Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 47

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.1. Bringe die Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit der in Aufgabe 3.7 direkt eingeführten Gruppe in Verbindung.

Aufgabe 47.2.*

Zeige, dass es in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ Elemente gibt, deren Ordnung gleich n ist.

Aufgabe 47.3. Zeige, dass es keine Untergruppe $F \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$ derart gibt, dass

$$F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 47.4. Bestimme die Restklassengruppe zu $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}^\times$.

Aufgabe 47.5. Finde in der Permutationsgruppe S_3 einen Normalteiler $N \neq 0, S_3$ und bestimme die zugehörige Restklassengruppe.

Aufgabe 47.6. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 44.12) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow G,\, n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 47.8.

Aufgabe 47.7.*

Es sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit endlicher Ordnung. Zeige, dass die Ordnung von g mit dem minimalen $d \in \mathbb{N}_+$ übereinstimmt, zu dem es einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(d) \longrightarrow G$$

gibt, in dessen Bild das Element g liegt.

Aufgabe 47.8. Zeige mit Hilfe der Homomorphiesätze, dass zyklische Gruppen mit der gleichen Ordnung isomorph sind.

Aufgabe 47.9. Seien G, H und F Gruppen und seien $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon G \to F$ Gruppenhomomorphismen mit ψ surjektiv und mit $\ker \psi \subseteq \ker \varphi$. Bestimme den Kern des induzierten Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon F \longrightarrow H.$$

Aufgabe 47.10. Zeige, dass für jede reelle Zahl $a \neq 0$ die Restklassengruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}a$ untereinander isomorph sind.

Für die folgende Aufgabe muss man verwenden, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Faktorisierung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe 47.11. Sei p eine Primzahl. Definiere einen Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0),$$

der $p \mapsto 1$ und alle anderen Primzahlen auf 0 schickt.

Bestimme auch den Kern dieses Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 47.12. Es seien G_1 und G_2 Gruppen und seien $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ Normalteiler. Zeige, dass $N_1 \times N_2$ ein Normalteiler in $G_1 \times G_2$ ist und dass eine Isomorphie

$$(G_1 \times G_2/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

vorliegt.

Die folgende Aufgabe verwendet den topologischen Begriff der Dichtheit.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ mit

$$|t - x| < \epsilon$$

gibt.

Aufgabe 47.13. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 47.14.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 47.15. Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 44.3, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ein Ideal ist.

Aufgabe 47.16. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

Aufgabe 47.17.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 47.18.*

Es seien k und n ganze Zahlen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) k teilt n.
(2) Es ist $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$.
(3) Es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

(4) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

Aufgabe 47.19.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit modulo n genau dann ist, wenn a und n teilerfremd sind.

Aufgabe 47.20.*

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) $\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Körper.
(2) $\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Integritätsbereich.
(3) n ist eine Primzahl.

Aufgabe 47.21. Es sei C die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(1) Zeige, dass C mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.
(2) Zeige, dass die Teilmenge $N \subseteq C$, die aus allen Nullfolgen besteht, ein Ideal ist.
(3) Zeige, dass C/N ein Körper ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.22. (3 Punkte)

Es seien G und H Gruppen mit der Produktgruppe $G \times H$. Zeige, dass die Gruppe $G \times \{e_H\}$ ein Normalteiler in $G \times H$ ist, und dass die Restklassengruppe $(G \times H)/G \times \{e_H\}$ kanonisch isomorph zu H ist.

Aufgabe 47.23. (4 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen zwischen zwei zyklischen Gruppen. Welche sind injektiv und welche sind surjektiv?

Aufgabe 47.24. (2 Punkte)

Zeige, dass es eine Gruppe G und einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi \colon (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann rational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Aufgabe 47.25. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche Gruppen mit vier Elementen.