Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 4

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 4.1. Zeige, dass in Beispiel 4.12 das Distributivgesetz nicht gilt, wenn man die Rollen von Addition und Multiplikation vertauscht.

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.2. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit dem Betrag der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \, (a,b) \longmapsto |a-b| \, .$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 4.3. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 4.4. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 4.5.*

Wir betrachten auf der Menge

$$M = \{a,b,c,d\}$$

die durch die Tabelle

$\star$	a	b	c	d
a	b	a	c	a
b	d	a	b	b
c	a	b	c	c
d	b	d	d	d

gegebene Verknüpfung $\star$.

(1) Berechne
$$b \star (a \star (d \star a)) .$$
(2) Besitzt die Verknüpfung $\star$ ein neutrales Element?

Aufgabe 4.6.*

Es sei M eine k-elementige Menge. Wie viele Verknüpfungen gibt es auf M?

Aufgabe 4.7.*

Wir betrachten den Binomialkoeffizienten als eine Verknüpfung
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (n,k) \longmapsto \binom{n}{k},$$
wobei bei $k > n$ der Binomialkoeffizient als 0 zu interpretieren ist. Diese Verknüpfung ist offenbar nicht kommutativ.

(1) Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element von links?
(2) Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element von rechts?
(3) Bestimme $\binom{\binom{3}{2}}{1}$ und $\binom{3}{\binom{2}{1}}$.
(4) Ist diese Verknüpfung assoziativ?

Aufgabe 4.8.*

Es sei M eine Menge. Wir betrachten die Verknüpfung
$$\mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ (A,B) \longmapsto A \setminus B.$$
Ist diese Verknüpfung assoziativ?

Aufgabe 4.9.*

Es sei G eine zweielementige Menge. Erstelle eine Verknüpfungstabelle für die Verknüpfung „Vereinigung“ auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$.

Aufgabe 4.10.*

Es sei $S = \{0,1\}$. Betrachte das Monoid M, dass aus allen Abbildungen von S nach S besteht mit der Hintereinanderschaltung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung.

(1) Beschreibe die Elemente in M und erstelle eine Verknüpfungstabelle für M.
(2) Bestimme sämtliche Untermonoide von M und entscheide jeweils, ob sie kommutativ sind und ob es sich um Gruppen handelt.

Aufgabe 4.11. Es sei M ein Monoid, $a, b \in M$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige die folgenden *Potenzgesetze*.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$
(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$
(3) Wenn M kommutativ ist, so ist
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.12. Es sei $(M, \circ, e)$ ein Monoid und $x, y, a \in M$.

a) Folgt aus $x = y$ die Beziehung $a \circ x = a \circ y$?

b) Folgt aus $a \circ x = a \circ y$ die Beziehung $x = y$?

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Monoide. Eine Abbildung
$$\psi\colon G \longrightarrow H$$
heißt *Monoidhomomorphismus*, wenn $\psi(e_G) = e_H$ und die Gleichheit
$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$
für alle $g, g' \in G$ gilt.

Aufgabe 4.13. Es sei $(M, \cdot, 1)$ ein Monoid und $N = \operatorname{Abb}(M, M)$ das Monoid der Abbildungen von M nach M. Zeige, dass durch
$$M \longrightarrow \operatorname{Abb}(M, M),\ x \longmapsto \lambda_x,$$
mit $\lambda_x(y) := x \cdot y$ ein injektiver Monoidhomomorphismus gegeben ist.

Aufgabe 4.14.*

Es seien $(M, *)$ und $(N, \circ)$ Mengen mit Verknüpfungen und es sei
$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$
eine mit den Verknüpfungen verträgliche surjektive Abbildung, es gelte also
$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y).$$
Die Verknüpfung auf M sei assoziativ. Zeige, dass auch die Verknüpfung auf N assoziativ ist.

Aufgabe 4.15. Es seien $a, b \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne
$$(a + b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b)\,.$$

Aufgabe 4.16. Es seien $a, b, c, d \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(ab + 2d) \cdot (a^2 + 4bc) \cdot (3bd + ac)\,.$$

Aufgabe 4.17. Es seien $a, b, c \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(a + b + c)^2\,.$$

Aufgabe 4.18. Berechne

$$(2 + 4 + 3) \cdot (4 + 5 + 1 + 2)$$

mit und ohne Distributivgesetz.

Aufgabe 4.19. Sei R ein kommutativer Halbring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j f^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}\,.$$

Bei einer Summe oder einem Produkt von mehreren Zahlen (oder Elementen eines kommutativen Halbringes) ist es nicht immer sinnvoll, eine feste Reihenfolge der Indexmenge zu haben. Häufig ist es besser, die Reihenfolge zu wechseln und oft gibt es gar keine natürliche Reihenfolge. Man muss sich zuerst klar machen, dass die Summe nicht von der Reihenfolge abhängt. Die Argumente sind ähnlich wie im Beweis zu Lemma 1.2.

Aufgabe 4.20. Es sei R ein kommutativer Halbring, I eine endliche Menge und seien a_i, $i \in I$, Elemente aus R. Man definiert die Summe $\sum_{i \in I} a_i$, indem man eine Nummerierung (eine Bijektion)

$$\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow I$$

fixiert und

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$$

setzt.

(1) Zeige, dass diese Summe unabhängig von der gewählten Nummerierung ist.
(2) Zeige

$$\sum_{i \in I} a_i = \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i \right) + a_j$$

für ein beliebiges $j \in I$.
(3) Es sei

$$I = I_1 \cup I_2$$

eine disjunkte Vereinigung. Zeige

$$\sum_{i \in I} a_i = \left(\sum_{i \in I_1} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I_2} a_i \right).$$

(4) Formuliere die entsprechenden Gesetze für das Produkt $\prod_{i \in I} a_i$.

Aufgabe 4.21.*

Beweise die folgende Form des allgemeinen Distributivgesetzes für einen kommutativen Halbring R durch Induktion über k, wobei der Fall $k = 2$ verwendet werden darf (dabei sind $n_1, \ldots, n_k$ natürliche Zahlen und $a_{j,i} \in R$).

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} a_{1,i_1} \right) \cdot \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} a_{2,i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^{n_k} a_{k,i_k} \right)$$
$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n_1\} \times \{1, \ldots, n_2\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n_k\}} a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{k,i_k}.$$

Aufgabe 4.22. Es sei R ein kommutativer Halbring. Zeige, dass

$$0 \cdot (1 + 1 + \cdots + 1) = 0$$

ist (mit einer beliebig langen Summe von Einsen).

Aufgabe 4.23. Es sei R ein kommutativer Halbring, $a, b \in R$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die folgenden *Potenzgesetze* gelten.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.24. Zeige, dass $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Halbring ist. Gilt in diesem Halbring die Eigenschaft, dass aus $xy = 0$ folgt, dass x oder y gleich 0 ist?

Für die folgenden Aufgaben ist die allgemeine binomische Formel hilfreich.

Aufgabe 4.25.*

Beweise durch Induktion, dass für
$$n \geq 10$$
die Abschätzung
$$3^n \geq n^4$$
gilt.

Aufgabe 4.26.*

Zeige, dass für $n \geq 3$ die Abschätzung
$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$
gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.27. (4 (2+2) Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

(1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
(2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

Aufgabe 4.28. (4 Punkte)

Es sei $S = \{1, 2, 3\}$. Schreibe ein Computerprogramm, dass die Menge M aller Abbildungen von S nach S auflistet und eine Verknüpfungstabelle für M ausgibt.

Aufgabe 4.29. (3 Punkte)

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den beiden Verknüpfungen Addition und Potenzierung und den ausgezeichneten Elementen 0 und 1. Welche Eigenschaften eines kommutativen Halbringes erfüllt diese Struktur, welche nicht?

Aufgabe 4.30. (2 Punkte)

Es seien $a, b, c \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(2ac + b^2) \cdot (a + 5bc) \cdot (2a + 3bc)\,.$$

Aufgabe 4.31. (4 (2+2) Punkte)

Es seien $a, b \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Zeige die Formel für die vierte Potenz,

$$(a+b)^4 \;=\; a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

auf die beiden folgenden Arten.

(1) Berechne
$$(a+b) \cdot (a+b)^3\,.$$

(2) Berechne
$$(a+b)^2 \cdot (a+b)^2\,.$$

Abbildungsverzeichnis