Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 29

Glatte projektive Kurve und ihr Geschlecht

Definition 29.1. Zu einer glatten projektiven Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K nennt man

$$g := \dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C)\right)$$

das *Geschlecht* der Kurve.

Die Dimension von $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ ist nach Satz 27.7 endlich, das Geschlecht einer Kurve ist also eine natürliche Zahl.

Beispiel 29.2. Das Geschlecht der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X, Y])$$

ist nach Satz 27.4 gleich 0.

Definition 29.3. Eine glatte projektive Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Geschlecht 1 nennt man *elliptische Kurve*.

Bemerkung 29.4. Wählt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Grundkörper, so besitzt das Geschlecht einer glatten projektiven Kurve eine einfache topologische Interpretation. Eine solche Kurve kann man als eine kompakte eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit (Riemannsche Fläche) und als eine reell zweidimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit auffassen. Letztere lassen sich topologisch einfach klassifizieren, und zwar ist eine solche Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer Kugeloberfläche, an die g Henkel angeklebt werden. Diese Zahl nennt man das (topologische) *Geschlecht* der reellen Fläche und damit auch der Kurve. Man kann zeigen, dass das algebraisch über die erste Kohomologie der Strukturgarbe definierte Geschlecht mit diesem topologischen Geschlecht übereinstimmt. Die komplex-projektive Gerade ist eine zweidimensionale Sphäre und hat keinen Henkel, ihr topologisches Geschlecht ist also 0. Eine Fläche vom Geschlecht 1 ist ein Torus (ein Autoreifen) der homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. Projektive Kurven vom Geschlecht 1, also elliptische Kurven, haben diese topologische Gestalt.

Satz 29.5. *Es sei $C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K vom Grad d. Dann ist*

$$\dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C)\right) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz (vergleiche Aufgabe 13.23)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

von kohärenten Garben auf der projektiven Ebene. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_C$ der Kurve wird dabei als Garbe auf der projektiven Ebene aufgefasst, ihr Träger ist C. Wir betrachten den folgenden Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz

$$H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}\right) = 0 \longrightarrow H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C\right) \longrightarrow$$
$$H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d)\right) \longrightarrow H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}\right) = 0,$$

wobei die Gleichung links und rechts auf Satz 27.4 beruht. Der Raum

$$H^2\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-d)\right)$$

besitzt, ebenfalls wegen Satz 27.4, eine Basis, die aus sämtlichen Monomen $x^i y^j z^k$ besteht, deren Exponenten alle negativ sind und die Bedingung $i + j + k = -d$ erfüllen. Somit geht es um die Anzahl der Tupel (α, β, γ) vom Grad $d - 3$. Nach Aufgabe 11.4 ist diese Anzahl gleich $\binom{d-3+2}{2} = \binom{d-1}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Nach Satz 27.6 ist

$$H^1\left(\mathbb{P}^2_K, \mathcal{O}_C\right) = H^1(C, \mathcal{O}_C),$$

was die Behauptung ergibt. □

Im glatten Fall liefert der vorstehende Satz eine Formel zur Berechnung des Geschlechts von ebenen Kurven. Es ist

	d	1	2	3	4	5
	g	0	0	1	3	6

Für $d = 1$ liegt eine projektive Gerade mit Geschlecht 0 vor, für $d = 2$ eine ebene projektive Quadrik (ein Kegelschnitt), die ebenfalls Geschlecht 0 besitzt und in der Tat isomorph zur projektiven Gerade ist. Für $d = 3$ ist das Geschlecht 1, es handelt sich also um eine elliptische Kurve. Man kann zeigen, dass sich jede elliptische Kurve als eine ebene kubische Kurve realisieren lässt. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass es glatte projektive Kurven zu jedem Geschlecht gibt. Aufgrund von Satz 29.5 lassen sich nicht alle als ebene Kurve realisieren.

Bemerkung 29.6. Das kohomologisch definierte Geschlecht einer glatten projektiven Kurve über K stimmt mit der Vektorraumdimension der kanonischen Garbe überein. Die kanonische Garbe ist im eindimensionalen Fall einfach die Garbe der Kähler-Differentiale $\Omega_{C|K}$, also die Kotangentialgarbe, also die duale Garbe zur Tangentialgarbe. Es gilt also

$$\dim_K \left(H^1(C, \mathcal{O}_C)\right) = \dim_K \left(\Gamma(C, \omega_C)\right).$$

Im ebenen Fall ergibt sich dies direkt: Wegen Satz 29.5 ist das Geschlecht gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Aufgrund von Korollar 19.12 ist $\omega_C \cong \mathcal{O}_C(d-3)$ und nach Aufgabe 27.10 ist die Dimension von $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(d-3))$ ebenfalls gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Im allgemeinen Fall gilt die *Serre-Dualität*, die unter Anderem besagt, dass für eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ auf einer glatten projektiven Kurve C die Kohomologiegruppe $H^1(C, \omega_C)$ ein eindimensionaler Vektorraum über K ist und dass die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_C) \times H^1(C, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(C, \omega_C) \cong K$$

eine vollständige Dualität liefert. D.h. die Vektorräume $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_C)$ und $H^1(C, \mathcal{F})$ sind dual zueinander und haben insbesondere die gleiche Dimension. Für die Strukturgarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C$ ergibt sich wegen $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_C, \omega_C) = \Gamma(C, \omega_C)$ (nach Satz 13.10) die Dualität zwischen $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ und $\Gamma(C, \omega_C)$.

Divisoren auf Kurven

Auf einer glatten projektiven Kurve C ist wie auf jedem eindimensionalen normalen Schema ein Weildivisor einfach eine formale Summe $\sum_{P \in C} n_P \cdot P$ über die abgeschlossenen Punkte P, die ja in diesem Fall die Primdivisoren, also die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen der Kodimension 1 sind. Dabei ist $n_P \in \mathbb{Z}$ und diese Zahlen sind bis auf endlich viele Ausnahmen gleich 0. Nach Korollar 22.11 stimmt die Divisorenklassengruppe mit der Picardgruppe überein. Wir besprechen, wie sich Divisoren auf Kurven unter Morphismen verhalten. Ein Morphismus zwischen irreduziblen Kurven ist entweder konstant oder aber er hat schon ein dichtes Bild. Zu einem nichtkonstanten Morphismus $\varphi\colon C_1 \to C_2$ zwischen irreduziblen Kurven liegt eine Erweiterung der Funktionenkörper $Q(C_2) \subseteq Q(C_1)$ vor.

Zunächst überlegen wir uns, dass ein Element im Funktionenkörper einer glatten Kurve als ein Morphismus in die projektive Gerade aufgefasst werden kann. Generell kann man zu einem nichtkonstanten Element q des Funktionenkörpers eines normalen Schemas X den Hauptdivisor $\operatorname{div}(q)$ in den Nullstellendivisor und den (mit positiven Koeffizienten genommenen) Polstellendivisor zu q zerlegen, die zueinander linear äquivalent sind. Beide sind dann effektive Divisoren und entsprechen (im lokal faktoriellen Fall nach Aufgabe 22.13) Schnitten in der zugehörigen invertierbaren Garbe $\mathcal{O}_X(\text{Nullstellendivisor}(q))$. Die Resultate der letzten Vorlesung besagen, dass diese beiden Schnitte einen auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ definierten Morphismus in die projektive Gerade festlegen. Die folgende Aussage geht für glatte Kurven über diese Aussagen hinaus, da zusätzlich gezeigt wird, dass der Definitionsbereich die gesamte Kurve ist.

Lemma 29.7. *Es sei C eine glatte irreduzible Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei Q der Funktionenkörper von C. Dann definiert jede rationale Funktion $q \in Q$ in natürlicher Weise einen Morphismus*

$$q\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

in die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$.

Beweis. Es sei

$$U := \{P \in C \mid q \in \mathcal{O}_{C,P}\}$$

der Definitionsbereich (als Funktion in die affine Gerade) von q und (bei $q \neq 0$)

$$V := \left\{P \in C \mid q^{-1} \in \mathcal{O}_{C,P}\right\}$$

der Definitionsbereich von q^{-1}. Es gilt $C = U \cup V$, da die $\mathcal{O}_{C,P}$ diskrete Bewertungsringe sind und dort $q = \pi^n u$ mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}_{C,P}$, einem lokalen Parameter $\pi \in \mathcal{O}_{C,P}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Nach Korollar 10.12 gibt es einen Morphismus

$$q\colon U \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec}\left(K[\frac{Y}{X}]\right) \cong D_+(X) \subseteq \mathbb{P}^1_K$$

und einen Morphismus

$$q^{-1}\colon V \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec}\left(K[\frac{X}{Y}]\right) \cong D_+(Y) \subseteq \mathbb{P}^1_K,$$

die den Einsetzungshomomorphismen $\frac{Y}{X} \mapsto q$ bzw. $\frac{X}{Y} \mapsto q^{-1}$ entsprechen. Auf dem Durchschnitt $U \cap V$ stimmen beide Morphismen überein, daher definieren sie insgesamt einem Morphismus in die projektive Gerade. $\square$

Definition 29.8. Zu einem injektiven Ringhomomorphismus $R \subseteq S$ zwischen diskreten Bewertungsringen nennt man die Ordnung einer Ortsuniformisierenden von R in S die *Verzweigungsordnung* der Erweiterung.

Wir bezeichnen die Verzweigungsordnung mit $\operatorname{Verz}(S|R)$. Bei einem nichtkonstanten Morphismus $\varphi\colon C_1 \to C_2$ zwischen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper liegt zu jedem abgeschlossenen Punkt $Q \in C_1$ mit Bildpunkt $\varphi(Q) \in C_2$ eine Erweiterung der diskreten Bewertungsringe $\mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)} \subseteq \mathcal{O}_{C_1,Q}$ vor. Die zugehörige Verzweigungsordnung nennt man auch die Verzweigungsordnung von φ in Q und bezeichnet sie mit $\operatorname{Verz}(Q|\varphi(Q))$.

Definition 29.9. Zu einem nichtkonstanten Morphismus

$$\varphi\colon\, C_1 \longrightarrow C_2$$

zwischen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und einem Weildivisor $D = \sum_P a_P \cdot P$ auf C_2 nennt man

$$\varphi^* D \,:=\, \sum_{Q \in C_1} \operatorname{Verz}(Q|\varphi(Q)) a_{\varphi(Q)} \cdot Q$$

den *zurückgezogenen Weildivisor*

Zu einem einzelnen Punkt $P \in C_2$ ist der zurückgezogene Divisor gleich $\sum_{Q \in \varphi^{-1}(P)} \operatorname{Verz}(Q|P) \cdot Q$. Dies ist also im Wesentlichen die Faser über P, wobei allerdings die *Verzweigungspunkte*, also Punkte, wo die Verzweigungsordnung ≥ 2 ist, mehrfach gezählt werden.

Lemma 29.10. *Zu einem nichtkonstanten Morphismus*

$$\varphi\colon\, C_1 \longrightarrow C_2$$

zwischen irreduziblen glatten Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und einem Hauptdivisor $D = \sum_P a_P \cdot P = \operatorname{div}(q)$ *auf* C_2 *mit* $q \in Q(C_2)$, $q \neq 0$, *stimmt der zurückgezogene Divisor* $\varphi^*(D)$ *mit dem Hauptdivisor zu* $q \in Q(C_1)$ *auf* C_1 *überein.*

Beweis. Wegen der Nichtkonstanz gehört zu φ eine Körpererweiterung

$$Q(C_2) \,\subseteq\, Q(C_1)$$

und zu jedem Punkt $Q \in C_1$ liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_1,Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(C_2) & \longrightarrow & Q(C_1) \end{array}$$

von injektiven Ringhomomorphismen vor, wobei in der ersten Zeile diskrete Berwertungsringe stehen. Wenn

$$q \,=\, u\pi_2^n$$

mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)}$ und einer Ortsuniformisierenden $\pi_2 \in \mathcal{O}_{C_2,\varphi(Q)}$ gilt, so ist

$$q \,=\, u\pi_2^n \,=\, u\Big(u'\pi_1^{\operatorname{Verz}(\varphi(Q)|Q)}\Big)^n \,=\, uu'\pi_1^{n \operatorname{Verz}(\varphi(Q)|Q)}$$

mit einer Orstuniformisierenden π_1 von $\mathcal{O}_{C_1,Q}$, woraus die Aussage folgt. $\square$

Korollar 29.11. *Es sei* C *eine glatte irreduzible Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* K *und sei* Q *der Funktionenkörper von* C. *Es sei* $q \in Q$, $q \notin K$, *und*

$$q\colon\, C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der nach Lemma 29.7 zugehörige Morphismus zu einem Element $q \in Q$. *Dann gilt für den zurückgezogenen Divisor*

$$q^*((0) - (\infty)) \,=\, \operatorname{div}(q).$$

Beweis. Der Funktionenkörper der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1_K \,=\, \operatorname{Proj}(K[X,Y])$$

ist $K(t)$ mit $t = \frac{Y}{X}$. Die Erweiterung der Funktionenkörper ist durch

$$K(t) \longrightarrow Q(C),\ t \longmapsto q,$$

gegeben. Der Hauptdivisor zu t ist $(0) - (\infty) = (Y) - (X)$. Daher folgt die Aussage aus Lemma 29.10. $\square$

Der Grad eines Divisors

Definition 29.12. Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu einem Weildivisor $D = \sum_{P \in C} n_P P$ auf C ist der *Grad* als

$$\deg(D) \,:=\, \sum_{P \in C} n_P$$

definiert.

Ohne Beweis teilen wir den folgenden Satz mit.

Satz 29.13. *Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist der Grad eines Hauptdivisors gleich 0.*

Daher faktorisiert der Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Div}(C) \longrightarrow \mathbb{Z},\ D \longmapsto \deg(D),$$

durch die Divisorenklassengruppe von C. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 29.14. Es sei C eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf C definiert man den *Grad* durch den Grad eines zugehörigen Weildivisors.

Dabei ist zugehörig so zu verstehen, dass dem Divisor D die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_C(D)$ entspricht, dass also effektive Divisoren den Schnitten in der Garbe entsprechen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Torus illustration.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 1

Quelle = Double torus illustration.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 1

Quelle = Sphere with three handles.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 1

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7