51

統 計 學 概 論

軍事委員會軍事交通研究所印

統計學概論

目錄　　　　　　　　　　頁次

統計學概論

第一章 概論

第一節 統計之定義

統計之定義，據一八六九年在荷蘭海牙舉行之第七次國際統計會議所報告，統計之定義，已有一百八十種之多，以後學者所倡用者，尚不在內。足見為統計下一完善之界說殊非易事。茲採美人塞克斯特氏(H. Secrest)之定；移譯如下：統計者係事事實之綜合，依據合理正確之標準，為預定之目的，作有系統的徵集，並就其關係，依次排列，而以數目敍述，枚舉之或推算之以求顯明事實之各個現象及其間之因果關係。(Aggeegates of facts affected to a marked extent by a multiplicity of causes numerically stated, Enumerated, or estimated according to resonable standards of accurac', Collected in a systematic manner for a predetermined proposes and placed in relation to each other.)。

第二節 統計法與實驗法之比較

統計法與實驗法不同之處，約有三點：

1. 研究自然科學以實驗法爲主，研究社會科學則以統計法爲主。
2. 實驗法對於觀察之對象，可以個別研究；而統計則非根據大量觀察(mass observation)不可；
3. 實驗法之結果常絕對準確，如輕二養一等於水；而統計法之結果，則不過逼近於準確而已。(註二)

第三節 大量觀察法

宇宙間之現象至為繁複，吾人殊不易明瞭其眞相，然若根據大量觀察法，取其大而遺其小，未嘗不可以得其梗概。猶之觀海，近望則波濤萬千，起伏無定；若從遠處望之，自有平綫可尋。試就社會現象而言，雖若萬緒千頭，其間亦恆有一定之法則存

(註一)：參看 C. S. Li：Business statistics. PP. 2-3

在，所謂大數之法則(The Law of Large nambdrs)是也。茲分兩項說明如下：

一、大數有序律(Law of statistical Regularity)統計學最重要之特色，在能執簡馭繁，探求眞理。曷爲執簡馭繁？卽研究某種現象時，不必一一調查其全體，但無規則的(at random)抽取全體中之一部份加以研究，卽能得知相當準確之結果。如吾人欲調查全國工人之平均工資，固無須逐一調查，倘能抽取一部份適當的「樣子」(Samples)按合理的計算，以求其平均數，則此項平均與全體工人工資平均之結果，當無大出入。設所取的「樣子」增多，其結果愈能代表全體，此大數有序之定律也。

二、大數不變律(Law og Inertia of Large mubers)根據大數觀察時，吾人所取之「樣子」未必一一適與平均之結果相符，其中有過者，亦有不及者，如一地產麥之額，年有增減，但就全世界之產額言之，則比較的變動不多，故吾人可以根據已往若干年各國各地麥之產額，以預測全世界收穫之總量。設某地忽告災荒而歉收，遠遜預計之額，然他方面或有收成特別豐稔者以補償某地之不足，結果全世界預測之總量，影響甚微，此大數不變之定律也。惟吾人須注意者，所謂大數不變，非經常期間而不變也。不過謂根據大數觀察所得之結果，較之得諸少數「樣子」者，爲有規則耳。

大數之有規律，不獨社會現象爲然，卽自然界之現象與機會亦莫不如此（詳見第十一，十二兩章）。本節所述之大數有序律，其理論係建立於數學中機率原理(The Theory of Probability)之上：而大數不變律又係從大數有序律翻演而出者也。

第四節　統計之功用

統計之功用，不勝枚舉，茲擇其重要者，略述如下：

統計之功用：

一、根據事實求得正確之見解：今世之人多以理想斷事之非；故其見解乃往往浮而不實，昧於眞理。然苟有統計，根據事實以斷事，則必得其平，乃可得正確之見解。

二、化繁爲簡：使複雜之事物易於顯明及比較。統計之爲用，能將複雜之數化爲簡單的總數或平均數，能將各種事實之複雜的現象，由統計家繪製簡單之圖表以表現之。故社會事物雖極形複雜，不難作比較而求其顯明。

三、預測將來人事之變遷：人事者，至變而難預測者也。乃有統計，於是已往之人事狀況吾人卽可明瞭。夫旣明瞭已往之人事狀況，吾人遂可推求其因果關係與變動之法則，而測將來人事之變遷。

四、統計與社會政策：近世各國無不倡言社會政策，社會立法，然欲醫治社會之疾病，必先明瞭其原因，然後對症下藥，方有改良之望。欲明社會疾病之原因則非取證於統計不可。有失業統計，於是知強迫保險之必要；有工資統計，於是知女工童工須特別加以保護，而有低工資法之制定，此其例也。

五、統計與公共衞生；疾病統計與死亡統計對於公共衞生有密切之關係。衞生當局之唯一參考，厥爲統計。蓋其以前設施之成績，固賴統計以表明；而以後施政之方針，尤賴統計以取決。當疾病發生之際，可由統計之報告，設法防止其蔓延。平時亦可藉統計以宣傳，灌輸衞生常識於民間，減少疾病之發生。

六、統計與商業：現代商業範圍擴大，故問題亦日趨複雜，內部如浪費之減少，工人效能之增進，總分公司之營業，售貨員之成績等，外部如供需之狀況以及市場之變遷，商情之盛衰，季節之影響等等，皆與商業之成敗有莫大之關係，故近代歐美各大公司，皆特設統計部以專司各種調查之職。

七、統計與財政：財政以收支適合爲原則，支出雖較能預定，而收入則頗難預言，例如所得稅之多寡，須視人民收入之數額而定。關稅之收入，大部須視輸入貨品之數量與種類而定。然歐美各國之財政專家每能根據歷年之統計以預測未來之收入，其結果雖不必與實收數目完全相符，然適合者其常，而相差極大者僅例外耳。

統計之功用，不僅限於事業家，卽理論家與科學家亦常利用統計以爲其理論或假設之證明。如經濟學家應用統計而立人口，工資，物價之定則；社會學家以此證明火

酒之出售，與犯罪，貧窮及自殺事件之關係；教育心理學家以此證明腦力與年齡之關係；生物學家以此證明變化與遺傳之定律，凡此皆統計之功用也。

第五節 統計之學派

十七世紀以還，研究統計者日衆。入主出奴，意見紛歧。形成學派甚多。玆舉其大者分述如左：——

一、國勢學派——此派以研究國家情勢，社會狀態爲事。其研究之方法，乃用文字記述關于國家及社會之情態。此派鼻祖爲德人黑爾曼康倫氏。

二、表統計記學派——創此派者爲德人安喬生，其統計方法則專重數量，列表。例如將各國之重要事項如土地，面積，財政，人口等用數字顯示之，列表歸之，使其便於比較。1782年，更有德人克羅美 (Crome)，作各種統計圖表，令閱書一見，卽明瞭其所示事實之狀態或關係，以是後人多稱是爲圖表統計之先達者。

三、數學派——此派爲英人葛朗特所創。其統計方法乃重在搜集正確之材料，用適當算法以整理，計算之；然後根據學理，推究其間之因果關係，發明定律

四、新統計學派——導此派先河者爲德人蘇美渠 (G.P.Süssmilch) 繼其後者爲特萊氏。此派不獨融合上三派之意旨爲一爐，且力圖改進統計技術，依大量觀察法，搜集統計材料，編造正確之統計，及謀公布各種統計結果並闡明其學理，俾人人得以研究所統計的事實之因果關係。

第六節 統計之種類

統計可分爲二種：

一、純正統計(Pure Statistics)。所謂純正統計者，乃將所搜集之事實，用數學法則及各種定律，由繁雜整理而爲簡單，按其性質分類，使其關係顯明。

二、應用統計(Applied Statistics)應用統計者，則將純正統計之定律及法則應用於具體事實。例如政治統計爲應用統計，以顯明財政，軍事，民事，刑事，領土等之狀況，經濟統計爲應用統計，以顯明生產分配等之狀況，社會統計爲

應用統計，以顯明慈善事業貧民生活等狀況。人口統計爲應用統計，以之顯明人口之靜態動態等。

第七節 統計之程序

統計方法之程序，須視問題之範圍與性質而定，並無一定不變之程式，惟就大體言之，可分爲下列五種步驟：

一、事前規劃

二、搜集材料

三、整理材料

四、分析材料

五、解釋結果

上述第一至第四四種步驟當於以下各章次第論之，惟第五步解釋結果一項，無一定之方法可述，而其重要之程度，殊不亞於以前四步，以其爲全盤工作之結論也。金氏嘗謂能正確的解釋結果，簡潔明瞭的下一結論，爲優越之統計家所必備之條件。信不誣也。（註一）

進行統計工作之程序。除上述五項外，更有不得不注意者，卽校核之工作。校核之工作，，不僅適用於最後兩步，幾乎在進行統計工作之歷程中，隨時隨事均有校核之必要，蓋必如此而後可將錯誤減至最小限度也。

註一：The power......to interpret the rerults correctly and state the conclusions decidly and shortly is one of the characteristics indispensable in a good statistician.

參 考 書

King, W. I.: Elements of Statistical Method Chaps. II and III.

Bowlby A. L.: Elements of Statistics, Chap. I.

Yule G. U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Introduction.

王仲武著統計原學原理及應用第二，第三及第四章

唐啓賢著統計學第一章。

第二章 事前規劃

在未進行收集材料以前，下列三事爲吾人預先所應規劃：一、確定問題：二、規定要件；三、選定單位。玆分節論之。

第一節 確定問題

當調查工作未進行之先，統計家第一步須確定問題，認淸調查之目的，蓋問題稍有變更，調查之手續即將一部或全部不同。如吾人欲調查一地工人之工資，必先決定所欲調查者爲貨幣工資(Money Wage or Nominal Wage)抑爲實際工資(Real Wage)；其更須決定所欲調查者爲計件工資(Piece Rate)抑爲計時工資(Time Rate)。此外，調查之目的，僅欲知工人個人每年之收入乎？抑工人全家之收入乎？凡此種種問題之範圍，皆不相同，因此，進行之方法亦各異，故於調查之先，須將目的認淸。

第二節 規定要件

統計之爲用，在乎比較，而比較時相對數量尤較絕對數量爲重要。所謂相對數量者，在統計上恆以百分數(Percentage)或比率(Ratio)表示之。例如吾人欲比較各城市人口之死亡率，通常以每千人中死亡若干之比率比較之，比較各城市自殺之人數佔人口總數之成數時，則以每十萬人中自殺者若干人之比率比較之。統計之結果既常爲一種比率(註：並非盡爲比率)，則構成分子與分母之兩種數量，必以能適合吾人調查之目的爲條件，否則兩種分子分母不同之比率互相比較，結果必將謬誤也。如一八九八年美國與西班牙戰爭時，美國某報取戰時海軍死亡率與紐約居民之死亡率相比較，其結果海軍死亡率爲千分之九，而紐約居民之死亡率爲千分之十六，於是謂戰時之海軍尙較紐約之居民爲安全。不知要件不同，不能比較。蓋老人與兒童之死亡率高，而城市之中乃有不少老人與兒童，至海軍人員皆當壯年，且其身體曾經嚴格檢查，其死亡率自不能與一般城市居民相提並論，苟欲以海上生活與城市二者對於壽命之影響相比較，則必先在城市之中選出若干與海軍同等年齡之居民，並行使同樣嚴格之身體檢查，然後舉行登記或調查，求出每年兩者之死亡率互相比較，始有意義。又如比較兩地

暗殺事件之多寡與人口之比率，則人口總數之中，老人與婦孺均須除外，蓋暗殺事件，大多數皆壯年男子爲之也。

第三章 選定單位

統計學常不離乎數目，而數目必有其單位，蓋抽象之數字如一千或一萬在統計學上直毫無意義也。定統計之單位，初視之似甚簡易，。實際上則頗感困難。如「田莊」之意義，盡人而知，然如用之於統計上，則「田莊」係指田畝之「田莊」乎？抑數十畝或數百畝之「田莊」乎？一「刑事犯」名詞，至爲淺顯，然用之於統計上，亦將有不少困難。蓋所謂「刑事犯」，指殺人者乎？抑放火者乎？倘一人犯殺人之罪，以行賄法官得免於法，其人卽非刑事犯乎？對於此種問題，吾人顯有不可踰越之障礙；故事先須擇定單位。如單位之字義不能十分明瞭，則對於此單位，必須下一嚴確之定義，庶搜集之材料不致錯誤。統計單位，按照瓦特金氏(G.P,Watkins)之分類，有二大類，每大類中，更分二小類如下：

一、單獨事物(Individual things) 可以計數者：

甲、自然的事物(Natural Kinds) 如人口，動植物皆各以其原來之個體爲單位。此類單位意義最爲明瞭且甚正確。

乙、人爲的事物(Produced Kinds)此種單位係按人力製造事物之個體計算，如桌，椅，房屋等是。

二、測量單位 (Measurational Units)：

甲、度量衡的單位(The Physicl Measures)如路之遠近以里計，器皿之容量以立方尺計，貨物之輕重以斤計。

乙、金錢的單位(The Pecunary Units)如我國之元，英國之金鎊，法國之法郎。

選擇統計單位，其定義不特須正確，並須有普遍性，穩定性無論何種抽象之事物，宜以比較的具體之單位表示之，以免籠統含渾之弊。

參考書

King W.I.：Elementsof Statistical Method, Chaps IV and V.

Secrist, Horace : An Introdnctonn to Statistical Method, chap. III.

Watkins, G. P. : "Statistical Units", in Quarterly Journal of Econ omics, Vol. XXVI.

C. S. Li : Business statics, Chap. IV.

王仲武著統計學原理及應用第六及第七章。

唐啓賢著統計學第二章。

第三章　搜集材料

第一節　材料之類別

統計材料，分爲二種一爲原始材料（Primary Material）一爲現成料（Secondary Material）。原始材料者，乃由統計者直接搜集而得之材料。此項材料之優點在於詳實，惟整理需時，搜集不易，非私人勞力，財力所易舉辦。現成材料者，乃他人所刊佈已經整理之原始材料。此項材料既經他人整理，必不如原始材料之詳實，況整理時難免無錯誤發生，雖經發覺亦無法改正。故就確度言，原始材料自較現成材料爲可靠。若就搜集時所費之勞力與財力而言，則現成材料未始無一日之長，斯在統計者能善爲利用之耳。

第二　材料之來源

原始材料之來源，非由實地調查，卽由通函訪問，至現成材料之來源，大約有下述四種：

一、政府方面：統計之意識，實與國家之組織而俱生；有雛形之政治組織，卽有簡單之統計。近世國家組織文明進步而益臻完密，故政府機關莫不以編製統計爲主要職務之一。舉凡一國之人口，政治，經濟，教育，莫不資統計以決定施政之方針。我國政府機關之統計，以海關貿易册歷史爲最久。（註一）國民政府成立後，各部院及各省市政府幾無不有統計科之設置，數年以來，所搜集之材料，當不在少數，其中如財政部國定稅則委員會之物價統計，上海市政府社會局之勞工統計，均其最著者也。

二、公共團體：政府關機以外，近幾年來，各公共團體亦有藉統計以表現其業務之狀況，或解答各種問題者，教育如中華職業教育社，工商如上海工廠聯合會，紗廠聯合會等均有相當之統計報告，可資採用。

註一：我國海關刊行貿易統計年册，始於咸豐九年(1859)，貿易報告年册始於同治三年(1864)，然其內容至爲簡略。同治六年(1867)以後始漸詳備，迄今已有六十餘年之歷史。

三、學術機關：材料之來自此方面者，多屬專門性質，如南開大學之經濟統計，中華教育基金董事會社會調查部及河北定縣中華平民教育促進會社會調查部之社會統計在我國學術界均有相當之地位。

四、個人方面：此方面之材料比較最少，然苟有之，其可靠性必高，因此項統計既為個人所編製，則其人必於統計有精深之研究，濃厚之興趣，乃能有此毅力。我國個人編製統計者尚不多覯，其在美國，若伯卜生(Babson)之商情預測表，費暄 (Irving Fisher) 之物價指數，均為統計界極有價值之資料。

五、各種出版物：如各國年鑑旅行指南工廠一覽，法令章程，新聞紙，雜誌等。

第三節　搜集材料之方法

統計材料之來源已~~如上述~~，惟原始材料固~~不易~~獲得，即現成材料亦非咄嗟可致。是在統計者愼選方法，持以毅力，運以精心，以從事耳。茲將各種收集材料之方法臚述於次：

1、原有表册法 2、實地調查法 3、估計法。

一、用原有之表册法　此法為搜集現成材料之常法，如~~調查一城中小學兒童之數目，可利用各校之學生點名簿或已編好之學生出席統計表~~。調查工廠出品之成本，數量等，可根據其各種賬簿或已編之統計。搜集此種材料時，可親自訪問，可通信或派人徵求。此外各種書報，雜誌上之統計資料，平時亦應留心保存，庶用時免搜集之勞。惟應用現成材料，預注意下列事項：

a.原來搜集此項材料者之能力及其為人是否可靠。

b.原始材料之來源。

c.調査之目的。

d.搜集材料之方法。

e.數字之確度。

如於以上各點均已滿意，然後始可應用。

二、實地調查法　此法為搜集原始材料最佳之方法，因用此法所搜集之材料，其

度確常較用他法搜集者爲高。惟採用此法，在未進行調查之先，應確定調查之範圍爲全體調查 (Complet Investigation) 抑抽樣調查 (Sampling Method)。時期爲數日，數月或全年。實地調查法更可分爲四種；甲、親自調查法 (Personal Investigation)，乙、通信調查法 (Estimates from correspondents)，丙、被查人填報法 (Schedules to be filled by Informers)，丁、僱員調查法，(Schedules in charge of Enumurators)。何去何從，應由統計者熟審問題之性質，與夫希望之確度及經費之多寡而擇定。茲分述於下：

甲、親自調查法　此法~~費用甚省~~，最合宜於精深之究研，但搜集之範圍，未免太狹。普來 (Le Play) 研究歐洲工人家庭收支狀況，即採用此法。首先於一工人家庭中，調查數月，然後再移至另一家庭，如是繼續爲之，費數年之光陰，始得一精確之結果，與後世大規模調查所得之結果，相去不遠。但普氏採用此法以研究工人家庭，是否可資取法，殊堪疑問。蓋工人之家庭甚多，個人之精力及時間有限，即使普氏去畢生之光陰，所調查之家庭，亦屬有限也。~~全體調查有時因不可能，但亦須抽取一部分適宜的「樣子」~~，庶可爲全體之代表。況個人成見往往甚深，每於不知不覺中，影響其結果，斯亦此法美中不足之處也。

乙、通信估計法　如吾人研究某種問題，僅欲知其大概或近似的結果，則搜集材料可用通信估計法，蓋此法既簡便易行，且甚經濟。例如搜集農產物產量之報告，即可採用此法。報告者對於當年收穫之確實數量，雖不能預知，若請彼等估計本年之收穫量約較上年或常年 (Normal year) 增加幾成或減少幾成，彼等似不難回答。此種各個人之估計，雖未必準確，其中有估計過多者，有估計過少者，但此項錯誤係可以互相衝銷的 (Compensating) 而非累積的 (Cumulative)，故平均的結果雖非十分準確，要與~~實數相差不遠~~。徵集此項報告，可事先備好黏有郵票之空白（或印就的）信封附於發出之信內，請報告者直接寄回，或由各地代理人集徵彙

轉。

丙、被查人填報法此種調查方法與乙法皆用於範圍極大之調查，而其所得之結果則較之乙法爲可靠。惟採用此法最重要之條件須得被查人之合作：第一，被查人對於調查之問題須有興趣；第二，被查人須有相當知識以填各項問題。故問題必須十分簡單，事先尤須引起其興味，否則，非有政府法令爲後盾，難得良善之結果。此法亦甚經濟；有時雖有一部分被查人置之不答，或答而不全，但可照統計者其希望之數加倍發出調查表以杜此弊。追收回時，擇其可用者加以整理，以爲全體之代表。現代工資統計，失業統計，地方歲出統計，氣候統計，皆用此法。

丁、僱員調查法　此法係由調查機關僱用專門職員分任調查事務，就確度言，爲大規模調查最好之方法。惟此法需費浩繁，政府機關行之則可，私人行之，財力恐有未逮。採用此法，調查之內容，不妨較爲詳細問題之範圍亦不妨略爲擴大。至於調查員之選擇，以富有理制力而誠懇耐勞者爲佳。如於調查之先，能與調查者以相當之訓練，於調查工作之進行，必能裨益不少。

上述四法中，丙丁兩法於調查前必須製好表格；甲乙兩法雖不必定用表格，然普通仍以用表格者居多。茲將編製調查表格及選擇問語時應注意之事項，附述於後：

編製調查表時應注意之事項：

a.調查表之式樣以矩形爲準，大小須合度，紙張質量不宜過薄。

b.標題須簡括，俾一覽而知調查之主旨。

c.表中項目須依類排列，必要時應分爲數部。

d.表中線格，字體，可分粗細，大小，以示問語之爲主要或次要。

e.每一問語之後，須留有相當地位以備填答。

f.表中須註明調查之機關，最好能附一簡單之說明解釋調查之意義，俾被查者不至因誤會而偽報。

選擇問語時應注意之事項：

a.問語不宜過多。

b.問語須簡明易曉；最好使被查者能以「是」「否」或數字作答。

c.問語不可引起被查者厭惡之心。

b.問語不宜過於尋根究底，涉及隱私。

e.問語最好能有前後可以互相證實之處。

f.問語須直接，懇切，所問者應即爲所欲搜集之材料。

三、估計法，此法所以濟一二兩法之窮，非至萬不得已時，不宜採用，以用此法所得之材料，常不甚精確也。例如欲知一國蘊藏於地下之鑛產，既無法計算其實數，亦無從得原有之紀載，乃不得不用估計法以救濟之。惟應用此法，須注意下例二端：

甲、當有根據　估計者非憑空揑造之謂，必有相當之根據，然後估計始有價值。所可根據者有三：

a.根據以前之統計或估計　如各國之人口每五年或十年調查一次，若某年非辦理人口統計之年，吾人欲知當時之人口概數，即可根據已往之統計以估計之。又如估計山西省煤之蘊藏量，多謂盡量開採，可供全世界二千年之用，此種估計雖未必精確，然係依據前人雷叔文(F. Van Rithofen)之估計也。

b.根據直接取得之材料　此法係由估計者直接搜集材料以爲根據。如人壽保險公司之死亡表(Mortality Table)，即係根據已往數十年之死亡率及死亡與年齡，體魄等之關係而估計者也。

c.根據間接相關之材料　如根據每人每年平均食鹽或糖之消費量與全國之總消費量，估計全國人口之約數，即爲利用間接材料之一例。

乙、審查確度　估計之結果是否正確，此用估計法者不可不注意者也。審查估計之結果，可依下述四項標準：

a.如估計時所用之方法適當。并無臆測之意見參入，則結果近於正確。

b.估計之事實苟非易變，則結果易致正確。

c.估計之結果如有多數人相同者亦近於正確。

d.多數人估計之結果，雖微有差異，若此種差異可以互相衝銷者，則此估計亦近於正確。

總之，估計法為搜集材料方法中之下乘，苟有他法，不宜輕易採用；旣不得已而採用矣，應審愼周詳，力求根據之充分，免貽人為臆造之譏。

參考書

King W. I.: Elements of Statistical Method, Chaps. VI and VII.

Secrist, Horace: An Introduction to Statistical Method, Chaps II and III.

Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Vol. I, Chap. IV.

李景漢著：實地社會調查方法。

樊　弘著：社會調查法。

王仲武著：統計學原理及應用第八章。

第四章　整理材料

材料既經搜集，進一步之工作卽爲整理材料。惟統計之法則，根據於大量觀察，搜集之事實必多，其中未必盡屬可用之材料，故於整理之先，須用抽查法（Sample Testing)或校讀法 (Check reading) 審核一過，以別其正誤。若材料中發現有可疑之處或一部分材料與大多數有矛盾之處，應趕卽設法覆查，或竟棄而不用。但無論如何，於此等處應加顯明之標記或審查者之意見，切不可塗擦删改，以損其眞。審核之工作旣畢，乃可着手整理。整理統計材料之方法有三：曰謄錄法：曰記號法；曰活頁卡片法。吾人究應採取何法，當視材料之性質及繁簡以爲斷，蓋三法皆所以分別材料之異同，彙類歸納，爲製表之預備者也。玆分述三法於下：

第一節　謄錄法

所謂謄錄法者，係將所搜集之材料彙於一處，保存其實在情形，備作詳細研究之用。玆以調查某地同級學生各科之成績爲例，設吾人所搜集者爲各個學生之成績單，用謄錄法以整理之，則將全體學生之各科成績彙於一紙，其式如下：

表一

某地同級學生各科成績一覽表

成績／科目／姓名	國文	英文	數學	歷史

此法之長處在於詳細，然若學生之數目極多，未免手續過繁，殊不經濟。

第二節　記號法

記號法係將性質相同或相近之事實彙於一欄，用記號計其數目，備作研究分析之用。普通應用之記號有下列數種：

一、一丅下𤴓正

二、丨L凵口☒

三、／∥///////卌

此三種記號均係由一至五，所以便於計數也。玆仍以調查學生各科成績爲例，以示記號法之應用如下：

表　二

某校學生各科成績分配表

成績 ＼ 人數 ＼ 科目	國文	英文	數學
30—34.9	丅	∥	L
35—39.9	一	／	丨
40—44.9	下	∥	凵
45—49.9	丅	///	L
50—54.9	𤴓	卌	凵
55—59.9	正正	卌卌	☒口
60—64.9	𤴓正	卌卌	☒☒☒
65—69.9	正正丅	卌卌卌	☒☒口
70—74.9	正正𤴓	卌卌卌	☒☒口
75—79.9	正正丅	卌卌卌	☒L
80—84.9	正丅	卌∥	☒L
85—89.9	𤴓	卌∥	口
90—94.9	丅	卌	L
95—10.0	一	∥	丨
		／	

應用此法整理材料之優點有三：一，因用記號，可免謄錄之勞。二、無論材料如何繁多，整理之手續均甚簡便。三、經過此法整理後之材料，其分配狀況，可一望而知其大概。惟此法亦非無缺點：一、應用此法，則材料之個別情形無從顯示。二、整理時記號如有錯誤，不易發覺。此外應用此法時須注意者，尚有分組問題，如上例學生之成績由三十分至一百分共分十四組。分組既定，然後始可按學生各科之成績，一一記入相當之組內。

第三節 活頁卡片法

上述兩法皆甚呆板，材料旣經整理之後，不便移動或有所增删。應用活頁卡片法則無此弊。因每一材料，可記於一獨立之卡片上，卡片之數量可伸縮自如，吾人可隨時删去已廢材料之卡片，加入新材料。且應用此法，分類尤稱靈便。玆仍以調查學生成績之材料爲例。旣將各個學生各科之成績錄入獨立之卡片，則吾人可隨意按性別，省籍或年齡之大小，比較學生成績之優劣。論其手續不過略一轉移卡片之勞，至易易也。卡片之質料宜稍厚，大都用白色，然如材料之種類冗繁，亦可用數種顏色以分別之。至卡片之大小，以能容納登記之材料爲度，縱橫約爲三與五之比。

材料旣經登記於片上，當按類依次排列之，置於卡片櫥中妥爲保管，俾應用時易於檢查。活頁卡片法爲整理材料最佳之方法，近世統計之進步，得力於此法不少。整理材料之方法，略具於斯，以下請論分析材料，若製表，若繪圖，若各種計算法，皆屬分析材料之範圍也。

參 考 書

孟森譯統計通論第二十六章。

厲調陽著教育統計學第三章。

王仲武著統計學原理及應用 80-91頁。

唐啓賢著統計學 26-27頁。

第五章　製表

製表一事，驟視之似甚簡易，但若實地編製一較複雜之表其手續決不如想像之簡單，初學者一經嘗式，必覺困難叢生。製表爲分析材料之第一步，果能爲編製得法，分析工作可謂已成其大半，學者切勿忽略視之。

第一節　表之功用

表之功用約有六端，茲分述於後：

一、便於比較　凡有關係之事實，在表中可列於相近之欄，其異同之點自可一目瞭然，遠較以文字敍述爲便利。

二、易於記憶　同類之事實，彙於一處，可引起閱者之聯想作用，易於記憶。

三、便於總計　材料之總數，原不必在表中計算，但表旣製成，排列整齊，甚便於總計也。

四、減省重複之說明　繁頤之事實製成統計表後，則綱舉目張，可以省去許多重複之說明，此近人文字中所以常附有統計表也。

五、可以發現規律　散漫之材料，製成統計表後，因排列有序，可發現一定之規律。近世社會科學之定律或假設從統計表中發現或證實者，固不勝枚舉，卽研究自然科學者，亦多將其試驗之結果彙於一表，以檢尋其中之規律。

六、可發現各組事實間之關係，列於一表之各組材料，其間每有一種關係，此種關係在散漫之材料中，或不易發現，但若列於一表，因排列得法，自易顯明。

第二節　表之種類

統計表之種類甚多，分類殊不一致，茲擇其中最普通之三種分類說明如下：

一、按所列事實爲原始的或非原始的，可分爲總表（General Table）及摘要表 Summary (Smnmary Table)二種：

a.總表　總表係將所有搜得之材料，逐一配載，彙於一表，保存其實在情形

我们在上面谈

，備作詳細研究之用。如~~第四章第一節之例~~，用謄錄法製成之表，~~（參看表一）~~即總表也。

这一种

b. 摘要表　摘要表者，縮合總表之材料而爲賅簡記載之表也。此表之材料，僅爲總表之一部分，如下例某地同級學生各科成績比較表，係根據學生各科成績之總表（表一）經過計算手續而製成，所謂摘要表是也。

表　三

某地同級學生各科成績優劣比較表

科　目	算術平均數	中位數	標準差	四分差
國　文				
英　文				
數　學				
歷　史				

二、按所列事實之繁簡，可分爲單項表、二項表，三項表，四項表及多項表多種：

a. 單項表　單項表者，表列一種事實之統計表也。如表四：

表　四

某級學生國文成績表

分　數	人　數
20—30	2
30—40	4
40—50	7
50—60	13
60—70	26
70—80	18
80—90	7
90—100	1
總　計	78

b. 二項表　二項表者，表列兩種事實之統計表也；如表四中國文成績之外，

再加入英文成績，即成二項表，三項表，四項表以及多項表可以類推，茲不贅述。表中事實之繁簡，原無一定之限制，惟爲便於比較及記憶起見，非極有關係或不能分列之事實，不宜列入一表。~~今氏嘗謂一表~~ 最好要 每表須成一單位，~~上即此旨也~~。

三、按統計數列之種類，可分爲時間數列表，空間數列表，次數數列表或次數分配表三種：

a. 時間數列表　時間數列表者，係按時間之先後，將同一事實在各時期之數目，順序排列之表也。見林 P.50. 第二表 如下例中國對外貿易狀況表，按時期之先後，排列進口，出口及入超之價值，即一時間數列表。

表　五

民國十年至二十一年我國對外貿易狀況表

(單位關銀一萬兩)

年　　份	進口價值	出口價值	入超價值
民國十年	90,612	60,126	30,486
民國十一年	94,505	65,489	29,016
民國十二年	92,340	75,292	17,048
民國十三年	101,821	77,178	24,643
民國十四年	94,786	77,635	17,151
民國十五年	112,422	86,429	25,993
民國十六年	101,293	91,862	9,431
民國十七年	119,597	99,135	20,461
民國十八年	126,578	101,596	25,009
民國十九年	130,976	89,484	41,492
民國廿年	143,349	90,948	52,401
民國廿一年	104,925	49,264	55,661

b. 空間數列表　此表係以空間爲主體，將同一事實在各地方之數目，依次排列，以爲比較之用。下列一九二九年中，俄，美，德，日，英，法，七國

見林 52. 第四表

人口與國富比較表，即其一例。

表六

一九二九年中俄美德日英法七國人口與國富比較表

國別	人口概數（單位：100,000）	國富總額（單位：100,000日金圓）
中國	4,850	328,890
俄國	1,600	1,041,020
美國	1,160	7,623,560
德國	630	716,850
日本	600	1,023,430
英國	470	2,363,200
法國	4:0	1,035,300

註：表中數字除中國人口概數係內政部發表者外，除均為日本內閣統計局所發表。

c. 次數數列表　此表係將同一時期之事實，無空間關係者，依其分佈之情形或次數之多寡，順序排列而成。次數數列，又可細分為二：一為屬於品質統計(Statistics of attributes) 之次數數列；一為屬於變數統計 (Statistics of Variables) 之次數數列。如表七按學校之種類，統計學生之人數，即為屬於品質統計之次數數列表；表八按學生身體之重量而分類，則為屬於變數統計之次數數列表。

表七

某地中等以上學校男女生人數表

校別	學生人數		
	男	女	總計
大學校	6,299	124	6,423
專門學校	5,515	380	5,895
師範學校	340	222	560
中學校	5,859	1,027	6,886
職業學校	694	603	1,277
總計	18,707	2,354	21,061

表八

某校93名十八歲男生體重分配表

體重磅數	人數
90—94.99	1
95—99.99	2
100—104.99	4
105—109.99	9
110—114.99	14
115—119.99	15
120—124.99	21
125—129.99	10
130—134.99	9
135—139.99	5
140—144.99	3
總計	93

上述三種數列中，時間數列與次數數列之性質最不相同，空間數列與次數數列則頗相近。就研究之方法言，時間數列之分析較爲複雜，次數數列與空間數間之分析則較爲簡單，且大致相同，無須分論。就製表之工作言則以編製次數分配表之手續較繁，茲將其步驟附述於後：

一、求全距(Rauge) 全距者，卽材料中最大一項與最小一項間之距離，從最大一項之數值中減去最小一項之數值卽得。如下列二百一十名工人每月所得之工資，乃一次數數列。其中工資最高者爲$32.00，最低者爲$22.55，由$32.00減去$22.55，得 $9.45，卽全距也。

二百一十名工人每月所得之工資

$26.25	$28.60	$23.10	$24.60	$27.55	$27.00	$27.75
26.70	27.80	27.55	25.75	29.50	28.80	24.75
28.20	25.35	25.25	26.75	27.80	26.30	27.60
27.70	29.30	24.00	28.60	25.70	28.25	25.75
24.30	25.55	26.75	29.70	26.10	26.30	27.00
27.60	27.90	24.60	24.50	28.55	23.40	27.80
26.15	31.00	26.30	26.80	27.15	27.75	27.25
27.95	28.55	30.75	28.85	27.55	26.60	28.35
27.30	30.00	28.15	30.55	28.15	28.35	28.00
26.75	26.25	23.00	24.60	30.60	29.60	27.55
30.25	27.00	27.90	24.25	25.25	24.50	25.55
29.55	27.25	25.80	25.85	28.30	26.15	28.90
25.75	27.55	28.60	29.30	27.30	28.55	25.25
26.60	28.60	27.10	26.80	23.50	26.55	26.30
26.30	25.30	27.50	27.30	27.00	27.95	25.15
26.55	27.80	24.55	32.00	27.45	27.80	27.30

30.70	26.30	28.60	29.20	30.00	28.25	28.10
26.90	25.15	25.75	28.30	24.55	25.70	27.90
26.55	28.65	26.75	27.40	28.30	24.75	26.00
28.10	23.00	28.10	26.40	26.55	28.55	27.15
24.10	27.15	29.75	27.40	27.00	27.55	29.80
28.15	25.80	27.20	24.10	28.30	26.30	29.30
29.00	27.30	26.35	28.50	23.50	25.00	27.55
26.10	26.00	27.80	24.25	29.90	25.15	23.60
24.55	24.15	26.30	27.45	26.55	27.90	25.80
26.85	25.75	29.00	26.50	25.25	30.15	36.30
28.60	27.80	27.10	25.75	27.30	26.80	26.25
28.70	25.30	26.69	26.30	24.10	27.55	30.10
24.35	27.60	24.10	27.90	26.30	28.55	22.55
27.30	27.55	25.35	28.10	26.80	25.60	24.10

√二、決定組距(Class-interval)全距求出之後當進而分組。組距者，即每組間之距離也。各組之組距須一律，不可過大，亦不可過小，須視全距之情形而定。如工人最高最低工資間之全距為$9.45，設以$1.00為組距，可將二百一十個工人分為十一組，(參看表九)以$.50為組距，則可分為二十組。(參看表十)~~據勒格 Rugg 之意見，一次數分配表中之組數，最好介於十與二十之間，蓋組數少於十，足以減少次數分配之精確，多於二十，則計算時未免太煩，且次數分配集中之趨勢，亦不易顯明。~~

表九

210 工人每月所得工資分配表

工資 (組距=$1.00)	次數
$22.00－$22.99	1
23.00－ 23.99	7
24.00－ 24.99	21
25.00－ 25.99	27
26.00－ 26.99	42
27.00－ 27.99	54
28.00－ 28.99	34
29.00－ 29.99	13
30.00－ 30.99	9
31.00－ 31.99	1
32.00－ 32.99	1
總數	210

表十

210 工人每月所得工資分配表

工資 (組距=$0.50)	次數
$22.50－$22.99	1
23.00－ 23.49	4
23.50－ 23.99	3
24.00－ 24.49	11
24.50－ 24.99	10
25.00－ 25.49	12
25.50－ 25.99	15
26.00－ 26.49	22
26.50－ 26.99	20
27.00－ 27.49	24
27.50－ 27.99	30
28.00－ 28.49	17
28.50－ 28.99	17
29.00－ 29.49	7
29.50－ 29.99	6
30.00－ 30.49	5
30.50－ 30.99	4
31.00－ 31.49	1
31.50－ 31.99	0
32.00－ 32.49	1
總數	210

三、劃定組限(Class limits) 組限者，即組距之界限。組限有高限 (Upper limit) 低限 (Lower Limit) 之分，如表九第一組$22.00-$22.99，22.99爲高限，22.00則爲低限，蓋22.00小於22.99也組。限須詳細書明如$22.99，俾前後兩組之次數可以分清，而無混淆之弊。~~然此係指連續數列(Continuous series)而言，設爲非連續數列 (Discrete series)，各項變數雖不可分爲小數，亦可用整數劃清界限如11—20，21—30。組限之起訖，最好爲五或十之倍數，如表四及表六。至於各組之中點，能爲整數最佳，因吾人應用次數分配表時有一假定，即任何一組中之變數，其平均大小，可以該組之中點爲代表，中點如爲整數，則以後計算時，自較便利。~~

四、排列次數組距及組限既經決定，於是將各變數按其大小列入相當之組中，卽成一次數分配表。惟排列時可先用記號，然後將記號改爲數字。（參看第四章第二節。）

第三節 製表之規律

製表之規律，可分四項說明之：

一、關於表之標題者：

a.表之標題當力求明顯易解，并須切合表之內容。

b.標題之位置，應在表之頂端。

c.標題中所舉各點，其次序應與表中所列之項目一致(參閱表六)。

d.表之內容有空間及時間區別時，標題中亦應敘明。(參閱表五)

e.如表之內容甚長，佔數頁地位時，除第一頁註明標題外，餘頁僅記頁數及「續前」二字足矣。

二、關於表之項目者：

a.表中項目之次序須按下列各種標準排列：

1.重要之程度。

1.等級之高低。(參閱表七)

3.時間之先後。(參閱表五)

4.數量之大小。

5.筆劃之簡繁。

6.地方區域之大小。

b.表中項目最好一律由左至右橫寫。

c.大項目下可分細目，惟須低一格并用線格分開。(參閱表七)

d.對於某一項目特別注重時，可用較重之字體顯明之。

e.凡橫幅過長之表，左部所註項目不便閱覽時，可於右端重列一次。

f.~~爲便於檢查或引用起見，項目較多之表，可於項目上面或旁面用羅馬字標~~

明次序。

√三、關於表之線格者：

a.表中各縱行間須以直線劃分之，細目間用單直線，大項目間則用較粗之直線。橫行間則無須劃分。

b.表之左右兩邊，無須用邊線隔絕。

c.表之頂端與下端須劃雙直綫或粗黑線。

d.表中上部項目之下及下部列總數或平均數之上，均須用橫線劃分之。

e.表中排列數字處不可用橫線分開，以免障礙視綫。

√四、關於數字之排列者：

a.表中數字，須一律用阿剌伯字，以其整齊且可節省篇幅。

b.表中各縱行數字之位數須上下相對，以便加減比較，如有小數，則小數點尤須列在一垂直綫上，以免計算錯誤。

c.數字多至四位以上，須用分段點，普通每三位分作一段。

d.無數字之空格須用短綫或短橫綫補充之

參 考 書

King, W.I. : Elements of Statistical Method, Chaps.IXandXI.

Secrist, Horace : An Introduction to Statistical Methods Chap.V.

Bowley, A.L. : Elementh of Statistics, Vol.I.Chap.IV.

Mills, F.C. : Statistical Metl ods, CeapIII.

周調陽著教育統計學第三章。

王仲武著統計學原理及應用第九章。

唐啓賢著統計學第四章。

第六章 繪圖

第一節 圖表功用之比較

吾人通常表現事實之方法有三：一、文字，二、表格，三、圖形。此三種方法各有短長，其中文字一項不在討論之列。至表格之功用已於前章第一節說明，本節所討論者，乃圖表兩者功用之比較，茲分述於下：

一、表之功用在於排列及分析材料；圖之功用則在表明此項排列及分析之結果。故製表之工作在前，繪圖之工作在後。

二、表之優點在於詳細，可供專家之參考，而其弱點則對於一般讀者每嫌乾燥無味。圖之優點在於簡單明顯，至於間有不甚詳盡之處，即其弱點。故能圖表並用，俾讀者各擇其宜，最善。

三、表中所列之事實多用數字表現，每陷於抽象；不若圖之具體化，易使閱者領悟。

第二節 圖之種類

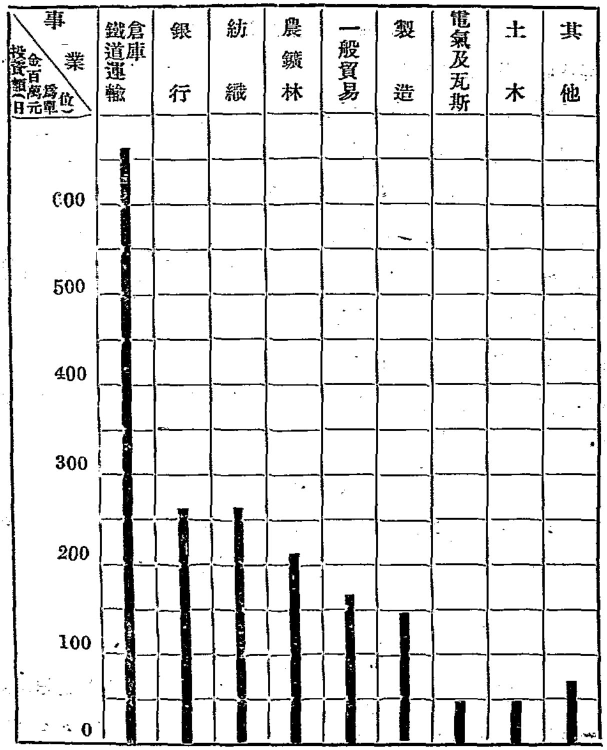
統計圖之種類，就普通常用者而言，約可分為七種：(一)直條圖 (Bar Diagram) (二)平面圖(Surface Diagram)(三)立體圖 (Volume Diagram)(四)形象圖 (Figurative Diagram)(五)組織圖(Orgauization Chart)(六)統計地圖 (Statistical Maps)(七)曲綫 (Curves or Graphs)茲依次分述如下：

(一)直條圖　此圖係以直條之長短，表示事實數量之多寡，~~材料之無連續性者多用之~~。至直條之排列可由左至右，亦可由下至上。直條圖更可分為三種：

甲、單式直條圖　此圖係以一直條表示一單獨事實之數量，直條宜稍粗，各直條間之距離不可太狹，例如圖一。

圖一

日本對華投資



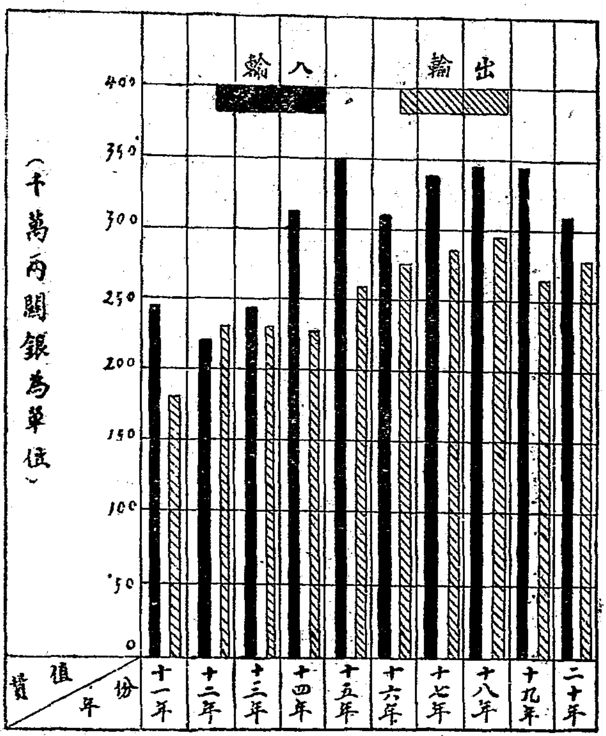
材料來源：1929年太平洋會議時，日本委員所發表。

乙、複式直條圖　複式直條圖者，以兩道或兩道以上之直條為一組，代表一大項目，而以每組中各直條表示大項目中之小項目。例如圖二以兩直條代表我國對日貿易之總值，黑條表示日貨輸入，綫條表示華貨輸日，即複式直條圖也。

丙、分段直條圖　分段直條圖者，以一直條代表一件事實之全體，再按其中各部數值之比例，分直條爲若干段，每段表示一部。例如圖三每一直條代表一城市之人口總數，每條中更分三段表示本國白人，有色人，及外國白人三者佔總數之成分。

圖　二

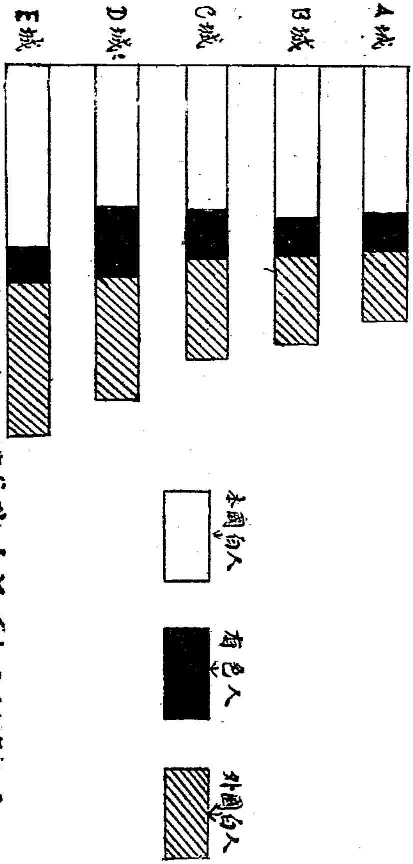
民國十一年至二十年我國對日貿易



材料來源我
國海關華洋貿易冊

圖 三

A,B,C,D,E五城市居民種族人數比較圖☆



☆見 King W.I.: Elements of Statistical Method, p. 94 Fig. 2

有二種：

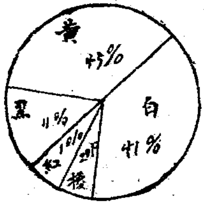
二、平面圖　此種圖形係以面積表示一事實數量之大小，如圓形圖，方形圖，均為常用之平面圖。此外尚有三角形圖，多邊形圖，茲從略。

甲、　圓形圖　圓形圖更可分為三種：

a 單圓圖　此圖係以圓形之面積代表一事實之全體再按一事實各部之大小分全面積為若干扇形以代表各部。例如圖四，圓形之全面積係代表全世界之人口總數，其中分為五個扇形，代表黃，白，黑，棕，紅五色人種所佔之百分數。繪製此圖之手續甚為簡單，其扇形之劃分法，係按圓周360度計算，每百分之一等於3度。惟應用此圖，項目不宜過多，過多則扇形狹小，不便填載文字或數字矣。圖四表示分紅二色人種之扇形即嫌太狹。

圖　四

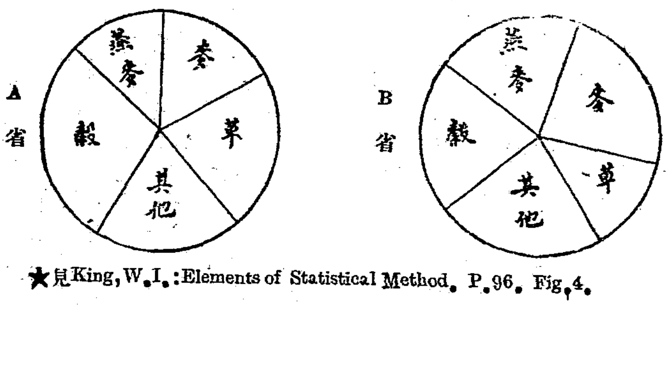
黃，白，黑，棕，紅五色人種百分率比較圖



b. 多圓圖　多圓圖係用兩個以上之圓形代表兩件以上事實之數量，以便互相比較。例如圖五以兩個圓形代表A,B兩省耕地之面積，每一圓形中更可分為數扇形，比較耕地之全面積中種麥者若干，種穀者若干。

圖　五

A,B 兩省各種農作物所佔耕地面積比較圖★

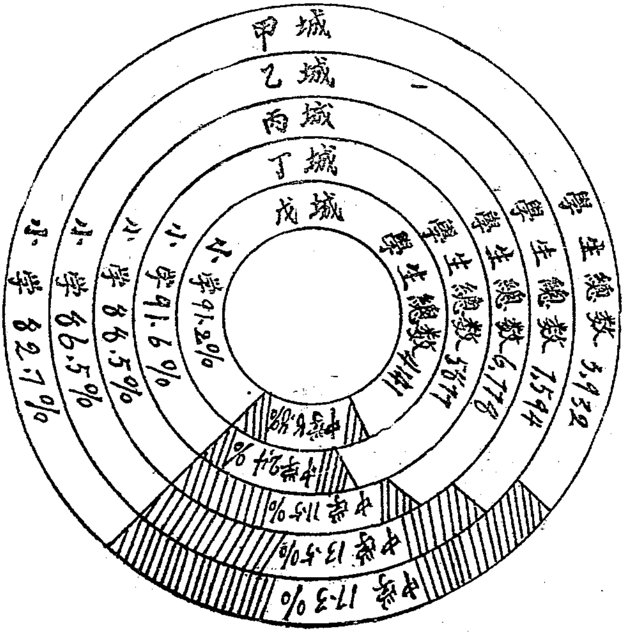


★見King, W. I.: Elements of Statistical Method. P. 96. Fig. 4.

C.疊圓圖 此圖係從同一中心點用不同的半徑繪成兩個以上之圓周，代表兩種以上之事實。例如圖六以五個疊圓周比較五個城市中中學及小學學生之人數，即疊圓圖也。

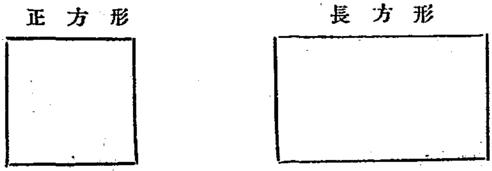
圖 六

甲，乙，丙，丁，戊五城市中學及小學學生人數比較圖



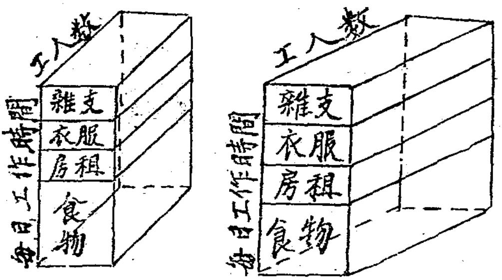
乙、方形圖 方形圖係以正方形或長方形表示一事實之數量，依面積之大小，表明數量之多寡，例如圖七。

圖 七



三、立體圖　此圖係以一立體形代表一事實之全體，以長，寬，高或正面，側面及兩端之面積，表示各部分之大小。如立體形，圓柱形，稜椎體形，球形等，均屬此類。圖八所示，卽爲立體圖；可以作A, B, 兩種實業工人人數，每小時所得工資，每日工作時間，及工人支出分配等多方面之比較。惟應用此類圖形，比較之項目，不宜過多，過多則不便比較，效用將低減也。

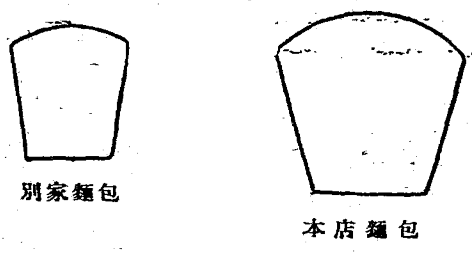
圖　八★



★見King, W. I.: Elements of Statistical Method P95, Fig. 3.

四、形像圖　此圖係將所欲表示之事物，按照其原來狀態繪成圖形，以圖形之大小，高低，長短或多寡表示其數量。圖九爲一麵包商說明其貨品較諸別家分量爲重之簡單形像圖，用於廣告，收效甚宏。此外欲比較兩國商船噸數之多寡，可繪兩隻大小不同之商船表示之；如欲比較兩國飛機之多寡，亦可以形像圖表示之。總之，凡比較具體事物之數量，均可利用此類圖形，其優點在能引起閱者之興味，惟用此圖作精確之比較，尙非藉助於數字不可；蓋僅憑目力，不易比較；且易得錯誤之觀念也。

圖　九★

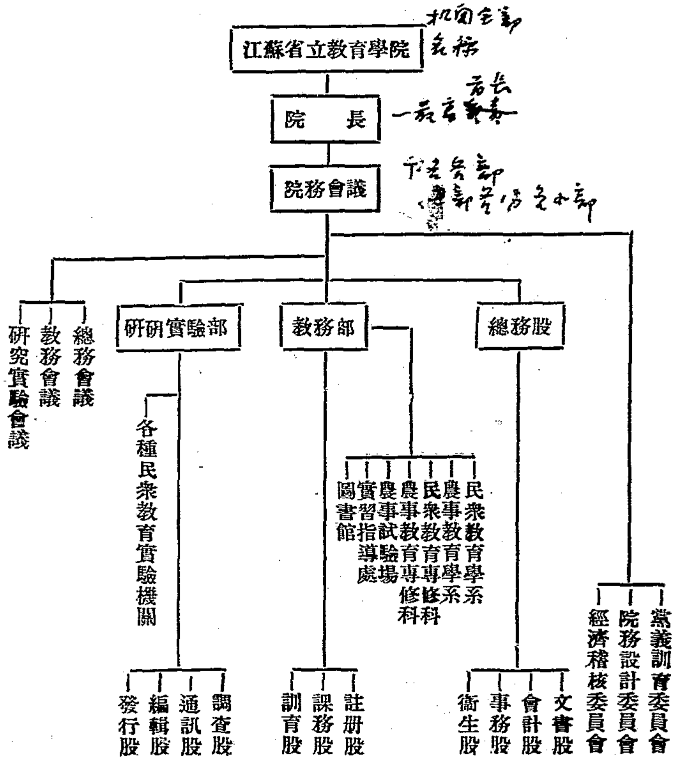


★見King, W.I.: Elmcnts of Statistical Method, P93, Fig.I.

五、組織圖 此圖係表示各種機關之組織系統，以顯明其間隸屬或統轄之關如圖十即其一例。

圖 十

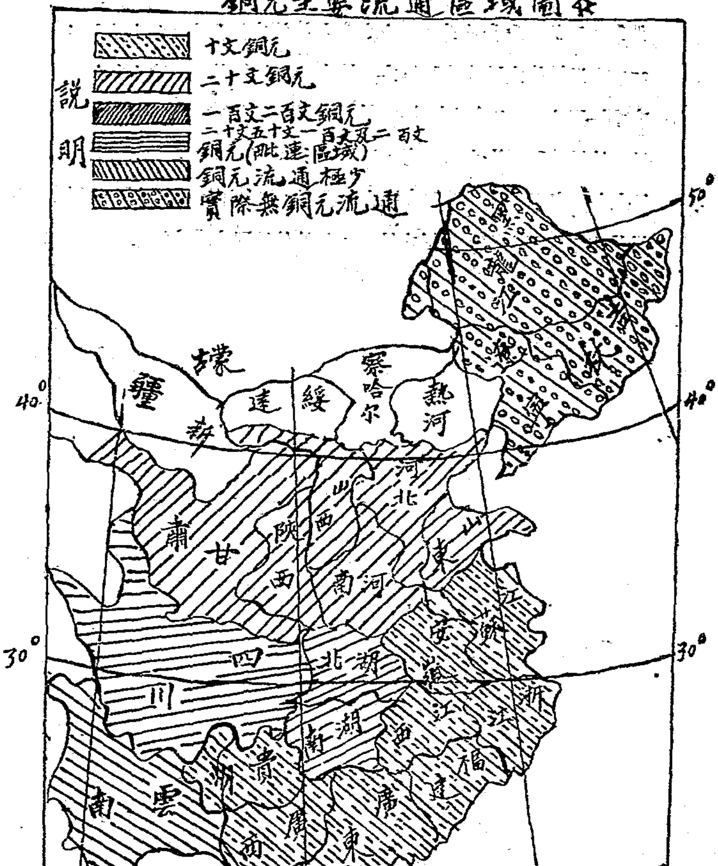
江蘇省立教育學院組織系統



a.顏色，b.橫綫，c.點圖，d.針圖

六、統計地圖　統計地圖者，表示統計事項地域上分布關係之圖也。統計地圖之繪製，分四種 有以各種顏色表示各地域某種事實之數量者，曰a.顏色圖；(Colored maps)有以橫綫之疏密或陰影之深淺表示各地域某種事實之數量者，曰b.橫綫圖或陰影圖；(Cross-hatched or Shaded maps)有以圓點之大小，多寡或濃淡表示各地域某種事實之數量者，曰c.點圖；(Dotted maps)有以細針插於圖上，按針之多寡表示各地域某種事實之數量者，曰d.針圖。(Pin Maps)圖十一以各式橫綫表示銅元在國內流通之情形，即統計地圖中橫綫圖之一例。

銅元主要流通區域圖☆



☆見財政部甘末爾設計委員会擬中國逐漸採行金本位幣制法草案附錄

七、曲綫圖　曲綫圖係以曲綫表示統計事項漲減變遷之趨勢，與此圖形之直綫圖，或~~平面圖，立體圖易得連續之觀念~~。若吾人所表示者為時間數列，則尤非用曲綫圖不可。曲綫圖之種類甚多，~~按照其縱橫綫格所用之尺度(Scale)，可分為等差曲綫圖(Arithmetic Curves or Graphs)及等比曲綫圖(或對數曲綫圖)(Geometrical Curves or Logarithmic Curves)二種分述如下：~~

~~甲、等差曲綫圖　等差曲綫圖之縱橫綫格以相等之距離，表示事實之相等數量，此種圖形，更可分為二種：~~

按曲綫所表示之材料，可分為：

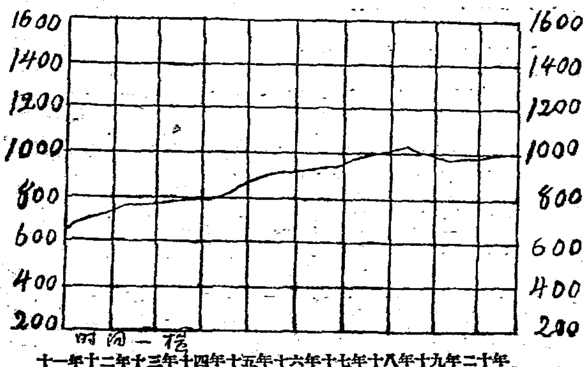
時間數列者係按時間
先後把同一事實各時期
之數目順著先後次序排
列。

1. 時間曲綫圖(Historical Curves)時間曲綫圖所表示者為時間數列，此圖之繪製，通常以橫格表示時間，縱格表示數量，如圖十二。

圖 十 二

民國十一年至二十年我國輸出貨值按年比較圖

(單位關銀百萬兩)



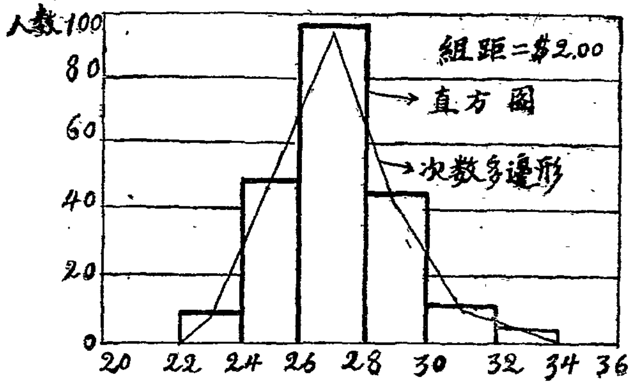
2. 次數曲綫圖(Frequency Curves)次數曲線~~亦名次數多邊形(Frequency polygon)~~，所表示者為次數數列。此圖之繪製通常以橫格表示自變數(Inderendent variables)，縱格表示因變數(Dependent variables)

係把同一時期之事實，依其次數之多寡順序排列

，如圖十三：

圖 十三

二百十名工人每月所得工資分配圖



工資(元數)

b.按曲綫之形狀可分爲：

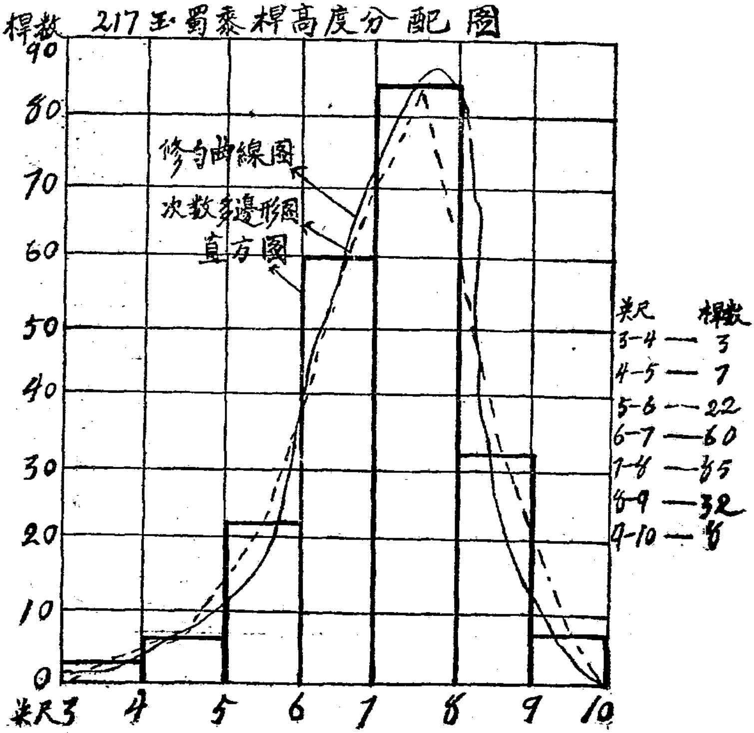
1.次數多邊圖(參看圖十三)

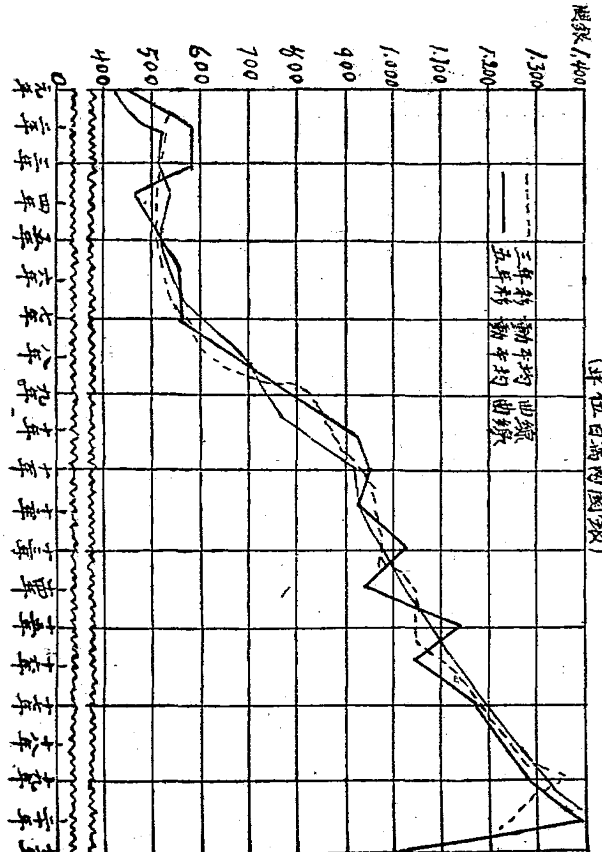
2.直方圖 (Rectangular Histogram)次數多邊形或次數曲綫，係以一點表示一組之次數，連接各點遂成一曲線。直方圖則以一立方形表示一組之次數，其縱軸之高低與次數成正比例，其横軸上左右兩綫則爲組限。表示次數之分配，~~曲線圖與直方圖之功用相等~~，然若計算次數面(Frequency Surfaco) 則以直方圖較爲精確。(參看圖十三)

3.修勻曲線圖(Smoothed Curve)修勻曲線圖者，乃由曲線圖(時間曲線圖或次數曲線圖) 或直方圖改造而成之平滑曲線例。修勻之方法，最簡單者有[redacted]隨手法 (Freehand Method) ，[redacted]) 隨手法者，依多邊形之形勢，配合一平滑之曲線，[redacted]

面積(例如圖十四)。移動平均法，多於用修勻時間曲線，其法係將數期(假定取三期)連貫事實之數量相加，以期數(三)除之，作爲當中一期(卽第二期)之數量。然後去第一期之數量，加入第四期之數量，復以三除之，作爲第三期之數量，如此繼續爲之，用求得之平均數繪成曲線，必較原來之曲線爲平滑。五期，七期移動平均法可以類推，例如圖十五。

圖　十　四





圖十五

民國元年至廿一年我國輸入淨值按年比較圖

(單位百萬兩關銀)

	輸入淨值（單位百萬兩關銀）	移動平均數 三年	移動平均數 五年
民國元年	473		
二年	570	537	
三年	569	531	516
四年	454	513	532
五年	516	507	529
六年	550	540	544
七年	555	584	605
八年	647	655	684
九年	762	772	763
十年	906	871	837
十一年	945	925	911
十二年	923	962	928
十三年	1,018	963	992
十四年	948	1,030	1,005
十五年	1,124	1,028	1,060
十六年	1,013	1,111	1,109
十七年	1,196	1,158	1,182
十八年	1,266	1,257	1,244
十九年	1,310	1,336	1,251
二十年	1,433	1,264	
二十一年	1,049		

細察上圖，可知五年移動平均曲線較之三年移動平均曲綫爲平滑，若年數增多(如七年或九年等)，則繪成之曲綫愈益修匀。然年數愈

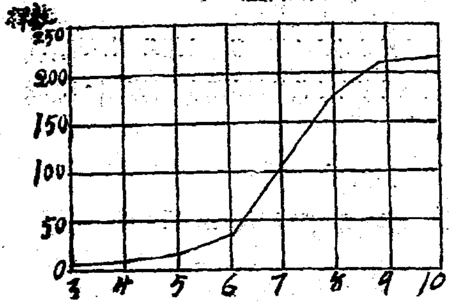
多，則修勻之曲綫愈短，三年移動平均曲綫較原來曲綫短二年，五年移動平均曲綫較之三年移動平均曲綫更短二年，此用移動平均法修勻曲綫之缺點也。

4.累積次數曲綫圖(Cumulative Frequency Graph) 繪製此圖與次數曲綫圖不同之點，在後者係按次數分配表中各組原來之次數（亦稱簡單次數）繪成曲綫，而累積次數曲綫圖則係按累積次數繪成之曲綫。所謂累積次數者，係將次數分配表中各組原來之次數依次遞加。遞加之方法有二：一爲由較小之次數一端加起如表十一第三欄，其累積次數按「以下」(Less than)法讀之。如四呎高度以下者三桿，五呎以下者十桿；一爲由較大之次數一端加起，如表十一第四欄。其累積次數按「以上」(more than)法讀之，如三呎高度以上者二百十七桿，四呎以上者二百十四桿。累積次數之加法旣有二種，故累積次數曲綫之形式亦有二種：一爲上向的 (Less than from) 累積次數曲綫，圖形由左下角趨向右上角，按表十一第三欄之累積次數繪製卽成此圖，例如圖十六甲；一爲下向的(more than from) 累積數次曲綫，圖形由左上角趨向右下角，按表十一第第四欄之累積次數繪製，卽成此圖，例如圖十六乙。惟當注意者，繪製上向的累積次數曲綫時，各組之累積次數須繪於各組之高限上；繪製下向的累積次數曲綫時，各組之累積次數須繪於各組之低限上。從累積次數曲綫圖上可以尋出衆數，中位數，四分位數，十分位數及百分位數等之數值，容於下章再論之。

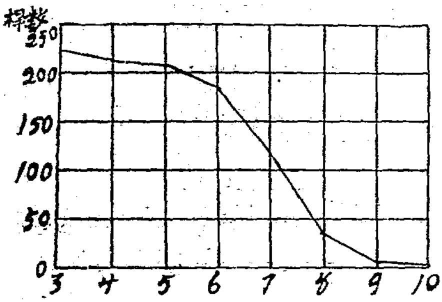
圖十六

217玉蜀黍桿高度累積分配圖

甲、(上向的)



乙、(下向的)



表十一

217玉蜀黍桿高度分配表

高度(呎)	桿數		
	簡單次數	累積次數	
		「以下」	「以上」
3—4	3	3	217
4—5	7	10	214
5—6	22	32	207
6—7	60	92	185
7—8	85	177	125
8—9	32	209	40
9-10	8	217	8
總數	217		

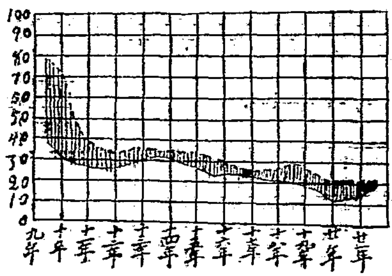
5. 累積時間曲線圖(Cumulative Historical curve) 累積時間曲線圖之繪法與累積次數曲線同，惟所遞加者，非各組之次數，而為各期之數值或次數。此項曲綫亦分上向與下向兩種，惟上向者非表示某組「以下」之次數，乃係表示某期「以前」及某期之數值或次數；下向者非表示某組「以上」之次數，乃係表示某期及某期「以後」之數值或次

數，此累積時間曲綫圖與累積次數曲綫圖相異之點也。(例從略)

6. 距限曲綫圖(Zone Curve)以上所述各種曲綫圖，每期或每組之數值祇有一種，設欲表示一期或一組中兩種不同之數值，則非用距限曲綫圖不可。如表示一期中利率之高低，物價之變動，皆可用此種曲綫表示。圖十七表示近十餘年來倫敦銀市最高及最低價，即距限曲綫圖之一例。

圖十七

民國九年至二十一年倫敦銀市最高最低價比較



———————最高價　　————————最低價

此外倘有各種形式不同之曲綫如帶紋曲綫圖(Band Curve)分歧曲綫圖等(Divergence Curve)然其繪製之方法與上述諸圖初無大異，故不贅。

乙、等比曲綫圖　等比曲綫圖之綫格，以相等之距離，表示相等之比率，如吾人欲表現事實按倍數或比率增減者，應採用此種曲綫圖。等比曲綫圖之繪製，須利用對數表或對數尺，故亦名對數曲綫圖。縱橫綫格悉按等比尺度劃分者為全對數曲綫圖，若僅縱格用等比尺度，橫格仍用等差尺度，則為半對數曲綫圖。茲分述於次；

a. 半對數曲綫圖(Semi-logarithmic curve) 此種曲綫在經濟統計上為

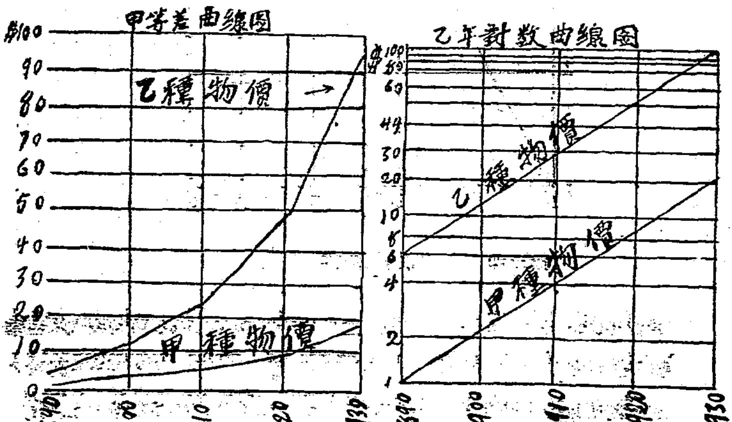
用甚廣。如下例甲乙兩種物價五十年來上漲之速率完全相等，然若用等差曲綫圖表示之，其緩急殊不相同，如圖十八甲；試以半對數曲綫圖表示之，則得斜度相等之兩平行直綫，如圖十八乙。可見此等處用等差曲綫顯呈謬誤也。

五十年來甲乙兩種物品之價格

1890年	甲$ 1.00	乙$ 6.00
1900年	2.00	12.00
1910年	4.00	24.00
1920年	8.00	48.00
1930年	16.00	96.00

圖十八

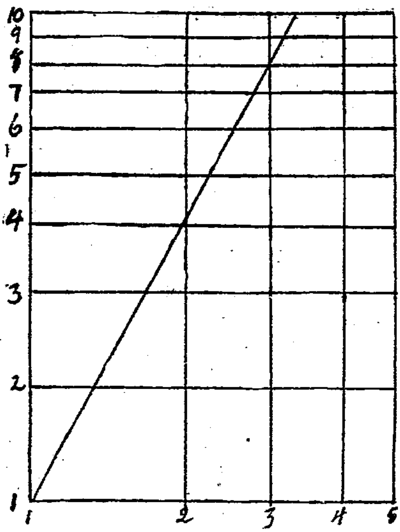
甲乙兩種物價上漲速率圖



f.全對數曲綫圖 (Logarithmic Curve) 全對數曲綫圖之繪製，縱橫綫格悉用等比尺度，如$y = x^2$一方程式，用等差曲綫圖表示之爲一

拋物綫，若用全對數曲線圖表示之，則成一直線，例如圖十九。惟當注意者，凡用等比尺度之線格，其起點決不能爲零，如定欲將零度線表出，可用破裂紋劃分之。(詳見下節)

圖 十九



第三節 繪圖之規律

結論，绘图也有几条原则之规定

關於繪圖之規律，在一九一五年美國使用統計圖形各機關嘗推派代表組織一聯合委員會Joint Committee on Standards for Graphic Presentation討論之，主席爲柏林頓氏 (Willard C. Brinton) 茲將其擬定之標準規律十七條迻譯於後：

1. 圖形之排列，例須由左至右。

2. 表示無連續性之數量時，最好用直條圖，因平面圖與立體圖常易誤

解。

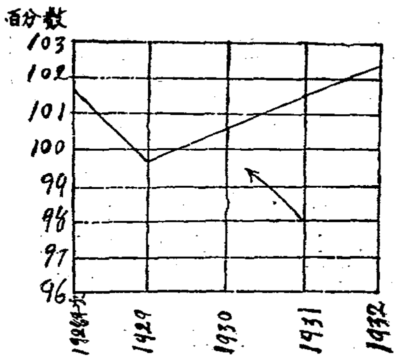
3.如用曲線表示，非至不得已時，縱線之尺度，須以零度爲起點。

4.倘曲線圖形太大，零度線不便表示時可將零度線添在下面，中間用破裂紋表示其中一部份略去，(參看圖十五)

5.用爲起點之零度線須比圖中線格稍粗，以示區別。

6.如曲線係用百分法表示，則代表百分之線，或用爲比較之基線，須較其他線格略粗，例如圖二十。

圖　二十



7.凡有時間關係之圖形，如所表示之年限，并非一個完全時期，則左右兩邊線，不必特別加粗。

8.用對數的格紙作曲線圖時，圖形之限制線，最好在對數尺度的十乘線上。

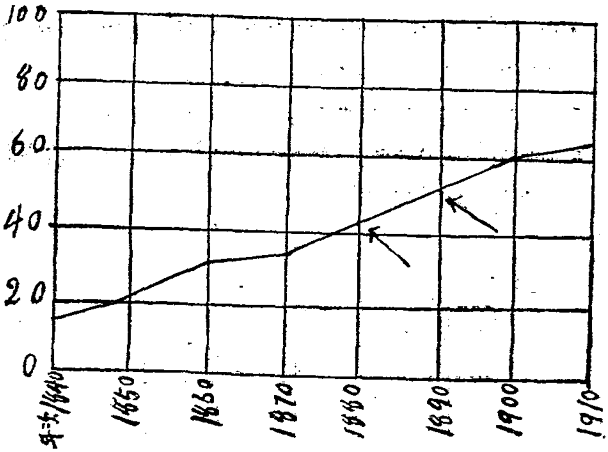
9.圖中縱橫線格不宜過多，以能幫助閱者便於觀察圖形上之數目及了解其意義爲度。

10.圖中曲線應較線格爲粗。

11.設圖中曲線係表示一系連續觀察之結果，最好將各次之結果均明白

指出，例如圖二十一。

圖 二十一



12. 圖中線格上之尺度，橫者須從左至右讀之，縱者須由下至上讀之。

13. 圖中數字須寫在左邊及下面；~~或沿圖之中軸線~~。

14. 圖形所表示之事實，或所根據之公式，均可記入圖中（參看圖十八，十九）。

15. 如詳細數字，圖形中不便記入，可以另列一表，附於圖旁（參看圖十四，十五）。

16. 圖中數字或文字均宜使其能由下向上或由左向右讀之。

17. 圖之名稱 (Titles) 宜清楚完備，遇必要時，副名稱 (Subtitles) 及說明應一併列入。

參考書

King, W. I: Elements of Statistical Method, Chaps X and XI,

Secrist, Horace: An Introduction to Staistical Method, chaops. VI and VII.

Bowley, A. L: Elements of Statistics, Vol. I, chap VII.

Mills, F. C.: Statistical Methods, chap. II.

Brinton, W. C.: Grapthic Methods for Presenting facts.

王仲武著統計學原理及應用第十章。

唐啓賓著統計學第五章。

第七章 平均數

第一節 平均數之意義及種類

統計數列分爲三類，前已言之。就中以時間數列與次數數列之性質最不相同，故其研究方法，必當分論。至空間數列與次數數列則極爲相近，其方法無須分述。學者苟能明瞭研究次數數列之方法，則分析空間數列，毫無困難矣。分析次數數列之方法，第一步在將散漫之資料製成次數分配表，其手續已於第五章第二節中論之。此項次數分配表製成後，雖可稍稍顯示次數分配之大概情形，尚不足供比較研究之用。例如有兩班學生於此，吾人如欲比較其成績之優劣，於分配表以外，應更就每班中求一代表的成績，以爲比較之根據，所謂代表的成績者，即平均數也。故平均數非異常之事項，乃通常之事項，非極端之事項，乃中心之事項，平均數代表性之高低，視次數集中之程度而定。平均數有五種：一、算術平均數(Arithmetic average)二、中位數(Median)三、衆數(Mode)四、幾何平均數(Geometric Average)五、倒數平均數(Harmonic average)，請於以下各節分別論之。

第二節 算術平均數

算術平均數乃吾人頭腦中之狹義的平均數，亦卽算術上之平均數，乃以次數總數除各項變數數值相加之和所得之商。計算算術平均數之公式有三，茲分述如下：

一、由未分組之材料求算術平均數之公式：

$$M=\frac{\Sigma m}{n}$$

式中：M 爲算術平均數之符號

m 爲各項變數之數值

Σ 爲總加之符號，讀如Sigma

n 爲次數之總數

所謂未分組之材料，乃未經製成次數分配表之意。其實材料卽雖製成次數分

配表，設各組之次數，均爲一時，亦可應用上述公式求算術平均數。例如有學生九名。其英文成績爲60,70,40,50,10,20,80,30,90，則算術平均數爲：

$$\frac{60+70+40+50+10+20+80+30+90}{9}=\frac{450}{9}=50$$，此爲從未分組之材料求得者，如將此九名學生之成績製成次數分配表，以十爲組距，則每組之次數均爲一，其平均結果亦爲五十分。惟當注意者，在材料未分組時，式中m 所代表者爲各項之數值，在已分組之材料中，則m 所代表者，爲各組之中點，蓋假定各組次數之平均數值等於該組之中點也。

表十二

九名學生英文成績分配表

分數	m	f
5–15	10	1
15–25	20	1
25–35	30	1
35–45	40	1
45–55	50	1
55–65	60	1
65–75	70	1
75–85	80	1
85–95	90	1
	$\sum m=450$	$n=9$

$$M=\frac{450}{9}=50$$

應用此式求算術平均數，每項變數之數值在結果中均佔同等之勢力，換言之，即輕重之程度相等，故亦名簡單算術平均數(Simple srithmetic average)

二、由已分組之材料求算術平均數之公式：

$$M=\frac{\sum fm}{N}$$

式中：M爲算術平均數之符號

m為各組之中點

f 為各組之次數

Σ為總加之符號

N為次數之和

已分組之材料，乃將散漫之材料製成次數分配表之意，前例~~九名學生英文成~~績之分配，即其一例。惟材料之所以必須製成分配表，不外以其次數繁多，故有化繁為簡之必要。普通次數分配表中各組之次數未必為一。此處所謂已分組之材料，乃各組次數不盡為一之分配表也。例如學生之成績5–15分者有二人，15–25分者有三人，25–35 分者五人，35–45 分者六人， 45–55 分者八人，55–65 分者十二人，65–75分者九人，75–85分者三人， 85–95分者一人，則其算術平均數為

	m	f	fm
5–15	10	2	20
15–25	20	3	60
25–35	30	5	150
35–45	40	6	240
45–55	50	8	400
55–65	60	12	720
65–75	70	9	630
75–85	80	3	240
85–95	90	1	90
		N=49	Σfm=2,550

$$M=\frac{2,550}{49}=52.04$$

組(中點)

應用此式計算算術平均數須以各組之次數乘各組之中點，俾各項變數之數值在結果中保持相互間適當之比例，如得十分之學生二人，在四十九名學生中佔四十九分之二，故以二乘十。得二十分之學生三人，在四十九名學生中佔四十九分之三，故以三乘二十；餘類推。以其按各組之次數分別各組之輕重

，隱寓加權(Weighting)之意味，故亦名加權算術平均數(Weighted arithmetic average)惟權數(Weights)之原義，非專指次數而言，凡分別統計事項輕重程度所用之資料，或爲數量，或爲價值，或爲抽象之數字，皆權數也。如吾人統計一家每日生活必需品柴，米，油，鹽等之消費值，必以各該品之消費量乘其價格，如柴幾斤，米幾升，油鹽各幾兩，此項數量斤，升，兩之類，即爲各該品價格之權數。又如求學生各科之平均成績，常與各科以抽象之權數，以分別各科之輕重程度，如國文爲三，歷史爲二，數學爲二•五之類。

三、計算算術平均數之簡便公式：

$$M=M'+C$$

式中：M爲算術平均數之符號

M'爲假定算術平均數之符號

C 爲校正數，等於

$$\frac{\Sigma d'}{N} \text{ 或 } \frac{\Sigma fd'}{N}.$$

由已分組之材料求算術平均數已較由未分組之材料計算爲簡便，然如次數過多，其手續猶嫌煩瑣，尤以求各組次數乘各組中點時爲甚，故簡法尚矣。欲明簡法之理論，須先明瞭各項變數與其算術平均數之離中差(Deviations)之和等於零。蓋一切變數有大於其算術平均數者，亦有小於其算術平均數者，此項變數與其算術平均數間之差額，謂之離中差，在公式上恆以 d 代之。離中差有正有負，依數學原理，由算術平均數計算之各項離中差，其和應爲零，玆證明如下：

設$m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots\cdots\cdots m_n$爲各項數值

M爲算術平均數

$d_1,\ d_2,\ d_3, \cdots\cdots\cdots\cdots d_n$ 爲各項變數對於算術平均數之離中差.

則$M=\dfrac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n}{N}$ ……………………………… (1)

$NM=m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n$ ……………………………… (2)

$O=m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots m_n-NM$ ……………………………… (3)

因N爲次數之總數

故$O=(m_1-M)+(m_2-M)+(m_3-M)+(m_n-M)$ ………… (4)

但$(m_1-M)=d_1;(m_2-M)=d_2$ ………………………………

故$O=d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots+d_n$ ……………………………… (5)

$O=\Sigma d$ ……………………………………………… (6)

既知各項變數對於其算術平均數之離中差總和爲零，則對於算術平均數以外另一數值之離中差，其總數和自不等於零。計算算術平均數之簡法，第一步乃先假定一數爲算術平均數，此假定平均數通常以分配中適中一組之中點充之。然後就此假定平均數求離中差，計其總和，而以次數總數除之，結果爲校正數。注意此校正數之正負符號，與假定算術平均數相加，卽爲眞確算術平均數。$(M=M'+C)$ 玆證明此簡法之公式如下：

設$KM_1,KM_2,KM_3,KM_4,$……………KMn爲各項變數

KA爲眞確算術平均數

KQ爲假定算術平均數

C爲眞確算術平均數與假定算術平均數之差卽簡法公式中之校正數

$$\underline{K\quad \overbrace{M_1\ \underbrace{M_2\ Q\ C\ A}_{d_2}}^{d_1}\ \overbrace{\quad\quad}^{d_3}\ \overbrace{\underbrace{M_3\ M_4}_{d_4}\ M_n}^{dn}}$$

則$d_1,d_2,d_3,d_4,$………………dn爲各項變數對於眞確算術平均數之離中差

而$d_1-c;d_2-c;d_3+c;d_4+c;dn+c$爲各項變數對於假定算術平均數之離中差，通常以d'表示之。

今將各項變數對於假定算術平均數之離中差相加而以次數總數(N)除之，則得：

$$\frac{\Sigma d'}{M}=\frac{-(d_1-c)-(d_2-c)+(d_3+c)+(d_4+c)+(d_n+c)}{N}$$

$$=\frac{-d_1+c-d_2+c+d_3+c+d_4+c+\cdots\cdots\cdots+d_n+c}{N}$$

$$=\frac{\Sigma d+NC}{N}$$

已知$\Sigma d=0$

故$\frac{\Sigma d'}{N}=C$

由上圖已知$KA=KQ+C$。今旣證明$C=\frac{\Sigma d'}{N}$，則$KA=KQ+\frac{\Sigma d'}{N}$。KA者，眞確算術平均數也(M)；KQ者，假定算術平均數也(M')；故得計算算術平均數之簡便公式$M=M'+C$惟以上係按未分組之材料證明，若材料業經分組，C之求法亦同，惟須以各組之次數(f)乘各組之中點對於假定算術平均數之離中差(d')然後相加，而除以次數總數耳。此項簡法雖然在未分組或已分組之材料均可應用，但材料旣未分組，次數必少，用簡法計算算術平均數，是否可以節省時間與勞力，殊爲疑問。下列二例，不過用簡法釋明計算算術平均數之方法，實際上鮮有用簡法從未分組之材料求算術平均數者。

表 十四

用簡法從未分組之材料

計算算術平均數

m	f	d'
10	1	−45
20	1	−35
30	1	−26
40	1	−15
50	1	−5
60	1	+5
70	1	+15
80	1	+25
90	1	+35
	N =9	Σd' =−45

設 $M' = 55$

則 $C = \dfrac{-45}{9} = -5$

$M = M' + C$

$= 55 - 5$

$= 50$

表 十 五

用簡法從已分組之材料計算算術平均數

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
	m	f	d'	fd'	d'	fd'
5–15	10	2	−40	−80	−4	−8
15–25	20	3	−30	−90	−3	−9
25–35	30	5	−20	−100	−2	−10
35–45	40	6	−10	−60	−1	−6
45–55	50	8	0	0	0	0
55–65	60	12	+10	+120	+1	+12
65–75	70	9	+20	+180	+2	+18
75–85	80	3	+30	+90	+3	+9
85–95	90	1	+40	+40	+4	+4
		$N = 49$		$\sum fd' = 430 - 330 = 100$		$\sum fd' = 43 - 33 = 10$

設 $M' = 50$

則 $C = \dfrac{100}{49}$(原來單位)

$M = M' + C$

$M' = 50$

$C = \dfrac{10}{49}$(以組距爲單位)

$= .204$

$=50+2.04$

$=52.04$

若以原來單位表示之，

則$C=.204\times10$(組距)

$=2.04$

故$M=50+2.04$

$=52.04$

用簡法計算算術平均數固已簡捷，然計算各項或各組中點與假定算術平均數之離中差，尚可以組距爲單位，使手續愈加簡便。如表十五之組距爲十，第四欄所示，係用原來單位求出之d'，設吾人以組距爲單位計算d'，如第六欄所示，則較之用原來單位表示者小十倍，與次數(f)相乘時自較便捷。惟d'之計算，旣以組距十爲單位，則求得之校正數(c)亦必較應得之校正數小十倍，故須以十乘之，俾其還原，然後與假定算術平均數相加乃得眞確算術平均數。(參看表十五第六，七兩欄下面M之計算法)玆將用簡便公式計算算術平均數之步驟列下：

1. 將資料製成次數分配表。
2. 擇適中一組之中點爲假定算術平均數。
3. 以組距爲單位表示各項變數對於假定平均數之離中差(d')以假定平均數所在一組之離中差爲零，其下一組爲-1其上一組爲$+1$，餘遞推。
4. 以各組之離中差(d')與各該組之次數相乘，注意其正負號，列於(fd')欄下，然後相加，以求其總和，(注意其正負號)是爲$\Sigma fd'$。
5. 以次數總數(N)除$\Sigma fd'$，所得之商，爲以組距爲單位之校正數(C)。
6. 以組距之數值乘第五步求得之校正數，卽爲以原來單位表示之校正數。
7. 將此校正數與假定算術平均數相加，(注意正負號)卽得眞確算術平均數。

第三節　中位數

中位數爲全體變數依大小次序排列後中間一項或一點之數值，在中位數之兩端，

各有全體變數之半。換言之，卽小於中位數之變數與大於中位數之變數各爲全體變數百分之五十。求中位之公式有二：一爲由未分組之材料求中位數，一爲爲由已分組之料材求中位數，玆分述於下：

一、由未分組之材料求中位數之公式：（如雖分組而各組次數均爲一時，亦可用此公式）

（排列或由小而大，或由大而小，不拘）

$$Md=\frac{N+1}{2}$$

代表

式中：Md 爲中位數之符號

N 爲次數總數

應用此式求中位數須先將各變數按大小順次排列，然後計其次數。如 ~~十名~~ 九名學生之英文成績，由小至大順序排列應爲10,20,30,40,50,60,70,80,90，按照公式，則中位數爲五 $\left(\frac{9+1}{2}=5\right)$，意卽第五項之數值50爲中位數，五，其他位也。若次數爲偶數，則中位數之地位在居中兩項間之中點，其數值應爲居中兩項相加之半

②從一端數起，數到行次的一半，就可以得中位數

例如有十二人的收入數：

二、由已分組之材料求中位數之公式：分兩步

第一步1. 決定中位數的地位

$$Md=\frac{N}{2}$$

式中：Md爲中位數所在之地位

N 爲次數總數

第二步2. 求中位數

$$Md=L+\frac{i}{f}+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(甲)$$

或

$$Md=U-\frac{i}{f}\times c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(乙)$$

式中：Md 爲中位數之數值

L 爲中位數所在組之低限。

U 爲中位數所在組之高限。

f 爲中位數所在組之次數。

i 在(甲)爲中位數所在組之低限與中位數所在點間之次數。

在(乙)爲中位數所在組之高限與中位數所在點間之次數。

c 爲組距。

由未分組之材料求中位數至爲易易；若由已分組之材料求中位數，則其手續較爲繁複。第一步吾人須先按 $Md=\frac{N}{2}$ 公式決定中位數之地位。即中位數所在之一點，然後用 $Md=L+\frac{i}{f}\times c$ 或 $Md=U-\frac{i}{f}\times c$ 公式求出該點之數值。茲用二百十七玉蜀黍桿高度之分配爲例，計算其中位數如下：

表十六

二百十七玉蜀黍桿高度分配表

呎	f	c. f. 以上	c. f. 以下
3–4	3	3	217
4–5	7	10	214
5–6	22	32	207
6–7	60	92	185
7–8	85 $\begin{cases}16.5\\68.5\end{cases}$	177	125
8–9	32	209	40
9–10	8	217	8
	$N=217$		

(1)先用 $Md=\frac{N}{2}$ 公式決定中位數所在之一點

$$Md=\frac{217}{2}=108.5$$

(2)既知中位數所在點爲108.5，故中位數之數值必介乎7呎與8呎之間，因由該組之累積次數所示，知中位數確在該組也。然該組之低限爲7呎，高限爲8呎，中位數究較低限高幾何，高限低幾何，是不得用補插法以決定之矣。查中位數所在組之累積次數無論爲「以下」或「以上」均超過108.5之地位，由「以下」的累積次數而論，超過68.5(177-108.5)即從中位數所在組之次數(85)中取16.5加於較小一組之累積次數(92)即得中位數所

在之地位($92+16.5=108.5$),16.5卽甲式中之i。由「以上」的累積次數而論，超過16.5(125-108.5)，卽從中位數所在組之次數(85)中取68.5加於較大一組之累積次數(40)卽得中位數所在之地位($40+68.5=108.5$)，68.5卽乙式中之i。吾人集材料製成次數分配表時本有一假定，卽各組之次數其分配均屬平勻，可以該組之中點，爲該組各項之平均數值。本例之中位數在7-8之一組85項中由小至大計數爲第16.5項，故其數值應爲

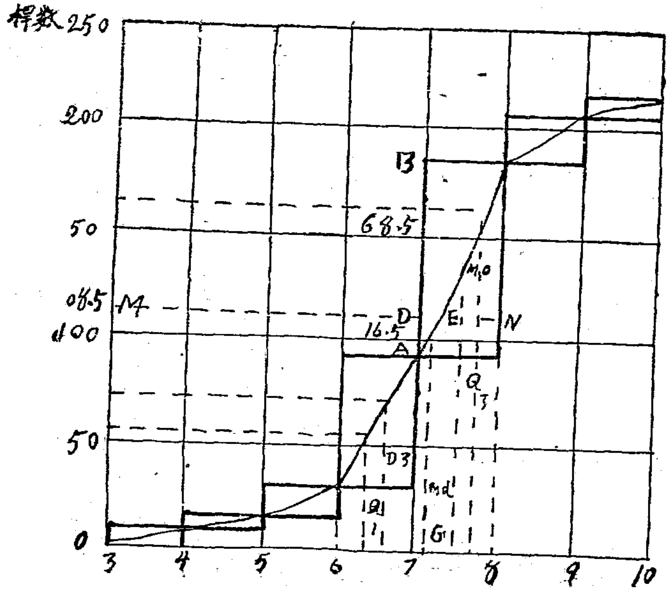
$7+\frac{16.5}{85}\times 1=7.19$ ($Md=L+\frac{i}{f}\times c$)若由大至小計數爲68.5項，故其

數值應爲 $8-\frac{68.5}{85}\times 1=7.19$ ($Md=u-\frac{i}{f}\times c$)

用補插法決定中位數數值之公式可以下圖證明之：

圖二十二

217 玉蜀黍桿高度累積分配圖



上圖爲一累積次數曲線，吾人由縱軸上可以尋出中位數之地位（108.5），從中位數所在之點引出M N一線與底線平行。此線與累積次數曲線在E點相交，E點在橫軸上之數值，卽中位數之數值，E點所在之組卽中位數所在組。求E點在橫軸上之數值，可由E點引一垂直線至底線，如圖二十二之EG，OG卽中位數之數值，用目力觀察，約爲7.2弱。然OG＝ME，故吾人亦可速求ME之數值。圖中ME＝MD＋DE或ME＝MN-EN，但MD＝7，爲中位數所在組之低限，ME＝8，爲中位數所在組之高限，以補插法計算者僅DE或EN之數值而已。依幾何學原理△ABC與△ADE爲相似三角形，故

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$$DE=\frac{AD\times BC}{AB}$$

查 AD＝16.5（中位數所在組之低限與中位數所在點間之次數）

AB＝85（中位數所在組之次數）

BC＝1（組距）

故 $DE=\frac{16.5\times 1}{85}=.19$（卽甲式中之$\frac{i}{f}\times c$）

又知△ACF與△ECN爲相似三角形，故

$$\frac{CN}{CF}=\frac{EN}{AF}$$

$$EN=\frac{CN\times AF}{CF}$$

查 CN＝68.5（中位數所在組之高限與中位數所在點間之次數）

AF＝1（組距）

CF＝85（中位數所在組之次數）

故 $EN=\frac{68.5\times 1}{85}=.81$（卽乙式中之$\frac{i}{f}\times c$）

吾人由中位數所在組之低限上加.19，或由中位數所在組之高限減去.81，均爲7.19，此即中位數之數值也。茲將用甲式求中位數之步驟列下：

1.將資料製成次數分配表。

2.以二除次數總數。決定中位數所在之地位及中位數兩端之次數。

3.將各組次數(由小至大)累積相加，以決定中位數所在之一組。

4.計算此組低限以上至中位數所在點間之次數(i)。

5.以該組原有次數(f)除(i)，然後乘以組距，再加於該組之低限上(L)，即得中位數之數值。

中位數之外，尙有所謂四分位數(Quartiles)，十分位數(Deciles)，百分位數者(Percentiles)，其計算方法與中位數同。所異者中位數係將全體次數等分爲二，四分位數係將全體次數等分爲四，十分位數係將全體次數等分爲十，百分位數係將全體次數等分爲百。中位數之兩端各有全體次數之半，第二四分位數第五十分位數及第五十百分位數之兩端，亦各有全體次數之半，故數值相等。至若第一四分位數所在之地位下端應有全體次數四分之一，上端應有全體次數四分之三。第三四分數所在之地位下端應有全體次數四分之三。第三四分位數所在之地位下端應有全體次數四分之三，上端應有全體次數四分之一。十分位數與百分位數之地位可以類推。中位數吾人以 Md 代之，四分位數則以Q代之，十分位數則以D代之，百分位數則以P代之。求中位數時吾人須先決定其地位，然後用公式甲或乙計算其數值，求四分位數，十分位數及百分位數時亦然。茲用玉蜀黍桿高度之材料略舉數例於下：

1.第一四分位數：

a.決定第一四分位數之地位：$\frac{N}{4}=\frac{217}{4}=54.25$

b.用甲式求第一四分位數之數值：

$$Q_1=6+\frac{22.25}{60}\times 1=6.37$$

2.第三四分位數：

a. 決定第三四分位數之地位：$\frac{N}{4}\times 3=\frac{317+3}{4}=162.75$

b. 用甲式求第三四分位數之數值：

$$Q_3=7+\frac{70.75}{85}\times 1=7.83.$$

3. 第三十分位數：

a. 決定第三十分位數之地位：$\frac{N}{10}\times 3=\frac{217}{10}\times 3=65.1$

b. 用甲式求第三十分位數之數值：

$$D_3=6+\frac{23.1}{60}\times 1=6.39$$

4. 第五十三百分位數：

a. 決定第五十三百分位數之地位：

$$\frac{N}{100}\times 53=\frac{217}{100}\times 53=115.01$$

b. 用甲式求第五十三百分位數之數值：

$$P_{53}=7+\frac{23.01}{85}\times 1=7.27$$

上例求數值時均用甲式，如用乙式，其方法相同，玆不贅述。中位數之數值，可從累積次數曲線圖中求出，四分位數，十分位數及百分位數之數值亦可從此項累積次數曲綫圖中求出，由縱軸上第一四分位數所在點引出之線與底線平行者與此曲線（上向的）相交之點，其在橫軸上之數值，即為第一四分位數之數值。若為下向的累積次數曲線，則該點之位置移向右方，其在橫軸上之數值乃第三四分位數之數值而非第一四分位數之數值矣。（餘類推）下向的累積次數曲線如與上向者同繪於一圖，則此兩曲線之相交點在橫軸上之數值卽為中位數之數值，學者宜注意及之。

第四節 衆數

衆數之觀念最易明瞭，統計材料中次數最密集之一點，卽為衆數。如最普通之工

資，最普通之成績，均屬衆數，以其爲最普通之事實，故可用爲全體事項之代表。衆數之求法，可分粗率的及精確的兩種方法，用粗率的方法求出之衆數，謂之視察衆數(Inspection Mode)，用精確的方法求出之衆數，謂之理論衆數(Theoretical Mode)。惟眞正精確的衆數非儘量增多材料，配合一常態曲線 (Normal Curve of Eror) 後不能求得，此處所謂理論衆數不過較之視察衆數稍近正確耳。

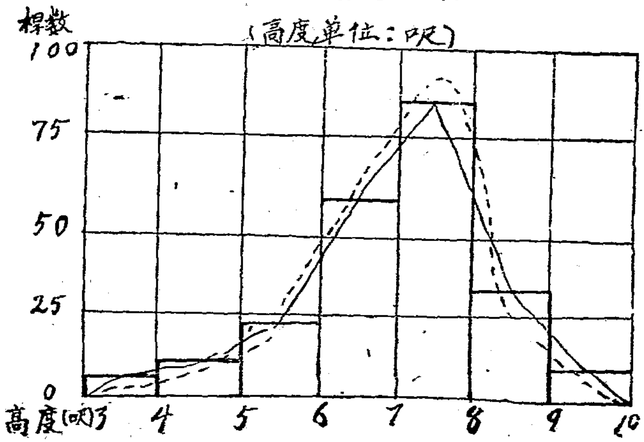
一、視察衆數　求視察衆數之方法有三：一爲從次數分配表中求出，一爲從次數多邊圖或直方圖中求出，一爲從累積次數曲線圖中求出，玆分述於下：

a.從次數分配表中求衆數，以次數最多一組之中點爲衆數之數值，如表十六中次數最多一組之中點爲7.5，即以7.5爲衆數之數值。

b.從次數多邊圖或直方圖中求衆數，以次數多邊圖最高一點在橫軸上之數值或直方圖中最高一直方之中點在橫軸上之數值爲衆數。如下圖次數多邊形最高一點及直方形中最高一直方之中點在橫軸上之數值均爲7.5，即衆數之數值也。

圖 二 十 三

217 玉蜀黍桿高度分配圖



c.從累積次數曲線中求衆數　累積次數曲線平峭之程度，視各組次數之多寡而定，如圖二十二，其始甚平，繼則漸峭，迨至頂部又成平勢。此圖最峭之點爲7-8一組中之中點，就此點而求其在底線上之數值，卽爲衆數，蓋7-8-組中之次數最多，故曲線呈最峭之勢也。(參閱圖二十二)

二、理論衆數　精確之理論衆數殊不易求得，而視察衆數又多粗率不可靠，於是由統計學家之經驗，倡用兩法，其結果較之視察衆數稍近於正確，卽此處所謂理論衆數，亦名近似衆數(Approximate Mode)，茲分述於次：

a.由視察衆數求比較近似的衆數　此法係根據鄰近衆數所在組（卽次數分配表中次數最多之一組）上下兩組之次數以糾正視察衆數之錯誤。蓋次數分配如屬對稱，(Symmetrical)換言之，卽衆數所在組上下兩端之次數相等，則吾人不妨以衆數所在組之中點爲衆數之數值；如次數分配爲不對稱(Asymmetrical)則衆數之地位須視上下兩端次數之多寡而定。如小於衆數一端之次數較大於衆數一端之次數爲多，則衆數之數值小於衆數所在組之中點；反之，則衆數之數值大於衆數所在組之中點。蓋衆數所在組上下兩端之次數不啻爲兩種勢力，足以左右衆數之數值，如勢均力敵，則衆數不動，否則衆數常向次數較多之一端移動統計學家根據此種理論得一求近似衆數之公式如下：

$$MO=L+\frac{f_2}{f_2+f_1}\times c$$

式中：MO 爲衆數之符號

L 爲衆數所在組之低限

f_2 爲衆數所在組較大一組之次數

f_1 爲衆數所在組較小一組之次數

c 爲組距

茲以表十六之材料爲例，求得衆數如下：

$$MO=7+\frac{32}{32+60}\times 1=7.35$$

本例衆數所在組較大一組之次數較小一組之次數爲少，故衆數之數值，小於

a. 由視察衆數求比較近似的衆數，此法係根據鄰近衆數所在組（即次數分配表中次數最多之一組）上下兩組之次數以糾正視察衆數之錯誤。蓋次數分配如屬對稱，（Symmetrical)換言之，即衆數所在組上下兩端之次數相等，則吾人不妨以衆數所在組之中點爲衆數之數值；如次數分配爲不對稱，(Asymmetrical)則衆數之地位須視上下兩端次數之多寡而定。如小於衆數一端之次數較大於衆數一端之次數爲多，則衆數之數值小於衆數所在組之中點；反之，則衆數之數值大於衆數所在組之中點。蓋衆數所在組上下兩端之次數不啻爲兩種勢力，足以左右衆數之數值，如勢均力敵，則衆數不動，否則衆數常向次數較多之一端移動統計學家根據此種理論得一求近似衆數之公式如下：

$$Mo = L + \frac{f_2}{f_2 + f_1} \times c$$

式中：Mo爲衆數之符號

L 爲衆數所在組之低限

f_2 爲衆數所在組較大一組之次數

f_1 爲衆數所在組較小一組之次數

c 爲組距

茲以表十六之材料爲例，求得衆數如下：

$$MO = 7 + \frac{32}{32+60} \times 1 = 7.35$$

本例衆數所在組較大一組之次數較較小一組之次數爲少，故衆數之數值，小於衆數所在組之中點。(參閱表十六及圖二十三)

上式爲由衆數所在組之低限加一數量求得衆數，吾人亦可由衆數所在組之高限減一數量求得衆數其式如下：

$$MO = U - \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times c$$

式中：MO爲衆數之符號

U 爲衆數所在組之高限

f_1爲衆數所在組較小一組之次數

f_2爲衆數所在組較大一組之次數

c爲組距

玆仍以表十六之材料爲例，求得衆數如下：

$$MO=8-\frac{60}{60+32}\times 1=7.35$$

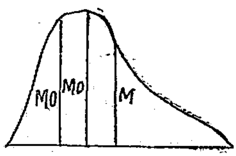
上例f_2與f_1所代表者爲衆數所在組較大一組與較小一組之次數，有時吾人取衆數上下兩組或三組之次數以決定衆數之數值，其方法相同，無庸贅述。

b.皮爾生(Karl Pearson)計算衆數之經驗的法則，當次數分配爲對稱時，算術平均數，中位數，衆數三者合而爲一；其數值相等；如分配爲不對稱，而偏度不高時，三者之數值各不相同，但亦有相當之關係。卽算術平均數與衆數相距最遠，中位數居於二者之間，中位數與算術平均數之距離約等於算術平均衆與衆數間距離三分之一。

如次數分配呈正的偏態，則算術平均數大於衆數；如爲負的偏態，則算術平均數小於衆數。所謂正的偏態者，卽次數分配偏於數值較大之一端，如圖二十四；負的偏態者，卽次數分配偏於數值較小之一端，如圖二十五。

圖二十四

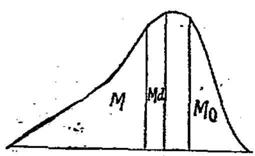
正的偏態



橫軸數值由小至大

圖二十五

負的偏態



橫軸數值由小至大

根據上述理論，皮爾生倡出一種經驗的法則，由算術平均數及中位數之數值求出衆數

，其公式如下：

$$M0=M-3(M-Md)$$

利用此式，如已知衆數及中位數之數值，或衆數及算術平均數之數值，亦可求算術平均數或中位數。但算術平均數與中位數有較精確之方法可以求出，故此式僅可用於求衆數，且非至不得已時不宜輕用，因次數分配偏度稍高，則上述算術平均數，中位數及衆數三者之關係卽不存在，由此式求出之衆數不免謬誤也。

上述諸法（除皮爾生之經驗的法則外）均假定次數分配中，有一次數最多之組，一望而知爲衆數所在組。然若次數分配爲不規則的，則衆數所在組頗不易決定，遇有此種情形，應用併組法(Grouping method)決定之，其法如下：

表十七

m	f					
5	48	100		156		
6	52		108		168	
7	56	116				178
8	60		122	182		
9	62	122			180	
10	60		118			174
11	58	114		177		
12	56		119		179	
13	63	123				171
14	60		108	148		
15	48	88			120	
16	40		72			
17	32					

上表次數分配極不規則，次數最多之一組爲第九組，（卽中點13之一組）然若一計該組隣近上下兩組之次數，則以13爲衆數似又不及以9爲衆數，因9一組內之次數僅較13一組之次數少一，而合計隣近上下兩組之次數則較13一組隣近上下兩組之次數爲多。吾人如欲知衆數究在何組，應將組距加大，或較原來之組距加大一倍，或加大兩倍。表十七所示第一步係從第一組起每兩組次數相加，卽組距加大一倍；第二步係從第二組起每兩組次數相加，組距仍係加大一倍；第三步係從第一組起每三組次數相加

，即組距加大兩倍；第四步係從第二組起每三組次數相加，組距亦係加大兩倍；第五步，係從第三組起每三組次數相加，組距仍係加大兩倍。如此繼續之，由第一步併組之結果，知衆數在13—14—組；由第二步併組之結果，知衆數在8—9—組；由第三步併組之結果，知衆數在8—10—組；由第四步併組之結果，知衆數在9—11—組；由第五步併組之結果，知衆數在7—9—組。各步併組之結果除第一步外，最多次數常在第五組及其鄰近之上下一二組內，故知衆數之數值，實近於9也。惟吾人遇不規則的次數分配時，有當注意者，即此分配是否因包含性質不同之材料而有一個以上之衆數，如其有之，應分為數分配，然後各求其衆數，否則不獨應用併組法後仍無明顯之衆數可尋，且次數分配亦將失其效用矣。

第五節　幾何平均數

算術平均數，中位數及衆數三者為平均數量之方法，有時吾人欲求比(Ratio)或率(Rates)之平均數，則非用幾何平均數與倒數平均數不可。幾何平均數者，乃n個比或率相乘後開n次方所得之方根也。計算幾何平均數之公式亦分簡單的與加權的兩種：

1. 簡單幾何平均公式：

$$Mg = \sqrt[n]{r_1 \times r_2 \times r_3 \times \cdots\cdots \times rn}$$

式中：Mg為幾何平均數之符號

r為各個比或率

n為比或率之次數

2.加權幾何平均公式：

$$Mg = \sqrt[n]{r_1^{W_1} \times r_2^{W_2} \times r_3^{W_2} \times \cdots\cdots r_n^{wn}}$$

式中：Mg為幾何平均數之符號

r為各個比或率

w為r之次數或權數。

n-爲比或率之次數總數或權數之和

但實際上幾何平均數之計算須利用對數，(Logarithm)上列二式可化爲：

1. 簡單幾何平均公式：

$$\log Mg=\frac{\log r_1+\log r_2+\log r_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\log rn}{n}$$

2. 加權幾何平均公式：

$$\log Mg=\frac{W_1\log r_1+W_2\log r_2+W_3\log_3+\ldots\ldots+Wn\log rn}{n}$$

蓋按對數之法則，各項比或率之幾何平均數之對數，等於各項比或率對數之算術平均數。在加權公式中各項比或率之權數爲各該比或率之指數(Exponents)，利用對數法，則此項權數變爲各該比或率之係數(Coefficients)或乘數(multiplicrs)。惟利用對數計算之結果爲幾何平均數之對數，吾人須由對數表中求得其眞數(natural number)，方爲幾何平均數。故利用對數計算幾何平均數，含有兩步手續，一爲由眞數求對數，一爲由對數求眞數，學者於此兩步手續如能了然，則計算幾何平均數毫無困難矣。茲舉例如次：

1.簡單幾何平均數

表十八

五項物品價格漲落比率表

（假定以某年之物價作爲100）

	r	logr
甲	120	2.07918
乙	125	2.09691
丙	140	2.14613
丁	186	2.26951
戊	201	2.30320

$$5\,\overline{)\,10.89493\,} = \Sigma\log r$$

2.17899

log Mg=2.17899

Mg=151.0

2. 加權幾何平均數

五項物品價格漲落比率表

（假定以某年之物價作爲100）

	r	權數 (w)	logr	wlogr
甲	120	1	2.07918	2.07918
乙	125	2	2.09691	4.19382
丙	140	3	2.14613	6.43839
丁	186	3	2.26951	6.80853
戊	201	1	2.30320	2.30320

$\Sigma w=10$　　$10\,\overline{)\,21.82312\,} = \Sigma(w\log r)$

2.18231

log Mg=2.18231

Mg=152.2

幾何平均數在經濟統計中常用以計算物價指數。例如有甲乙二物，甲物之價由100%跌至10%，乙物之價由100% 漲至 1000 %，若用算術平均數計算，則平均爲505%$\left(\frac{1,000+10}{2}=505\right)$；若用幾何平均數計算，則平均仍爲100%（$\sqrt[2]{1000\times10}=100$）。就此例而論，自以幾何平均數之結果爲正確，因一跌十倍，一漲十倍，漲落相銷，

結果應仍爲100%也。

此外任何事物依複利律增減者，如欲求其平均增減之速率，亦當用幾何平均數。複利率之公式爲$P_n = P_0(1+r)^n$，茲舉數例說明其應用於下：

例一：求複利率　例如有本金千元，按複利計息，十二年後，本利共得一千六百元。按算術平均數求利率爲5%，然此決非眞相，其眞正利率應爲4%，算法如下：

$$P_n = P_0 (1+r)^n$$

式中：P_0 爲最初之本金

P_n 爲n年或期後之本金

r 爲利率

n 爲時期

$$\frac{Pn}{Po} = (1+r)^n$$

$$\log Pn - \log Po = n \log(1+r)$$

$$\log 1600 - \log 1000 = 12 \log(1+r)$$

$$3.20412 - 3.00000 = 12 \log(1+r)$$

$$\frac{.20412}{12} = \log(1+r)$$

$$.01701 = \log(1+r)$$

$$1.04 = 1+r$$

$$r = .04 \text{即} 4\%$$

例二：求人口增加率　人口之增加，大概亦依複利律，故欲知兩調查年度間人口增加之速率，亦須用幾何平均數。例如某城1920年之人口爲70,000，1930年之人口爲100,000，則平均每年增加之速率爲百分之三·六。算法如下：

$$\log 100{,}000-\log 70{,}000=10\ \log(1+r)$$

$$5.00000-4.85410=10\ \log(1+r)$$

$$\frac{0.15490}{10}=\log(1+r)$$

$$0.01549=\log(1+r)$$

$$1.036=1+r$$

$$r=.036\text{即}3.6\%$$

例三；求能力增進率　能力之增進，亦依複利律，故教育測驗上計算此項增進率時，亦用幾何平均數。例如一組學生某種技能學習三月之後，已進步百分之九十，則每月平均之增進率應爲百分之二三．九。算法如下：

$$\log 190-\log 100=3\log(1+r)$$

$$2.27875-2.00000=3\log(1+r)$$

$$\frac{27875}{3}=\log(1+r)$$

$$.09292=\log(1+r)$$

$$1{,}239=1+r$$

$$r=.239\text{即}23.9\%$$

第六節　倒數平均數

倒數平均數乃各個比或率倒數之算術平均數之倒數。凡求每小時速率之平均，非用此種平均數不可。計算倒數平均數之公式，亦分簡單的與加權的兩種；

1. 簡單倒數平均公式：

$$H=\cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\ \frac{1}{r_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{r_n}}{n}}$$

式中；H爲倒數平均數之符號

r 爲所欲平均之各項比或率。

N 爲次數總數

2. 加權倒數平均公式

$$H=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{W_1}{r_1}+\dfrac{W_2}{r_2}+\dfrac{W_3}{r_3}+\cdots\cdots+\dfrac{W_n}{r_n}}{N}}$$

式中；H 爲倒數平均數之符號

R 爲所欲平均之各項比或率

W爲各項次數或權數

N爲次數總數或權數之和($\leqq W$)

惟倒數平均數之意義極其晦澀，故其應用之範圍不廣。茲舉二例說明簡單倒數平均數之應用，其加權公式之例從略。

例一：求每小時之平均速率。例如有學生二人，同受數測驗，甲一小時做對四題，乙一小時做對二題，若用算術平均計算，其平均速率爲每小時三題$\left(\frac{4+2}{2}=3\right)$。但此甲乙二生每小時之平均速率並非每小時三題，而爲二題又三分之二，蓋若爲三題，則每做一題，平均需二十分鐘，今甲生每做一題需十五分鐘，乙生每做一題需三十分鐘，平均爲二十二分鐘又二分之一$\left(\frac{15+30}{2}=22.5\right)$，以之除每小時之分數應爲$2\frac{2}{3}$也。凡遇此種問題，應求其倒數平均數。

$$H=\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\frac{2+1}{4}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{8}}$$

$$=\frac{8}{3}$$

$=2\frac{2}{3}$ 每小時平均算計之題數

例二：求平均物價，在經濟統計中求平均物價而物品之價格係以每元若干個表示者，亦須用倒數平均數。例如有甲，乙，丙三種物品，甲價每元四個，乙價每元五個，丙價每元二十個，若用算術平均數計算，則每元平均可買9 $\frac{2}{3}$個 $\left(\frac{4+5+20}{3}=9\frac{2}{3}\right)$ 每個平均價為 10.34分。但依原價而論，甲每個價25分，乙每個價20分，丙每個價五分，其算術平均數為$16\frac{2}{3}$分，平均每價僅能買六個。遇有此種情形，吾人亦須求其倒平均數，算法如下：

$$H=\frac{1}{\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}{3}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\frac{5+4+1}{20}}{3}}$$

$$=\frac{1}{\frac{10}{60}}$$

$$=\frac{60}{10}$$

$= 6$ 每元平均可買之個數

倒數平均數之計算，可利用倒數表(Table of Reciprocals)，然如祇二三項，可逕用$H=\frac{2ab}{a+b}$或$H=\frac{3abc}{ab+ac+bc}$之公式計算，式中a,b,c,即爲所欲平均之各項比或率。二式均由簡單倒數平均公式蛻化而來，故其結果與逐步計算而得者，初無二致。

第七節　各種平均數之優劣及關係

平均數計有五種，其計算方法已如上述，茲請論其優劣及關係如下：

甲，各種平均數之優劣：

一，算術平均數之計算，一切變數鉅細靡遺，但其結果常受極端數量（尤其是大的數量）之影響，中位數與衆數則不受兩極端（極大或極小）數量之影響。然中位數猶與衆數有別；蓋中位數之地位爲全體變數依次排列後居中之一項或一點，若兩端增減幾項，中位數必隨之移動，而於衆數則毫無影響。幾何平均數受極端數量之影響亦少，故亦較算術平均數爲穩定、倒數平均數與算術平均數相反，常受小的極端數量（大數量之倒數）之影響，故算術平均數之結果常偏高，倒數平均數之結果常偏低。

二，如所研究之材料次數無多，且極散漫，并無集中之傾向，則衆數爲不適用。例如一城人民之財富均不相同，獨有三人有同等之財產爲一萬元，若遽視爲此城之平均財富，殊有未妥。故就此點言，衆數不及中位數，算術平均數將一切數量悉算在內，尤無此弊。

三，算術平均數，幾何平均數，倒數平均數三者均由計算而得，故可用代數方法處理之，而中位數與衆數則不能。

四，五種平均數中，就決定之難易言，以中位數爲最簡便，衆數之近似的結果雖亦易求，但眞確衆數則不易決定。算術平均數非計算不可，手續似較繁。但從他方面論，中位數與衆數之決定，須先將一切變數依次排列或繪成次數曲

線，而算術平均數則無須此種手續。倒數平均數之計算亦繁。至於幾何平均數則非利用對數不可。

五，吾人所研究之材料若兩極端變數之數量不甚清楚，則以用中位數或衆數爲善。蓋衆數對於兩極端數量之次數完全不管，中位數則知其次數已足，變數之大小可以不問，非若計算算術平均數，幾何平均數，倒數平均數須詳知各項數量之大小也。

六，統計材料之不能量度者，如心理狀態之類，以用中位數求其平均爲適宜，算術平均數則不適用矣。

七，就普通人了解之難易言，則以算術平均數最爲簡單淺顯，倒數平均數之意義最爲晦澀，故統計分析上除非不得已時甚少用之也。幾何平均數對於等比之變化各與以同等之地位，故計算事物平均變動之比率時非用之不可。

乙，各種平均數之關係：

一，在完全對稱之次數分配中，算術平均數，中位數及衆數之數值相等。

二，在偏斜不甚之次數分配中，中位數之地位介於算術平均數與衆數之間。中位數與算術平均數間之距離約等於算術平均數與衆數間距離三分之一，此種關係可以下列公式表示之：

$$M-M0=3(M-Md)$$

或

$$M0=M-3(M-Md)$$

三，任何數量之算術平均數必大於其幾何平均數，幾何平均數又必大於倒數平均數，但有一例外，即各數量一一相等時，算術平均數，幾何平均數及倒數平均數亦皆相等。

四，任何二數（祗限二數）之幾何平均數等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。例如2與8兩數之倒數平均數爲$3\frac{1}{5}$，算術平均數爲5，幾何平均數爲

4，4卽 $3\frac{1}{5}$與5之幾何平均數也。玆以代數式證明此關係如下：

設：

$$M = \frac{a+b}{2}$$

$$H = \frac{2ab}{a \times b}$$

$$Mg = \sqrt{ab}$$

則：

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{ab}$$

五，次數分配之離中趨勢如依算術定律支配者，衆數與中位數往往與算術平均數相近。如依幾何定律支配，則衆數與中位數常與幾何平均數相近。

參考書

Kiog, W. I. : Elements of Statistical Method, chap. XII.

Secrist, Horace:an Introduction to Statistical Method, Chap. VII.

Bowley A, L. : Elements of Statistics, Vol. I. chap. V.

Mills, F.C. : Statistical Methods, Chap. V.

金國寶著統計新論淺說上

趙文銳譯統計學原理第一及第二章

王仲武著統計學原理及應用第十一章

芮寶公編物價指數論.190—195頁(見中國經濟學社出版經濟學季刊第一卷第一期

10.954

10.954