區相加之和，爲 221.60，此數記於下列左表變異數分析第四行內。

區集內之變異分析，可用類似之方法求得之。求得每區與其同品種諸區平均數相較其差自乘相加之和爲 93.60，此數記在下列右表第四行內，各步算法詳見 333 頁附表。

每一品種有 5 小區，故自由度爲 4，今有 5 品種，故自由度共爲 $4\times5=20$。小區內變異之自由度亦爲 20。因每區有 5 個品種，其自由度爲 4，5 區共有 20 個自由度。

品種內之變異數平方和計算法

品種產量		品種平均產量	D	D^2
51	—	49.2	1.8	3.24
45	—	49 2	—4.2	17.64
48	—	49.2	—1.2	1.44
48	—	49.2	—1.2	1.44
54	—	49.2	4.8	23.04
47	—	50.6	—3.6	12.96
50	—	50.6	— .6	.36
50	—	50.6	— .6	.36
54	—	50.6	3.4	11.56
52	—	50.6	1.4	1.96
48	—	51.0	—3.0	9.00
51	—	51.0	0.0	0.00
50	—	51.0	—1.0	1.00
51	—	51.0	0.0	0.00
55	—	51.0	4.0	16.00
52	—	51.8	.2	.04
47	—	51.8	—4.8	23.04
49	—	51.8	—2.8	7.84
55	—	51.8	3.2	10.24
56	—	51.8	4.2	17.64
48	—	50.2	—2.2	4.84
47	—	50.2	—3.2	10.24
49	—	50.2	—1.2	1.44
50	—	50.2	— .2	.04
57	—	50.2	6.8	46.24
			總數	221.60

區集內之變異數平方和計算法

每區產量		每區平均產量	D	D^2
51	—	49.2	1.8	3.24
47	—	49.2	—2.2	4 84
48	—	49.2	—1.2	1.44
52	—	49.2	2.8	7.84
48	—	49.2	—1.2	1.44
45	—	48.0	—3.0	9.00
50	—	48.0	2.0	4.00
51	—	48.0	3.0	9.00
47	—	48.0	—1.0	1.00
47	—	48.0	—1.0	1.00
48	—	49.2	—1.2	1.44
50	—	49.2	.8	.64
50	—	49.2	.8	.64
49	—	49.2	— .2	.04
49	—	49.2	— .2	.04
48	—	51.6	—3.6	12.96
54	—	51.6	2.4	5.76
51	—	51.6	— .6	.36
55	—	51.6	3.4	11.56
50	—	51.6	—1.6	2.56
54	—	54 8	— .8	.64
52	—	54.8	—2.8	7.84
55	—	54.8	.2	.04
56	—	54.8	1.2	1.44
57	—	54.8	2.2	4.84
			總數	93.60

從上述已知之平方數，卽可求得差誤平方。若將品種內之變異平方及自由度減去區集間變異平方及其自由度，得差誤平方為 75.0400 自由度為 16，又若將區集內變異平方與品種間變異平方相減，所得差誤平方亦為 75.0400，自由度仍為 16。

變異數	自由度	平方和
品種內	20	221.6000
區集間	4	146.5600
差誤	16	75.0400

變異數	自由度	平方和
區集內	20	93.6000
品種間	4	18.5600
差誤	16	75.0400

求得平方總和後，若以其自由度除之，卽為平均差誤平方或卽變異數，例似總和為 75.0400，以 16 除之，得 4.6900，為平均差誤平方，此卽除去區集間差異後之賸餘差異。以此數開方，則得 $\sqrt{4.6900}=2.17$，此為本試驗中單區標準差。因有 5 區，故若以 $\sqrt{5}$ 除之，得 $\frac{2.17}{\sqrt{5}}=0.97$ 為 5 區平均標準差。

凡演算變異數分析之問題所減去之區集間或品種間之變異，須與賸餘變異相比較，俾知所減去之變異，是否顯著。若欲決定品種間變異與賸餘變異有否顯著之差異，在本例題可以品種間之平均平方變異 4.6400，與賸餘變異 4.6900 相比較，前者比後者僅高百分之五，故差異為不顯著。此為預料所及，因本試驗係一規劃試驗，(uniformity test)

乃用同一品種隨意種植於 25 區中，故品種間自無顯著之差異也。

苟兩者相較之差異頗大，則宜用比率來比較其差異之顯著與否。茲將費許氏比較法節述於下。將每一種變異用自然對數表(natural logarithm) 查得$\frac{1}{2}\log_e$，而將差誤的變異之 $\frac{1}{2}\log_e$ 減去之，所賸下之$\frac{1}{2}\log_e$ 即爲 Z值。或將品種間變異或區間變異以差誤變異除之，而以其商求$\frac{1}{2}\log_e$，結果亦相同。若自然對數表不在手邊，則從普通對數表上查得數值，而以 1.1512925 乘之，結果亦相同。小數點普通讀至五位即夠。

對於 z 值之檢查，費許氏曾擬有表兩張，一張爲$\frac{1}{100}$表，一張爲$\frac{5}{100}$表。照費許氏解釋，即實際上並無差異，而爲偶然所致，在一定自由度下，一百次中可有 1 次至 5 次若表上所載之差誤。故若查得之 z 值小於或等於兩表所載之數，則差異並不顯著。

因比較時所用之變異數有兩種，故表中載兩種自由度 n_1 及 n_2，n_1 代表變異數平方較大之自由度。若遇自由度頗大，表中不易檢查，或 n_1 及 n_2 幾相等時，可求得 z 之標準差，來決定顯著程度。當 n_1 及 n_2 之數目頗大，或 n_1 及 n_2 幾乎相等時，z 之標準差爲$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$，當 z 值大於此數兩倍時，z 值必大於$\frac{5}{100}$之 z 表內數目，故差異必爲顯著。

舒乃特氏(Snedecor)根據費許氏所定之值，另立一表，今載於附錄表 X。查此表不必先求對數，故用者便之。凡用舒氏表者，須先求得 F 值，F 爲變異數之大平方均數與小平方均數之比。表上載各種自由度下之 F 值，(即在機遇 chance 支配下所發生之差誤) 表之上端載大平方

均數之自由度，左行載小平方均數之自由度，若所查之自由度較大於表上所載時，可即照表上所有最大之自由度檢查之。

表上印有深淺兩種字數，淺色字代表 F 值每 20 次中 1 次之機遇，深色字代表每 100 次內 1 次之機遇。凡在一定之自由度下，F 值小於淺色字時，結果爲不顯著，若 F 值在深色字與淺色字之間，則結果爲顯著，若 F 值大於深色字時，則結果爲十分顯著。

此表之用度將仍以表 90 之例題證明之。已知品種間之變異與賸餘變異之相差極微，故爲便於引證起見，今將改用品種內之變異與賸餘變異之比，而不用品種間之變異與賸餘變異之比。查得品種內變異爲 11.0800，而賸餘變異則爲 4.6900，故 $F=\frac{11.0800}{4.6900}=2.36$。

品種內變異(大平方數)之自由度爲 20，賸餘變異(小平方數)之自由度爲 16，表 X 並無自由度 20 之一項，故向最近之自由度 24 項內求之，在左邊自由度 16 及頂項自由度 24 所成之方格內，查得淺色字爲 2.24，深色字爲 3.18，因 F 值 2.36 較 2.24 略高，故差異爲顯著。惟 2.36 小於深色字 3.18，故差異並不十分顯著。

變異數分析法之一種重大貢獻，在將已知之差異，逐一除掉，故當結果相互比較時，較爲直接而純粹。今試再以表 90 來證明之。若從總變異數來求本試驗之標準差，則爲 $\sqrt{10.0067}=3.16$，而減去已知變異後之標準差則僅爲 2.17。標準差跌小之原因，爲區集間變異之平方均數極大，(可知區與區之間，確有差異) 今一經除去後，變異數卽減小，故將品種間之變異及區集間變異除去後，總變異數乃從 10.0067 減至 4.6900。而標準差則自 3.16 減至 2.17。凡比較試驗結果時以較小之標

準差來比較，較爲準確，因標準差 2.17，確較 3.16 爲純粹也。

在離開本題之前，擬再以表 90 之資料，計算各品種之期望產量，expected yield 俾與觀察產量(observed yield)相比較，而證明變異數分析法之用處。求某品種之期望產量時。須先求得其校正量，法以某品種所在區之平均產量，減去總平均產量，例如品種 A 在第一區之平均產量爲 49.2，總平均產量爲 50.56，故校正量爲 $49.2-50.56=-1.36$ 此數簡稱之爲 x_1。惟照表 90，每品種曾重複試驗 5 次，分成 5 區。故求得第一區校正量 x_1 後，尚須求第二區之校正量 x_2，第三區 x_3，第四區 x_4，及第五區 x_5。用同樣方法，求得 x_2 x_3 等值如下：

第二區　$x_2=48.0-50.56=-2.56$

第三區　$x_3=49.2-50.56=-1.36$

第四區　$x_4=51.6-50.56=1.04$

第五區　$x_5=54.8-50.56=4.24$

各區之校正量既一一求得，便可以之加入各區之平均產量，而求得期望產量。若校正量爲負，則正數加負數便成減法。今將第一區各品種之平均數校正量及期望產量等列表如下：

品種	平均數	X_1	改正後之產量	觀察產量	D	D^2
A	49.2	−1.36	47.84	51	3.16	9.9856
B	50.6	−1.36	49.24	47	−2.24	5.0176
C	51.0	−1.36	49.64	48	−1.64	2.6896
D	51.8	−1.36	50.44	52	1.56	2.4336
E	50.2	−1.36	48.84	48	−.84	.7056

其餘四區之校正後產量，可用同樣方法將 x_2, x_3, x_4, x_5 等校正與其平均數相加而得。若將各品種及各區之 D^2 相加，得總數為 75.0400，此數適與用變異數分析法求得之賸餘變異相同。故期望數與觀察數相較之平方總和，亦卽賸餘變異，卽品種間之變異及區集間變異皆已除掉後之變異也。

至此變異數分析法之用途，當極明瞭，蓋區集間變異及品種間變異一經除去後所賸餘者卽為隨機排列之變異或差誤而已。此差誤數可用變異數分析法求得之，亦可以期望數及計算數 Calculated yield 相較而得之。

表 91.

用變異數分析法比較燕麥六品種之產量

品種	年份 1918	1919	1920	1921	1922	品種和	平均數
A	66	52	57	64	61	300	60.0
B	68	52	48	55	53	276	55.2
C	61	48	51	49	56	265	53.0
D	53	46	50	52	43	244	48.8
E	53	47	52	52	47	251	50.2
F	58	41	44	43	48	234	46.8
年份和	359	286	302	315	308	1570	
平均數	59.8	47.7	50.3	52.5	51.3		

變異數分析之結果

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數	F值
品種間	5	575.467	115.0934	8.69
年份間	4	498.334	124.5835	
差誤	20	264.866	13.2433	
總數	29	1338.667		

今以變異數分析法來解決一例題，題載六個品種之燕麥產量經五年試驗後之結果，記錄詳載於表 91。

先求得諸品種之產量總數及平均數，乃求總變異之平方總和，及品種間之平方總和，與年份間之平方總和。因各步算法與上述無異，故不復贅，僅將結果載表 91 中以資參考。

本試驗共有 30 小區，故總自由度為 29。品種有 6，試驗 5 年，故品種間之自由度為 5，年份之自由度為 4。今將品種間之總變異數，減去品種間之變異及年份間之變異數而得差誤平方和為 264.866。自總自由度內減去品種及年份之自由度後得差誤之自由度為 20。所求得之平方總和各以自由度除之卽得變異平方均數，變異平方和及年份內之變異平方和，亦可如法求得。惟吾等所欲知者，僅為在每年所得產量，品種間有否差異，故此種品種內之變異等，無算出之必要，

各變異之平方均數既求得，卽可以之求 F，而知差異之顯著與否。今求差誤之平方均數為 13.2433，品種間之變異平方均數為 115.0934，兩者相比得 $\frac{115.0934}{13.2433}=8.69$，故 F 為 8.69。品種間變異之平方數大於差誤平方數，前者之自由度為 5，後者為 20，從附錄查得 F 為 2.71 及 4.10。惟計算所得之 F 值為 8.69，大於 4.10，故差異為極顯著。

因吾等已知品種間有顯著之差異，故今將進而比較各品種之產量。品種間之有顯著差異，有時起原於一二產量之特大特小，有時則因各品種產量之參差頗大所致。故求得顯著之差異，仍不宜武斷其差異之原因為局部或全體。品種比較，可以其總數或均數比較，兩法皆可。今先從總數比較。

品　　種	總　產　量
A	300
B	276
C	265
D	244
E	251
F	234

五品種產量平均爲 261.6667，暫以此數爲 100%，而以各品種之產量照百分數比較之如下表：

品　　種	平均百分數
A	114.65
B	105.48
C	101.27
D	93.25
E	95.92
F	89.43

從差誤平方均數 13.2433，求得單次標準差爲$\sqrt{13.2433}=3.64$。

此數亦化成百分數，則得 $3.64/261.6667=1.39$。5 區之平均標準差百分數，當爲，$1.39\sqrt{5}=3.11$。此數亦可從差誤平方均數直接求得之。$\sqrt{13.2433\times5}=8.14$ 此爲五次之平均標準差，以之化成百分數則得 $8.14/261.6667=3.11\%$。兩個標準差之相差爲 $3.11\sqrt{2}=4.40$，凡兩品種相差之數大於此數二倍時 $4.40\times2=8.80$，則差異爲顯著。故 8.80 一數可爲比較時之標準。A 與 B 相較之數大於 8.80，故 A 確比 B 好。其他各品種可照法一一比較，而決定其差異之顯著與否，此亦可證明變異數分析法，對於分析試驗及解釋結果之效用。

若根據平均數，可用下法求得各品種之產量比較。法將各品種之平均產量相比較，而以平均標準差誤爲標準，每品種5年平均產量如下表：

品　　種	平　均　產　量
A	60.0
B	55.2
C	53.0
D	48.8
E	50.2
F	46.8

平均數之標準差爲 $3.64/\sqrt{5}=1.63$，兩數之標準差數爲 $1.63\sqrt{2}=2.31$ 兩倍之則得 4.62。此數卽可以之爲比較時之標準。

凡兩品種間之平均數相比較，其差數大於此標準 4.62 時，差異卽爲顯著。今品種 A 比品種 B 之產量高出 4.8，此數大於 4.62、故 A 確比 B 好。卽與其餘四品種比較，A 之產量亦獨高。其他各品種之相互比較，可用同一標準求得之。

在根據差異顯著與否而爲試驗結果下斷語時，須十分愼重。蓋有全試驗對於品種間及處理間並無甚差異，惟偶有一品種，產量特低，又有一品種，產量特高苟以兩者之標準差相比較，差異自然顯著，此種比較實爲非當。是非全試驗表示顯著差異時，吾人始可斷語，品種間或處理間有顯著之差異也。

今將數目較大之試驗結果，用變異數分析法來演算之如下。此結果係得自一13品種之隨意排列試驗，每一品種種10區。求變異數之方法

頗簡單，上已詳述，今不復贅。僅將結果——品種間之變異平方總和，區集間變異平方總和，及總變異數，——載表 92 以資比較。

表 92.

用變異數分析法比較燕麥十三品種之產量

品　種	區					集					品種和	平均數
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
A	42	35	41	46	32	36	33	30	22	13	330	33.0
B	41	35	40	43	35	37	29	23	22	20	325	32.5
C	42	34	35	47	37	33	32	31	23	20	334	33.4
D	47	33	36	48	35	41	35	29	27	13	344	34.4
E	45	37	41	44	39	34	30	24	24	17	335	33.5
F	43	43	36	42	37	35	42	33	32	21	364	36.4
G	50	38	34	47	43	37	39	33	28	21	370	37.0
H	45	44	36	56	45	54	39	30	32	23	404	40.4
I	57	47	49	53	45	45	44	33	30	25	428	42.8
J	51	46	58	54	46	43	44	30	34	21	427	42.7
K	44	42	45	48	37	45	48	31	27	10	386	38.6
L	45	44	52	43	39	36	36	37	35	21	388	38.8
M	42	44	31	40	34	46	38	27	27	18	347	34.7
區集和	594	522	534	611	504	522	489	391	363	252	4782	全數平均 36.7846

分析結果

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數	F值
品　種	12	1567.5692	130.6308	8.40
區　集	9	8524.5846	947.1761	
差　誤	108	1679.8154	15.5538	
總　數	120	11771.9692		

品種間之變異平方均數為 130.6308，差誤之平方均數為 15.5538，F 為 8.40。查表 X，當自由度為 12 及 108 時，F 值為 1.85 及 2.37，試驗所得之 F 值為 8.40，此數大於 2.37，故差異為顯著。今既已查得品種間有差異，故當進而比較各品種之產量差異。

以差誤平方均數開方，卽為標準差，其數為 3.94，10 區平均標準誤為 $3.94/\sqrt{10}=1.25$。差數之標準誤為 $1.25\sqrt{2}=1.77$，兩倍之得 3.54。

凡品種產量與平均產量相較，而其差異大於 3.54 時，卽為顯著。品種 G 比品種 A 及 B 皆好，惟不如品種 I 及 J，品種 H，I 及 J 三者之中，無顯著差異。

上節已述過，品種比較亦可以平均產量化成百分數而比較之。若以大均數 36.7846 為 100%，求得 13 品種之產量平均百分數如下表：

品種	平均 %
A	89.71
B	88.35
C	90.80
D	93.52
E	91.07
F	18.95
G	100.59
H	109.83
I	116.35
J	116.08
K	104.94
L	105.48
M	94.33

若以平均標準誤化成百分數則爲 1.25/36.7846=3.40%。以此數求得差數標準誤之百分數，而以 2 乘之得 9.62%。可用作比較品種產量之標準。凡兩個品種相差之小於 9.62 者，差異卽爲不顯著。

變異數分析法普通用來分析隨機排列之試驗，此種排法，有一禁例。卽每一重複或每一區內祇有一個處理或一個品種，故同品種或同處理之試驗，不能排列在同一區或同一排列中。此外尙有一種隨機排列，名爲拉丁方 Latin square 排法，其排法禁例較普通隨機排列爲嚴。

例有五個品種，重複種植五區，其排法當如下：

橫行 \ 縱行	1	2	3	4	5
1	D	A	C	B	E
2	B	E	D	C	A
3	C	B	A	E	D
4	E	D	B	A	C
5	A	C	E	D	B

圖 33、以五品種用拉丁方排列之設計

第一橫行中各品種可隨意排列，惟在此橫行內，每一品種只可種一次，此點與上述之禁例相同。惟此外尙有一禁例，則每一縱行內亦不能有相同之品種。換言之卽無論縱行(Column)橫行 (Row)，皆不能有相同之品種或處理，此種排法，名爲拉丁方排法。費許氏曾在變異數分析法中，詳重言之。

拉丁方可作任何排法，惟無論如何總以不違背禁例為原則。同一橫行或同一縱行中，不能有相同之品種或處理。若用拉丁方之排列，品種數或處理數須相同。故拉丁方排成之田，每成正方形，惟若有排成數行並列之必要時，在不觸犯上述禁例內，主持試驗者，自可隨意排列之。其結果可用變異數分析法來分析之。

表 93

拉丁方之排法及分析法

	縱				行	總和	平均數
橫	D 37	A 38	C 38	B 44	E 38	195	39.0
	B 48	E 40	D 36	C 32	A 35	191	38.2
	C 27	B 32	A 32	E 30	D 26	147	29.4
	E 28	D 37	B 43	A 38	C 41	187	37.4
行	A 34	C 30	E 27	D 30	B 41	162	32.4
總和						全數總和	全數平均
	174	177	176	174	181	882	
平均數	34.8	35.4	35.2	34.8	36.2		35.28

品種變異

品種	A	B	C	D	E
總和	177	208	168	166	163
平均數	35.4	41.6	33.6	33.2	32.6

橫	行	縱	行	品	種
N	N^2	N	N^2	N	N^2
195	38025	174	30276	177	31329
191	36481	177	31329	208	43264
147	21609	176	30976	168	28224
187	34969	174	30276	166	27556
162	26244	181	32761	163	26569
總和	157328	總和	155618	總和	156942
	5)157328		5)155618		5)156942
	31465.60		31123.60		31388.40
	31116.96		31116.96		31116.96
	348.64		6.64		271.44

分析結果

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數	F值
橫行間	4	348.64	87.1600	
縱行間	4	6.64	1.6600	
品種間	4	271.44	67.8600	4.32
差誤	12	188.32	15.6933	
總和	24	815.04		

拉丁方之分析法與上述之變異數分析法,大致相同。惟若分析拉丁方,則除將品種間之變異或處理間之變異,從總變異中減去外尚須將縱行間及橫行間之變異,一併減去,所賸下者始爲隨機變異(random variation)之平方總和,或簡稱爲差誤。

拉丁方之排法及其分析法,詳見表 93。表中載 5 個品種之排法,及縱行,橫行,與各品種之總和與平均數。品種之總和及均數,係將各品

種之每行產量相加而得。例如品種 A 第一行產量為 38，第二行為 35，第三行為 32，第四行為 38，第五行為 34，故 A 之五行產量和為 177，平均為 35.4，見表 93 第二小表。

求總變異之平方總和，法與前同，先將各單位之產量自乘相加，減去其校正量即得(總和乘均數)縱行間平方總和，橫行間平方總和，及品種間平方總和，俱載於附表 93，第三，第四表。此三個總數——縱行，橫行，品種——皆為 5 個單區所成，故總平方和當以 5 除之，而後與校正量相減。三者之平方總和，各以其自由度除之，而得三者之平方均數，載於表 93 第四小表，變異數分析值下。自總變異平方總數，減去縱行間，橫行間，及品種間之變異平方總和，乃得賸餘平方總和 188.32，簡稱為差誤。自總自由度內減去縱行間，橫行間，及品種間之自由度，而得賸餘自由度為 12。將四種變異平方總數，各以其自由度除之，而得各種變異數。橫行間之變異數極小，此因橫行間產量頗相同。

茲將決定 F 值以比較品種間有否顯著之差異。以品種間之變異 67.8600 與差誤 15.6933 相除得 4.32。F 值 4.32 大於表 X 所列之淺色數目而小於深色數目，故差異僅為顯著而非十分顯著。

因變異數分析法指示品種間有顯著之差異，故將進而比較各品種之結果。此可將各品種之總產量化成總產量之平均數百分率，求得標準誤之百分數來比較之。

品　　種	平均數 %
A	100.3
B	117.9
C	95.2
D	94.1
E	92.4

第區標準誤爲差誤之方根 $\sqrt{15.6033}=3.96$，5 區之平均標準誤爲 $3.96\sqrt{5}=8.85$。總產量之平均數爲 176.4，故標準誤化成平均數之百分數，成爲 $8.85/176.4=5.02\%$。相差的機誤爲 $5.02\sqrt{2}=7.10$，兩倍之成 14.20。

凡兩品種之差異大於 14.20，便算顯著。品種 B 比品種 A 之產量多 17.6%，故 B 確勝於 A。品種 B 非特大於A，即與其他各品種相較，產量亦特高，且相差之數，亦頗顯著。品種 A，C，D 及 E 之產量，無甚顯著之差別。

此引證如何用變異數分析法來計算拉丁方之結果。用此法連縱行及橫行間之變異，亦可減去，故差誤減小。此種分析方法，用以分析拉丁方排列之肥料試驗極爲合用。

減去失株之影響 (Eliminating the Effect of Missing Plots)——上舉例題，均假定全無意外遭遇，故每區每株皆有收穫。惜實地試驗，未能如此圓滿，有時一區之作物，因被人類或牲畜踐踏，及其他原因而完全損失。若有此等情形，所損失之產量，須設法估計之，以謀補救。晚近愛倫(Allan)氏及韋適氏(Wishart)對於此種損失之估計，皆有所建議。葉次氏(Yates)更從而引申之，便成爲合用之方法。此校正法以假定受損之一區與其同行內各區，係受同樣處理者。

今仍用表 92 之資料，來引證估計損失量之算法。假定一區之產量已遺失，此遺失之一區在第二區集品種 C。在表 92 此區之產量原爲 34，惟今假定其已遺失而估計之。

愛倫氏及韋適氏所用以估計隨機排列法內遺失區產量之公式爲：

$$x = \frac{pP + qQ - T}{(p-1)(q-1)}$$

x ＝遺失一區之產量

p ＝品種數

q ＝區集數

P ＝有遺失區之某品種產量和減去遺失產量

Q ＝有遺失區之某區產量和減去遺失產量

T ＝減去遺失產量後之產量總和

今既假定某小區之作物並無收穫，故所在行之原有產量，須減去此遺失之產量 34。

$P = 334 - 34 = 300$。

$Q = 522 - 34 = 488$

$T = 4782 - 34 = 4748$

以已知數代入公式求得

$$x = \frac{(13 \times 300) + (10 \times 488) - 4748}{12 \times 9} = \frac{4032}{108} = 37.333$$

所求得之遺失產量 x 為 37，而觀察所得之遺失產量為 34，此足見估計之產量，常較原有產量稍有出入。惟在未得善法以前此法尚屬可用。

今試觀此一區之產量之更動，對於全變異數有何影響。試以 37 代入 34 之一區內，而用變異數分析法求結果。自由度須減少一個，因一區已遺失也。

分析之結果

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
品種間	12	1548.0923	129.0077
區集間	9	8545.4231	949.4915
差誤	107	1670.6769	15.6138
總數	128	11764.1923	

差誤之變異數平方均數開方，卽爲標準差 3.95，此數與表 92 所求得之全產量標準差 3.94（見表 92）相差極微。

葉次氏（Yates）曾將上述公式略加修正。可用來求得第二概數，而估計數個遺失區之產量。據葉次氏證明，用校正法所得結果。與用彼所擬之繁複方法求得者，頗相符合。今以表 92 之資料，假定 4 四個小區之產量已遺失，以求多數遺失之產量之簡單方法估計之。

第一步係求諸區之平方產量，法卽以所有各區之產量，一一相加，而以區數除之。表 92 求得之產量總和爲 4782，今假定下列 4 區之產量 34，47，24，37 已遺失，故須減去之，而成

$$4782-(34+47+24+37)=4640。$$

此數以有產量之區數 126 除之，而得平均產量爲 36.83。遺失區之產量用上列公式分別求得。在計算第一區遺失產量，其餘 3 區之產量假定爲與平均產量相等，故平均產量 36.83，以 3 乘之卽得 110.49。此卽爲已遺失 3 區之產量，以之加入 4640 中，共得產量和爲 4750.49。

P 值等於有遺失區之某品種產量和減去遺失產量之數，故

$$P=344-47=297$$

Q 值等於有遺失區之每區產量和減去遺失產量，故

$$Q=594-47=547$$

p ＝品種數＝13

q ＝區集數＝10

T ＝減去遺失產量後之產量總和＝4750.49

$$x_1=\frac{(13\times 297)+(10\times 547)-4750.49}{12\times 9}=\frac{4580.51}{108}=42.41$$

其餘 3 區之遺失產量，用同一方法求得，第一次估計之數如下表：

	首次估計值
x_1	42.41
x_2	37.31
x_3	41.26
x_4	27.43

今若將估計之產量 42.41，37.31，41.26 及 27.43 加入總數中，則產量總和當為 4788.41，再以此新產量總和求二次估計量：

求二次估計所用公式與上同，P 及 Q 之值亦相同，惟 T 值則為 4788.41，減第一個遺失產量 42.41，得 4746.00。

求得：

$$x_1=\frac{(13\times 297)+(10\times 547)-(4788.41-42.41)}{12\times 9}$$

$$=\frac{4585.00}{108}=42.45$$

其他 3 區之產量，用同一方法求得如下表。

	第一次估計	第二次估計
x_1	42.41	42.45
x_2	37.31	37.30
x_3	41.26	41.29
x_4	27.43	27.33

在此例題所得結果，第一次估計量與第二次估計量相差極微，普通第二次估計量常較第一次估計者略大，與真產量頗相近似。

因欲比較本試驗所得之標準差，與上次所得標準差，相差幾何，故以二次估計之產量代入遺失區內。用變異數分析法求得差誤變異均數，以之開方，而得標準差爲 3.96。此數較原有標準差 3.94 略大。

凡估計所得產量，總難與原有產量完全符合。總之，用公式計算而得者，乃概數而已，非真値焉。若多數小區僅有極少數小區產量遺失，則用估計法補入產量，尚無大礙，若遺失區數佔大多數，則估計所得之產量，殊不可靠。

上述公式乃用以計算隨意排列之試驗，若爲拉丁方排列，此公式須略行修改如下：

$$x = \frac{p(P_r+P_c+P_t)-2T}{(p-1)(p-2)}$$

p ＝處理或品種數。

P_r ＝遺失產量區之每縱行產量。

P_c ＝遺失產量區之每橫行產量。

P_t ＝遺失產量區之每品種或每種處理之產量。

T ＝總產量。

上述估計遺失產量之公式，亦可用以估計特殊產量。有時一區之產量特高或特低，表示曾受特殊環境之影響，而其產量爲反常而不可靠。若此種產量雖未遺失，因不可靠，故以不用爲是。惟產量之是否可靠，全賴有經驗者之精密考慮而後決定，非有確實可疑之點，產量總以不隨意放棄爲是。

應用變異數分析法來分析迴歸線（Application of Variance to Regression Analysis）——第六章敍述迴歸線時，曾將依據迴歸線來估計標準差之方法說明。此種標準差或可算作假定的標準誤，而以變異數分析法來計算之。此種分析之普通方式，列表如下：

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
迴歸 未計及或餘差誤	1 N－2	變異總平方和乘 r^2 變異總平方和乘 $(1-r^2)$*	$\frac{\text{平方和}}{\text{自由度}}$
總和	N－1	離均差平方和	

* 亦可從總數減第一項之值而得之

分析迴歸線之結果時，先決定一單位之離均差平方和，此數記在"平方和"項內之總數行下，自由度爲個數減一。

今以此分析法計算第六章表 36 之 x 分佈值，用普通方法求得之 ΣfD^2，減去校正量，即爲諸平方總和 ΣS^2。表 36 之 ΣfD^2 爲 540，此乃離假定均數之和，校正量爲 0.485，若以此數平方而以組數 400 乘之，得 94.09。從 540 減去此數，即得變異數平方和 445.91，自由度爲

個數減 1，故為 399。

再從此總變異減去由迴歸線所發生之變異平方和，即為迴歸線所不計及之變異數。迴歸線之變異數平方和為相關係數自乘後與變異數平方和相乘之積，表 36 所載之相關係數為 0.217，故迴歸線變異數平方和為：

$$0.217^2 \times 445.9100 = 20.9975$$

自變異平方總和減去此數，得 424.9125，即為迴歸線所不計及之變異，或賸餘變異。迴歸數之自由度為 1，故賸餘自由度為 398。兩者相除後所得之商，即為不計及或賸餘之變異平方均數。其數為 1.067619，開方則得 1.033，此即為估計標準誤。此數可與用普通方法 $S_x = \sigma_x \sqrt{1-r^2}$ 所求得之估計差誤相比較。其數為 1.031，(見第六章)。

此數與標準誤 1.033 相差極微，乃由於小數點取捨略有出入所致，此可知估計差誤亦可用變異數分析法來求得之。

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
迴歸	1	20.9975	20.997500
未計及或賸餘差誤	398	424.9125	1.067619
總和	399	445.9100	

若將分析法之用度，試用於第八章所述之複相關，則更有意味。今試先從第七章簡單相關表 58，查得 Y 與 A 之簡單相關為 .654，根據表 58 之各值，求得Y之變異數平方總和為 1335.27，今以相關數自乘，而與平方和相乘，得 571.1163。

$$0.654^2 \times 1335.27 = 571.1163$$

從總變異平方和減去迴歸線之變異平方和，即爲未計及之變異平方和，

故 $$1335.2700 - 571.1163 = 764.1537$$

若以 $1-r^2$ 之數乘總變異平方和，所得結果相同。

個數爲 25，故總自由度爲 24，減去迴歸線之一個自由度後，得未計及之自由度爲 23。未計及之變異平方總數，以自由度 23 除之，而開方，得標準誤 5.764。第八章所求得之未計及標準誤爲 5.763，此兩數幾相等。

變　異　數	自由度	平方和	平方均值或變異數
迴歸	1	571.1163	571.116300
未計及或殘餘差誤	23	764.1537	33.224074
總　　和	24	1335.2700	

從變異數分析法求離均數之標準誤，可將總自由度除變異數平方和，而以答數開方。本例題之離均數標準誤爲 7.459，此數與第八章所得者同。

分析複相關數(multiple correlation)之法與簡單相關相同，惟所用之相關係數，爲複相關係數 (coefficient of multiple correlation) 而已。此例題之複相關係數爲 .700，以此數自乘，而與總變異平方和 1335.2700 相乘，得 654.2823，從總變異減去此數，即爲未計及之變異數 680.9877。

$$0.700^2 \times 1335.2700 = 654.2823$$

$$1335.27 - 654.2823 = 680.9877$$

本例題對於Y之相關,共有兩個未知數,故迴歸數之自由度爲 2，而未計及之自由度爲個數減 3，以賸餘變異數平方和,被自由度除之,而以其答數開方,即得標準誤 5.564。此數與第八章所求得之假定標準誤相等。

$$\sqrt{\frac{680.9877}{22}} = 5.564$$

求二個變量之複相關變異數分析

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
迴歸	2	654.2823	327.141150
未計及或賸餘差誤	22	680.9877	30.953986
總和	24	1335.2700	

三個變量之重複相關係數爲 0.866，照前法求得結果如下表:

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
迴歸	3	1001.3937	333.797900
未計及或賸餘差誤	21	333.8763	15.898871
總和	24	1335.2700	

因多一個變異，故自由度亦多一個，未計及之自由度改爲 21，以此數除賸餘變異平方和,而開方之,得標準誤 3.987，此數與第八章所求得

者相同。此表示複相關之估計差誤，亦可用變異數分析法來求得之，在增加變量時，自由度亦隨之而增，故自由度之多少，照變量之多少而增減。

r 或 R 值之顯著與否，亦可用變異數分析法來決定之。試以末一試驗，(即上表所載之差誤平均數)求得 F 而決定 R 值之顯著與否。

$$F=\frac{333.797900}{15.898871}=21.00$$

檢查附錄表 X，自由度爲 3 及 21 時，表上之 F 值小於求得之 F 值，故 R .866 是顯著。此種比較又可以求 R^2 開方而得。R^2 爲迴歸線之變異平方和與總變異平方和之比，仍用上述例題，求得：

$$R^2=\frac{1001.3937}{1335.2700}=0.749956,\quad R=0.866$$

變異數分析法復可用下表各值來計算直線迴歸。linear regression 求直線迴歸之方法，已於第七章詳述，今僅述直線迴歸離中差之求法。

直線迴歸之變異總和爲總變異和乘 r^2 之積，直線迴歸之離中差，爲相關率 correlation ratio 之變異平方和與相關係數變異平方和之相差乘總變異平方和，即總變異平方和乘 η^2-r^2。總自由度爲 $N-1$，而直線迴歸之自由度爲 1，故直線迴歸之離差變異數自由度爲 $n-2$。n 爲計算相關率時所用之豎列數。賸餘變異數之自由度爲 $N-n$，此可從總自由度減去直線迴歸之自由度及直線迴歸之離中差自由度而得。

今以第七章表 48 之資料，來引證此法之計算。相關係數爲 0.865，而 η_{yx} 爲 0.904。求此相關時共用 11 綫，故 $n=11$，總變異數之平方

和如法求得，為 442.9167。以此數照下表乘 r^2，(η^2-r^2)，及 $(1-\eta^2)$ 等值

變 異 數	自由度	平 方 和	平方均數或變異數
直線迴歸	1	變異總平方和乘 r^2	
直線迴歸之離中差	n−2	變異數總平方和乘 (η^2-r^2)	$\frac{\text{平方和}}{\text{自由度}}$
行內賸餘差誤	N−n	變異數總平方和乘 $(1-\eta^2)$	
總 和	N−1	離均差之平方和	

求得變異數之結果如下表：

變 異 數	自 由 度	平 方 和	平方均數或變異數
直線迴歸	1	331.4013	331.4013
直線離中差	9	30.5573	3.3953
行間賸餘差誤	289	80.9581	.2801
總 數	299	442.9167	

欲知所觀察之數，對於計算所得之直線，有否差離，須確定所有離直線之差數大小，是偶然所致，抑眞有差異存在。此可由直線迴歸之差異變異數，比較賸餘變異數而得。若無眞眞差異，則兩個變異數必幾相等。若略有差異，則上表第二行之變異平方均數，必大於第三行之變異平方均。今求得第二行之變異平方和為 30.5573，以其自由度 9 除之，得變異平方均為 3.3953，第三行之變異平方均數為 0.2801，第二行之均數既大於第三行之均數，故二數之間，必有差異。今以第二行之值除

第三行，而得F值爲 12.12。查附錄表 X 內無自由度 9 及 299 者，故從其最近之自由度 $n_1=8$，$n_2=300$ 求之。F之大值爲 2.57，此數小於求得之F值 12.12，故直線之間確有差異。此法所得結果，較第七章之比較差異爲準確，因用此法，可將總變異數分析計算也。

變異數分析又可用以分析曲線迴歸 curved regression line 之適合程度，用以配合曲線迴歸之資料，載表 48，結果載表 50。分析時先求得觀察數之離均差，其數載於表 50。此列之平均數爲 2.007，從均數求得各項之離均差自乘相加，而得其平方和爲 25.8669。組數爲 11，故自由度爲 10，用下列公式 $\frac{N(N^2-1)}{12}B^2$，求得直線迴歸爲 21.7827。此數爲直線迴歸，或一次迴歸 first order regression 所能除去之變異數，在上列公式及下列之公式中，N 等於組數，B，C 及 D 爲配合曲線迴歸之數，詳見第七章，一經複習，便易明瞭。

二次迴歸 second order regression 所能除去之值爲 3.9674，乃用下列公式求得者。

$$\frac{N(N^2-1)(N^2-4)}{180}C^2$$

求三次迴歸 third order regression 所能減除變異之公式爲

$$\frac{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}{2800}D^2,$$

現求得其答數爲 0.0556。

茲將用變異數分析法所得各次迴歸所除之變異數及其賸餘變異列舉如下表。

變異數	自由度	平方和	平方均數或變異數
一次迴歸	1	21.7827	21.7827
二次迴歸	1	3.9674	3.9674
三次迴歸	1	0556	.0556
賸餘差誤	7	.0612	.0087
總和	10	25.8669	

將一次，二次及三次之迴歸值相加，而從總變異平方總和減去之，得賸餘變異平方和爲 0.0612。此數即爲分析迴歸時未計及之變異，每一次迴歸之自由度爲 1，故尚有 7 個自由度爲賸餘之自由度。

第一及第二次之迴歸變異平方均數，皆高出於賸餘變異頗大，故差異爲顯著。第三次迴歸變異較賸餘變異略大，今求得其 F 值 .0556/.0087 =6.39。查表 X 自由度 1 及 7 之 F 值小於 6.39，故差異爲顯著。此可知自一次迴歸至三次迴歸，變異皆累次減小。此試驗或可再向前分析，惟從本分析結果及表 50 末一項之結果而論，觀察數頗與曲線迴歸相合。故根據此迴歸線所估計之值即有差誤，亦必甚小。

本章諸例題引證變異數分析法之效用頗廣。且除用於本例題所舉之農藝問題外，諸如肥料試驗，飼料試驗等類似問題，皆可參照本例題而觸類旁通，借假應用。總之用變異數分析法，可將總變異數分成數部而除去之，故所得差誤，自較用機誤或用普通老法所求得之變異爲準確。因老法未將已知之變異除掉故也。

第十四章

變異數分析——繁複試驗

上章所述之變異數分析法乃用以分析簡單試驗(Simple experiment)者,故算法亦較簡易。若遇繁複試驗(Complex experiment)當用本章所敍述之方法來解決之。今以表 94 所載之產量記錄爲例題,而以本法演算之。有地兩塊,分種小麥五品種,每品種複種五次,共種四年。今以 A, B, C, D, E 五字代表五品種之名稱。

表 94.

小麥品種產量記錄(英畝英斗計)

每品種重複種五次,種二田,種四年、1928, 1929, 1930, 1931

第一田第一年之記錄

1928

區 號	品		種			區坎總和
	A	B	C	D	E	
1	23	29	26	20	31	129
2	20	29	21	18	20	108
3	17	19	26	13	17	92
4	24	31	30	18	24	127
5	20	29	22	18	21	110
品種總和	104	137	125	87	113	566

第一田第二年記錄

1929

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	19	19	23	25	29	115
2	23	22	24	29	24	122
3	30	33	36	25	27	151
4	31	31	30	28	34	154
5	25	26	22	20	24	117
品種總和	128	131	135	127	138	659

第一田第三年記錄

1930

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	21	21	24	22	33	121
2	31	25	46	54	58	214
3	49	56	49	56	62	272
4	39	53	44	38	51	225
5	31	41	62	37	46	217
品種總和	171	196	225	207	250	1049

第一田第四年記錄

1931

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	48	50	42	46	45	231
2	51	51	42	49	46	239
3	38	38	36	45	39	196
4	43	46	40	47	38	214
5	43	36	35	29	36	179
品種總和	223	221	195	216	204	1059

第二田第一年記錄

1928

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	21	27	31	18	28	125
2	27	29	40	15	13	124
3	24	30	32	21	21	128
4	30	33	39	28	21	151
5	20	25	37	30	20	132
品種總和	122	144	179	112	103	660

第二田第二年記錄

1929

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	30	23	33	19	24	129
2	19	24	25	21	25	114
3	25	28	28	21	20	122
4	19	27	18	18	32	114
5	22	22	24	22	17	107
品種總和	115	124	123	101	118	586

第二田第三年記錄

1930

區集	品種 A	B	C	D	E	區集總和
1	43	18	53	38	50	202
2	28	9	31	57	53	178
3	37	27	25	49	47	185
4	27	13	34	23	27	124
5	32	20	29	36	37	154
品種總和	167	87	172	203	214	843

第二田第四節記錄

1931

區集	品		種			區集總和
	A	B	C	D	E	
1	41	48	56	47	43	235
2	36	30	54	46	25	191
3	36	35	31	33	33	168
4	46	32	37	39	39	193
5	37	20	31	46	31	165
品種總和	196	165	209	211	171	952

分析繁複試驗之結果時，宜先用普通簡單方法，分析第一年，(1928 年)第一塊地上之產量記錄。在此試驗中所種區數共有 25，故總自由度爲 24，共有五品種，重複五次，故品種間之自由度爲 4，區集間之自由度亦爲 4。由總自由度 24 內減去品種及區間之自由度 8，尙賸 16 個自由度此卽爲差誤的自由度。

第一步求總變異平方總和(sum of the squares for total)——其法已詳上章，今略述之。總變異平方和，卽爲各區產量平方和減校正量後之差數。校正量卽爲 25 區產量總和自乘，與區數 25 相除之商數。——$(566)^2/25 = 12814.24$。25 區產量平方總和爲 13424，減去校正量 12814.24 後，淨得總變異數平方總和爲 609.76。

第二步求品種間之變異平方數和 (sum of the squares for varieties)——法以每品種五區產量之和平方，而後相加，以區數五除之，再自其商，減去校正量。例如求得五品種平方和爲 65548，以 5 除之得 13109.60，再減去校正量 12814.24，得 295.36，此數卽爲品種間之變

異數平方總和。

第三步求區集間變異平方總和 (sum of the squares for blocks)——法與求品種間之變異平方總和頗相類似，故不復贅。每區產量之平方和為 64998，因每區有五個品種，故以 5 除之，得 12999.60。減去校正量 12814.24，得 185.36，此卽為區間變異平方總和。

第四步求賸餘變異或差誤——將總變異數平方總和，減去品種間之變異數平方總和，及區集間之變異數平方總和，卽得賸餘變異或差誤。再從總自由度減去各品種及區集間之自由度，所餘者卽為差誤之自由度。平方均數係將平方總和除自由度而得。因品種間之變異與差誤相較有顯著之差異，故知品種間之產量差異必大。

所得變異數分析結果詳下表：

變異數	自由度	平方和	平方均數
品種間	4	295.36	73.840
區集間	4	185.36	46.340
差誤	16	129.04	8.065
總數	24	609.76	

欲將本試驗全部分析，須將品種間，田間，年間，區集間，及此種因子之相互影響，及各因子之變異，與相互影響之變量，一一分別決定。玆分述如下：

自由度為觀察總數減一，本試驗四年共有 200 小區，故總自由度為 199。區集之自由度為 4，年份之自由度為 3，兩地之自由度為 1，品種

之自由度爲 4，一次相互影響(first order interaction)之自由度爲二個有關係因子之自由度之積，故品種與年份之影響自由度爲 4×3=12。餘類推。二次相互影響(second order interactions)之自由度爲三個有關因子之自由度之積，差誤之自由度爲總自由度減去各個自由度之餘數。表 94 所得之自由度如下：

變異數	自由度
品種間	4
田間	1
年間	3
區集間	4
相互影響：	
品種×田	4
品種×年	12
田×年	3
品種×田×年	12
區×年	12
區×田	4
區×年×田	12
差誤	128
總數	199

分析此複雜之問題時，先將各種有關之自由度求得，然後分求各個變異數。求本題之總變異數總和之法，與上述本題內求第一年第一塊地上之產量相同。惟現在所求之變異，包括全試驗，故共有 200 小區，宜將 200 小區之產量一一自乘後相加，其平方總和爲 228414。從上數減校正量 6374 (產量總和)^2/200 ——得 25274.62，此爲總變異數平方總和，此數以自由度 199 除之，得總變異平方均數。

求品種間，田間，年間，及相互影響間，與其他各種變異分析時，須將表 94 產量，按照所需者，歸併計算。今求得各品種在田 I 與田 II 之產量，及其產量和，載下表：

每品種與每田之產量記錄

田	品		種			總和
	A	B	C	D	E	
I	626	685	680	637	705	3333
II	600	520	688	627	606	3041
總和	1226	1205	1368	1264	1311	6374

此種產量，係將每年每區之品種產量，相加而得。例如品種 A 第一田內第一年每區產量爲 104，第二年爲 128，第三年爲 171，第四年爲 223，四年相加得總產量爲 626，品種 A 第二田之總產量爲 122+115+167+196=600，若將上表 A, B, C, D, E 五個品種之產量相加，則爲一田之品種產量和，例如 3333，若將第一田及第二田之數相加，則爲每品種之產量和。例如品種 A 兩田產量爲 1226。若求品種間之變異，須將每品種二田之產量和，一一自乘相加，得 8142942

$$(1226)^2+(105)^2+(1368)^2+(1264)^2+(1311)^2=8142942_{\circ}$$

此數須以 40 除之。因每一品種和，包括二田五區及四年之產量，$2\times5\times4=40$。8142942 除 40 等於 203573.55，再從此數減校正量 203139.38，得 434.17，卽爲品種間之變異數平方和，品種共有五個，故自由度爲 4，

求得之變異數平方和及自由度記錄在表 95 第一行內。

田間變異之求法與此相彷彿，將各田之產量自乘相加，而以 100 除之，因每一田之產量，包括五個品種，重複種五區及四年之產量也。求得變異數爲 20356570/100=203565.70。減去校正量 203139.38，得 426.32，爲田間變異數平方總和，自由度爲 1，此二數記在表 95 第二行內。品種與田間之相互影響之變異，係先求得總變異而後減去品種間及田間之變異數與其自由度，其步驟則爲先將每田每品種之產量，一一自乘相加，得 4090404，此和被 20 除之，——此總數包括五區四年之產量——然後減去校正量 204520.20，得總變異平方和爲 1380.82。自由度爲 9，若將此總變異減去前求得之品種間變異數與田間變異數之和，則所賸者爲差誤，亦卽品種與田間相互影響之變異也。賸餘變異之自由度求法係從總變異自由度減去品種間變異自由度與田間變異自由度之和卽得。

本分析之各步驟，詳載於下頁，若欲知求相互影響之變異時，須將品種之平方及田間平方自總變異數平方內減去之，此可以分析 1928 年試驗之簡單方法之同一理由來說明之。當分析 1928 年一年之試驗時，吾等自總變異中，卽各小區自乘之和，減去品種間及區集間變異。在分析相互影響時——品種與田間之相互影響——表中所記載者爲每一品種之五區四年總產量，故所謂每品種產量者，乃卽此總產量，而非每區或每年之產量。故求相互影響之變異時，亦須若求一年試驗之變異，先求得總變異之和，再求得品種間及田間之變異，而自總變異中減去之。所賸下之差誤亦爲品種間及田間之相互影響。

品種間	田間	相互間
1503076 1452025 1871424 1597696 1718721 總和 8142942 $\frac{8142942}{40}=203573.55$ 203573.55 −203139.38 434.17	11108889 9247681 總和 20356570 $\frac{20356570}{100}=203565.70$ 203565.70 −203139.38 426.32	391876 469225 462400 405769 497025 360000 270400 473344 393129 367236 總和 4090404 $\frac{4090404}{20}=204520.20$ 204520.20 −203139.38 1380.82

總平方和	1380.82	9 自由度
品種間平方和	−434.17	−4 自由度
田間平方和	−426.32	−1 自由度
相較	520.33	4 自由度

上表中所得之相差數 520.33，即爲品種間及田間之相互影響，此數與其自由度均記載於表 95，第五行內。（見第 377 頁）

若求品種間年間及兩者之相互影響，須先將第一第二兩田之品種產量相加而計算之。例如 1928 年品種 A 第一田所得產量爲 104，第二田則得 122，兩田共得 226，以此數爲 1928 年之品種 A 產量。品種 B 在 1928 年之收穫，第一田爲 137，第二田爲 144，兩田共得 281。其他

各品種之產量，依法求得，而記載於下列表中。

每品種與每年之產量記錄

年份	品		種			總和
	A	B	C	D	E	
1928	226	281	304	199	216	1226
1929	243	255	263	228	256	1245
1930	338	283	397	410	464	1892
1931	419	386	404	427	375	2011
總和	1226	1205	1368	1264	1311	6374

總平方和	13414.42	19 自由度
品種間平方和	- 434.17	- 4 自由度
年間平方和	-10398.34	- 3 自由度
相較	2581.91	12 自由度

品種間之變異已求得，見表 95 第一行。年間之變異可將每年總產量一一自乘相加，而以 50 ——每年產量包括 5 小區 5 品種 2 田——除之，其答數為 10676886/50=213537.72。減去校正量 203139.38，得 10398.34，此為年間之變異平方和。此數與其自由度俱載於表 95，第三行。(見第 377 頁)

求品種間與年間之相互影響時，先求得總變異為 13414.42。其求法則以每年每品種產量一一自乘相加，而以 10 除之，(包括 5 區 2 田) 2165538/10=216553.8，減去校正量 203139.38，得 13414.42。自由度為 19。從此總變異數減去品種間之變異及年間變異，得賸餘變異

2581.91，此卽爲品種間及年間之相互影響之變異平方總和，此數及其自由度載表 95，第六行。（見第 377 頁）

求田間及年間之變異數及其相互影響，則注重在每年每田之產量，故同年內之各品種及各區產量，須併合計算如下表：

每田與每年之產量記錄

年份	田 I	田 II	總和
1928	566	660	1226
1929	659	58[illegible]	1245
1930	1049	843	1892
1931	1059	952	2011
總和	3333	3041	6374

總平方和	11759.34	7 自由度
田間平方和	− 426.32	−1 自由度
年間平方年	−10398.34	−3 自由度
相較	934.68	3 自由度

田間及年間之變異平方總和，已在上節求得，其答數載表 95 第二第三行。今僅求兩者之相互影響，先將每年每田之產量分別自乘相加，而以二十五除之（包括五區五品種），再減去校正量，得 5372468/25−203139.38=11759.34。自由度爲 7。從此變異數及自由度減去田間變異及其自由度，與年間變異及其自由度，得田間與年間相互影響之變異平方和爲 934.68，自由度爲 3，此二數記錄於表 95，第 7 行。（見377頁）

現在所敘述者，皆為一次相互影響，即兩個變異相互發生之影響也。今將進求三個變異所發生之相互影響，亦名之曰二次相互影響。若欲求三次四次之相互影響，可照此類推。

求品種間，田間，年間之二次相互影響，其產量歸併如下表：

每品種每田每年之產量記錄

田	品種 A	B	C	D	E	總和
1928						
I	104	137	125	87	113	566
II	122	144	179	112	103	660
1929						
I	128	131	135	127	138	659
II	115	124	128	101	118	586
1930						
I	171	196	225	207	250	1049
II	167	87	172	203	214	843
1931						
I	223	231	195	216	204	1059
II	196	165	209	211	171	952
總和	1226	1205	1368	1264	1311	6374

表中所列各值，係表 94 所記產量之和。

品種間，田間，及年間之變異，與一次相影互響已一一求出，結果載

表 95。故今只須求二次相互影響。先將上表所記產量逐一自乘相加，而以 5 除之，因每一產量包括 5 區之產量也。再從自乘之和減去校正量，得變異數平方和爲 16069.42。

$$1096044/5-203139.38=21908.80-203139.38=16069.42$$

自由度爲 39，再從此變異數平方總和 16069.42，及自由度 39，減去品種間之變異平方和，田間之變異平方和，與年間之變異平方和及各變異之自由度，與三個一次相互影響之變異平方和及其自由度。（品種與年間，品種與田間，年間與田間。）得結果如下表：

總平方和	16069.42	39 自由度
品種間平方和	− 434.17	− 4 自由度
田間平方和	− 426.32	− 1 自由度
年間平方和	−10398.34	− 3 自由度
品種及田間之相互影響平方和	− 520.33	− 4 自由度
品種及年份之相互影響平方和	− 2581.91	−12 自由度
田間及年份之相互影響平方和	− 934.68	− 3 自由度
相　較	773.67	12 自由度．

賸餘變異 773.67 及自由度 12，即爲二次相互影響之變異數及自由度，此數及其自由度載表 95 第 8 行。

求區集間變異及區集間與其他因子所發生之相互影響，法與前同。求區集間與年間之變異時，先將每區每年之兩田產量歸併，而記錄於附表內，例如第一區在 1928 年收得 129+125=254 克。

年間變異已求得，見表 95 第三行。求區集間變異時，將每區總產量一一自乘相加，而以 40 除之，（包括 5 品種，2 田，4 年之產量）再從

除得之商，減去校正量 203139.38，得區集間變異平方和爲 286.37，載表 95 第 4 行。

$$8137030/40-203139.38=203425.75-203139.38=286.37$$

求區集間及年間之相互影響之變異時，可將每年及每區之產量分別自乘，相加，而以 10 除之，（包括 5 品種 2 田之產量）再減去校正數，得變異和爲 12777.62。

$$2159170/10-203139.38=12777.62$$

自由度爲 19，由此變異數 12777.62 及自由度 19，減去上面求得之區集間及年間之變異與自由度，即得變異數 2092.91，自由度 12。此即爲相互影響之變異數，及自由度，此數載於表 95 第 9 行。

求區集間及田間之相互影響時，產量歸併如下表：

每區每年之產量記錄

年份	區集					總和
	1	2	3	4	5	
1928	254	232	220	278	242	1226
1929	244	236	273	268	224	1245
1930	323	392	457	349	371	1892
1931	466	430	364	407	344	2011
總和	1287	1290	1314	1302	1181	6374

總平方和	12777.62	19 自由度
區集間平方和	－ 286.37	－ 4 自由度
年間平方和	－10398.34	－ 3 自由度
相較	2092.91	12 自由度

上表所列之數，係將每田每區四年之產量歸併而得，例如第一區第一田之產量爲 129+115+121+231=596。

區集間變異及田間變異已求得，結果載表 95 第 4 行及第 2 行，求相互影響時，先將表內各產量自乘相加，而以 20 除之，(包括 5 品種 4 年)減去校正數，得變異數 1529.72，自由度 9。再從此總變異數及其自由度內，減去區集間變異及自由度，與田間變異及自由度，得賸餘變異爲 817.03，及自由度 4，此卽爲區集間及田間相互影響所生之變異與自由度，結果載表 95 第 10 行。

求二次區集間，田間，及年間相互影響時，產量歸併如下表：

每區每田之產量記錄

田	區		集			總和
	1	2	3	4	5	
I	596	683	711	720	623	3333
II	691	6.7	603	582	558	3041
總和	1287	1290	1314	1302	1181	6374

總平方和	1529.72	9 自由度
區集間平方和	− 286.37	− 4 自由度
田間平方和	− 426.32	− 1 自由度
相較	817.03	4 自由度

表中所載各數，係從表 94 之產量歸併而得。

區集間，田間，年間諸變異，及相互間之影響，已皆求出，載表 95。故現所求者，僅二次相互影響所生之變異而已。其法先將上表所載產量

——自乘相加，而以5除之，——每一數包括5品種之產量——自其商減去校正數，得變異數爲 16654.22，

$$1098968/5-203139.38=16654.22$$

自由度爲 39，再從變異數 16654.22，及自由度 39，減去區集間，田間，年間諸變異及各自由度，與三者（區集間與田間：區集間與年間；年間與田間）之相互影響之變異及其自由度，而得賸餘變異爲 1698.57，自由度爲 12。此即爲二次相互影響所生之變異平方和，載表 95 第 11 頁。

每區每田及每年之產量記錄

田 I	品				種	總和
	1	2	3	4	5	
1928	129	108	92	127	110	566
1929	115	122	151	154	117	659
1930	121	214	272	225	217	1049
1931	231	239	196	214	179	1059
田 II						
1928	125	124	128	151	132	660
1929	129	114	122	114	107	586
1930	202	178	185	124	154	843
1931	235	191	168	193	165	952
總和	1287	1290	1314	1302	1181	6374

總平方和	16654.22	39 自由度
區集間平方和	− 286.37	− 4 自由度
田間平方和	− 420.32	− 1 自由度
年間平方和	− 10398.34	− 3 自由度
田間及年份之相互影響平方和	− 934.68	− 3 自由度
區集間及年份之相互影響平方和	− 2092.91	− 12 自由度
區集間及田間之相互影響平方和	− 817.03	− 4 自由度
相　較	1698.57	12 由度

表　95.

用變異數分析法所求得之全試驗結果

變異數	自由度	平方和	平方均數	F 值
1　品種	4	434.17	108.5425	3.32
2　田	1	426.32	426.3200	12.66
3　年份	3	10398.34	3466.1133	102.93
4　區集	4	286.37	71.5925	2.13
相互影響:				
5　品種×田	4	520.33	130.0825	3.86
6　品種×年份	12	2581.91	215.1592	6.39
7　田×年份	3	934.68	311.5600	9.25
8　品種×田×年份	12	773.67	64.4725	1.91
9　區×年份	12	2092.91	174.4092	5.18
10　區×田	4	817.03	204.2575	6.07
11　區×田×年份	12	1698.57	141.5475	4.20
12 差誤 區×品種 區×品種×田 區×品種×年份 區×品種×田×年份	16 16 48 48 總和 128	4310.32	33.0744	
13　總和	199	25274.62		

求差誤時,可將表95第1行至11行各變異平方和相加,得 20964.30 將此數從總變異平方總和 25274.62 (見表 95 第 11 行 內減去之,得賸餘變異爲 4310.32。此爲差誤的變異平方總和。此變異數包括區集間,及品種間之相互影響,與區集間品種間二次相互影響之諸變異。若將差誤一一分析,可分別求得所包括之變異數及自由度。

所賸之差誤 4310.32 之數,可用每年每田之產量分析來校對其正誤。1928 年第一田所求得之變異總和爲 129.04,用同樣方法,求得其餘三年之變異總和而記載于表 96 內。

若將每一分析之小區變異平方和、及品種變異平方和相加,而從總變異平方和內減去之,所餘者即爲每一分析結果差誤。吾等今所欲知者爲全試驗之差誤,故不必將每個分析之差誤算出,祇須將每個分析之總變異,區間變異,品種間變異相加,而減去區集間變異及品種間變異,所賸者亦爲 4310.32,與用繁複變異分析法所求得之差誤相同。

此法可用以校對用繁複變異分析法,逐層分析下來之差誤及自由度,是否無誤。每一試驗之差誤自由度爲 16,今共有 8 個試驗,故差誤總自由度爲 $16\times8=128$,此數與用繁複分析法算得者相同。

本試驗之結果,可用以比較各部因子之變異與差誤。變異應作之相差,是否顯著。變異平方均數可從變異平方和除自由度而得之。以變異平方均數除差誤平方均數,即得 Snedecor 之 F 值。查附錄表 X 所得之比較,除區間變異外,餘均表示顯著之差異。諸比較之最有意義者,爲品種間之變異,若 F 值適在表X兩個 F 值中間而近乎較高之值,則可斷語,各品種之產量自有差別。

表 96.

用普通分析法逐一計算之結果與用繁複分析法歸併計算之結果比較表

逐年計算之平方和

田	年份	總和	品種	區集	差誤
I	1928	609.76	295.36	185.36	
	1929	513.76	17.36	291.76	
	1930	4196.96	710.16	2410.96	
	1931	787.76	114.16	487.76	
II	1928	1190.00	738.60	98.00	
	1929	460.16	86.16	57.36	
	1930	3959.04	1083.44	735.04	
	1931	1797.84	364.64	628.64	
總和		13515.28	4310.08	4894.88	4310.32

平方和之比較

變異數	照單獨試驗分析之結果	照複雜試驗分析之結果錄表 95
總和	13515.28	13515.28 (1,4,5,6,8,9,10,11,13)
品種間	4310.08	4310.08 (1,5,6,8)
區集間	4894.88	4894.88 (4,9,10,11)
差誤	4310.32	4310.32 (12)

因品種間確有差異，故今將進而比較各品種之產量。將差誤之變異數平方均數 33.6744 開方，而得單區之差誤爲 5.80，每一品種重複種 40 小區，（二田五區四年）故每品種之產量和除 40，卽得平均產量如下表：

品種	平均產量
A	30.65
B	30.12
C	34.20
D	31.60
E	32.77

以5.80除$\sqrt{40}$得0.92，卽爲40小區之平均標準差。若以此數以$\sqrt{2}$乘之，得相差標準誤爲1.30，兩倍之爲2.60。

今以2.60爲損益標準點，而以五個品種之平均產量相比較。品種C之平均產量爲34.20，比品種A多3.55，比品種B多4.08，皆大於標準數2.60，故品種C確勝於A及B。品種C較品種D僅多2.60，適與標準數相等，故是否優良，尙難斷言。品種E較品種B多產2.65，故E略優於B。

田間及年間之變異經減去後，差誤減小不少。因子間相互影響所發生之變異，比差誤變異大得多，此可知各品種對於不同之年份及不同之土地，常發生不同之感影。此或可算出F值，而從附表X中求得其差異程度。

分析繁複試驗之方法係根據變異數分析法而引申之。其計算步驟本章曾略述之。本方法之效用，在將集成之因子，一一分析，俾將可以算出之因子去掉，而專比較無從算出之因子。若有試驗在數年及數地舉行者，用此法比較極爲合適，此外若土壤肥料問題，及栽培試驗問題等，若以此法分析，亦甚方便。又試驗若遇失株等情形，亦可用此法來測定所估計得之失株產量是否準確。

第十五章

試驗技術問題

本書所述之統計方法，大都爲農業研究之用。而試驗技術，Plot Technic 亦爲農業研究一重要問題，故本書特於全書之末，另闢一章以敍述之。試驗技術千頭萬緒，本章爲篇幅所限，勢難一一詳述，茲僅擇其較爲重要者，簡略言之而已。

試驗技術之主旨，在研究何種試驗宜用何種小區始最合適。吾人常用小區試驗之結果，以測定植物之生長能力，或決定肥料種類及分量，對於植物之影響等。用小區試驗來解決一特殊問題，間或有之，惟用小區試驗來研究品種差異，栽培試驗，及肥料試驗等，較爲普通。舉行試驗時，對於何種試驗，宜用何種小區及如何排法，實爲一重要問題。本篇之目的，在討論小區之種類及何種試驗宜用何種小區，與決定小區適合程度之方法，及分析試驗結果之各法。

初用技術試驗時，人都以爲一區一品種或一試驗處理已足比較，惟所得結果，常多參差或自相矛盾之弊。爲補救起見，學者乃漸注意於田中小區之狀況，乃知雖平坦之田，其各部份土壤肥力之差異仍頗大，故雖在毗連之兩鄰區內舉行試驗，結果亦不易完全相同。區與區之土壤肥

力，既不相同，故在比較品種產量或肥料效力時，實有將試驗一再重複舉行之必要。同田內之小區差異既公認爲不可免，學者乃復進而研究差異之程度，究竟何如。

土壤差異 Soil Heterogeneity—— 海力斯 (Harris)爲舉行大規模試驗以研究土壤差異之第一人。彼曾應用相關原理，而擬一計算差異係數(coefficient of heterogeneity)之方法，來決定小區之差異程度。今以表 97 (383頁)之資料，引證此差異係數之求法，

本試驗共有 32 小區，照海力斯氏方法，此 32 區可成各種排法，可排作 1×2 (一區闊二區長之意) 或 2×1，(二區闊一區長之意)同時又可排成 1×4, 4×1 等等。現本試驗所用者爲 2×2 之排法，卽闊與長相等，皆爲兩區。計算時所用各値如下：

M_p = 小區之平均數

n = 每組小區區數

m = 組數

$\Sigma(P^2)$ = 小區產量平方和

$\Sigma(C_p^2)$ = 每組產量平方和

σ_p^2 = 小區產量之變異數

求土差係數之公式爲：

$$\text{土差係數 } r = \frac{\left\{ [\Sigma(C_p^2) - \Sigma(P^2)] \,/\, m[n(n-1)] \right\} - M_p^2}{\sigma_p^2}$$

第一組四個小區之產量爲 22, 23, 23, 及 22。四區之和爲 90，自乘之得 8100。其他各組之產量平方和，用同一方法求得之。各隊相加，

而得諸除產量平方總和爲 51488。變異數爲 2.8750，係用變異數分析法，從產量平均數求得各小區產量之離均差而得。計算各步，詳見表97。將已知數代入公式，得土差係數爲 0.710±.059（機誤 .059 之數，用普通計算機誤法求得之。此數表示各區之產量關係既大，而土壤差異亦高，若鄰近區之產量並無相關，則土差係數必低。

表 97.

用以決定土差係數之引例

22	23	22	20
23	22	22	20
21	22	21	19
22	21	21	19
20	18	20	19
18	20	19	20
18	17	20	18
18	17	20	18

Mp ＝小區之平均數 ＝ 20

n ＝每組小區區數 ＝ 4

m ＝組數 ＝ 8

$\Sigma(p^2)$＝小區產量平方和 ＝ 12892

$\Sigma(Cp^2)$＝每組產量平方和 ＝ 51488

σp^2 ＝小區產量之變異數＝2.8750

Cp	Cp²	P	P²	離均差	D²
90	8100	22	484	2	4
86	7396	23	529	3	9
76	5776	23	529	3	9
70	4900	22	484	2	4
84	7056	21	441	1	1
80	6400	22	484	2	4
78	6084	22	484	2	4
76	5776	21	441	1	1
$\Sigma(C^2p)=51488$		20	400	0	0
		18	324	−2	4
		18	324	−2	4
		20	400	0	0

餘類推　$\Sigma(P^2)=12892$

餘類推　$\Sigma D^2=92$

$N=32$

$\sigma p^2=92/32=2.8750$

$$\text{土差係數 或 } r=\frac{\left\{[\Sigma(Cp^2)-\Sigma(P^2)]/m[n(n-1)]\right\}-Mp^2}{\sigma p^2}$$

$$r=\frac{\left\{[(51488-12892)]/8[4(4-1)]\right\}-400}{2.8750}=\frac{2.0417}{2.8750}=.710$$

海力斯氏曾作多次試驗來決定土壤差異，是普遍的現象，抑限於局部的環境。玆將彼所得結果之一部份列表於下，以資參考。

表 98.

各種作物在不同排列及歸併下之相關係數及其機誤足以表示土差之普遍性

作 物	相 關 係 數
馬鈴薯	.311±.043
牧 草	.611±.027
麥 粒	.330±.027
麥 稈	.483±.023
燕 麥	.495±.035
麥粒之內質	.391±.038
蓖 麻	
1909	.444±.099
1910	.695±.064
1911	.061±.123
1912	.326±.110
1913	.606±.078
1914	.386±,105
未去殼之米	.344±.081
玉 米	
1895	.830±.019
1896	.815±.021
1897	.606±.039

觀上表，可知田間土壤，確有差異，而其差異之程度亦甚大。雖實際

試驗時，間亦有一二田之土壤差異極低，惟據海力斯氏及其他學者所得結果，皆表示一田之內，土壤頗有差異。而此種差異，是固定，抑常變動，亦爲急待研究之問題。此卽謂同一區內之同品種產量，有否第一年特佳，而第二年特劣等現象。據海力斯及舒閉飛爾特(Scofield)兩氏試驗之結果，土壤差異，確隨年代而略有更動。故同區之產量，並不年年一樣，表 99 及表 100 示海力斯及舒閉飛爾特兩氏之數年試驗結果。

表 99.

蛇麻不同年份產量之相關表

年份	第一年與第二年	第一年與第三年	第一年與第四年	第一年與第五年	第一年與第六年
1909	.768±.051	.622±.075	.380±.105	.259±.115	.061±.123
1910	.577±.082	.447±.099	.451±.098	.274±.114	
1911	.062±.123	.313±.111	-.126±.121		
1912	.311±.111	.705±.062			
1913	. 97±.079				

在表 99，第一年與第二年五個試驗中，有三個有顯著關係，第一年與第三年，四個中有三個，第一年與第四年三個中有二個，第一年與第五年及第一年與第六年間，關係較不顯著。此表示除一二例外，每區產量，有年年相同之趨勢，表 100 示同區牧草在不同收穫狀況下之產量，其相互關係頗顯著。其他學者之作是項試驗者，所得結果，大致與海力斯氏相同。今將派克(Parker)及白登拉 (Ba.chelor) 之檸檬樹試驗結果載諸下表。

表 100.

一年內牧草各期收割量之相互比較表

牧草收割	全區	中區	$\frac{1}{4}$ 區
1913, 第一次與第二次收割	.454±.070	.442±.057	
1914, 第一次與第二次收割	.711±.049	.633±.042	.558±.034
1914, 第一次與第三次收割	.595±.064		
1914, (第一次加第二次)與第三次	.653±.057		

表 101.

不同年份之樹木產量相關表

	1922	1923	1924	1925	1926	1927
1921	.637±.010	.260±.016	-.173±.017	.170±.017	-.171±.017	-.083±.017
1922		.307±.016	.324±.016	.455±.014	.069±.017	.153±.017
1923			.595±.011	.415±.014	.347±.015	.255±.016
1924				.685±.009	.532±.012	.468±.014
1925					.550±.017	.488±.013
1926						.530±.012

此表所載結果，亦表示除少數例外外，各區產量年年相同。加白 (Garber,) 麥克凡 (McIlvaine) 及和佛 (Hoover) 等所得結果與此相類似，今轉載於表 102。

各區土壤差異，旣爲不可避免之事實，故用單區來測驗結果，實不可靠，而每一品種實有重複種植數區之必要。惟每一品種或一試驗處理，究竟宜重複種植幾次，其結果方爲可靠，亦宜研究而後決定之。

表　102.

同區而不同年份之異種作物相關表

相　　關	N	r
1927 年玉米籽粒與 1928 年燕麥籽粒	445	.58±.02
1927 年玉米分蘗與 1928 年燕麥麥桿	411	.70±.02
1927 年玉米籽粒與 1929 年小麥籽粒	445	.20±.03
1927 年玉米分蘗與 1929 年小麥麥桿	412	.33±.03
1928 年燕麥籽粒與 1929 年小麥籽粒	445	.50±.02
1928 年燕麥麥桿與 1929 年小麥麥桿	412	.49±.03

小區之大小，式樣，及重複次數 Size, Shape, and Replication of Plots ——在決定小區之大小，式樣，及重複次數時，有許多因子，須注意及之。有數種爲機械式的因子，例如整地，播種，灌溉，及收穫等是。此種工作，若用人力行之，則區之大小，與式樣，及地之平勻等等，便不若用機器之易於一致。他若試驗地之大小，與試驗品種之多少，亦爲一重要因子。

另有一種與區之大小有關之重要因子，卽爲試驗作物之種類，若所試驗之作物，需隙地較多，則所劃之區宜大，故一區仍可種數株。若每株所需之地極大，則每區植株必有限，若係棉花，玉米，高粱，等農作物，則每一區上，可以種植若干株。

關係小區之大小，式樣，學者曾多研究，此種研究皆以機誤或標準誤之大小決定之。茲將好爾(Hall)及魯珊爾(Russell)兩氏之試驗結果諸於表 103。

表 103.

不同面積小區之機誤百分數比較表

小區面積（英畝）	機誤（百分數）	
1/500	7.8	單區 *
1/250	6.7	單區
1/125	6.0	單區
1/ 50	4.2	單區
1/ 25	3.8	單區
1/ 10	3.4	單區
1/100	3.1	五個小區連合
1/ 50	2.4	五個小區連合
1/ 10	1.6	五個小區連合
1/ 5	1.3	五個小區連合
1/ 5	3.1	單區
1/ 5	1.7	二個面積 $\frac{1}{10}$ 之連合區
1/ 5	1.3	五個面積 $\frac{1}{25}$ 之連合區
1/ 5	1.1	十個面積 $\frac{1}{50}$ 之連合區

* 此又稱爲獨區

此試驗之結果，係將每一英畝，分做 $\frac{1}{500}$，將此 $\frac{1}{500}$ 之小區，併合而成較大之區。每一單區及連合數小區所得之結果，詳載表中，凡小區面積增大，機誤即漸減小。

當小區面積爲 $\frac{1}{500}$ 英畝時，單次機誤爲 7.8%，面積爲 $\frac{1}{125}$ 時，機誤爲 6.0%，$\frac{1}{10}$ 英畝時，機誤爲 3.4%。以 $\frac{1}{50}$ 英畝成一單區時，其機

誤爲 4.2%，若將此 $\frac{1}{50}$ 英畝之面積，以數個小區合併而成，則其機誤僅爲 2.4%。此可知重複四次所得之機誤，較同面積之單區所得之機誤爲小，一個 $\frac{1}{5}$ 英畝之單區面積之機誤爲 3.1%，惟若以二個 $\frac{1}{10}$，或五個 $\frac{1}{25}$，或十個 $\frac{1}{50}$ 所合成之 $\frac{1}{5}$ 面積，所得之機誤，即自 3.1 減至 1.7，1.3，而 1.1。

表　104.

式樣及面積不同之小區產量影響於單次機誤百分數

小區面積 英畝	小區數	行數 (行距44")	行長 (呎)	機誤 %
1/180 英畝	432	1	66	11.2
1/90 英畝	216	2	66	10.3
1/90 英畝	216	1	132	9.7
1/60 英畝	144	3	66	9.7
1/45 英畝	108	4	66	9.7
1/45 英畝	108	2	132	9.0
1/36 英畝	86	5	66	9.5
1/30 英畝	72	6	66	9.4
1/30 英畝	72	3	132	8.6
1/20 英畝	48	9	66	8.9
1/18 英畝	42	10	66	9.0
1/18 英畝	43	5	132	9.6
1/15 英畝	36	12	66	8.8
1/15 英畝	36	6	132	8.6
1/12 英畝	28	15	66	8.6
1/10 英畝	24	18	66	8.4
1/10 英畝	24	9	132	8.3
1/5 英畝	12	36	66	6.8
1/5 英畝	12	18	132	7.4
1/2 英畝	4	90	66	6.95
1/2 英畝	4	45	132	6.2

麥克來 McClelland 氏之玉米田間試驗之結果，可與此相參考，今載於表 104。

表中載試驗區面積自 $\frac{1}{180}$ 英畝，至 $\frac{1}{2}$ 英畝之各種結果。普通而論，凡小區面積增加，則單次機誤隨之減小．若以同面積而長短不同之小區相比較；則除一二例外，狹長小區之機誤，常較短闊小區之機誤爲略小。

淡氏(Day)曾以小麥作小區試驗，其結果見表 105。表中之普通現象，爲小區之長度增加，則機誤便逐漸減小，至於區之闊度，則三個 50 英尺長之小區併成一區計算時，變量係數爲 16.37，若將五個小區併成一區，則變量係數減爲 14.49。若區之闊度增至 20 個鄰行相併時，變量更減少。若行長改爲 15 尺，而亦以 5 鄰行，10 鄰行，15 鄰行併合計算而比較之，所得結果與用 50 尺長者，得同一現象。卽 10 行 20 行之變量，皆較 5 行爲小。

表 105 之下段記錄，更表示凡區之全長若與土壤差異之爲同一方向，則所減小之變量較與土壤差異之爲對直方向者爲大，例如 15 個 50 尺長之小區之變量係數爲 10.18，而 50 個 15 尺長之變量則僅爲 7.45，此因後者之全長，與土壤差異同一方向故也。

表 106 亦爲淡氏所做試驗之結果，凡重複次數增加，變異量卽行減少。

上述結果均表示區之面積增加，變量減小。惟數個小單位連合而成一區之變量，較一個同面積整區之變量爲小。此點當在規劃試驗中，詳細論述。

表 105.

式樣及面積不同之小區產量影響於變量係數

小區大小	變量係數
5 尺行	37.20
10 尺行	29.58
15 尺行	26.52
20 尺行	24.41
25 尺行	22.81
30 尺行	22.53
35 尺行	21.32
40 尺行	20.28
45 尺行	19.85
50 尺行	20.67
60 尺行	18.99
75 尺行	19.64
100 尺行	16.74
125 尺行	17.01
150 尺行	17.36
3 個 50 尺長之鄰行	16.37
5 個 50 尺長之鄰行	14.49
10 個 50 尺長之鄰行	12.13
15 個 50 尺長之鄰行	10.18
20 個 50 尺長之鄰行	8.32
5 個 15 尺長之鄰行	16.49
10 個 15 尺長之鄰行	12.72
20 個 15 尺長之鄰行	9.98

各區之併合面積及其變量係數

相併行數	行長(呎)	全區行長(呎)	區之形狀	變量係數
3	50	150	長在變異最小之趨向	16.37
10	15	150	長方形	12.72
24	5	120	長在變異最大之趨向	10.54
5	155	775	長在變異最小之趨向	13.07
15	50	750	長在變異最小之趨向	10.18
50	15	750	長在變異最大之趨向	7.45
10	155	1550	長在變異最小之趨向	9.43
30	50	1500	略有長在變異最小之趨向	5.46
100	15	1500	長在變異最大之趨向	2.77

表 106.

小區面積及重複次數影響於變量係數

區數	相併行數	行長(呎)	變量係數
	各區之併合面積		
5	3	50	3.97
10	3	50	3.35
14	3	50	3.50
5	5	50	2.94
10	5	50	2.38
7	5	15	5.04
14	5	15	3.32
28	5	15	1.83
3	10	15	5.07
7	10	15	3.75
14	10	15	1.66
3	20	15	4.51
6	20	15	1.27
3	50	15	5.29
5	8	5	7.53
10	8	5	4.35

規劃試驗 Blank Tests ——近數年來，學者爲研究試驗區大小式樣及重複次數起見，乃有規劃試驗之舉。所謂規劃試驗者，卽以受過同一處理之田區，種植同品種之作物，故小區之大小，式樣，可以數小區隨意併合而成爲大小長短之各種試驗區。卽重複次數，亦可以數小區重複排列而成，例如吾人欲研究小麥試驗區之大小式樣時，可將小麥分種多行，行距一尺，行長多少，以能截成數個短行爲目標。故若行長爲 8 尺，收穫時，便可截成 4 尺長者 2 行，或 2 尺長者 4 行。若欲比較行之闊度，則將二行三行併成一區計算皆可。棉作規劃試驗可照小麥同樣排列，惟行距則以適當距離爲宜。無論何種作物，皆可以規劃試驗來決定小區之大小，式樣，及重複次數。

規劃試驗之結果，可根據機誤或變異來論斷之。吾人所常用者，爲計算各區之機誤。凡機誤愈小，則結果愈可靠。實用時，區之式樣未全憑算法決定，因除減少差誤外，對於實際利便，亦須慎重考慮。如種植及收穫之方便，用地之多少，及品種與處理之多少等等，皆須注意及之。

今以棉花之規劃試驗，引證普通規劃試驗之用意及用度。此試驗行長 100 尺，在收穫時，每行之第一 20 尺，先行收下，其餘之 80 尺，則每五尺一收，使成 20 尺，25 尺，30 尺，35 尺，40 尺等各行。蓋以 5 尺爲一單位，可逐漸接長，而成爲 100 尺長之行。各種不同行長之產量，見表 107。

表中所記者，爲同一品種之產量，故其行長及行闊之單次機誤，可隨意歸併而計算之。其法係先求得每種排法之標準誤後，以 .6745 之常數乘之卽得。單次機誤再以平均產量相除，而爲各種排列之機誤百分數，求得單行區各種行長之單次機誤如下：

表 107.

棉花規劃試驗產量記錄

		收		割		時		之		行		長					
行號	20呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎	5呎
1	14.8	2.7	2.4	3.8	2.9	3.4	2.8	4.5	2.6	3.2	1.7	1.7	2.7	3.0	2.7	3.8	3.4
2	15.2	4.3	4.7	2.3	1.5	3.8	4.0	4.0	3.4	3.4	2.1	3.2	2.7	3.0	4.9	2.3	1.4
3	13.4	2.7	3.3	3.2	3.7	3.2	2.2	4.4	3.0	3.6	2.8	1.4	2.8	2.0	2.6	3.4	3.1
4	12.7	2.9	3.5	2.2	3.9	3.6	3.0	3.4	2.9	2.4	2.1	1.7	2.6	3.0	3.2	2.9	3.6
5	13.0	3.4	3.6	1.9	3.2	3.3	2.9	4.3	2.8	2.1	1.7	2.8	2.8	3.4	3.4	2.4	2.1
6	13.0	2.2	2.7	2.2	2.2	2.5	1.4	3.0	1.3	1.9	2.0	1.6	1.9	2.1	2.1	2.4	1.7
7	8.5	2.7	2.8	2.5	2.6	2.0	1.7	1.9	2.6	2.6	2.6	2.1	3.4	2.4	3.0	2.0	1.4
8	12.3	3.0	3.0	1.4	2.9	2.7	2.6	3.6	1.9	1.8	3.7	4.1	2.1	2.8	2.8	2.9	1.1
9	12.5	2.9	3.1	3.6	2.5	1.7	2.8	2.4	1.7	2.3	3.6	2.7	3.0	3.7	3.6	1.3	2.0
10	14.9	3.7	3.3	2.8	1.9	3.0	3.3	2.2	2.0	2.4	3.8	3.0	2.5	3.4	4.0	1.9	1.7

行長	20 呎	25 呎	30 呎	35 呎	40 呎
機誤百分數	12.56	11.97	11.34	10.68	10.09

上列結果，表示凡行長增加，機誤即減小。每增五尺之行長，所減機誤頗有限，惟自行長 20 尺而增至 40 尺時，機誤乃自 12.56 而漸減至 10.09。

此試驗之結果，曾按照各種不同之行長，行闊，分別計算，結果詳表 103。(第 411 頁．就行闊而言，(六行區未計算)自單行區至七行區，皆表示行闊增加，則機誤有逐漸減少之趨勢。

規劃試驗又可用變異數分析法來計算之。惟用此法時須，假定各品種係隨機排列，而一再重複種植者。若以本試驗用變異數分析，則可假定爲五個品種。現全行長 100 尺，共成 140 行，故若以行長 20 尺計，可成 700 行，若每行五品種，則可重複 139 次，139×5=695 共需 695 行，今共有 700 行，實多 5 行，此 5 行既不夠分配，即棄而不算。

用第十三章所述方法，分別求得總變異平方和，區集間變異平方和而後相減，所餘之數，即爲區集內之變異，亦即賸餘差誤平方和。從總變異之自由度，減去區集間變異之自由度，得差誤自由度。差誤變異平方和被其自由度除之，爲差誤平方均數，以之開方，而以 .6745 乘之，即得單次機誤。

表 108 示小區合併後之各機誤，用變異數分析法所得之機誤，較之用普通方法求得之機誤爲小。此爲事實所當然。因用變異數分析法算機誤，曾將區集間變異減去，所有之機誤，僅區集內差誤，或賸餘差誤而已。

表 108.

各種不同式樣之小區面積單次機誤百分數

不同面積小區之機誤					
區闊	區長 (呎)				
	20	25	30	35	40
1 行	12.56	11.97	11.34	10.68	10.09
2 行	10.35	9.74	9.61	9.05	8.40
3 行	9.37	9.02	8.74	7.85	7.54
4 行	9.51	8.93	8.67	7 96	7.29
5 行	8.82	8.64	8.57	7.57	7.19
7 行	8.36	7.86	7.75	7.04	6.73

用變異數分析法所得之機誤			
區闊	區長 (呎)		
	20	30	40
1 行	11.20	8.55	7.77
3 行	7.87	5.10	6 56
5 行	7.90	7.41	4.71

減小機誤，果爲試驗之要點，惟實用時，尙有其他因子，須注意，前節亦已言及。玆試以不同小區面積之結果，比較土地效率之大小。試以行長 20 尺者爲標準，而以土地效率爲 100%。其他各種面積，以此爲依據而比較其機誤百分率。行長 40 尺較行長 20 尺者長加一倍，故若

將行長 40 尺之單次機誤 10.09，以 2 乘之，則成爲 20.18，此數爲行長 20 尺之單次機誤 12.56 之百分之 62.24，12.56×100/20.18=62.24%，是可知行長 40 尺之土地效率，僅爲百分之 62.24 而已。

若以行長 30 尺之單次機誤來比較，則土地效率更差，以用地言，則 30 尺比 20 尺多 1 倍半。30 尺行長之機誤爲 11.34，以 1.5 乘之，得機誤 17.01，與 12.56 相比，則爲 73.84%。

17.01×100/12.56=73.84%。

今將各種面積之土地效率詳載表 109.

表　109.

用表 108 資料求得之各種不同面積之土地效率百分數

根據不同面積所得之機誤					
區闊	區長（呎）				
	20	25	30	35	40
1 行	100.00	88.08	81.78	79.03	77.84
2 行	73.63	66.52	56 94	55.03	55.89
3 行	59.89	51.71	45.89	48.76	46.25
4 行	43.61	39.56	34.98	35.57	37.11
5 行	40.56	33.81	28.64	31.46	30.52
7 行	32.25	29.18	25.01	25.98	24.88

根據變異數分析所得之機誤			
區闊	區長（呎）		
	20	30	40
1 行	100.00	114.40	103.89
3 行	67.51	107.17	48.58
5 行	40.20	30.46	56.55

再將變異數分析法所算得之單次機誤，亦化成百分數而計算土地效率，其結果載表 100 之第二節內。兩種方法所得結果，皆表示凡小區面積較大者，土地效率較低。例如 7 個二十尺長所連成之小區，所得單次機誤雖僅 8.36 而其土地效率則僅 21.46% 而已。

決定區之面積，除須注意土地效率外，尙須顧及重複區數之多少，因重複區數，可以減小變量。在上述試驗中，已證實之。

規劃試驗之結果，亦可用以決定重複次數之多少。例如上述棉花規劃試驗（行長 100 尺共有 140 行）亦可分成行長 20 尺者 700 行，今若假定有 350 品種，則 700 行係重複二次之結果。第一行與第 351 行，假定為同一品種，第二行與 352 行為另一品種，依次類推。若欲以 700 行之記錄，作成一十桿行試驗，則宜假定品種數為 70。從第 1 行至 70 行，分種各品種。71 號起，即為重複行數，141 行為二次重複，第 211 行為三次重複。……其他各種行長行闊之重複排列，皆可依數推算。表 110 示各種小區大小，與重複次數之機誤。

求平均機誤之公式為 $\frac{PE_s}{\sqrt{N}}$（詳第十二章），表 108 內行長 20 尺之小區單次機誤為 12.56 故二行之平均機誤當為 $12.56/\sqrt{2}=8.88$。照表 110，實際機誤為 9.01，兩數相差極微，故理想與事實相去不遠。行長 30 尺時，單次機誤為 11.34，故二行平均機誤當為 $\frac{11.34}{\sqrt{2}}=8.02$，實際機誤為 8.47。見表 110。

增加重複次數，足以減小機誤之事實，可於表 110 證實之。一個二十尺長之二闊行區之機誤為 10.35%，而二個二十尺長之單行區之機誤則為 9.01%，兩者之總面積實相同。又一個四闊行區之機誤為9.51%，

四個單行區之機誤僅為 7.55%。一個四十尺長之四行區之機誤為 7.29%,而四個四十尺長之單行區之機誤僅為 5.63%。

表　110.

用各種不同之重複小區所求得之機誤百分數

區　個	重複次數	區　數	區　長　(呎)				
			20	25	30	35	40
1 行	0	1	12.56	11.97	11.34	10.68	10.09
	1	2	9.01	8.73	8.47	7.92	7.42
	2	3	7.70	7.96	6.70	6.57	6.37
	3	4	7.55	6.51	5.94	5.71	5.63
	4	5	5.21	4.49	4.86	4.95	4.36
	6	7	5.10	4.04	3.77	3.[illegible]	3.45
2 行	0	1	10.35	9.74	9.61	2.05	8.40
	1	2	7.56	7.02	7.09	6.56	6.08
	2	3	6.10	6.06	5.87	5.79	5.48
	3	4	6.42	5.12	5.48	4.76	4.86
	4	5	3.96	3.44	3.68	3.34	3.48
	6	7	4.50	3.24	3.20	3.25	2.93
3 行	0	1	9.37	9.02	8.74	7.85	7.54
	1	2	6.92	5.90	6.76	6.18	5.91
	2	3	5.34	5.79	5.48	4.65	5.29
	3	4	5.52	3.79	5.10	4.93	4.27
	4	5	3.36	3.30	3.36	3.29	2.60
	6	7	3.83	2.64	2.53	2.75	2.38
4 行	0	1	9.51	8.93	8.67	7.96	7.20
	1	2	6.74	5.69	6.48	6.29	5.58
	2	3	5.49	5.74	5.56	5.31	5.54
	3	4	5.51	3.95	5.63	4.62	4.24
	4	5	3.42	2.74	3.16	2.97	2.79
	6	7	4.23	2.91	2.58	7.96	2.39

再以總面積相同之大盤區機誤，與數小區合併一區之機誤相比較。一個 40 尺長之單行區之機誤為 10.09%，而兩個 20 尺長之單行區之機誤則為 9.01%。40 尺行長之三闊區，佔地 120 尺，而其機誤為 7.54%。四個 20 尺長之單行區，佔地祇 80 尺，而機誤則僅 7.55%。

觀上列結果，可知增加小區重複次數，較擴充小區面積易於減小機誤。面積小而次數多，需地雖較面積大而次數少者略多，惟區與區之間所廢與邊行之地，究竟有幾，故為試驗準確計，以用小區而多用重複次數為宜。

參照上列之機誤大小，並考慮實地應用之利弊，——整地及種植與收割時之便利與否，作物植株之大小及需地之多少等等，——主持試驗者，可選定一最適合於試驗之小區式樣。總之吾人所測量之土壤差異，愈小愈準確，故機誤亦以愈小愈好。增加重複次數既較加大小區面積為能減小機誤，故若其他情形相同，則以增加次數為上策。

今再以表 110 之記載證實增加重複次數，可以減小機誤。20 尺長之四桿行平均機誤百分率為 7.55%，若比較兩個四桿行時，其相差機誤為 $7.55\sqrt{2}=10.68\%$。$\frac{D}{P.E.}=3.2$ 時，機遇為 31:1，此為顯著與不顯著之區別點。今相差機誤為 10.68，則兩題之相差當為 34.18%。($D=10.68\times3.2=34.18\%$)換言之測量一二十尺長而重複三次之試驗，其顯著差異之最小限度，當為 34.18%。例如比較兩個棉籽品種時，甲品種每畝產 100 斤，第二品種之產量須多至 134斤，或少至 66 斤，則甲乙兩品種生產能力，確是不同。又若有一 20 尺長之 7 桿行試驗，其平均機誤為 5.19%，兩者相差之最低限度，當為 23.49%。($5.19\sqrt{2}\times3.2$

$=23.49\%$）上舉兩例，表示吾人可用規劃試驗所求得之結果，來推測可稱顯著之最低差異數量。

今再比較一單行區及三行區之試驗結果，七桿行之單行區，最低相差數為 23.49%，七桿行之三行區，最低相差數為 17.34%，$(3.83\sqrt{2}\times 3.2=17.34\%)$三行區較單行區需地多三倍，而相差減少則僅 6.15%。$(23.49-17.34=6.15\%)$ 今以三行區所需之最低相差數，與同面積之二十一個單行區相比較，行長 20 尺之三行區重複 7 次，若排成單行區則 21 行之平均機誤為 2.74%，因單行區之平均機誤為 12.56，故 21 行之平均機誤為$\dfrac{12.56}{\sqrt{21}}=2.74\%$，其所需最低差數為 12.38% $(2.74\sqrt{2}\times 3.2=12.38\%)$故在同一面積下，三行區之七桿行最低差數為 17.34%，而二十一個單行區之最低差數僅 12.38%。是則用單行區而增加重複次數，所測量之差數較用三行區者為低。故若無其他關係，如生長競爭(competition)等，多增重複次數，較增加面積為妥。

上述各種結果，表示如何利用規劃試驗，來決定小區之大小，式樣，及重複次數之多少。惟在參考規劃試驗之結果而決定試驗面積，及次數時，須知計算所得之數，未必盡合於實地應用。有時因土地人工所限，不能多用小區，則須酌量情形，略予變通。總之實際情形及計算結果，必須兼籌並顧。

試驗行之長短，闊狹，雖隨作物而各不同，惟每一作物，在每一環境下，作一規劃試驗，實非必要。因有數種作物，所需之小區大小，實大同小異，可以互相借用。例如棉作規劃試驗所決定之小區面積，及重複次數等，其他需要同樣種植面積之作物，亦適用之。小麥規劃試驗所決定

之結果可用之於其他穀類試驗。

生長競爭(Competition)——近數年來學者,對於邊行及行間生長競爭所發生之影響,頗多研究。在舉行試驗時,吾人常欲知品種間之產量差異,及各種處理對於作物之影響。惟作物產量及生長狀況,常因鄰行並種時,因生長習性不同,成熟不同,及吸收肥料之多寡不同,而生差異。故若有兩個品種,一強一弱,相併而種,弱品種是否因受鄰居強品種之競爭,致產量愈益低落,強品種則因侵佔鄰居弱品種之肥力陽光,而產量愈益增加。此種生長競爭問題,對於決定小區之大小,式樣,極有關係,故須詳細考慮。

生長競爭測量方法頗多,舒旦勒氏(Stadler)將克澈勃兒氏(Kiessebach)所得之試驗結果,列成一表,載本書第 111 表內。計算生長競爭之方法,係將各品種單行區及五行區交互分種,而比較兩種結果之異同。被試作物爲小麥及燕麥,觀表 111,吾人卽可知兩種結果之不同點頗多。例如小麥在 1913 年交互種植之單行區,若以像蓋種爲 100%,則大勿來種之產量爲 107% 而在五行區內勿來種僅等於像蓋種之 97% 而已,在1913年在交互種植之單行區內,燕麥勃脫種比開森種多產30%而五行區內則僅多產 12% 而已。

今再將舒旦勒氏所舉行有關生長競爭之試驗結果,節錄一部份於表 112 內。

表 111.

每五區交互種植與每單區交互種植之生長競爭影響於產量之比較表(以百分數表示之)

小麥 每50小區之平均產量			燕麥 每50小區之平均產量		
年份及品種	單區交互種植 %	五區交互種植* %	年份及品種	單區交互種植 %	五區交互種植* %
1913			1913		
偷道種	100	100	開森種	100	100
大勿來種	107	97	勃脫種	130	112
1914			1914		
偷道種	100	100	開森種	100	100
大勿來種	85	97	勃脫種	139	101
1913			1913		
偷道種	100	100	開森種	100	100
尼勃來司格廿八號	107	107	瑞典選種	82	77
1914			1914		
偷道種	100	100	開森種	100	100
尼勃來司格廿八號	[illegible]	85	瑞典選種	89	93

* 祇算中間三行之產量

表 112.

祇算中間行產量與併算有競爭之邊行產量以示生長競爭對於產量之影響(以百分數表示之)

品種	中間行產量		併算有競爭之邊行產量	
	英斗	相關	英斗	相關
利帕種	14.9	91	9.9	53
溫得種116號	16.4	100	18.8 21.7	100 100
帕爾選種	15.3	93	11.5	53

表中所載者爲稀植五行之小麥試驗結果，分兩部份計算，第一部係中間行之產量比較，第二部係邊行之產量比較。利帕種 Leap's Prolific 與米欣更溫得品種 Michigan Wonder 相比較，而以溫得種之產量爲100%。根據中間行之產量比較，則利帕種之產量爲溫得種產量之 91%，至於邊行比較則利帕種僅爲溫得種之 53% 而已。

此引證生長競爭之影響產量，及如何測量競爭能力之一法而已。此外測量競爭影響之方法頗多，今再舉一題爲例。在一三行相連種植之試驗中，苟有生長競爭，則中間一行之產量，當比邊行之產量爲低。此可以中間行之變量係數，與兩邊行之變量係數相比較而得。若生長競爭果著，則中間行之變量係數，必較任何邊行之變量係數爲小。若同品種之種籽，在各重複區內不種在一起，則此種現象，尤爲顯著。

比較生長競爭，亦可用下法行之。例如比較一三行連種之作物，而欲知生長競爭，有否顯著關係，對於各品種比較上，有何影響。可先求得每區之三行平均產量，再求得每中間行之產量，而將各品種依照其結果之大小，並行排列，兩並行之相互關係，可依次求得。若相關係數大，則可知生長競爭，並無重大影響。此法不能用以比較長生競爭之數量多少，僅能用來測驗生長競爭，對於品種產量，有否影響而已。

關於生長競爭之比較，尚有兩個類似之方法，係舒曲林飛特氏(Stringfield)及沈宗瀚氏所試驗者。其試驗結果，轉載於表 113。表中所載之產量記錄，係一三行區而重複種九次之小麥試驗。品種A與B之產量，乃依照田間排列次序而記載之。照田間種植情形，品種之A第三列與品種B之第一列爲毗鄰。

表 113.

沈氏及舒氏用以計算生長競爭之資料

品種 A			品種 B		
行 1	行 2	行 3	行 1	行 2	行 3
51	50	48	45	37	33
43	51	47	55	55	49
43	38	29	44	40	45
47	46	49	49	54	49
41	36	37	37	37	36
29	34	40	43	42	36
34	35	41	34	33	32
33	33	38	32	33	32
38	20	27	30	31	26
35	39	43	22	32	36

表 113. —— 續

沈 氏 分 析 之 結 果

品種 A		D_1	品種 B		D_2	D_1-D_2	D'	D'^2
行 2 之產量	行 3 之產量		行 2 之產量	行 1 之產量				
50	48	2	37	45	— 8	10	12	144
51	47	4	55	55	0	4	6	36
38	29	9	40	44	— 4	13	15	225
46	49	—3	54	49	5	— 8	— 6	36
36	37	—1	37	37	0	— 1	1	1
34	40	—6	42	43	— 1	— 5	— 3	9
35	41	—6	33	34	— 1	— 5	— 3	9
33	38	—5	33	32	1	— 6	— 4	16
20	27	—7	31.	30	1	— 8	— 6	36
39	43	—4	32	22	10	—14	—12	144
						$\Sigma=-20$		$\Sigma=656$

$$M=\frac{-20}{10}=-2.0 \quad S.D.=\sqrt{\frac{656}{10}}=8.1$$

$$Z=\frac{-2.0}{8.1}=-.25$$ 機誤不顯著

舒氏分析之結果

品種A行3之產量	品種B行1之產量	D_1	品種A行2之產量	品種B行2之產量	D_2	D_1-D_2
48	45	3	50	37	13	−10
47	55	−8	51	55	−4	−4
29	44	−15	38	40	−2	−13
49	49	0	46	54	−8	8
37	37	0	36	37	−1	1
40	43	−3	34	42	−8	5
41	34	7	35	33	2	5
38	32	6	33	33	0	6
27	30	−3	20	31	−11	8
43	22	21	39	32	7	14

$\Sigma=20$

$M=\frac{20}{10}=2.0$

所得機偶與沈氏所得者同

今先解釋沈氏所用之方法如下

比較之第一步，係將A品種之中間行，與最近B品種之一行相比較。再以B品種之中間行，與最近A品種之一行相比較，而以其結果分稱爲D_1及D_2。故在品種A則以第二行與第三行按組比較，品種B則以第一行與第二行按組相比。所得結果載表113 D_1及D_2兩項內。再以D_1減D_2，而照正負號相加，得總數爲 −20 以組數10除之；得均數爲−2.0。以D_1-D_2之逐組與均數比較，而得D'之值。D'值一一自乘相加，得$\Sigma D'^2$爲656。以組數除之，開方，而得標準差爲8.1。($S.D.=\sqrt{656/10}=8.1$) 以均數除標準差而得史蒂頓脫氏之 Z 值爲 0.25。機遇爲不顯

著。此表示生長競爭之影響不大，故生長競爭並非重要。

舒曲林飛特氏（Stringfield）之方法，曾爲沈氏所節述，今仍以本例題來引證之。其算法詳附表 113 第三段。舒氏方法與沈氏之方法頗相類似。惟舒氏則以兩品種間之鄰近行相比較，得 D_1，再以兩品種之中間行相比較得 D_2。從 D_1 減 D_2，逐行自乘，相加，而以組數除後所得之均數，與沈氏所得者同。亦爲 -20。求 Z 值而查機遇，與沈氏所用之法同。

此二法可用以比較各品種所受生長競爭之影響，故若數個品種經過二三年之試驗及分析後，可知各品種受生長競爭影響之多寡爲何如矣。

舒旦勒氏(Stadler)另有一法。以測量生長競爭之影響。其大意爲：每一品種之邊行平均產量，依照內行之平均產量化成百分數，此種邊行平均產量百分數，稱爲（相關的邊行產量'relative border yields'）。此種相關的邊行產量，指示生長競爭對於品種影響之大概情形。若相關數超過 100 時，表示邊行（受生長競爭之影響者）產量較內行（不受生長競爭之影響者）產量爲高，若小於 100，則邊行產量較內行產量爲小。

若以邊行之高產量，除鄰近邊行之低產量，而從商數減去 100，所得餘數，即爲生長競爭係數。此可測量每一鄰近品種受競爭影響之程度。簡稱之即爲競爭係數(coefficient of competition)。今以表 114 之資料，來引證舒旦勒氏之各步算法。

表 114.

舒旦勃氏用以計算生長競爭係數之資料

	勿爾是			米歇更愛勃			米歇更温得種211號		
	行 1	行 2,3,4	行 5	行 1	行 2,3,4	行 5	行 1	行 2,3,4	行 5
平均產量(英斗)	10.8	12.2	13.1	13.3	14.9	14.5	19.8	18.1	19.4
產量百分數	89		107	89		97	109		107

舒旦勒氏又謂『今以邊行之產量,除內行之產量,而得相關邊行產量……』故若比較勿爾是與米歇更愛勃兩品種之生長競爭時,可以較大之兩毗鄰邊行相比較。查得表 114,接近米歇更愛勃之勿爾是邊行爲 107% 而米歇更愛勃則爲 89,故以大者除小者得 120%,減去 100 後,得 20%。因左邊之邊行相關數大於右邊者,故餘數當爲 −20。再以米歇更愛勃與米歇更温得 211 號比較,而得餘數爲 +12%。此二數 −20% 及 +12% 表示在受有生長競爭影響之邊行中,勿爾是之邊行產量,比米歇更愛勃邊行產量多 20%。而米歇更温得則比米歇更愛勃多 12%。品種間之生長競爭,影響於產量,亦可用同一方法求得之。以米歇更愛勃之 2,3,4 行平均產量 14.9,除勿爾是之平均產量 12.2,而減去 100,得餘數 22%。以米歇更温得之三行平均產量 18.1,除 14.9 而減去 100,得 21%。

$$14.9 \div 12.2 - 100 = 22\%$$

$$18.1 \div 14.9 - 100 = 21\%$$

此證明生長競爭係數，與產量及其他因子皆有連因。下表 115，載數種作物之生長競爭，與產量之相關係數。

表 115.

各種不同作物之產量與生長競爭相關係數

試　　驗	年　份	競爭平均係數	產量與競爭相關係數
大麥品種	1919	21.30	.442±.099
燕麥品種	1919	27.67	.314±.117
燕麥品系	1919	13.11	.316±.143
小麥品種	1920	19.79	.582±.043
小麥品種	1921	18.85	.294±.059
小麥雜種	1921	14.28	.554±.078
燕麥品種	1921	39.15	.484±.082

上表表示照舒旦勃氏之試驗結果而言。生長競爭與產量之相關量頗高。惟吾人在比較各品種之產量時，所欲知者為生長競爭之影響於品種，究竟大至如何程度，有否顛倒品種優劣之危險。例似表 115 載 1921 年燕麥之生長競爭係數與產量，確有聯因。其相關係數為 .484±.082，此表示生長競爭之存在，惟若將燕麥品種依照產量之多少而排成一列，因欲去掉生長競爭之影響，故僅計算中間各行之產量，而不計兩邊行之產量。所求得之各級產量相關極高，為 .99±.002。無論計算全產量，(未去生長競爭)或僅中間諸行之產量，(已去生長競爭)其上十品種之相關數皆同。

再看大麥品種試驗之相關係數為 .442± 099. 如將各品種之產量

依次排列，求得諸行產量，(未去生長競爭)與中間行產量(不用邊行產量以免競爭影響)之相關係數爲 .99±.003，無論除去生長競爭與否，產量較高之數品種，結果完全相同。是可知生長競爭雖對於產量有重大影響，惟尙不致顛倒品種之優劣也。

生長競爭影響力之大小，或隨環境及地點而異。故在預定種植計劃時，對於此點須十分注意。有數種試驗，須完全避免生長競爭之影響，例如栽培試驗與肥料試驗是。故在舉行肥料試驗前，對於減除生長競爭一層，須特別考慮，因肥料試驗所規定之小區地位，不宜年年更易。例如舉行土壤試驗時，每一小區有一種試驗處理，而此種處理，須經數年之試驗。故在按排試驗時，須將區與區之間，留出數尺闊之邊行。務使各區不相連接，以避免生長競爭之影響。每區預留邊行，用地雖較多，惟爲試驗準確計，實不可省。他若栽培試驗，因用地亦屬永久，故亦當留出邊行，以免除生長競爭之弊。苟所舉行之試驗，生長競爭之影響確頗大，而所試驗之目標，又在改良品種，對於產量之多少，頗爲注重，則將每品種種三行，或三行以上，而僅收穫中間一行，以避免競爭之弊，此法用地較多。故若遇生長競爭影響不大時，可將生長習性及成熟期相同之品種，種在一起，以減去其影響。在初期試驗中，吾人常用單行區，而將習性相同之品種，排在一起。(早熟者排在一起，晚熟者另排在一起。)直至高級試驗，則用三行區或四行區而各行分別試驗之。俾遇生長競爭劇烈時，僅用中間一行來比較。

標準區(Check Plots)——標準區之有用與否，及苟用標準區宜用若干，皆爲現今學者所討論之問題。

用標準區來比較品種產量或試驗處理之功用等，由來已久。最初舉行土壤肥料試驗而用標準區者，區內概不施肥料，因之數年後，地中肥料，被作物吸去，而標準區產量，愈試愈低。以此作比較結果，頗不準確。故標準區內亦宜加以相當肥料，以維持土力。其實肥料試驗中之標準區，並非無肥區，乃是對照區(control plots)，其中亦需足以維持土力之肥料也。

舉行品種比較試驗時，標準區內種植者，為已知其產量及性狀之標準品種。此種標準品種，可用來比較其他品種之產量及性狀。標準區宜用多少，言者頗不一致，有主張多用標準始能得準確之結果，亦有主張少用標準，俾能多種品種行者。凡喜用隨機排列及拉丁方法等新法者，主張不用標準或僅用一二標準，惟經作者經驗所得，比較試驗總以用標準為宜，若用隨機排列法，標準品種可與其他品種同樣，作隨機之排列，而併入試驗。

標準區之大小，排法與多少，亦可用規劃試驗來決定其梗概。以規劃試驗之資料，假定每隔 3 行或每隔 5 行為一標準行，而分別計算其離中差。凡離差最小之排法，算最合宜，惟全用算法來決定之次數，未必完全合於實際試驗之用耳。

計算離中差之方法頗多，最簡單之法，係取兩個最近標準區之平均數，來比較標準內之品種產量。若將標準每三行置一，則每對標準中，當有兩個品種，假定第一區及第四區為標準區，其產量為每畝 114 斤及 126 斤，平均量當為 120 斤。第二區及第三區為品種行，產量為 125斤及 130 斤。以之與平均標準產量 120 斤相比較，則差數為 5 斤及 10 斤。

另有一法爲將所有標準行產量，完全相加而平均之，而以此總平均與各品種產量相比較。上列兩法，用者不廣。除平均法外，尙有等級法(graded method)用者較多。其法係標準區產量之多少以級數遞算。例若第一標準及第二標準產量爲 114 及 126 斤，兩個標準之間，相差 12 斤，此可表示土壤之肥力差異，乃在第一行至第四行，逐漸遞增，故雖品種相同，而產量自第一行至第四行，差異仍有 12 斤。平均計算，每行之差爲 4 斤（$\frac{12}{3}=4$。）若以此數加入第一標準行之產量上，即爲第二行之計算產量，意即若以第一行之標準品種種在土壤較肥之第二行內，產量須增加 4 斤，而成爲 118 斤，若在 118 斤上，再加 4 斤，則得 122 斤，即爲第三行之標準差異。若第一個標準產量，大於第二個標準時，所得之差異平均數，當從第一行產量上，逐漸遞減，計算各步，若以公式表示之，當如下：

$$\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{3}C_2=\text{第一品種之計算標準。}$$

$$\frac{1}{3}C_1+\frac{2}{3}C_2=\text{第二品種之計算標準。}$$

C_1 及 C_2 代表標準區之產量，今以已知數代入得

$$\frac{2}{3}114+\frac{1}{3}126=118$$

$$\frac{1}{3}114+\frac{2}{3}126=122$$

計算標準產量與品種產量之相差數，可逐項比較得之。求標準產量之第四法，則爲平均法及等級法之併合計算法。

茲將四種計算標準產量之方法，列表於下，藉作比較。

方　法	算　法
1	最近二標準區之平均 $\frac{C_1+C_2}{2}$ =計算標準區
2	諸標準區之平均 $\frac{C_1+C_2+C_3+\cdots C_n}{N}$ =計算標準區
3	等級法 每五區一標準 $\frac{4}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2$ =第一個計算標準 $\frac{3}{5}C_1+\frac{2}{5}C_2$ =第二個計算標準 餘類推 相隔五區以上一標準區例若每十區一標準 $\frac{9}{10}C_1+\frac{1}{10}C_2$ =第一個計算標準 餘類推
4	等級與諸標準行平均計算法 $\frac{1}{2}(C_M+\frac{4}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2)$ =第一個計算標準 餘類推 第3及第4法內所用之 C_1 及 C_2 等字即代表兩接近之品種實際產量，第4法內 C_M 代表諸標準之平均數

用規劃試驗結果，可算出最適合之標準行次數，——每三行一置，四行或五行一置，——惟理論常不能與事實完全符合，故吾人在決定標準行次數時，對於所得結果及實際情形，須兼籌並顧。例如照計算結果，每二行一標準之差異最小，惟若真以二行一標準，則一半試驗地，為標準行所佔，對於用地及人工上，非但不經濟，且標準行太多，即欲比較品種，亦多不便，是事實與理論不符之明證也。

表 116 載燕麥規劃試驗之結果，標準行之排列，有每三行，每五行，及每十行一標準等次數。

表 116.

標準行各種排法之離差均數比較表

(計算資料係取自燕麥規劃試驗每英畝英斗計)

每十行一標準	1921	1922	1923
用第二法比較	1.71±.11	1.58±.11	2.60±.14
用第三法比較	1.81±.13	1.52±.12	2.17±.12
用第四法比較	1.70±.12	1.53±.12	2.07±.13
每五行一標準			
用第二法比較	1.90±.13	1.57±.12	2.70±.16
用第三法比較	1.84±.13	1.58±.12	1.90±.12
用第四法比較	1.84±.12	1.52±.12	2.10±.15
每三行一標準			
用第二法比較	1.32±.09	1.50±.13	2.47±.18
用第三法比較	1.18±.08	1.87±.17	1.76±.13
用第四法比較	1.07±.09	1.67±.16	1.80±.14

本試驗爲三年之結果，方法共用三種，三法所求得之離中差，皆相彷彿，而於 1921 年及 1922 年之每五行一標準，及每十行一標準之三法結果，尤爲相同。1923 年之試驗，表示各法所得結果，略有不同。每三行一標準之離中差，較之每五行每十行者爲略小。而於 1921 年及 1923 年爲尤著。1922 年之結果，則反是。用等級法求得之三行一標準之離中差，較五行及十行一標準者爲大。在桿行試驗中，五行一標準與十行一標準之相差極微。

派克及白賚拉(Batchelor)對於標準行之排法，另有新設計，茲將其結果，載於表 117。

表　117.

用各種方法計算各種排法之標準行之推算標準

標準行次數	求推算標準各法	變量係數百分數		實際產量與推算產量之相關係數
		未改正前	已改正後	
無標準		13.15		
每三行一標準	1. 用諸標準行平均法	12.70	12.70	—
	2. 用二最近標準行平均	12.70	10.40	.688±.042
	3. $\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{3}C_2$	12.70	9.08	.715±.040
	4. $\frac{1}{2}(C_M+\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{3}C_2)$	12.70	9.46	.747±.035
每五行一標準或六行	1. 用諸標準行平均法	13.26	13.26	—
	2. 用二最近標準行平均法	13.26	11.44	.599±.048
	3. $\frac{4}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2$	13.26	9.53	.590±.048
	4. $\frac{1}{2}(C_M+\frac{4}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2)$	13.26	10.52	.599±.048
每七行一標準	1. 用諸標準行平均法	12.88	12.88	—
	2 用二最近標準行平均法	12.88	11.59	.586±.048
	3. $\frac{6}{7}C_1+\frac{1}{7}C_2$	12.88	10.06	.641±.042
	4. $\frac{1}{2}(C_M+\frac{6}{7}C_1+\frac{1}{7}C_2)$	12.88	9.51	.643±.042

表 118.

各種不同之小區面積與重複次數

用各種標準排列法所得之差異均數

重複次數	每區行數	標準次數	離差均數
0	1	每三次一標準 每五次一標準	1.951±.102 2.160±.094
	2	每三次一標準 每五次一標準	1.473±.105 1.707±.097
	5	每三次一標準 每五次一標準	1.305±.146 1.662±.172
1	1	每三次一標準 每五次一標準	1.391±.072 1.430±.071
	2	每三次一標準 每五次一標準	1.033±.076 .969±.068
	5	每三次一標準 每五次一標準	1.178±.102 1.475±.171
2	1	每三次一標準 每五次一標準	1.133±.063 1.089±.056
	2	每三次一標準 每五次一標準	.850±.081 .937±.096
	5	每三次一標準 每五次一標準	.640±.075 .800±.123
3	1	每三次一標準 每五次一標準	.948±.066 .954±.071
	2	每三次一標準 每五次一標準	.737±.073 .650±.066
	5	每三次一標準 每五次一標準	.861±.052 .950±.102
4	1	每三次一標準 每五次一標準	.958±.081 1.025±.063
	2	每三次一標準 每五次一標準	.733±.079 .880±.086
	5	每三次一標準 每五次一標準	.757±.112 .827±.118
6	1	每三次一標準 每五次一標準	.729±.069 .857±.055
	2	每三次一標準 每五次一標準	.479±.068 .597±.072
	5	每三次一標準 每五次一標準	.412±.103 .385±.090

本試驗所用之材料爲樹木，所用之四個算法，爲諸標準區之平均數，最近兩標準區之平均數，等級法，及等級與平均合併法。各種不同排列皆用變量係數來比較，四法中以用等級法所求得之變量係數最小，——三次中有二次。

除變量係數外，表中尙示實際產量及計算產量之相關係數，兩者之相關係數旣高，且差異亦顯著，而用等級法及等級平均連合法之相關係數爲尤高，此點頗足證明等級法之較其他方法爲可靠，表 118 (434 頁) 復示棉花規劃試驗，對於標準行排法之測定。

棉花規劃試驗每小區長 30 尺，每三行及五行設一標準區，凡五行一標準之離差，較三行一標準者略大。諸試驗之平均差爲 0.099，此相差並不算大，就本試驗結果而言，凡土地有限時，以用五行一標準，而多用重複次數，較多用標準行，(三行一標準)而減少重複次數者，結果較可靠。

雷趣(Richey)氏曾根據移動平均數(moving average)而設計一種計算標準之方法。其法將所試驗之品系，輪流爲標準品種而比較之。例如第一列以第一個品系爲標準，標準與品種交互種植，故同列內，各品種可與其上下兩標準直接比較。第二列則以第二品系爲標準，餘類推。直至每一品系，皆做過標準而後止。其排法見附表119。

第一列以品系 1 爲標準品系，10 排在第一行，第 2 行即爲標準 1，第 3 行爲品系 1，第 5 行爲品系 2，其上下行 (即第 5 行及第 6 行) 皆爲標準行，第 7 行爲品系 3，其上下行 (即第 6 行與第 8 行) 爲標準行，第 9 行爲品系 11，其上下行亦爲標準行，故品系 1,2,3 及 11,

可分別與其上下標準行相比較。第二列以品系 2 爲標準，亦與其他品種交互種植，在第三列，第四列，及第五列，以品系 3，品系 4，及品系 5，爲標準，排法同上。下表 120 所載者爲實際產量與雷起氏改正產量之比較表。表中載每一品系在各列之平均產量之磅數，每英畝英斗數，與其機誤及改正產量，求改正產量時，須先求得指數。雷起氏謂兩交互行之指數，即兩交互行之平均產量和與此兩交互行內品系平均產量和之比。例若求表 119 第 6 行之改正產量，則須先求得第 5 行及第 7 行之產量總和，第 5 行之產量爲 12.4 磅，第 7 行之產量爲 14.1 磅，

表 119.

雷起氏計算改正產量之田間排列法附第一列計算結果

行數	每列品系號數					根據改正標準所算得之第一列改正產量(磅)	
	1	2	3	4	5	單行	二交互行
1	10	10	10	10	10	9.8	
2	1	2	3	4	5	14.4	21.2
3	1	1	1	1	1	11.4	27.0
4	1	2	3	4	5	12.6	23.8
5	2	2	2	2	2	12.4	28.0
6	1	2	3	4	5	15.4	26.5
7	3	3	3	3	3	14.1	25.6
8	1	2	3	4	5	10.2	24.0
9	11	11	11	11	11	9.9	20.8
10	1	2	3	4	5	10.6	20.5

兩者相加得 26.5磅。第 5 行所排者爲品系 2，其平均產量爲 11.1 磅，(見表 120)第 7 行排品系 3，其平均產量爲 12.5 磅，兩者相加得 23.6 磅。而 26.5 與 23.6 之比，爲 1.122，此卽爲指數。以第 6 行之平均產量 15.4，被此比值或指數 1.122 除之，卽得改正產量 13 磅餘。此數已化成英斗數，而載於表 120。其他品系之改正產量用同一方法求得之而分載於表 120。

表　120.

十一個玉米品系之平均實際產量及改正產量

品系數	二十二重複行產量之平均*		
	實際產量		根據二交互行所得之改正產量
	磅	英斗	英斗
1	12.7	73.48±1.50	72.61±1.21
2	11.1	64.22±1.45	63.99± .98
3	12.5	72.32±1.45	73.25± .98
4	12.5	72.32±2.43	72.00±1.56
5	11.2	64.80±1.62	67.81±1.04
6	10.2	59.01±1.16	56.35±1.04
7	11.5	66.54±1.62	68.73±1.27
8	11.4	65.96±1.21	64.51±1.04
9	11.5	66.54±1.68	66.88±1.10
10	10.3	59.59±1.68	58.49±1.21
11*	10.4	60.17±3.53	64.11±2.72
平均機誤		1.757	1.286

*品系 11 號僅重複種十次

改正產量之機誤，較實際產量之機誤爲略小。實際產量之平均機誤爲 1.757，改正產量之平均機誤爲 1.286，兩者相差 0.471 英斗。此足證用移動平均數改正產量之效益。機誤既經減小，各品系比較時，較爲準確，此種移動平均法，並可擴充而用來改正二三行平列之產量記錄。

雷起氏並建議用迴歸係數來改正產量，海斯氏(Hayes)採取其意，修正之而另立一法。其法係將某品種或某處理之平均產量，假定爲100%，其比較之產量，則爲其百分之幾。相關比便可以某品種之二鄰行相比，或隔一行比，隔二行比，隔三行比，皆可。若爲每五行一標準之試驗，則僅須求得鄰近行隔一行，隔二行與隔三行之比即是。今以海斯氏之春麥試驗結果爲資料，而引證此新法之用法。例若第一品種之第一行產量爲 24 英斗，而此品種之各重複行平均產量爲 25 英斗，若化成百分數，則成 $\frac{96}{100}$ ——（ $\frac{24}{25}\times 100=96\%$ ）。其他各區之產量百分數，以同樣方法求得之，根據此種百分數，求得各相關如下表。

春麥兩鄰行產量百分數之相關

1924 年

	相關	相關係數	迴歸方程式
春麥桿行	鄰區	.018±.023	Y=37.85+.6205X
	隔一區	.518±.028	Y=47.09±.5191X
	隔二區	.454±.030	Y=54.56+.4546X
	隔三區	.383±.034	Y=61.30+.3873X
	隔四區	.449±.034	Y=56.72+.4350X

上列相關係數及迴歸方程，係用普通方法求得（詳第七章）。海斯氏用上列迴歸方程式，求出改正產量如下：

區　號	實際產量	產量百分數
標準 A	25.1	93
8	27.5	
9	20.3	
10	28.3	
11	24.2	
12	25.7	
標準 B	32.2	120

若求第 8 區之計算產量，則先根據第 8 區之鄰行標準 A，及相隔 4 行之標準 B，用上列迴歸方程式求得計算產量 y 值。標準 A 之實際產量對於諸標準 d 之平均產量百分數為 93，標準 B 之產量百分數為 120。用上列迴歸方程式求得 y 值：

若 $x=93$　　$y=37.85+.6205(93)=95.56$

若 $x=120$　　$y=56.72+.4350(120)=108.92$

而 y 值之計算平均產量為 102.24。

$$(95.56+108.92)\div 2=102.24$$

平均改正數，係將實際產量被計算平均產量除之，而以 100 乘之。故第 8 行改正產量，當為 $27.5/102.24\times 100=26.9\%$，其他各區之改正產量，用同樣方法求得之。

若相關係數高，則用上法計算，果可減少差誤，至相當程度，惟據雷

起氏言，若相關係數小於 0.6 時，改正產量所減除之差誤極有限，故是非兩鄰行之相關極高，用上法始有價值也。用上法改正產量後，各品種之相關次序，略有更動。

上述各種用標準行來比較品種之方法，皆表示凡多用標準行，離差可減少。普通而論，大多試驗皆以用標準行來比較爲宜。惟標準之多少，未能完全照計算結果而定。因標準越多，差誤果愈小，惟太多，則用地及人工均太廢，殊不合算也。標準行之效用，非僅在比較品種間之產量而已。他若抗寒，抗病，堅桿，及類似之性狀，皆可用標準品種來比較得之。

均一試驗之價值（Value of Uniformity Trials）——在舉行肥料，栽培，或土壤試驗之前，宜先將所用之地，舉行均一試驗。所謂均一試驗者，即以舉行肥料試驗等之土地，照試驗計劃，將地分區後，先種同一作物數年。在舉行均一試驗時，整地務極勻平，作物品種，務必一樣，始克奏效。所得結果，可用以決定各區土壤之差異。對於此種均一試驗之效用，頗有人發生疑問。或謂作物之產量，未必各區比較相同，而在試驗開始後，各區土肥對作物之影響，亦未必盡同。其實第一疑問，在本章前述試驗結果，已表示各區土壤差異之有永久性，至於土肥對於作物之影響如何，因尚未有充分試驗結果來證實之，今暫不討論。

費許氏曾擬有分析法以計算均度試驗之結果，此法以前曾爲桑特氏（Sanders）用來分析均一試驗。玆以好來塢植糖試驗場抱特氏（Borden）之試驗結果（原文尚未發表）來引證之。除前用之變異數分析法外，此法須另計算其相關變異（covariance）。本規劃試驗共用十六小

區，每一小區用作物三種，惟無論小區多少，計算方法，大同小異。1931年及 1933 年所收產量百分數載於表 121。

表　121.

用變異數分析法計算均度試驗之結果

相互變異分析法之初步試驗

	初步試驗				總數
	113	113	91	102	419
	102	109	105	102	418
	96	99	94	101	390
	98	99	94	82	373
總數	409	420	384	387	1600

平均數＝100

表 121 —— 續

	正式測驗				總數
	103	110	92	113	418
	94	103	101	92	390
	103	99	94	99	395
	105	104	94	94	397
總數	405	416	381	398	1600

全數平均＝100

爲便利計算起見，本試驗結果，排成拉丁方計算之。其他排法亦

可用，今假定 1931 年之結果爲初步測驗，而 1933 年之結果爲正式測驗，用變異數分析法求得兩者之結果，載表 121 第二及第三節。每區標準誤在初步測驗爲 6.24，而正式試驗爲 6.11。

今進而求初步測驗及正式測驗之相互變異如下。以 x 代表初步測驗之各值及離中差，y 代表正式試驗之各值及離中差。求得橫行之結果或初步測驗之諸行總和之平均數爲 400，而第一行之產量總和爲 419，故 x 第一行離均差爲 19，第二行之總和爲 418，故離中差爲 18，第三行之產量總和爲 390，故離中差爲 −10，第四行爲 373，故離中差爲 −27。y 離均差之求法，乃自正式試驗之諸行平均數減去每行總和而得。其法與求 x 相同。x 及 y 之值自乘，及其總和，載表 122。初步測驗及正式試驗之諸項平均數，及其離均差 x 與 y，用同一方法求

變異數分析

初步測驗

變異	自由度	平方和	平方均	標準誤
橫行間	3	378.5		
縱行間	3	226.5		
差誤	9	351.0	39.0000	6.24
總數	15	956		

正式測驗

變異	自由度	平方和	平方均	標準誤
橫行間	3	114.5		
縱行間	3	161.5		
差誤	9	336.0	37.3333	6.11
總數	15	612.0		

表 122.

引證相互變異之計算法及迴歸值對於改正產量之影響

	x	y	x^2	y^2	xy
橫行	19	18	361	324	342
	18	-10	324	100	-180
	-10	-5	100	25	50
	-27	-3	729	9	81
			Σ = 1514	458	293
			均數 = 378.50[1]	114.50	73.25
縱行	9	5	81	25	45
	20	16	400	256	320
	-16	-10	256	361	304
	-13	-2	169	4	26
			Σ = 906	646	695
			均數 = 226.50[2]	161.50	173.75
總數	13	3	169	9	39
	13	10	169	100	130
	-9	-8	81	64	72
	2	13	4	169	26
	2	-6	4	36	-12
	9	3	81	9	27
	5	1	25	1	5
	2	-8	4	64	-16
	-4	3	16	9	-12
	-1	-1	1	1	1
	-6	-6	36	36	36
	1	-1	1	1	-1
	-2	5	4	25	-10
	-1	4	1	16	-4
	-6	-6	36	36	36
	-18	-6	324	36	108
			Σ = 956	612	425

1 被 4 除即為橫行數之離差

2 被 4 除即為縱行數之離差

表 122. —— 續

變異數總和及自乘積

	自由度	x^2	xy	y^2
橫行間	3	378.50	73.25	114.50
縱行間	3	220.50	173.75	161.50
差誤	9	351.00	178.00	336.00
總數	15	950.00	425.00	612.00

改正產量之變異數分析

變異	自由度	平方和	平方均	標準誤
橫行間	3	137.5175		
縱行間	3	43.5391		
差誤	8	245.7322	30.7165	5.54
總數	14	426.7888		

得，結果見表 122 第 425 及 426 頁。若以諸數相加，而以其個數除之，所得各值，即為變異數分析法內所需之縱行 x^2 平均數，及橫行 y^2 平均數。變異數除橫行及縱行之平均離差外，可用類似之方法，求得諸區之離均差。其法先求得諸小區之平均數，而與各區產量相較，各相差自乘之和，被個數除之，即得總變異數平方總和。例如初級測驗諸區平均數為 100，而第一區之產量為 113，故離均差 x 為 13，又正式試驗之諸區平均數亦為 100，第一區之產量為 103，故離均差 y 為 3。其他各區之 x 與 y 值，一一求得後，自乘相加之和，載表 122。從總變

異數內，減去縱行與橫行之變異數後，即得賸餘變異或差誤。

從 x^2，y^2 及 xy 各值，即可求相關係數，而知不同年之產量相關。求得相關係數後，即可計算迴歸係數 x^2 及 y^2 值，以自由度 9 除之，開方得 x 及 y 之離均差。求得 x 爲 6.24，y 爲 6.11。用下列公式，可得 r 值

$$r=\frac{\frac{\Sigma xy}{N}}{\sigma_x\sigma_y}\quad N=\text{自由度}=9$$

以 x，y 及 xy 各值代入上列公式，得 r 爲 0.519。

$$r=\frac{\frac{178.00}{9}}{(6.24)(6.11)}=0.519$$

以諸值代入迴歸係數之公式：$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$

$$y=.519\ \frac{6.11}{6.24}\ x$$

或 $y=.508x$

本分析之目的，在知 y 在 x 之迴歸；故亦可用下列公式，直接求得 b 值：

$$b=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$$=\frac{178.00}{351.00}=.507$$

此二數 0.508 及 0.507 之略有差異者，乃由於小數點之出入所致。

今可以此迴歸係數 0.507，以校正縱行橫行及總和之差誤，而求得除去迴歸差誤後之新標準差。b 值爲迴歸係數，故比較的校正產量，乃從比較的 y－bx 中得來：

$$(y-bx)^2 = b^2x^2 - 2bxy + y^2$$

查得 $b^2 = .507^2 = .257049$, $2b = 2 \times .507 = 1.014$

以表 122 上半部所載之 x^2, y^2 及 xy 值，與 b^2 及 $-2b$ 值代入方程式 $b^2x^2 - 2bxy + y^2$ 內，得除去迴歸差誤後之橫行變異平方和爲 137.5175. 載表 122 下半部內，其求法爲.

橫行之 $x^2 = 378.50$

故 $b^2x^2 = 378.50 \times .257049 = 97.2930$

橫行之 $xy = 73.25$

故 $-2bxy = 73.25 \times -1.014 = -74.2755$

橫行之 $y^2 = 114.50$

故橫行之 $y^2 = 114.50 \times 1 = 114.5000$

$$b^2x^2 - 2bxy + y^2 = 97.2930 - 74.2755 + 114.5000$$

$$= 137.5175$$

縱行與總數之值，可用同樣方法求得之。縱行與橫行之自由度與前同，惟總自由度 15 則減去一個迴歸自由度而成 14，從總變異數及總自由度減去縱行及橫行之變異數與自由度後，得差誤總和爲 245.7322，及其自由度 8，此差誤總和以 8 除之而開方，得標準誤爲 5.54。此數爲除去迴歸差誤之標準誤，以前所求得之未除迴歸差誤之標準差爲 6.11。

若先求得 $y-bx$ 值，而後用分析法求去迴歸之差誤，所得結果，完全相同。其結果載表 123(429頁)。用 $y-bx$ 之方程式，求第一區 y 值時，先將離均差查得如下。初步測驗之 x 第一區平均百分數爲 113，故離均差爲 $113-100=13$。今知 y 第一區之值爲 103，b 爲 .507，$x=13$，

以之代入 y－bx 之方程內，得 103－.507×13＝96.409，此即為改正 y 值。y 第二區之值為 110，故改正值為 110－(.507×13)＝103.409。其他各數，照樣算出，詳載表 123 下部。

用公式 y－bx 求改正數，b 係定數，而 b 則自差誤內算出，故差誤自由度 15，當減去一個自由度，而成為 14。

表 123.

用 y－bx 方程式求得改正產量後
用變異數分析法分析其變異

y	－	bx				
103	－	.507	×	13	=	96.409
110	－	.507	×	13	=	103.409
92	－	.507	×	－9	=	96.563
113	－	.507	×	2	=	111.986
94	－	.507	×	2	=	92.986
103	－	.507	×	9	=	98.437
101	－	.507	×	5	=	98.465
92	－	.507	×	2	=	90.986
103	－	.507	×	－4	=	105.028
99	－	.507	×	－1	=	99.507
94	－	.507	×	－6	=	97.042
99	－	.507	×	1	=	98.493
105	－	.507	×	－2	=	106.014
104	－	.507	×	－1	=	104.507
94	－	.507	×	－6	=	97.042
94	－	.507	×	－18	=	103.126

改正產量排成變異數分析用

					總數
	96.469	103.409	96.563	111.986	408.367
	92.986	98.437	98.465	90.986	380.874
	105.028	99.507	97.042	98.493	400.070
	106.014	104.507	97.042	103.126	410.689
總數	400.437	405.860	389.112	404.591	

改正產量用變異數分析之結果

變異	自由度	變異平方和	平方均	標準誤
橫行	3	137.5175		
縱行	3	43.5391		
差誤	8	245.7322	30.7165	5.54
總數	14	426.7888		

上舉例題引證如何用初步測驗來求得改正產量，及如何除去迴歸差誤，而求標準誤。若初步測驗繼續試驗數年，或試驗數種作物後，可將每年結果，分別分析，而作爲某年或某種作物之參考，又可將幾年試驗，求得平均結果，而化成百分數，以爲比較。今將以 1929 年及 1931 年結果爲例以引證其算法。用上述方法，求得總數及縱行與橫行間之變異數，載表 124。迴歸係數 b 爲 216.25/250.50＝0.863，從 b^2 及 －2b 之值所求得校正數，載表 124 末一節內。因將兩個初步測驗歸併計算，故標準錯已減小而僅爲 4.32。

表 124.

用上列作物之改正產量來引證變異數分析法之計算

1929 年及 1931 年之作物平均產量百分數					
					總 數
	106	110	95	108	420
	102	107	106	99	414
	97	97	95	99	388
	95	99	99	85	378
總 數	400	414	395	391	1600

正式試驗 1933 年

					總 數
	103	110	92	113	418
	94	103	101	92	390
	103	99	94	99	395
	105	104	94	94	397
總 數	405	416	381	398	1600

表 124. —— 續

變異數之和數及積數

	自由度	x^2	xy	y^2
橫 行	3	306.00	86.50	114.50
縱 行	3	75.50	84.25	161.50
差 誤	9	250.50	216.25	336.00
總 數	15	632.00	387.00	612.00

改正產量之變異數分析結果

變異數	自由度	平方和	平方均	標準誤
橫行	3	103.1003		
縱行	3	72.3146		
差誤	8	149.3171	18.6646	4.32
總數	14	414.7320		

推算產量可根據迴歸數及標準差而求得之。故若有數年充分之初步測驗成績，即可用以預測產量。偶亦有雖經數年測驗而減少之差異仍極有限。惟大多數之試驗，則歷年試驗常有相關，故將迴歸差誤除去後，試驗差誤便可減少，故均一試驗，尚值得舉行。

其實均一試驗之結果，即不能用以減少差誤，亦自有其用處。蓋每遇一新試驗地而不知其土壤差異至如何程度，宜先舉行一二種作物之均一試驗，俾知其地之宜否用作試驗。若有一部份土地差異極大，不合試驗，則可乘早放棄，不致空勞時日而多費人工與牲力。又若初步試驗結果，指示土地差異頗大，則所得試驗宜用分析法來求出改正產量之變異數而予以校正。

詮釋結果之方法(Methods of Interpreting Results)——田間試驗之結果，果可用種種方法來解釋之，惟普通以求出標準誤或機誤來決定所得結果之變異程度為論斷。凡試驗所得之差異，可與純由偶然所得之差誤或自然差誤 (chance variation)相比較。苟試驗差異與自然差誤之比，所得之機偶為頗顯著，則試驗確有差異。今以表 125 資料來引證本章所討論之第一方法，來求每一標準行，及每一品種或試驗處理之機誤。表 125 (433 頁)所載者為一十區試驗之產量記錄。

表　125.

燕麥品種試驗結果及實際產量與計算產量之比較
（每品種重複種十次）

行號	重複次數										每英畝英斗平均數	用等級法所求得之推算產量	產量損益
0標準	41.0	35.8	36.0	46.5	37.3	33.5	34.5	33.5	33.2	27.0	35.8±1.10		
1	34.4	42.7	34.0	40.7	35.8	24.9	37.2	41.1	36.7	37.3	36.5±1.06	35.5±1.56	1.0±1.89
2	34.5	34.2	43.0	40.0	39.5	23.5	36.6	34.2	43.9	39.5	36.9±1.25	35.2±1.55	1.7±1.99
3	56.6	49.3	49.3	54.0	51.9	53.8	52.1	49.7	51.8	50.7	51.9± .51	34.9±1.53	17.0±1.61
4	42.8	36.9	45.2	42.2	40.2	38.2	38.5	43.0	47.1	38.0	41.2± .72	34.6±1.52	6.6±1.68
5標準	31.5	31.8	40.2	38.0	44.0	27.4	34.4	31.2	24.1	40.3	34.3±1.34		
6	40.5	40.4	32.7	35.6	42.0	40.0	35.4	37.8	42.4	37.2	38.4± .68	34.4±1.51	4.0±1.66
7	37.4	36.4	34.6	39.2	37.8	34.8	37.0	30.8	35.2	37.0	36.0± .50	34.4±1.51	1.6±1.59
8	38.9	33.2	38.4	44.1	34.6	36.9	39.2	40.2	32.0	34.5	37.2± .79	34.5±1.51	2.7±1.70
9	42.2	42.0	39.1	36.6	34.2	42.5	37.1	39.8	47.0	33.3	39.4± .90	34.5±1.51	4.9±1.76
10標準	29.5	23.0	38.3	48.4	36.5	34.0	30.5	29.4	26.3	49.8	34.6±1.90		
11	48.9	44.9	36.0	36.2	40.9	43.2	39.0	41.8	41.3	37.7	41.0± .86	35.1±1.54	5.9±1.76
12	41.7	38.4	40.0	39.0	36.6	30.1	33.4	37.9	40.0	36.2	37.3± .74	35.6±1.56	1.7±1.73
13	42.0	36.1	36.6	36.7	41.5	38.0	37.0	40.0	38.7	38.4	38.5± .44	36.0±1.58	2.5±1.64
14	33.9	36.3	34.8	35.5	34.5	46.7	41.2	38.4	45.3	36.3	38.3± .98	36.5±1.60	1.8±1.88
15標準	38.1	21.5	47.7	46.6	40.8	29.5	32.1	34.1	28.7	51.4	37.0±2.05		
16	42.5	47.3	37.8	36.3	38.6	36.6	34.5	37.0	46.7	32.2	38.9±1.07	36.8±1.62	2.1±1.94
17	38.2	35.9	38.4	37.0	41.0	39.6	37.4	39.8	34.2	39.5	38.1± .43	36.5±1.60	1.6±1.66
18	31.1	38.3	34.8	41.2	34.0	38.1	35.1	33.0	38.9	35.4	36.0± .65	36.3±1.59	- .3±1.72
19	39.7	41.8	36.1	38.0	39.4	48.8	38.4	38.7	48.8	38.0	40.8± .95	36.0±1.58	4.8±1.84
20標準	32.7	26.7	47.1	49.7	37.4	32.0	31.0	31.5	24.9	45.0	35.8±1.85		
21	37.6	48.0	34.9	34.0	40.8	38.5	34.2	37.4	36.8	32.0	37.4± .96	36.3±1.59	1.1±1.86
22	26.4	43.4	43.0	37.3	38.0	37.5	36.7	32.6	34.4	33.2	36.2±1.07	36.8±1.62	- .6±1.94
23	34.8	38.1	34.8	42.6	39.3	41.3	36.8	40.8	39.0	38.3	38.6± .56	37.3±1.64	1.3±1.73
24	42.8	47.4	42.5	34.6	34.0	38.1	42.5	37.5	40.0	36.0	39.5± .91	37.8±1.66	1.7±1.89
25標準	33.4	31.7	45.0	48.5	47.5	29.7	32.6	33.5	30.5	51.0	38.3±1.82		
26	33.7	44.3	37.6	31.3	33.4	49.5	42.4	35.2	39.0	32.1	37.8±1.27	39.6±1.74	- 1.8±2.15
27	41.0	46.6	40.6	38.4	37.5	41.4	40.2	41.6	40.8	36.7	40.5± .58	40.9±1.80	- .4±1.89
28	38.4	22.9	36.4	28.5	22.4	29.7	31.6	34.9	27.0	34.3	30.6±1.17	42.1±1.85	-11.5±2.19
29	33.8	21.3	29.2	34.0	33.3	34.6	48.0	33.3	42.4	29.6	33.9±1.54	43.4±1.91	- 9.5±2.45
30標準	49.5	42.3	41.0	37.4	45.7	48.5	57.3	44.5	46.2	34.7	44.7±1.37		

標準區之機誤百分數 = 4.39

本例題所用者為巴珊兒氏(Bessel)方法。在此種試驗中，大概所用品系及標準行必多，故可先求得品種之平均產量，及各組標準行之機誤。諸機誤相加，而得總機誤，此數被標準行平均產量總和除之，而得機誤百分數。此即為標準區之機誤，可用來求計算標準行之機誤。計算標準行之產量，係用等級法求得後，以標準行機誤平均百分數乘之，即得。例如表 125 所載，十個標準行之平均機誤為 4.39%，第一行之計算標準行產量為 35.5 英斗，故以 35.5 乘 4.39%，得機誤 1.56 英斗，其他各組計算標準行之機誤，可用同一方法求得之。各品種之產量及機誤，逐項與其鄰近之計算標準行產量及機誤相比較，而得損益之結果，載表 125。兩數相較之機誤，可用普通機誤比較法求得之。例如第一項之品種平均產量為 36.5±1.06，而計算產量則為 35.5±1.56，故兩者之差為1±1.89，其他各行用同一方法比較之。

實際或品種平均產量與計算產量之相差既求得後，當決定其差異與機誤之比率如何。是非所得之相差比機誤大三倍，(3.2) 差異即不能稱為顯著。

上述計算機誤差異之方法，乃未曾計及兩者之相互關係者。惟本方法為試驗之初步指南，僅用以決定試驗品種之升級與取捨而已，初不斤斤於其相差之多少，故暫不計相關，以省計算之繁。至於精細之計算，則相互關係，自不可忽。若欲顧及相互關係，則必須求得每區之計算產量，

附註：（作者在草此書時，見費許氏對於本方法有改良之擬議，詳載費許氏原著第五版中。韋適氏對於本法，亦曾有意見表示。舒乃得氏曾應用此種新方法，以分析試驗之結果，惟該文尚未發表）

而不能十區平均求之。故計算較繁。苟所得相差與機誤之比為顯著與不顯著之間，則若除去相關後，差異即成顯著。因除去相關後，機誤減小而$\frac{D}{P.E.}$之比值放大矣。為欲表示用本方法，尤其是等級法，來論斷結果，不致引起重大差誤起見，作者特再以表 126 資料，作例引證之如下：

表　126.

每年產量損益與計算產量之相關結果

（產量代表諸品種之一年結果）

小	麥
1927	.919±.016
1928	.960±.007
1929	814±.021
1931	.755±.027

燕	麥
1927	.749±.026
1928	.767±.028
1929	.796±.020
1931	.592±.035

表 126 所示者為諸品種實際產量與產量損益（產量與計算標準量之較）之相關，四年間皆極高。此可知產量與產量得失之相互關係，果甚高也。表 127 復舉一例，以證實之。

表 127.

同品種產量之異年相關係數

作物	相關	相關係數	
		每英畝英斗	與標準行比較結果
燕麥			
	1925 及 1926	-.123±.077	.223±.074
	1926 及 1927	.299±.083	.610±.057
	1927 及 1928	.354±.072	.432±.067
	1928 及 1929	.595±.052	.514±.059
	1929 及 1930	.204±.088	.220±.087
	1930 及 1931	.422±.076	.359±.081
	1931 及 1932	.073±.068	.231±.065
小麥			
	1925 及 1927	.333±.097	.503±.082
大麥			
	1924 及 1925	.603±.075	.422±.097
	1926 及 1927	.373±.066	.514±.056
	1927 及 1928	.392±.071	.495±.063

表 127 示兩年同品種產量之比較，其比法分二種。一爲同品種第一年與第二年實際產量之比，一爲第一年與第二年產量損益之比。(卽實際產量與計算產量之相較數)後者(用損益相比較者)之相關量，較實際產量之相關量略高。若等級法果能引起差誤，則所得相關係數，必不能常高。此可證明用等級法來求計算產量，並無引起差誤之可慮。有時亦遇有相關係數極低，或甚至有反相關者，實因取樣不確所致，而非方法不善之

故。

上述方法似較繁瑣，今將是法修改而成爲簡單方法。此第二方法，係將從諸標準行所求得之平均機誤百分數，作爲普通機誤，可直接用表來比較品種或標準品種。例如表 125 之平均機誤爲 4.39% 此卽可算爲品種產量或計算標準產量之機誤。

吾等所計算者，常爲甲乙兩個品種之比較，或甲品種與標準品種之比較，今旣假定無論任何品種及標準品種之機誤皆爲 4.39，故兩品種之機誤差異當爲 $4.39\sqrt{2}=6.21\%$。選擇優良品種時，可規定二倍或三倍於此機誤差爲中選標準。以品種平均數乘此標準百分數，卽得標準超越數，凡品種產量與標準產量之相較，大於此標準數時，卽爲中選。今姑以三倍機誤差爲標準，故當以 $6.21\times3=18.63$ 爲標準數。表 125 第三行之平均產量爲 51.9 英斗，今以 18.63% 乘之，得 9.67。而第三行之產量損益爲 17.0，此數大於 9.67，故第三行品種產量，確比標準產量爲高，應當入選。其他比較，照此類推。

此法簡單而省時，頗合於選擇品種之用。惟有一缺點，則機誤僅根據一品種（卽標準品種）之變量而定，此品種未必能常爲各品種之代表耳。

韓斯氏曾用求離均差之方法，來設計一種求平均機誤之新方法。其法係先求得每品種之平均產量，此平均產量與一區平均產量相較，其差一一自乘而後相加，其和卽爲 ΣD^2。今以表 125 之資料，用此新法演算之如下。

第一行第一區之產量爲 34.4 英斗，而此品種之均數爲 36.5，故

相差爲 34.4－36.5＝－2.1。第二區之相差爲 42.7－36.5＝6.2，此種相差數卽爲"D"值。

其他各品種之"D"，用同法求得而記錄於附表"D"項下：

	產量平均	D	D^2
行 1 內之品種	34.4-36.5	-2.1	4.41
	42.7-36.5	6.2	38.44
	34.0-36.5	-2.5	6.25
	餘類推		
行 2 內之品種	34.5-36.9	-2.4	5.76
	34.2-36.9	-2.7	7.29
	43.0-36.9	6.1	37.21
	餘類推		
行 3 內之品種	56.6-51.9	4.7	22.09
	49.3-51.9	-2.6	6.76
	49.0-51.9	-2.9	8.41
	餘類推		

各項之 D，自乘相加，而得 ΣD^2 爲 3884.50，用下列公式，求得單次機誤爲 2.861。

$$P.E._1=\pm .6745\sqrt{\frac{\Sigma D^2_n}{N(n-1)}}$$

N 爲區數，n 爲每品種之區數，表 125 共用 24 品種，每品種種十區，故 N 爲 240，而 n 則爲 10，以之代入公式，得：

$$P.E._1=\pm .6745\sqrt{\frac{3884.50\times 10}{240\times 9}}=\pm 2.861$$

此數若以品種產量平均數除之，而以 100 乘之使成百分數，則為 $\frac{2.861}{38.371}\times 100=7.46\%$。十區之機誤為 $7.46/\sqrt{10}=2.36\%$，兩個機誤之相差為 $2.36\sqrt{2}$。二倍或三倍此數，即為標準機誤百分數，可照上述簡法來比較品種，而定去留。此兩法所得結果，相差極微。

作　　物	平均年份	標準行之單次機誤	平均數之單次機誤
春小麥	6	9.3	9.9
燕　麥	6	7.7	6.9
大　麥	6	9.4	9.2

上表比較兩種方法所得之結果，兩者幾相同。故選擇品種時，兩法皆可用。惟從標準品種求機誤之法，較從均數求機誤之法為略簡單耳。

另一求普通機誤之方法，為史蒂廸脫氏所擬定，此法在變異數分析法上，頗有效用。今以表 128 之資料引證之。所用之公式為：

表 128.

除去品種間，處理間，及區間，等變異後之求機誤方法

品　種	重複次數					總　數	平均數
	1	2	3	4	5		
A	40	43	44	38	42	210	42
B	38	44	42	36	40	200	40
C	36	40	38	34	42	190	38
D	34	38	36	32	30	170	34
E	42	42	40	40	46	210	42
總　數	190	210	200	180	200	980	全數平均
平均數	38	42	40	36	40		39.2

從求得各區與平均數之離差後自乘相加	
D	D^2
.8	.64
6.8	46.24
4.8	23.04
-1.2	1.44
2.8	7.84
-1.2	1.44
4.8	23.04
2.8	7.84
-3.2	10.24
.8	.64
-3.2	10.24
.8	.64
-1.2	1.44
-5.2	27.04
2.8	7.84
-5.2	27.04
-1.2	1.44
-3.2	10.24
-7.2	51.84
-9.2	84.64
2.8	7.84
2.8	7.84
.8	.64
.8	.64
6.8	46.24
平均數或 $\sigma_T^2=16.32$	

品種之平方和		重複次數之平方和	
D	D^2	D	D^2
2.8	7.84	-1.2	1.44
.8	.64	2.8	7.84
-1.2	1.44	.8	.64
-5.2	27.04	-3.2	10.24
2.8	7.84	.8	.64
平均數或 $\sigma_V^2=8.96$		平均數或 $\sigma_R^2=4.16$	

$$P.E._s=\pm.6745\sqrt{\frac{Nn(\sigma_T^2-\sigma_V^2-\sigma_R^2)}{(N-1)(n-1)}}$$

σ_T^2 ＝諸區產量之變異數

σ_V^2 ＝品種平均之變異數

σ_R^2 ＝重複次數平均之變異數

N ＝品種數

n ＝每品種之區數

上列常數用下法求出：

$$\sigma_T^2 = \frac{\Sigma(P)^2}{Nn} - M^2$$

P＝每區產量

M＝諸區平均數

$$\sigma_V^2 = \frac{\Sigma(V)^2}{N} - M^2$$

V＝品種平均產量

$$\sigma_R^2 = \frac{\Sigma(R)^2}{n} - M_2$$

R＝重複次數平均產量

用此種公式時，可將平均數假定為另，而以各個產量分別自乘。若數不大，從平均數 M 與其個數逐項相較而得亦可。表 128 即引證此法。所求得各值，以之代入公式如下：

$$P.E._{s} = \pm .6745\sqrt{\frac{5\times5(16.32-8.96-4.16)}{4\times4}} = \pm1.5$$

化成百分數得 $\frac{1.5}{39.2}\times100=3.8\%$，此為單次機誤百分數。至於平均機誤百分數，則為 $3.8/\sqrt{5}=1.7\%$。

若以表 128 之資料，用離均差求機誤之方法計算之則得單次機誤

為 5.1%。其五行平均機誤為 2.3%。此數略大。查用史蒂頓脫氏方法所求得之平均機誤為 1.7%。[此因用史蒂頓脫氏方法時，曾將品種間及重複次數間之變異，由總變異內減去，故差誤減小。此結果較上法為準確，惟算法較繁。若遇試驗數目繁多，而以此法計算之，殊費時日耳。舉行土壤試驗及栽培試驗，因數目不大。故以用此法為宜。作物育種家之目的，常在比較數百品系之優劣，故在初步分析，不妨採用簡單方法來決定之。

上述方法皆宜於分析一年結果之用。若欲分析數年結果，則宜採用他方。例有一試驗，用標準品種來比較甲乙兩品種之優劣，因各品種所用以比較之標準為同一品種，故可將甲乙兩品種，超過標準品種之數，並行排列，而以史蒂頓脫氏或費許氏方法比較之，見 XII 章

	多於標準之數	
年份	品種 A	品種 B
1928	7.6	4.2
1929	4.3	4.0
1930	5.8	3.0
1931	8.7	4.2
1932	4.0	2.1

若兩個品種試驗之年份不同，一則五年，一則四年，則史蒂頓脫氏法即不合用，而僅能用費許氏法來計算之。

第十三章及十四章所敍述之變異數分析法，亦可用以分析試驗結果，而在土壤試驗及肥料試驗，尤為合用，因此種試驗，可將數個測驗併合而共同分析之。

關於分析試驗結果之討論，余將作下列之結語：

凡單年試驗之結果，可用上述任何方法來分析之，凡經數年試驗而得之最後結果，宜用史帶頓脫氏或費許氏方法來分析之。變異數分析法，為新進之法，解釋試驗結果時，可採用之。

田間排列方法之介紹（Recommendations Regarding Plot Arrangement）——田間試驗，大別之有二，一為作物育種者所主持之作物選種或雜交試驗，一為土壤肥料及栽培等試驗。就第一種試驗而言，以用小區而多重複次數，較之增加每區面積，而減少次數之為準確。

五穀若小麥，大麥，及水稻等，單行區之行長，以 12 呎至 18 呎者為合宜。此種行長，在頭二三年為尤妥。最後試驗，則行長十二呎至十八呎之三行區極合用。若生長競爭頗劇，則卽在頭數年亦不宜用單行，而宜用三行制。有時雖有生長競爭，而並不十分影響產量，則在初步試驗，仍以用單行區，而多用重複次數為宜。

若為玉米，馬鈴薯，高粱，及棉花等作物試驗，則可用修改單行制。行間距離宜較寬，行長宜增加，若每行能重複數次，而以行長能容 20 至 30 株者為宜。較為注重之試驗，至少須重複四次，惟若屬可能，以重複九次為宜。

關係重複次數之多少，則次數多者較少者為準確，故若規劃試驗結果，表示重複六次已夠，則實行試驗時，以重複七八次為妥。因多植一二行，可以防意外損失而致減少行數之虞也。若生長競爭影響頗大時，宜不用單行區，而用三行區，或四行區，惟用三行區，需地較多，故若種地有限，則可將性狀相同之品種，種在一起，並將行距略行放寬，使不相遇

蔽。或有人以爲各行距離旣較遠，土壤差異卽較大。其實此並不足爲慮，因試驗目的，本在選取優良品系，如是正可速劣品種之淘汰耳。末一年可舉行一三行區之試驗，僅用中間一行之產量來比較，可免生長競爭之影響也。

土壤肥料及栽培試驗，亦以小區重複數次，較大區之種植一二次者爲宜。惟本章所謂小區者，乃指一區面積之能種多株作物而言。此在小麥水稻等小株作物，當不成問題，惟在大株作物，若棉花高粱等，則面積不宜太小也。各區排列，可用隨機排列法，惟每一處理，至少須有五區，每一重複行內，須有一對照區。若用有系統排列，則每三行四行或五行一標準皆好，概以土地之多少而定。

整地之方法與小區之面積有關，今當附述之。若面積極大，而需機器整地，則四週宜築邊行，俾各區土壤，不致被機器所推動，而互相混雜。區與區之間，須築畦，以防甲區施肥流入乙區之弊，而妨礙試驗之準確。水稻肥料試驗之小區面積，以 10 乘 20 呎爲宜，其面積爲 $\frac{1}{30}$ 英畝。此種小區，可用人工整地，而免各區泥土混雜之虞。若所用田地，必需灌漑，則區與區之間，宜作畦，以防田水之亂流。築畦之土，宜與區內之土相同。區與區之間，宜種試驗相同之作物。

凡試驗之須經幾年測驗者，宜先以二三作物作一初步測驗，俾知試驗地內各區，對於欲試之作物，是否相宜。各區土壤，是否皆可用。此種初步測驗之材料，可作正式試驗之參考也。在舉行初步測驗時，各種處理，以隨機排列爲宜。

土壤試驗之重複次數，視所測量之差異而定。惟至少須有四至九次

之重複次數，小區面積以$\frac{1}{30}$或$\frac{1}{50}$英畝爲合式，卽面積較大之小區，至少亦須用三四次之重複次數。

總而言之，因能用之田地，人工，及各種設備不同，關係試驗之小區面積，及重複次數，與標準行之多少等等，均未能切實規定。因面積及次數之適宜程度，每因所試驗之作物，土地，及人工等而異。故吾人祇能在舉行試驗時，審察當地情形，權衡得失輕重，而隨時決定之。總之每一試驗，宜舉行數年，俾所得結果較爲準確可靠。今爲便於育種者之參考起見，將宜於小麥，水稻，大麥，小米等作物之行長面積，列表於下：

年份	小區種類	行長	重複次數	標準行次數
第一年	單穗或單株行	3-6 呎	○	每十行一標準
第二年	單行區	12-18 呎	1 或 2	每五行一標準
第三年	單行區	12-18 呎	4 或增多	每五行一標準
第四年	單行區	12-18 呎	9 或增多	每五行一標準
第五年	三行區	12-18 呎	9 或增多	每三行一標準
	五行至七行區	30-60 呎	5 或增多	每三行一標準

表中未載明行距，因行距須視作物而異，以一呎至二呎爲度。若土地，人工皆屬充裕，則三行區不妨提早試用。

若舉行大豆或芝麻等試驗，上列面積，次數，皆可用，惟行距則以二呎，二呎半至三呎爲宜。若以上表作種植馬鈴薯，高粱，玉米，及棉花等之參考，則行長宜改作 20 呎至 50 呎，行闊則爲二呎至三呎。爲欲減少生長競爭起見，（特別在用差異頗大之品系作試驗時）以早用三行區爲宜。關於土壤，肥料等試驗之小區面積及重複次數等，本章已畢述及，故不復贅。

附　　表

表 I.

整 數 平 方 和

n	S(n)	S(n^2)	S(n^3)	S(n^4)	n
1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	2
3	6	14	36	98	3
4	10	30	100	354	4
5	15	55	225	979	5
6	21	91	441	2275	6
7	28	140	784	4676	7
8	36	204	1296	8772	8
9	45	285	2025	15333	9
10	55	385	3025	25333	10
11	66	506	4356	39974	11
12	78	650	6084	60710	12
13	91	819	8281	89271	13
14	105	1015	11025	127687	14
15	120	1240	14400	178312	15
16	136	1496	18496	243848	16
17	153	1785	23409	327369	17
18	171	2109	29241	432345	18
19	190	2470	36100	562666	19
20	210	2870	44100	722666	20
21	231	3311	53361	917147	21
22	253	3795	64009	1151403	22
23	276	4324	76176	1431244	23
24	300	4900	90000	763020	24
25	325	5525	105625	2153645	25

表 II.

用 y=a+bx+c 對數 x 之公式配合對數曲線之各值

x	對數 x	S (對數 x)	x 對數 x	S (x 對數 x)	(對數 x)^2	S (對數 x)^2
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.3010	.3010	.6020	.6020	.0906	.0906
3	.4771	.7781	1.4313	2.0333	.2276	.3182
4	.6021	1.3802	2.4084	4.4417	.3625	.6807
5	.6990	2.0792	3.4950	7.9367	.4886	1.1693
6	.7782	2.8574	4.6692	12.6059	.6056	1.7749
7	.8451	3.7025	5.9157	18.5216	.7142	2.4891
8	.9031	4.6056	7.2248	25.7464	.8156	3.3047
9	.9542	5.5598	8.5878	34.3342	.9105	4.2152
10	1.0000	6.5598	10.0000	44.3342	1.0000	5.2152
11	1.0414	7.6012	11.4554	55.7896	1.0845	6.2997
12	1.0792	8.6804	12.9504	68.7400	1.1647	7.4644
13	1.1139	9.7943	14.4807	83.2207	1.2408	8.7052
14	1.1461	10.9404	16.0454	99.2661	1.3135	10.0187
15	1.1761	12.1165	17.6415	116.9076	1.3832	11.4019
16	1.2041	13.3206	19.2656	136.1732	1.4499	12.8518
17	1.2304	14.5510	20.9168	157.0900	1.5139	14.3657
18	1.2553	15.8063	22.5954	179.6854	1.5758	15.9415
19	1.2788	17.0851	24.2972	203.9826	1.6353	17.5768
20	1.3010	18.3861	26.0200	230.0026	1.6926	19.2694
21	1.3222	19.7083	27.7662	257.7688	1.7482	21.0176
22	1.3424	21.0507	29.5328	287.3016	1.8020	22.8196
23	1.3617	22.4124	31.3191	318.6207	1.8542	24.6738
24	1.3802	23.7926	33.1248	351.7455	1.9050	26.5788
25	1.3979	25.1905	34.9475	386.6930	1.9541	28.5329
26	1.4150	26.6055	36.7900	423.4830	2.0022	30.5351
27	1.4314	28.0369	38.6478	462.1308	2.0489	32.5840
28	1.4472	29.4841	40.5216	502.6524	2.0944	34.6784
29	1.4624	30.9465	42.4096	545.0620	2.1386	36.8170
30	1.4771	32.4236	44.3130	589.3750	2.1818	38.9988
31	1.4914	33.9150	46.2334	635.6084	2.2243	41.2231
32	1.5051	35.4201	48.1632	683.7716	2.2653	43.4884
33	1.5185	36.9386	50.1105	733.8821	2.3058	45.7942
34	1.5315	38.4701	52.0710	785.9531	2.3455	48.1397
35	1.5441	40.0142	54.0435	839.9966	2.3842	50.5239
36	1.5563	41.5705	56.0268	896.0234	2.4221	52.9460
37	1.5682	43.1387	58.0234	954.0468	2.4593	55.4053
38	1.5798	44.7185	60.0324	1,014.0792	2.4958	57.9011
39	1.5911	46.3096	62.0529	1,076.1321	2.5316	60.4327
40	1.6021	47.9117	64.0840	1,140.2161	2.5667	62.9994

表 II. 續

x	對數 x	S (對數 x)	x 對數 x	S(x 對數 x)	(對數 x)²	S(對數 x)²
41	1.6128	49.5245	66.1248	1,206.3409	2.6011	65.6005
42	1.6232	51.1477	68.1744	1,274.5153	2.6348	68.2353
43	1.6335	52.7812	70.2405	1,344.7558	2.6683	70.9036
44	1.6435	54.4247	72.3140	1,417.0698	2.7011	73.6047
45	1.6532	56.0779	74.3940	1,491.4638	2.7331	76.3378
46	1.6628	57.7407	76.4888	1,567.9526	2.7649	79.1027
47	1.6721	59.4128	78.5887	1,646.5413	2.7959	81.8986
48	1.6812	61.0940	80.6976	1,727.2389	2.8264	84.7250
49	1.6902	62.7842	82.8198	1,810.0587	2.8568	87.5818
50	1.6990	64.4832	84.9500	1,895.0087	2.8866	90.4684
51	1.7076	66.1908	87.0876	1,982.0963	2.9159	93.3843
52	1.7160	67.9068	89.2320	2,071.3283	2.9447	96.3290
53	1.7243	69.6311	91.3879	2,162.7162	2.9732	99.3022
54	1.7324	71.3635	93.5496	2,256.2658	3.0012	102.3034
55	1.7404	73.1039	95.7220	2,351.9878	3.0290	105.3324
56	1.7482	74.8521	97.8992	2,449.8870	3.0562	108.3886
57	1.7559	76.6080	100.0863	2,549.9733	3.0832	111.4718
58	1.7634	78.3714	102.2772	2,652.2505	3.1096	114.5814
59	1.7709	80.1423	104.4831	2,756.7336	3.1361	117.7175
60	1.7782	81.9205	106.6920	2,863.4256	3.1620	120.8795
61	1.7853	83.7058	108.9073	2,972.3289	3.1873	124.0668
62	1.7924	85.4982	111.1288	3,083.4577	3.2127	127.2795
63	1.7993	87.2975	113.3559	3,196.8136	3.2375	130.5170
64	1.8062	89.1037	115.5968	3,312.4104	3.2624	133.7794
65	1.8129	90.9166	117.8385	3,430.2489	3.2866	137.0660
66	1.8195	92.7361	120.0870	3,550.3359	3.3106	140.3766
67	1.8261	94.5622	122.3487	3,672.6846	3.3346	143.7112
68	1.8325	96.3947	124.6100	3,797.2946	3.3581	147.0693
69	1.8388	98.2335	126.8772	3,924.1718	3.3812	150.4505
70	1.8451	100.0786	129.1570	4,053.3288	3.4044	153.8549
71	1.8513	101.9299	131.4423	4,184.7711	3.4273	157.2822
72	1.8573	103.7872	133.7256	4,318.4967	3.4496	160.7318
73	1.8633	105.6505	136.0209	4,454.5176	3.4719	164.2037
74	1.8692	107.5197	138.3208	4,592.8384	3.4939	167.6976
75	1.8751	109.3948	140.6325	4,733.4709	3.5160	1 1.2136
76	1.8808	111.2756	142.9408	4,876.4117	3.5374	174.7510
77	1.8865	113.1621	145.2605	5,021.6722	3.5589	178.3099
78	1.8921	115.0542	147.5838	5,169.2560	3.5800	181.8899
79	1.8976	116.9518	149.9104	5,319.1664	3.6009	185.4968
80	1.9031	118.8549	152.2480	5,471.4144	3.6218	189.1126

表 II. 續

x	對數 x	S(對數 x)	x 對數 x	S(x 對數 x)	(對數 x)^2	S(對數 x)^2
81	1.9085	120.7634	154.5885	5,626.0029	3.6424	192.7550
82	1.9138	122.6772	156.9316	5,782.9345	3.6626	196.4176
83	1.9191	124.5963	159.2853	5,942.2198	3.6829	200.1005
84	1.9243	126.5206	161.6412	6,103.8610	3.7029	203.8034
85	1.9294	128.4500	163.9990	6,267.8600	3.7226	207.5260
86	1.9345	130.3845	166.3670	6,434.2270	3.7423	211.2683
87	1.9395	132.3240	168.7365	6,602.9635	3.7617	215.0300
88	1.9445	134.2685	171.1160	6,774.0795	3.7811	218.8111
89	1.9494	136.2179	173.4966	6,947.5761	3.8002	222.6113
90	1.9542	138.1721	175.8780	7,123.4541	3.8189	226.4302
91	1.9590	140.1311	178.2690	7,301.7231	3.8377	230.2679
92	1.9638	142.0949	180.6696	7,482.3927	3.8565	234.1244
93	1.9685	144.0634	183.0705	7,665.4632	3.8750	237.9994
94	1.9731	146.0365	185.4714	7,850.9346	3.8931	241.8925
95	1.9777	148.0142	187.8815	8,038.8161	3.9113	245.8038
96	1.9823	149.9965	190.3008	8,229.1169	3.9295	249.7333
97	1.9868	151.9833	192.7196	8,421.8365	3.9474	253.6807
98	1.9912	153.9745	195.1376	8,616.9741	3.9649	257.6456
99	1.9956	155.9701	197.5644	8,814.5385	3.9824	261.6280
100	2.0000	157.9701	200.0000	9,014.5385	4.0000	265.6280

表 III.

r_r 及 r 對照表

r_r	r	r_r	r	r_r	r
.10	.105	.40	.416	.70	.717
.11	.115	.41	.426	.71	.726
.12	.126	.42	.436	.72	.736
.13	.136	.43	.446	.73	.746
.14	.146	.44	457	.74	.756
.15	.157	.45	.467	.75	.765
.16	.167	.46	.477	.76	.775
.17	.178	.47	.487	.77	.785
.18	.188	.48	.497	.78	.794
.19	.199	.49	.508	.79	.804
.20	.209	.50	.518	.80	.813
.21	.219	.51	.528	.81	.823
.22	.230	.52	.538	.82	.833
.23	.240	.53	.548	.83	.842
.24	.251	.54	.558	.84	.852
.25	.261	.55	.568	.85	.861
.26	.271	.56	.578	.86	.870
.27	.282	.57	.588	.87	.880
.28	.292	.58	.598	.88	.889
.29	.303	.59	.608	.89	.899
.30	.313	.60	.618	.90	.908
.31	.323	.61	.628	.91	.917
.32	.333	.62	.638	.92	.927
.33	.344	.63	.648	.93	.936
.34	.354	.64	.658	.94	.945
.35	.364	.65	.668	.95	.954
.36	.375	.66	.677	.96	.964
.37	.385	.67	.687	.97	.973
.38	.395	.68	.697	.98	.982
.39	.406	.69	.707	.99	.991

表 IV.

用巴珊兒公式求單次機誤之 $\frac{.6745}{\sqrt{N-1}}$ 值，N 爲 1 至 99

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		.2248	.2133	.2034	.1947	.1871	.1803	.1742	.1686	.1636	.1590
2	.6745	.1547	.1508	.1472	.1438	.1406	.1377	.1349	.1323	.1298	.1275
3	.4769	.1253	.1231	.1211	.1192	.1174	.1157	.1140	.1124	.1109	.1094
4	.3894	.1080	.1066	.1053	.1041	.1029	.1017	.1005	.0995	.0984	.0974
5	.3372	.0964	.0954	.0944	.0935	.0926	.0918	.0909	.0901	.0893	.0886
6	.3016	.0878	.0871	.0864	.0857	.0850	.0843	.0837	.0830	.0824	.0818
7	.2754	.0812	.0806	.0800	.0795	.0789	.0784	.0779	.0774	.0769	.0764
8	.2549	.0759	.0754	.0749	.0745	.0740	.0736	.0732	.0727	.0723	.0719
9	.2385	.0715	.0711	.0707	.0703	.0699	.0696	.0692	.0688	.0685	.0681

用巴珊兒公式求平均機誤之 $\frac{.6745}{\sqrt{N(N-1)}}$ 值，N 爲 1 至 99

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		.0711	.0643	.0587	.0540	.0500	.0465	.0435	.0409	.0386	.0365
2	.4769	.0346	.0329	.0314	.0300	.0287	.0275	.0265	.0255	.0245	.0237
3	.2754	.0229	.0221	.0214	.0208	.0201	.0196	.0190	.0185	.0180	.0175
4	.1947	.0171	.0167	.0163	.0159	.0155	.0152	.0148	.0145	.0142	.0139
5	.1508	.0136	.0134	.0131	.0128	.0126	.0124	.0122	.0119	.0117	.0115
6	.1231	.0113	.0111	.0110	.0108	.0106	.0105	.0103	.0101	.0100	.0098
7	.1041	.0097	.0096	.0094	.0093	.0092	.0091	.0089	.0088	.0087	.0086
8	.0901	.0085	.0084	.0083	.0082	.0081	.0080	.0079	.0078	.0077	.0076
9	.0795	.0075	.0075	.0074	.0073	.0072	.0071	.0071	.0070	.0069	.0068

表 V.

用彼得氏公式求單次機誤之 $\frac{.8453}{\sqrt{N(N-1)}}$, N 爲 1 至 99

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		.0891	.0806	.0736	.0677	.0627	.0583	.0546	.0513	.0483	.0457
2	.5977	.0434	.0412	.0393	.0376	.0360	.0345	.0332	.0319	.0307	.0297
3	.3451	.0287	.0277	.0268	.0260	.0252	.0245	.0238	.0232	.0225	.0220
4	.2440	.0214	.0209	.0204	.0199	.0194	.0190	.0186	.0182	.0178	.0174
5	.1890	.0171	.0167	.0164	.0161	.0158	.0155	.0152	.0150	.0147	.0145
6	.1543	.0142	.0140	.0137	.0135	.0133	.0131	.0129	.0127	.0125	.0123
7	.1304	.0122	.0120	.0118	.0117	.0115	.0113	.0112	.0110	.0109	.0108
8	.1130	.0106	.0105	.0104	.0102	.0101	.0100	.0099	.0098	.0097	.0096
9	.0996	.0094	.0093	.0092	.0091	.0090	.0089	.0089	.0088	.0087	.0086

用彼得氏公式求平均機誤之 $\frac{.8453}{N\sqrt{N-1}}$, N 爲 1 至 99

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		.0282	.0243	.0212	.0188	.0167	.0151	.0136	.0124	.0114	.0105
2	.4226	.0097	.0090	.0084	.0078	.0073	.0069	.0065	.0061	.0058	.0055
3	.1992	.0052	.0050	.0047	.0045	.0043	.0041	.0040	.0038	.0037	.0035
4	.1220	.0034	.0033	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0027	.0026	.0025
5	.0845	.0024	.0023	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0019
6	.0630	.0018	.0018	.0017	.0017	.0017	.0016	.0016	.0016	.0015	.0015
7	.0493	.0015	.0014	.0014	.0014	.0013	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012
8	.0399	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010
9	.0332	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009

表 VI.

根據常態機率合乎 $\frac{x}{\sigma}$ 之估計機率表

假定全面積爲100000，x爲離均距，σ爲標準差

$\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	00000	40	80	120	159	199	239	279	319	259
0.03	1197	1237	1276	1316	1356	1396	1436	1476	1516	1555
0.06	2392	2432	2472	2512	2551	2591	2631	2671	2711	2751
0.09	3586	3625	3665	3705	3744	3784	3824	3864	3903	3943
0.12	4776	4815	4855	4895	4934	4974	5013	5053	5093	5132
0.15	5962	6001	6041	6080	6119	6159	6198	6238	6277	6317
0.18	7142	7182	7221	7260	7299	7338	7378	7417	7456	7495
0.21	8317	8356	8395	8434	8473	8512	8551	8590	8628	8667
0.24	9483	9522	9561	9600	9638	9677	9716	9754	9793	9832
0.27	10642	10680	10719	10757	10796	10834	10872	10911	10949	10988
0.30	11791	11829	11867	11905	11943	11981	12019	12058	12096	12134
0.33	12930	12968	13005	13043	13081	13118	13156	13194	13232	13269
0.36	14058	14095	14132	14169	14207	14244	14281	14319	14356	14393
0.39	15173	15210	15247	15284	15321	15357	15394	15431	15468	15505
0.42	16276	16312	16348	16385	16421	16458	16494	16531	16567	16604
0.45	17364	17400	17436	17472	17508	17544	17580	17616	17652	17688
0.48	18439	18474	18509	18545	18580	18616	18651	18687	18722	18758
0.51	19497	19532	19567	19602	19637	19672	19707	19742	19777	19812
0.54	20540	20574	20609	20643	20678	20712	20746	20781	20815	20850
0.57	21566	21600	21634	21667	21701	21735	21769	21803	21836	21870
0.60	22575	22608	22641	22674	22707	22741	22774	22807	22840	22874

表 VI. 積

$\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	23565	23598	23630	23663	23695	23728	23761	23793	23826	23859
0.66	24537	24569	24601	24633	24665	24697	24729	24761	24793	24825
0.67	24857	24889	24920	24952	24984	25016	25048	25079	25111	25143
0.69	25490	25521	25553	25584	25615	25647	25678	25709	25741	25772
0.72	26424	26454	26485	26516	26546	26577	26608	26638	26669	26700
0.75	27337	27367	27397	27427	27457	27487	27517	27547	27577	27607
0.78	28230	28260	28289	28318	28347	28377	28406	28435	28465	28494
0.81	29103	29132	29160	29189	29217	29246	29274	29303	29332	29360
0.84	29954	29982	30010	30038	30066	30094	30122	30150	30178	30206
0.87	30785	30812	30839	30866	30894	30921	30948	30975	31002	31030
0.90	31594	31620	31647	31673	31700	31726	31753	31780	31806	31832
0.93	32381	32407	32433	32459	32484	32510	32536	32562	32587	32613
0.96	33147	33172	33197	33222	33247	33272	33297	33322	33347	33373
0.99	33891	33915	33940	33964	33988	34013	34037	34061	34086	34110
1.02	34613	34637	34661	34684	34708	34731	34755	34778	34802	34826
1.05	35314	35337	35360	35382	35405	35428	35451	35474	35497	35520
1.08	35993	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	015	037	059	081	103	125	148	170	192
1.11	36650	671	693	714	735	757	778	800	821	843
1.14	37286	306	327	348	368	389	410	430	451	472
1.17	900	920	940	960	980	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	000	020	040	060	080
1.20	38493	512	531	551	570	589	609	628	647	667
1.23	39065	084	102	121	139	158	177	195	214	232
1.26	617	634	652	670	688	706	724	742	760	778

表 VI. 續

$\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.29	40147	165	182	199	216	233	251	268	285	303
1.32	658	676	692	709	725	742	758	775	792	808
1.35	41149	165	181	197	213	229	245	261	277	292
1.38	41621	637	652	667	683	698	713	728	744	759
1.41	42073	088	102	117	131	146	161	175	190	205
1.44	507	521	535	549	563	577	591	605	619	633
1.47	922	935	949	962	975	989	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	002	016	029	043
1.50	43319	332	345	358	371	383	396	409	422	435
1.53	699	711	724	736	748	760	773	785	797	810
1.56	44062	074	085	097	109	120	132	144	156	167
1.59	408	419	430	442	453	464	475	486	498	509
1.62	738	749	760	770	781	791	802	813	823	834
1.65	45053	063	073	083	093	103	114	124	134	144
1.68	352	362	371	381	391	400	410	419	429	439
1.71	637	646	655	664	673	682	692	701	710	719
1.74	907	916	924	933	942	950	959	968	977	985
1.77	46164	172	180	188	196	205	213	221	230	238
1.80	407	415	423	430	438	446	454	462	469	477
1.83	638	645	652	660	667	674	682	689	697	704
1.86	856	863	870	877	884	891	898	905	912	919
1.89	47062	069	075	082	088	095	102	108	115	122
1.92	257	263	270	276	282	288	294	301	307	313
1.95	441	447	453	459	465	471	476	482	488	494
1.98	615	620	626	631	637	643	648	654	659	665

表 VI. 續

$\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.01	778	784	789	794	799	804	810	815	820	826
2.04	932	937	942	947	952	957	962	967	972	977
2.07	48077	082	087	091	096	100	105	110	114	119
2.10	214	218	222	227	231	235	240	244	248	253
2.13	341	345	350	354	358	362	366	370	374	378
2.16	48461	465	469	473	477	480	484	488	492	496
2.19	574	577	581	584	588	592	595	599	602	606
2.22	679	68[illegible]	686	689	6[illegible]2	696	699	702	706	709
2.25	778	781	784	787	790	793	796	799	803	806
2.28	870	872	875	878	881	884	887	890	893	896
2.31	956	958	961	964	966	969	972	975	977	980
2.34	49036	038	041	043	046	048	051	054	056	059
2.37	111	113	115	118	120	122	125	127	130	132
2.40	180	182	185	187	189	191	193	196	198	200
2.43	245	247	249	251	253	255	257	259	261	264
2.46	305	307	309	311	313	315	317	319	321	323
2.49	361	363	365	367	368	370	372	374	375	377
2.7	653	664	674	683	693	702	711	720	728	736
3.0	865	869	873	878	882	886	889	893	897	900
3.3	952	953	955	957	958	960	961	962	964	965
3.6	984	985	985	986	986	987	987	988	988	989
3.9	995	995	996	996	9[illegible]6	996	996	996	997	997

表 VII.

D/P.E. 之機遇表

$\frac{D}{P.E.}$	純由機會造成之機遇	$\frac{D}{P.E.}$	純由機會造成之機遇
1.00	1.00:1	3.25	34.24:1
1.05	1.09:1	3.30	37.40:1
1.10	1.18:1	3.35	40.95:1
1.15	1.28:1	3.40	44.79:1
1.20	1.39:1	3.45	49.10:1
1.25	1.51:1	3.50	53.82:1
1.30	1.63:1	3.55	59.10:1
1.35	1.76:1	3.60	64.88:1
1.40	1.90:1	3.65	71.36:1
1.45	2.05:1	3.70	78.49:1
1.50	2.21:1	3.75	86.57:1
1.55	2.38:1	3.80	95.34:1
1.60	2.57:1	3.85	105.38:1
1.65	2.76:1	3.90	116.37:1
1.70	2.98:1	3.95	128.53:1
1.75	3.20:1	4.00	142.27:1
1.80	3.45:1	4.05	157.73:1
1.85	3.71:1	4.10	175.06:1
1.90	4.00:1	4.15	193.55:1
1.95	4.31:1	4.20	215.45:1
2.00	4.64:1	4.25	240.55:1
2.05	5.00:1	4.30	266.38:1
2.10	5.38:1	4.35	298.40:1
2.15	5.80:1	4.40	332.33:1
2.20	6.25:1	4.45	372.13:1
2.25	6.74:1	4.50	415.67:1
2.30	7.28:1	4.55	466.29:1
2.35	7.85:1	4.60	519.83:1
2.40	8.48:1	4.65	587.24:1
2.45	9.16:1	4.70	656.89:1
2.50	9.90:1	4.75	734.29:1
2.55	10.70:1	4.80	832.33:1
2.60	11.58:1	4.85	924.03:1
2.65	12.54:1	4.90	1040.67:1
2.70	13.58:1	4.95	1189.[illegible]8:1
2.75	14.72:1	5.00	1314.79:1
2.80	15.97:1	5.20	2271.73:1
2.85	17.33:1	5.40	3570.43:1
2.90	18.81:1	5.60	6249.00:1
2.95	20.45:1	5.80	9999.00:1
3.00	22.23:1	6.00	16665.67:1
3.05	24.20:1	6.50	49999.00:1
3.10	26.37:1	7.00	427093.00:1
3.15	28.74:1	7.50	2968544.71:1
3.20	31.36:1	8.00	14662755.60:1

表 VIII.

史蒂願脫氏 Z 值機遇表，（估計結果顯著與否之機率）

Z	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
.1	1.14	1.22	1.29	1.35	1.40	1.46	1.[illegible]0	1.55
.15	1.21	1.35	1.46	1.56	1.66	1.75	1.83	1.92
.2	1.29	1.49	1.66	1.82	1.97	2.12	2.26	2.41
.25	1.37	1.64	1.88	2.10	2.32	2.54	2.75	2.97
.3	1.46	1.81	2.13	2.44	2.76	3.08	3.41	3.75
.35	1.54	1.98	2.40	2.81	3.24	3.68	4.14	4.62
.4	1.64	2.18	2.72	3.27	3.85	4.48	5.15	5.88
.45	1.73	2.39	3.05	3.75	4.51	5.31	6.24	7.24
.5	1.84	2.62	3.44	4.35	5.36	6.30	7.80	9.26
.55	1.94	2.85	3.85	4.97	6.25	7.72	9.42	11.4
.6	2.05	3.12	4.33	5.75	7.42	9.42	11.8	14.6
.65	2.16	3.39	4.82	6.54	8.62	11.2	14.2	17.9
.7	2.27	3.69	5.41	7.55	10.2	13.6	17.8	23.1
.75	2.39	3.99	5.99	8.55	11.8	16.0	21.4	28.3
.8	2.51	4.33	6.70	9.82	14.0	19.5	26.8	36.5
.85	2.62	4.66	7.39	11.1	16.1	22.9	32.1	44.5
.9	2.75	5.04	8.22	13.7	18.9	27.7	40.0	57.1
.95	2.87	5.41	9.03	14.2	21.7	32.4	47.8	69.4
1.0	3.00	5.83	10.0	16.[illegible]	25.5	39.2	59.2	89.1
1.05	3.12	6.24	11.0	18.2	29.1	45.7	70.4	108.
1.1	3.26	6.69	12.1	20.6	34.0	54.9	87.5	138.
1.15	3.39	7.13	13.2	22.9	38.7	63.5	103.	166.
1.2	3.52	7.63	14.5	25.9	44.9	75.9	127.	212.
1.25	3.65	8.11	15.7	28.8	50.8	87.5	151.	255.
1.3	3.79	8.64	17.2	32.3	58.5	104.	184.	322.
1.35	3.92	9.16	18.6	35.8	66.1	119.	216.	384.
1.4	4.07	9.74	20.3	40.0	75.9	142.	262.	475
1.45	4.20	10.3	21.9	44.0	85.2	163.	302.	555.
1.5	4.34	10.9	23.9	49.0	98.0	191.	369.	713.
1.55	4.48	11.5	25.7	53.9	109.	216.	434.	832.
1.6	4.62	12.2	27.7	60.0	124.	[illegible]55.	525.	999.
1.65	4.76	12.8	29.8	65.7	138.	285.	587.	1110.
1.7	4.91	13.5	32.2	72.5	158.	332.	713.	1428.
1.75	5.05	14.2	34.5	79.0	174.	369.	832.	1666.
1.8	5.20	14.9	37.0	86.7	199.	434.	999.	1999.
1.85	5.34	15.6	39.5	94.2	216.	499.	1110.	2499.
1.9	5.49	16.4	42.5	103.	243.	587.	1249.	3332.

表 VIII. 續

Z	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
1.05	5.63	17.1	45.1	111.	269.	624.	1428.	3332.
2.0	5.78	17.9	48.3	122.	302.	713.	1666.	4999.
2.05	5.92	18.7	51.4	132.	332.	768.	1999.	4999.
2.1	6.07	19.6	54.9	144.	369.	908.	2499.	4999.
2.15	6.21	20.4	58.2	155.	399.	999.	2499.	4999.
2.2	6.36	21.3	61.9	168.	454.	1249.	3332.	9999
2.25	6.51	22.1	65.2	181.	499.	1249.	3332.	
2.3	6.66	23.1	69.4	199.	555.	1428.	4999.	
2.35	6.81	24.0	73.1	212.	587.	1666.	4999.	
2.4	6.96	25.0	77.7	232.	666.	1999.	4999.	
2.45	7.10	25.9	81.6	249.	713.	1999.	4999.	
2.5	7.26	26.9	86.7	269.	768.	2499.	4999.	
2.55	7.40	27.9	91.6	285.	832.	2499.	4999.	
2.6	7.55	29.0	97.0	302.	908.	2499.	9999.	
2.65	7.70	30.1	102.	322.	999.	2499.		
2.7	7.86	31.2	108.	356.	1110.	3332.		
2.75	8.00	32.2	113.	369.	1110.	3332.		
2.8	8.16	33.4	118.	399.	1249.	4999.		
2.85	8.30	34.5	124.	416.	1249.	4999.		
2.9	8.46	35.6	131.	454.	1428.	4999.		
2.95	8.61	36.7	136.	475.	1428.	4999.		
3.0	8.77	37.9	144.	525.	1666.	4999.		
3.05	8.91	39.3	151.	555.	1666.	4999.		
3.1	9.07	40.5	158.	587.	1999.	9999.		
3.15	9.21	41.6	163.	587.	1999.			
3.2	9.37	42.9	171.	624.	2499.			
3.25	9.52	44.0	178.	666.	2499.			
3.3	9.67	45.5	188.	713.	2499.			
3.35	9.82	46.8	195.	768.	2499.			
3.4	9.98	48.3	203.	832.	3332.			
3.45	10.1	49.5	212.	832.	3332.			
3.5	10.3	51.1	221.	908.	3332.			
4.0	11.8	66.1	322.	1666.	4999.			
4.5	13.3	83.0	434.	2499.	4999.			
5.0	14.9	102.	624.	3332.	9999.			
5.5	16.5	122.	832.	4999.				
6.0	18.0	146.	999.	9999.				
6.5	19.6	171.	1249.					

表 VIII. 續

Z	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
7.0	21.1	199.	1666.					
7.5	22.7	226.	1999.					
8.0	24.3	255.	2499.					
8.5	25.8	293.	2499.					
9.0	27.4	322.	3332.					
9.5	28.9	369.	3332.					
10.0	30.5	399.	4999.					
15.0	46.2	908.	9999.					
20.0	61.0	1666.						
25.0	77.7	2499.						
30.0	93.3	3332.						
35.0	109.	4999.						
40.0	124.	4999.						
45.0	140.	9999.						
50.0	153.							
60.0	188.							
70.0	221.							
80.0	249							
90.0	285.							
100.0	311.							
120.0	369.							
140.0	434.							
150.0	475.							
160.0	499.							
180.0	555.							
200.0	624.							
250.0	768							
300.0	908.							
350.0	1110.							
400.0	1249.							
450.0	1428.							
500.0	1666							
600.0	1999.							
700.0	1999							
1000.0	3332.							
1500.0	4999							
2000.0	4999.							
3000.0	9999							

表 VIII. 續

Z	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15	n=16	n=17
.1	1.59	1.64	1.68	1.72	1.76	1.80	1.84	1.88
.15	2.00	2.08	2.16	2.24	2. 1	2.39	2.47	2.54
.2	2.55	2.70	2.84	2.99	3.14	3.29	3.44	3.60
.25	3.19	3.41	3.64	3.87	4.11	4.36	4.60	4.86
.3	4.11	4.48	4.86	5.27	5.69	6.13	6.59	7.08
.35	5.13	5.67	6.24	6.84	7.47	8.15	8.86	9.62
.4	6.07	7.53	8.45	9.47	10.6	11.8	13.1	14.5
.45	8.34	9.54	10.9	12.3	13.9	15.7	17.7	19.8
.5	10.9	12.8	14.9	17.3	20.1	23.3	26.8	30.8
.55	13.6	16.2	19.2	22.7	26.7	31.3	36.5	42.7
.6	18.0	22.0	26.8	32.4	39.3	47.3	56.8	68.4
.65	22.5	27.9	34.6	42.6	52.2	63.9	77.7	95.2
.7	29.8	38.1	48.5	61.5	77.7	99.0	124.	155.
.75	37.2	48.3	62.7	81.0	104.	134.	171.	216.
.8	49.3	66.1	88.3	118.	158.	207.	277.	356.
.85	61.1	83.7	114.	155.	207.	277.	369.	499.
.9	81.0	114.	160.	226.	311.	434.	587.	832.
.95	100.	144.	207.	293.	416.	587.	832.	1110.
1.0	132.	195.	293.	434.	624.	908.	1428.	1999.
1.05	163.	243.	369.	555.	832.	1249.	1999	2499.
1.1	216.	332.	525.	832.	1249.	1999.	3332.	4999.
1.15	262.	416.	666.	999.	1666.	2499.	3332.	4999.
1.2	344.	555.	908.	1428.	2499.	3332.	4999.	9999
1.25	416.	713.	1110.	1666.	3332.	4999.	4999.	
1.3	555.	999.	1666.	2499.	4999.	9999.	9999.	
1.35	666.	1249.	1999.	3332.	4999.			
1.4	908.	1666.	3332.	4999.	9999.			
1.45	1110.	1999.	3332.	4999.				
1.5	1428.	2499.	4999.	9999.				
1.55	1666.	2499.	4999.					
1.6	1999.	3332.	9999.					
1.65	2499.	3332.						
1.7	3332.	4999.						
1.75	3332.	4999.						
1.8	4999.	9999.						
1.85	4999.							
1.9	9999.							

表 VIII. 續

Z	n=18	n=19	n=20	n=21	n=22	n=23	n=24	n=25	n=26	n=27	n=28	n=29	n=30
.1	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.11	2.15	2.18	2.22	2.26	2.29	2.33	2.37
.15	2.62	2.69	2.77	2.84	2.92	2.99	3.07	3.14	3.22	3.30	3.37	3.45	3.52
.2	3.75	3.91	4.08	4.24	4.41	4.58	4.76	4.94	5.12	5.31	5.50	5.69	5.90
.25	5.12	5.39	5.66	5.94	6.23	6.52	6.83	7. 4	7.46	7.79	8.12	8.47	8.82
.3	7.59	8.12	8.68	9.27	9.89	10.5	11.2	11.9	12.7	13.5	14.3	15.2	16.1
.35	10.4	11.3	12.2	13.1	14.1	15.2	16.3	17.5	18.7	20.1	21.5	23.0	24.5
.4	16.0	17.7	19.5	21.5	23.7	26.0	28.6	31.4	34.3	37.8	41.2	45.3	49.3
.45	22.2	24.8	27.7	30.7	34.2	38.1	42.1	46.6	51.6	57.1	63.1	69.9	76.5
.5	35.4	40.7	46.4	53.1	60.7	69.4	79.0	89.9	102.	117.	132.	151.	171.
.55	49.5	57.5	66.6	77.1	89.1	103.	118.	136.	155.	181.	207.	237.	269.
.6	81.6	98.0	117.	140.	166.	199.	237.	277.	332.	399.	475.	555.	666.
.65	115.	140.	168.	203.	243.	302.	356.	434.	525.	624.	768.	908.	1110.
.7	195.	249.	302.	384.	475.	624.	768.	999.	1249.	1666.	1999.	2499.	3332.
.75	277.	356.	434.	555.	713.	908.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	3332.	4999.
.8	475.	624.	832.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	4999.	9999.	9999.	9999.	9999.
.85	666.	908.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	4999.	4999.				
.9	1110	1666.	1999.	2499.	3332.	4999.	9999.	9999.	9999.				
.95	1666.	2499.	3332.	3332.	4999.	4999.							
1.0	3332.	4999	9999.	9999.	9999.	9999.							
1.05	4999.	4999.											
1.1	9999.	9999.											

表 IX. 史蒂頓脫氏 t 值機遇表

t	自由度 N=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
.4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
.5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
.6	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
.7	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
.8	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
.9	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1.0	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1.1	3	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
1.2	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8
1.3	4	5	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
1.4	4	6	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11
1.5	4	6	8	9	9	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	14
1.6	5	7	9	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	17
1.7	5	8	10	11	12	13	14	15	15	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18	18	21
1.8	5	8	11	13	14	15	16	17	18	19	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22	27
1.9	5	9	12	14	16	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	25	26	26	26	27	34
2.0	6	10	13	16	19	21	2	24	25	26	27	28	29	30	30	31	31	32	32	33	43
2.1	6	11	15	18	21	24	26	28	30	31	33	34	35	36	37	37	38	39	39	40	55
2.2	6	12	16	21	24	27	30	33	35	37	39	40	42	43	45	46	47	48	49	49	71
2.3	7	12	18	23	28	32	35	39	42	44	47	49	51	52	54	56	57	59	60	61	92
2.4	7	13	20	26	31	37	41	45	49	52	56	59	61	64	66	68	70	72	74	75	121
2.5	7	14	22	29	36	42	48	53	58	63	67	70	74	78	80	84	86	88	91	93	160
2.6	8	15	24	32	40	48	55	62	68	75	80	85	90	94	99	102	107	110	113	115	214
2.7	8	17	26	36	46	55	64	73	81	88	96	102	109	115	121	126	131	136	140	144	287
2.8	8	18	28	40	52	63	74	85	95	105	115	124	132	140	148	155	160	168	174	181	390
2.9	8	19	31	44	58	72	86	100	113	126	138	148	160	171	181	191	19[illegible]	207	216	226	535
3.0	9	20	34	49	66	82	99	117	132	148	166	181	195	207	221	237	249	262	269	285	740

表 IX. 續

	自由度																				
t	N=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	27	18	19	20	∞
3.1	9	21	37	54	74	93	114	136	155	178	195	216	237	255	269	293	311	322	344	356	1032
3.2	9	22	39	60	82	107	132	158	184	212	237	262	285	311	332	356	384	399	416	454	1454
3.3	10	24	43	66	92	121	151	184	216	249	285	311	344	384	416	434	475	499	525	555	2068
3.4	10	25	46	73	103	138	174	212	255	293	332	384	416	454	499	555	587	624	666	713	2967
3.5	10	26	50	80	115	155	199	249	293	344	399	454	499	555	624	666	713	768	832	908	4298
3.6	11	28	53	87	127	174	226	285	344	416	475	555	624	713	768	832	908	999	999	1110	6284
3.7	11	29	57	95	142	199	262	332	399	475	555	666	768	832	908	999	1110	1249	1249	1428	9275
3.8	11	31	61	103	158	221	293	384	475	587	666	768	908	999	1110	1249	1428	1428	1666	1666	13830
3.9	12	32	66	113	174	249	344	434	555	666	832	908	1110	1249	1428	1666	1666	1999	1999	2499	20789
4.0	12	34	70	122	191	277	384	499	624	768	999	1110	1249	1428	1666	1999	1999	2499	2499	2499	31545
4.1	12	36	75	134	212	311	434	587	768	908	1110	1428	1666	1999	1999	2499	2499	3332	3332	3332	48308
4.2	12	37	86	146	237	356	499	666	832	1110	1428	1666	1999	2499	2499	333	3332	3332	4939	4999	75187
4.3	13	39	85	158	255	399	555	768	999	1249	1666	1999	2499	2499	3332	3332	4999	4599	4999	4999	117646
4.4	13	41	91	171	285	434	624	908	1110	1428	1999	2499	2499	3332	3332	4999	4999	499	4999	9999	185184
4.5	13	42	97	184	311	475	713	999	1428	1666	1999	2499	3332	4999	4999	4999	4999	9999	9999		
4.6	14	44	102	199	344	555	832	1110	1666	1999	2499	3332	4979	4999	4999	9999	9999				
4.7	14	46	109	212	369	587	968	1249	1666	2499	3332	3332	4999	4999	9999						
4.8	14	48	115	232	416	666	999	1428	1597	2499	3332	4999	4999	9999							
4.9	15	50	122	249	454	713	1110	1666	2499	3332	4999	4999	9999								
5.0	15	52	129	269	475	832	1249	1999	2499	3332	4999	4999									
5.1	15	54	136	285	525	908	1428	1999	3332	4999	4999	9999									
5.2	16	56	144	302	587	999	1666	2499	3332	4999	9999										
5.3	16	58	151	332	624	1110	1666	2499	4999	4999											
5.4	16	60	160	356	666	1249	1999	3332	4999	4999											
5.5	16	62	168	369	713	1249	1999	3332	4999	9999											
5.6	17	65	178	399	768	1428	2499	3332	4999												
5.7	17	67	184	434	832	1666	2499	4999	9999												
5.8	17	69	195	454	908	1666	3332	4999													
5.9	18	71	203	475	999	999	3332	4999													
6.0	18	74	216	525	1110	1999	3332	4999													

表 X.

F及t值對照表

小平方均數之自由度	大平方均數之自由度 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞	t值
1	161.45 4052.10	199.50 4999.03	215.72 5403.49	224.57 5625.14	230.17 5764.08	233.97 5859.39	238.89 5981.34	243.91 6105.83	249.04 6234.16	254.32 6366.48	12.706 63.657
2	18.51 98.49	19.00 99.01	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.37 99.36	19.41 99.42	19.45 99.46	19.50 99.50	4.303 9.925
3	10.13 34.12	9.55 30.81	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.84 27.49	8.74 27.05	8.64 26.60	8.53 26.12	3.182 5.841
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.93	6.26 15.52	6.16 15.21	6.04 14.80	5.91 4.37	5.77 13.93	5.63 13.46	2.776 4.604
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.82 10.27	4.68 9.89	4.53 9.47	4.36 9.02	2.571 4.032
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.15 8.10	4.00 7.72	3.84 7.31	3.67 6.88	2.447 3.707
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.73 6.84	3.57 6.47	3.41 6.07	3.23 5.65	2.365 3.499
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.44 6.03	3.28 5.67	3.12 5.28	2.93 4.86	2.306 3.355
9	5.12 .0.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.23 5.47	3.07 5.11	2.90 4.73	2.71 4.31	2.262 3.250
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.07 5.06	2.91 4.71	2.74 4.33	2.54 3.91	2.228 3.169
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	2.95 4.74	2.79 4.40	2.61 4.02	2.40 3.60	2.201 3.106

表 X 續

小平方均數之自由度	大平方均數之自由度 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞	t 値
12	4.75 **9.33**	3.88 **6.93**	3.49 **5.95**	3.26 **5.41**	3.11 **5.06**	3.00 **4.82**	2.85 **4.50**	2.69 **4.16**	2.50 **3.78**	2.30 **3.36**	2.179 **3.055**
13	4.67 **9.07**	3.80 **6.70**	3.41 **5.74**	3.18 **5.20**	3.02 **4.86**	2.92 **4.62**	2.77 **4.30**	2.60 **3.96**	2.42 **3.59**	2.21 **3.16**	2.160 **3.012**
14	4.60 **8.86**	3.74 **6.51**	3.34 **5.56**	3.11 **5.03**	2.96 **4.69**	2.85 **4.46**	2.70 **4.14**	2.53 **3.80**	2.35 **3.43**	2.13 **3.00**	2.145 **2.977**
15	4.54 **8.68**	3.68 **6.36**	3.29 **5.42**	3.06 **4.89**	2.90 **4.56**	2.79 **4.32**	2.64 **4.00**	2.48 **3.67**	2.29 **3.29**	2.07 **2.87**	2.131 **2.947**
16	4.49 **8.53**	3.63 **6.23**	3.24 **5.29**	3.01 **4.77**	2.85 **4.44**	2.74 **4.20**	2.59 **3.89**	2.42 **3.55**	2.24 **3.18**	2.01 **2.75**	2.120 **2.921**
17	4.45 **8.40**	3.59 **6.11**	3.20 **5.18**	2.96 **4.67**	2.81 **4.34**	2.70 **4.10**	2.55 **3.79**	2.38 **3.45**	2.19 **3.08**	1.96 **2.65**	2.110 **2.898**
18	4.41 **8.28**	3.55 **6.01**	3.16 **5.09**	2.93 **4.58**	2.77 **4.25**	2.66 **4.01**	2.51 **3.71**	2.34 **3.37**	2.15 **3.01**	1.92 **2.57**	2.101 **7.878**
19	4.38 **8.18**	3.52 **5.93**	3.13 **5.01**	2.90 **4.50**	2.74 **4.17**	2.63 **3.94**	2.48 **3.63**	2.31 **3.30**	2.11 **2.92**	1.88 **2.49**	2.093 **2.861**
20	4.35 **8.10**	3.49 **5.85**	3.10 **4.94**	2.87 **4.43**	2.71 **4.10**	2.60 **3.87**	2.45 **3.56**	2.28 **3.23**	2.08 **2.86**	1.84 **2.42**	2.086 **2.845**
21	4.32 **8.02**	3.47 **5.78**	3.07 **4.87**	2.84 **4.37**	2.68 **4.04**	2.57 **3.81**	2.42 **3.51**	2.25 **3.17**	2.05 **2.80**	1.81 **2.36**	2.080 **2.831**
22	4.30 **7.94**	3.44 **5.72**	3.05 **4.82**	2.82 **4.31**	2.66 **3.99**	2.55 **3.75**	2.40 **3.45**	2.23 **3.12**	2.03 **2.75**	1.78 **2.30**	2.074 **2.819**
23	4.28 **7.88**	3.42 **5.66**	3.03 **4.76**	2.80 **4.26**	2.64 **3.94**	2.53 **3.71**	2.38 **3.41**	2.20 **3.07**	2.00 **2.70**	1.76 **2.26**	2.069 **2.807**

表 X. 續

小平方均數之自由度	大平方均數之自由度 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞	t值
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.36 3.36	2.18 3.03	1.98 2.66	1.73 2.21	2.064 2.797
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.34 3.32	2.16 2.99	1.96 2.62	1.71 2.17	2.060 2.787
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.98 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.32 3.29	2.15 2.96	1.95 2.58	1.69 2.13	2.056 2.779
27	4.21 7.68	3.35 5.49	2.96 4.60	2.73 4.11	2.57 3.79	2.46 3.56	2.30 3.26	2.13 2.93	1.93 2.55	1.67 2.10	2.052 2.771
28	4.20 7.64	3.34 5.45	2.95 4.57	2.71 4.07	2.56 3.75	2.44 3.53	2.29 3.23	2.12 2.90	1.91 2.52	1.65 2.06	2.048 2.763
29	4.18 7.60	3.33 5.42	2.93 4.54	2.70 4.04	2.54 3.73	2.43 3.50	2.28 3.20	2.10 2.87	1.90 2.49	1.64 2.03	2.045 2.756
30	4.17 7.56	3.32 5.39	2.92 4.51	2.69 4.02	2.53 3.70	2.42 3.47	2.27 3.17	2.09 2.84	1.89 2.47	1.62 2.01	2.042 2.750
35	4.12 7.42	3.26 5.27	2.87 4.40	2.64 3.91	2.48 3.59	2.37 3.37	2.22 3.07	2.04 2.74	1.83 2.37	1.57 1.90	2.030 2.724
40	4.08 7.31	3.23 5.18	2.84 4.31	2.61 3.83	2.45 3.51	2.34 3.29	2.18 2.99	2.00 2.66	1.79 2.29	1.52 1.82	2.021 2.704
45	4.06 7.23	3.21 5.11	2.81 4.25	2.58 3.77	2.42 3.45	2.31 3.23	2.15 2.94	1.97 2.61	1.76 2.23	1.48 1.75	2.014 2.690
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.19	2.13 2.89	1.95 2.56	1.74 2.13	1.44 1.68	2.008 2.678
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.24	2.25 3.12	2.10 2.82	1.92 2.50	1.70 2.12	1.39 1.60	2.000 2.660

表 X. 続

小平方均數之自由度	大平方均數之自由度: 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞	t 値
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.07	2.50 3.60	2.35 3.29	2.23 3.07	2.07 2.78	1.89 2.45	1.67 2.07	1.35 1.53	1.994 2.648
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.49 3.56	2.33 3.26	2.21 3.04	2.06 2.74	1.88 2.42	1.65 2.03	1.31 1.47	1.990 2.638
90	3.95 6.92	3.10 4.85	2.71 4.01	2.47 3.53	2.32 3.23	2.20 3.01	2.04 2.72	1.86 2.39	1.64 2.00	1.28 1.43	1.987 2.632
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.21	2.19 2.99	2.03 2.69	1.85 2.37	1.63 1.98	1.26 1.39	1.984 2.626
125	3.92 6.84	3.07 4.78	2.68 3.94	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.01 2.66	1.83 2.33	1.60 1.94	1.21 1.32	1.979 2.616
150	3.90 6.81	3.06 4.75	2.66 3.91	2.43 3.45	2.27 3.14	2.16 2.92	2.00 2.63	1.82 2.31	1.59 1.92	1.18 1.27	1.976 2.609
200	3.89 6.76	3.04 4.71	2.65 3.88	2.42 3.41	2.26 3.11	2.14 2.89	1.98 2.60	1.80 2.28	1.57 1.88	1.14 1.21	1.972 2.601
300	3.87 6.72	3.03 4.68	2.64 3.85	2.41 3.38	2.25 3.08	2.13 2.86	1.97 2.57	1.79 2.24	1.55 1.85	1.10 1.14	1.968 2.592
400	3.86 6.70	3.02 4.66	2.63 3.83	2.40 3.37	2.24 3.06	2.12 2.85	1.96 2.56	1.78 2.23	1.54 1.84	1.07 1.11	1.966 2.588
500	3.86 6.69	3.01 4.65	2.62 3.82	2.39 3.36	2.23 3.05	2.11 2.84	1.96 2.55	1.77 2.22	1.54 1.83	1.06 1.08	1.965 2.586
1000	3.85 6.66	3.00 4.63	2.61 3.80	2.38 3.34	2.22 3.04	2.10 2.82	1.95 2.53	1.76 2.20	1.53 1.81	1.03 1.04	1.962 2.581
∞	3.84 6.64	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.80	1.94 2.51	1.75 2.18	1.52 1.79		1.960 2.576

表 XI.

r及R之顯著值

自由度	變量數								
	2	3	4	5	6	7	9	13	25
1	.997 1.000	.999 1.000	.999 1.000	.999 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000
2	.950 .990	.975 .995	.983 .997	.987 .998	.990 .998	.992 .998	.994 .999	.996 .999	.998 1.000
3	.878 .959	.930 .976	.950 .983	.961 .987	.968 .930	.973 .991	.979 .993	.986 .995	.993 .998
4	.811 .917	.881 .949	.912 .962	.930 .970	.942 .975	.950 .979	.961 .984	.973 .989	.986 .994
5	.754 .874	.836 .917	.874 .937	.898 .949	.914 .957	.925 .963	.941 .971	.958 .980	.978 .989
6	.707 .834	.795 .886	.839 .911	.867 .927	.886 .938	.900 .946	.920 .957	.943 .969	.969 .983
7	.666 .798	.758 .855	.807 .885	.838 .904	.860 .918	.876 .928	.900 .942	.927 .958	.960 .977
8	.632 .765	.726 .827	.777 .860	.811 .882	.835 .898	.854 .909	.880 .926	.912 .946	.950 .970
9	.602 .735	.697 .800	.750 .836	.786 .861	.812 .878	.832 .891	.861 .911	.897 .934	.941 .963
10	.576 .708	.671 .776	.726 .814	.763 .840	.790 .859	.812 .874	.843 .895	.883 .922	.932 .955
11	.553 .684	.648 .753	.703 .793	.741 .821	.770 .841	.792 .857	.826 .880	.868 .910	.922 .948
12	.532 .661	.627 .732	.683 .773	.722 .802	.751 .824	.774 .841	.809 .866	.854 .898	.913 .940
13	.514 .641	.608 .712	.664 .755	.703 .785	.733 .807	.757 .825	.794 .852	.840 .886	.904 .932
14	.497 .623	.590 .694	.640 .737	.686 .768	.717 .792	.741 .810	.779 .838	.828 .875	.895 .924

表 XI. 積

自由度	變	項	數					
	2	3	4	5	6	7	9	13	25
15	.482 .606	.574 .677	.630 .721	.670 .752	.701 .776	.726 .796	.765 .825	.815 .864	.868 .917
16	.468 .590	.559 .662	.616 .706	.655 .738	.686 .762	.712 .782	.751 .813	.803 .853	.878 .909
17	.456 .575	.545 .647	.601 .691	.641 .724	.673 .749	.698 .769	.738 .800	.792 .842	.869 .902
18	.444 .561	.532 .633	.587 .678	.628 .710	.660 .736	.686 .756	.726 .789	.781 .832	.861 .894
19	.433 .549	.520 .620	.575 .665	.615 .698	.647 .723	.674 .744	.714 .778	.770 .822	.853 .887
20	.423 .537	.509 .608	.563 .652	.604 .685	.636 .712	.662 .733	.703 .767	.760 .812	.845 .880
21	.413 .526	.498 .596	.552 .641	.592 .674	.624 .700	.651 .722	.693 .756	.750 .803	.837 .873
22	.404 .515	.488 .585	.542 .630	.582 .663	.614 .690	.640 .712	.682 .746	.740 .794	.830 .866
23	.396 .505	.479 .574	.532 .619	.572 .652	.604 .679	.630 .701	.673 .736	.731 .785	.823 .859
24	.388 .496	.470 .565	.523 .609	.562 .642	.594 .669	.621 .692	.663 .727	.722 .776	.815 .852
25	.381 .487	.462 .555	.514 .600	.553 .633	.585 .660	.612 .682	.654 .718	.714 .768	.808 .846
26	.374 .478	.454 .546	.506 .590	.545 .624	.576 .651	.603 .673	.645 .709	.706 .760	.802 .839
27	.367 .470	.446 .538	.498 .582	.536 .615	.568 .642	.594 .664	.637 .701	.698 .752	.795 .833
28	.361 .463	.439 .530	.490 .573	.529 .606	.560 .634	.586 .656	.629 .692	.690 .744	.788 .827
29	.355 .456	.432 .522	.482 .565	.521 .598	.552 .625	.579 .648	.621 .685	.682 .737	.782 .821
30	.349 .449	.426 .514	.476 .558	.514 .591	.545 .618	.571 .640	.614 .677	.675 .729	.776 .815

表 XI. 續

自由度	變量數								
	2	3	4	5	6	7	9	13	25
35	.325 .418	.397 .481	.445 .523	.482 .556	.512 .582	.538 .605	.580 .642	.642 .696	.746 .786
40	.304 .393	.373 .454	.419 .494	.455 .526	.484 .552	.509 .575	.551 .612	.613 .667	.720 .761
45	.288 .372	.353 .430	.397 .470	.432 .501	.460 .527	.485 .549	.526 .536	.587 .640	.696 .737
50	.273 .354	.336 .410	.379 .449	.412 .479	.440 .504	.464 .526	.504 .562	.565 .617	.674 .715
60	.250 .325	.308 .377	.348 .414	.380 .442	.406 .466	.429 .488	.467 .523	.526 .577	.630 .677
70	.232 .302	.286 .351	.324 .386	.354 .413	.379 .436	.401 .456	.438 .491	.495 .544	.604 .644
80	.217 .283	.269 .330	.304 .362	.332 .389	.356 .411	.377 .431	.413 .464	.469 .516	.576 .615
90	.205 .267	.254 .312	.288 .343	.315 .368	.338 .390	.358 .409	.392 .441	.446 .492	.552 .590
100	.195 .254	.241 .297	.274 .327	.300 .351	.322 .372	.341 .390	.374 .421	.426 .470	.530 .568
125	.174 .228	.216 .266	.246 .294	.269 .316	.290 .335	.307 .352	.338 .381	.387 .428	.485 .521
150	.159 .208	.198 .244	.225 .270	.247 .290	.266 .308	.282 .324	.310 .351	.356 .395	.450 .484
200	.138 .181	.172 .212	.196 .234	.215 .253	.231 .269	.246 .283	.271 .307	.312 .347	.398 .430
300	.113 .148	.141 .174	.160 .192	.176 .208	.190 .221	.202 .233	.223 .253	.258 .287	.332 .359
400	.098 .128	.122 .151	.139 .167	.153 .180	.165 .192	.176 .202	.194 .220	.225 .250	.291 .315
500	.088 .115	.109 .135	.124 .150	.137 .162	.148 .172	.157 .182	.174 .198	.202 .225	.262 .284
1000	.062 .081	.077 .096	.088 .106	.097 .115	.105 .122	.112 .129	.124 .141	.144 .160	.188 .204

參攷文獻

(PUBLICATIONS REFERRED TO IN THE TEXT)

Allan, F. E., and Wishart, J., A Method of Estimating the Yield of a Missing Plot in Field Experimental Work. *Journal of Agricultural Science*, Vol. 20. 1930.

Chaddock, R. E., *Principles and Methods of Statistics*. Houghton Mifflin, Boston. 1925.

Day, James W., The Relation of Size, Shape, and Number of Replications of Plats to Probable Error in Field Experimentation. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 12. 1920.

Elderton, W. Palin, Tables for Testing the Goodness of Fit of Theory to Observation. *Biometrika*, Vol. I. 1901.

Ezekiel, Mordecai, *Methods of Correlation Analysis*. Wiley, New York. 1930.

Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, 5th Edition. Oliver and Boyd, Edinburgh. 1932.

Garber, R. J., McIlvaine, T. C., and Hoover, M. M., A Method of Laying Out Experiment Plats. *Journal of the American Society of Agronomy,* Vol. 23. 1931.

Hall, A. D., and Russell, E. J., Field Trials and Their Interpretation, *Journal of the Board of Agriculture Supplement 7.* Board of Agriculture and Fisheries, London. 1911.

Harris, J. Arthur, On a Criterion of Substratum Homogeneity (or Heterogeneity) in Field Experiments. *American Naturalist,* Vol. 49. 1915.

— Practical Universality of Field Heterogeneity as a Factor Influencing Plot Yields. *Journal of Agricultural Research,* Vol. XIX. 1920.

— and Scofield, C. S., Permanence of Differences in the Plots of An Experimental Field. *Journal of Agricultural Research,* Vol. XX. 1920.

Hayes, H. K., Control of Soil Heterogeneity and Use of the Probable Error Concept in Plant Breeding Studies. University of Minnesota Agricultural Experiment Station. *Technical Bul. 30.* 1925.

Illinois Agricultural Experiment Station. Data cited by Hayes, H. K., and Garber, R. J. *Breeding Crop Plants,* 2d Edition. McGraw Hill, New York, 1927.

Livermore J. R., The Interrelations of Various Probability

Tables and a Modification of Student's Probability Table for the Argument "t". *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 26. 1934.

McClelland, C. K. Some Determinations of Plat Variability. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 18. 1926.

Martin, John H., Factors Influencing Results from Rate-and Date-of-Seeding Experiments with Wheat in the Western United States. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 18. 1926.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*. Holt, New York. 1924.

Parker, E, R. and Batchelor, L. D., Variation in the Yields of Fruit Trees in Relation to the Planning of Future Experiments. *Hilgardia*, Vol. 7. 1932.

Pearson, K., On the Criterion That a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such That It Can Be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling. *Philosophical Magazine*, Vol. L, 5th Series. 1900.

— On the Theory of Contingency and Its Relation to Association and Normal Correlation. *Drapers' Company Research Memoirs Biometric Series I.* 1904.

— On the General Theory of Skew Correlation and Non-Linear

Regression. *Drapers' Company Research Memoirs Biometric Series II.* 1905.

— On the Influence of Past Experience on Future Expectation. *Philosophical Magazine* Vol. XIII, 6th Series. 1907.

— On the Correction Necessary for the Correlation Ratio η. *Biometrika*, Vol. XIV. 1923.

— (Editor) *Tables for Statisticians and Biometricians*, 2d Edition. Cambridge University Press, London. 1924

— On a New Method of Determining "Goodness of Fit." *Biometrika*, Vol. XXVI. 1934.

Richey, Frederick D., Adjusting Yields to Their Regression on a Moving Average, as a Means of Correcting for Soil Heterogeneity. *Journal of Agricultural Research*, Vol. XXVII. 1924.

— The Moving Average as a Basis for Measuring Correlated Variation in Agronomic Experiments. *Journal of Agricultural Research*, Vol. XXXII. 1926

Sanders, H. G., A Note on the Value of Uniformity Trials for Subsequent Experiments. *Journal of Agricultural Science*, Vol. XX. 1930.

Secrist, Horace, *An Introduction to Statistical Methods.* Macmillan, New York. 1917.

Shen, T. H., Field Technic for Determining Comparative Yields in Wheat Under Different Environmental Conditions in China. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 22. 1930.

Snedecor, George W., *Calculation and Interpretation of Analysis of Variance and Covariance.* Collegiate Press, Ames. 1934.

Spearman, C., The Proof and Measurement of Association Between Two Things. *American Journal of Psychology*, Vol. 15. 1904.

— A "Foot Rule" for Measuring Correlation. *British Journal of Psychologp*, Vol. 2. 1906.

Stadler, L. J., Experiments in Field Plot Technic for the Preliminary Determination of Comparative Yields in the Small Grains. University of Missouri Agricultural Experiment Station. *Research Bul. 49.* 1921.

Stringfield, G. H., Intervarietal Competition Among Small Grains. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 19. 1927.

'Student', The Probable Error of a Mean. *Biometrika*, Vol. XI. 1908.(A More Extended Table.) *Biometrika* Vol. XI. 1917.

— On Testing Varieties of Cereals. *Biometrika*, Vol. XV. 1923.

— New Tables for Testing the Significance of Observations.

Metron, Vol. 5. 1925.

— Mathematics and Agronomy. *Journal of the American Society of Agronomy*, Vol. 18. 1926.

Tippett, L. H. C., *The Methods of Statistics*. Williams and Norgate, London. 1931.

Wallace, H. A., and Snedecor, George W., *Correlation and Machine Calculation*, Revised Edition. *Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts*, Vol. XXX, No.4. 1931.

Yates, F., The Analysis of Replicated Experiments When the Field Results are Incomplete. *Empire Journal of Experimental Agriculture*, Vol. I. 1933.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, 6th Edition. Griffin, London. 1922.

譯名中英文對照表

A

Abscissa 橫坐標

Analysis of small samples and application of probability 小樣本分析與機率之應用

Analysis of variance 變異數分析法

Anti-logarithm 逆對數

Approximate mode 近似衆數

Arithmetic mean 算術平均數

Arranged by random or Random arrangement 隨意排列

Array 整列

Assumed mean 假定均數

Asymmetrical distribution 不對稱分配

Asymmetry 不對稱

Average deviation or Mean deviation 平均差

Average or Mean 平均數

Axis 軸

Axis of abscissa 橫軸

Axis of ordinate 縱軸

B

Bar diagram 條圖

Barlow's Table 巴氏檢數表

Binomial distribution 二項分配

Binomial expansion 二項展開式

Blank test 規劃試驗

Block 區集

Both direction 雙向

Broken-line curve 多邊次數圖

C

Calculated or Theoretical mode 計算衆數或理論衆數

Calculation of results 結果分析

Centimeter 公分

Chance 機遇

Chance variation 偶然差異

Check plot 標準區

Class 組,類

Class interval or range 組距

Class limit 組限

Class value 組值

Coefficient 係數

Coefficient of competition 生存競爭係數

Coefficient of contingency 相依係數

Coefficient correlation 相關係數

Coefficient of first order 一次相關係數

Coefficient of heterogeneity 士差係數

Coefficient of multiple correlation 複相關係數

Coefficient of partial correlation 淨相關係數

Coefficient of regression 迴歸係數

Coefficient of skewness 偏態依數

Collection of data 資料之搜集

Column 縱行

Comparison of differences 差異之比較

Competition 生長競爭

Complex experiment 繁複試驗

Constant 常數

Constants of deviation or dispersion 離差常數

Constants of position 地位常數

Contingency 相依

Control plots 對照區

Co-ordinate 坐標

Co-ordinate axes 坐標軸

Correction 校正量

Correlation from ranks 等級相關

Correlation ratio 相關率

Correlation table 相關表

Covariance 相關變異

Curve fitting 曲線配合

Curved regression line 曲迴歸線

D

Data 資料

Decigram 公厘

Degree of freedom 自由度

Deviation 離差

Deviation from mean 離均差

Discussion of odds 機偶之檢討

Dispersion or Variation 離散度

Distribution 分配

Double-entry table 雙列表

E

Empirical mode 經驗衆數

Error 偶誤

Error of estimate 估計誤或預測誤

Error of observation 觀察誤

F

Factor 因子

Field technique or Plot technique 試驗技術

First moment 一次動差

First order interaction 一次相互影響

First order parabola 一次拋物線

First order regression 一次迴歸

First quartile 第一四分位數

Fitted line 配合線

Fitting a straight line 直線配合

Fluctuation 變動

Frequency curve 次數曲線

Frequency distribution 次數分配

Frequency table 次數表

G

General mean 總平均數

Geometric mean 幾何平均數

Goodness of fit 配合之適度

Graphic illustration 圖解

Graphic method 圖示法

Group 羣

Grouped data 分類資料

H

Histogram 次數直方圖

Homogeneity 同質

I

Index of correlation 相關指數

Interpreting results 詮釋結果

Interpretation of results 結果之解釋

Inverse correlation 負相關

J

J-shaped curve J形曲線

L

Latin Square 拉丁方

Law of possibility 或然律

Least square 最小平方

Line diagram 直線圖

Line of regression 迴歸線

Line slope 直線傾斜圖

Linear correlation 直線相關

Linear regression 直線迴歸

Logarithmic curve對數曲線

Lower limit 低限

Lower quartile 下四分位數

M

Mean 平均數(參看Average)

Mean deviation 平均差

Mean square contingency 均方相依數

Mean-square error 均方差誤

Measuring 測量

Median 中位數

Mid-point 中點

Mode 衆數,範數

Moment 動差

Moving average 移動平均數

Multiple correlation 複相關

N

Natural logarithm 自然對數表

Negative correlation 負相關

Non-linear correlation 非直線相關

Non-linear or Curvi-linear regression 非直線或曲線迴歸

Normal correlation 常態相關

Normal curve 常態曲線

Normal curve of error 差誤常態曲線

Normal curve of frequency or Normal frequency curve 常態次數曲線

Normal distribution 常態分配

Normal probability curve 常態機率曲線

Normal or Symmetric type 常態型或對稱型

Number of class 組目

O

Observed value 觀察數

Odds 機偶

Ogive 累積曲線

One direction 單向

Ordinate 縱坐標

Ordinate value 縱坐標值

Origin 原點

P

Parabola 拋物線

Part correlation 部分相關

Partial correlation 淨相關

Partial regression 淨迴歸

Partial regression coefficient 淨迴歸係數

Peck 配克(量器)

Perfect correlation 整相關

Plot 小區

Plot arrangement 田間排列

Population 全羣

Positive correlation 正相關

Predicted value 推測數

Prediction 預料

Primary or Original data 原始資料

Probability 機率

Probability curve 機率曲線

Probability integral 機率積分

Probable error 機誤

Probable error of mean 平均機誤

Probable error of probable error 機誤的機誤

Probable error of simple observation 單次機誤

Q

Quadrants 象限

Quartile 四分位數

Quartile deviation 四分位差

R

Random 隨機

Random sample 隨機抽取之樣本

Random variation 隨機變異

Range 全距

Rank 等級

Rank correlation 等級相關

Rank difference 等級差

Rank distribution 等級分配

Recording 記載

Regression 迴歸

Regression coefficient 迴歸係數

Regression equation 迴歸方程式

Regression line 迴歸線

Relative border yield 相關有邊行產量

Reliability 可靠性

Replication 重複

Row 橫行

S

Sample 樣本

Sampling 抽樣

Sampling method 抽查法

Scale 尺度

Scatter diagram 散佈圖

Second moment 二次動差

Second order interaction 二次相互影響

Second order parabola 二次拋物線

Secondary data 次級資料

Shape 式樣

Sheppard's correction 薛柏式校正法

Significant difference 顯著差異

Simple arithmatic mean 簡單算術平均數

Simple correlation 單相關

Simple experiment 簡單試驗

Skew 偏斜

Skew distribution 偏斜分配

Skewness 偏斜度

Slope 斜度

Small sample 小樣本

Smoothed curve 修勻曲線

Soil heterogeneity 土壤差異

Sort 分類

Standard deviation 標準差

Standard error 標準誤

Statistical analysis 統計分析

Statistics 統計或統計學

Straight line 直線

Straight line correlation(見Linear correlation)

Sum of the squares for blocks 區集間變異平方總和

Sum of the squares for varieties 品種間變異平方總和

Sum of the squares for total 總變異平方總和

Symmetrical curve 對稱曲線

Symmetrical distribution 對稱分配

Symmetry 對稱

Systematic arrangement 順序排列

T

Table 表

Tangent 切線

Ten percentile 十分位數

Theoretical mode 理論衆數(見Calculated mode)

Third order parabola 三次拋物線

Third quartile 第三四分位數

Total variation 總變異

Treatment 試驗,處理

True mean 眞實平均數

True median 眞實中位數

True mode 眞實衆數

Type 型

Types of frequency distribution 次數分配之型類

Typical data 代表資料

Typical form 代表式

U

Uniformity 劃齊

Uniformity test 規劃試驗

Uniformity trials 均一試驗

Unit 單位

Unit step method 單位進級法

Upper limit 高限

Upper quartile 上四分位數

V

Variable 變量

Variance 變異數

Variance between blocks 區集間變異數

Variance between varieties 品種間變異數

Variance within blocks 區集內變異數

Variance within varieties 品種內變異數

Variation 變異

Variation due to difference between varieties 品系間變異

Variation due to difference between blocks 區集間變異

Variation due to error of the experiment 試驗變異，賸餘變異

Variation within varieties 品種內變異

Variation within blocks 區集內變異

W

Weighted mean or average 加權平均數

X

"X"-axis "x"軸

Y

"Y"-axis "y"軸

附註——本書專門名詞譯名大半採用中國統計學社審定之「統計譯名」凡在「統計譯名」一書內未能查出之名詞由譯者自譯復經中國作物育種學會審查通過

人名地名華英對照表

A

Allan, F. E. 愛輪氏

B

Batchelor, L. D. 白豈拉氏

Bessel 巴瑚兒氏

Borden, R. J. 抱特氏

C

Chaddock, R. E. 喬達克氏

Chang, C. C. 張心一氏

D

Day, James W. 淡氏

E

Elderton, W. Palin 愛爾頓氏

Emerson 愛末遜氏

Ezekiel, Mordecai 愛賺凱兒

F

Fisher, R. A. 費許氏

Richey, Frederick D. 雷超氏

Russell, E. J. 穆珊爾氏

S

Sanders, H. G. 桑特氏

Scofield, C. S. 舒開飛爾特氏

Secrist, Horace 舒克闌氏

Shen, T. H. 沈宗瀚氏

Snedecor, George W. 舒乃特氏

Spearman, C. 舒比門氏

Stadler, L. J. 舒旦勒氏

Stringfield, G. H. 舒曲林飛特氏

Student 史蒂頓脫氏

T

Tippett, L. H. C. 鐵背氏

W

Wallace, H. A. 衞來斯氏

Wishart, J. 韋適氏

Y

Yates, F. 葉次氏

Yule, G. Udny 余爾氏

✤E三三〇四

中華民國二十六年一月初版
中華民國二十六年三月再版
⊕(65314·2)

農業研究統計法一册
Application of Statistical Methods to Agricultural Research

每册實價國幣肆元
外埠酌加運費匯費

原著者 Harry H. Love
譯述者 沈驪英
編輯者 中華教育文化基金董事會編譯委員會
實業部中央農業實驗所
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

弢
大

(本書校對者沈鴻俊)