

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 34



Vorli mag alle Menschen und achtet nicht auf Äußerlichkeiten. Ihr besonderes Talent ist aber, ...

Eine wichtige Zielsetzung dieses Kurses ist es, die Analysis und insbesondere die Konzepte Approximation, Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf höherdimensionale Situationen zu verallgemeinern. Dazu brauchen wir zunächst einen sinnvollen Abstandsbegriff.

Euklidische Vektorräume

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum¹ vorliegen.

¹Auch für komplexe Vektorräume gibt es Skalarprodukte, was wir aber nicht behandeln werden.

DEFINITION 34.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

BEISPIEL 34.2. Auf dem \mathbb{R}^n ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) = ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} 3 \\ -5 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right) \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

DEFINITION 34.3. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum V ist jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf U einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

Norm und Abstand

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

DEFINITION 34.4. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von v .

Die Norm ist der Abstand (siehe weiter unten) zum Nullpunkt. Im \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt ist beispielsweise

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$$

Dass dies der „richtige“ Abstand zum Nullpunkt ist, beruht auf dem elementargeometrischen Satz von Pythagoras.

SATZ 34.5. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, nämlich

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Bei $w = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $\|w\| \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{\|w\|^4} \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\|w\|^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. \square

BEMERKUNG 34.6. Für zwei von 0 verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* (als bijektive Abbildung $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$) bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Der Winkel ist also eine reelle Zahl zwischen 0 und π . Die obige Gleichung kann man auch als

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle(v, w)),$$

was die Möglichkeit eröffnet, das Skalarprodukt in dieser Weise zu definieren. Allerdings muss man dann für den Winkel eine unabhängige Definition finden. Dieser Zugang ist etwas intuitiver, hat aber rechnerisch und beweistechnisch viele Nachteile.

LEMMA 34.7. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.

- (1) Es ist $\|v\| \geq 0$.
- (2) Es ist $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
- (3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) Für $v, w \in V$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle| \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 34.5 ist dies $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. \square

Die folgende Aussage heißt *Polarisationsformel*.

LEMMA 34.8. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 34.3. \square

DEFINITION 34.9. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zu zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

den *Abstand* zwischen v und w .

LEMMA 34.10. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind $u, v, w \in V$).

- (1) Es ist $d(v, w) \geq 0$.

(2) Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn

$$v = w.$$

(3) Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.

(4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 34.7. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

Orthogonalität

Mit dem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

DEFINITION 34.11. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Man nennt zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

DEFINITION 34.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U .

BEISPIEL 34.13. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}e_i$ zum Standardvektor e_i besteht das

orthogonale Komplement aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, deren i -ter Eintrag 0

ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}v$ zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Der Orthogonalraum

$$U = (\mathbb{R}v)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$

besitzt die Dimension $n - 1$, es handelt sich also um eine sogenannte Hyperebene. Man nennt dann v einen *Normalenvektor* für die Hyperebene U .

Zu einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, der durch eine Basis (oder ein Erzeugendensystem) $v_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, k$, gegeben ist, bestimmt man das orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die aus den v_i gebildete Matrix ist.

DEFINITION 34.14. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis v_1, \dots, v_n von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Im \mathbb{R}^n ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

SATZ 34.15. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und es sei v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis von V . Dann gibt es eine Orthonormalbasis u_1, u_2, \dots, u_n von V mit²*

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_i \rangle$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Die Aussage wird durch Induktion über i bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den

²Hier bezeichnet $\langle - \rangle$ den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

gleichen Unterraum aufspannen. Für $i = 1$ muss man lediglich v_1 normieren, also durch

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

ersetzen. Sei die Aussage für i schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren u_1, \dots, u_i mit $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf allen u_1, \dots, u_i und offenbar ist

$$\langle u_1, \dots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle.$$

Durch Normieren von w_{i+1} erhält man u_{i+1} . □

BEISPIEL 34.16. Es sei V der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z.$$

Als Unterraum des \mathbb{R}^3 trägt V ein Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von V bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\|v_1\| = \sqrt{5}$ und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem³ Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

³Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel 34.16.

Es ist

$$\|w_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

Der Gradient

DEFINITION 34.17. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf V .

LEMMA 34.18. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $w \in V$ mit

$$f(v) = \langle w, v \rangle.$$

Wenn u_1, \dots, u_n eine Orthonormalbasis von V und $f(u_i) = a_i$ ist, so ist dieser Vektor gleich $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Zusatz. Sei also eine Orthonormalbasis u_1, \dots, u_n gegeben und sei $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$. Dann ist für jedes j

$$\langle w, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, u_j \right\rangle = a_j = f(u_j).$$

D.h. die beiden linearen Abbildungen $v \mapsto \langle w, v \rangle$ und f stimmen auf einer Basis überein, sind also nach Satz 24.7 identisch. Für jeden anderen Vektor $w' = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ ist der Wert der zugehörigen Linearform an mindestens einem Basisvektor u_j von $f(u_j)$ verschieden, daher liegt Eindeutigkeit vor. \square

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Waeller27.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons,
Lizenz = CC-by-sa 4.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9