理學士　高木巖八閲

本多文次郎編

受驗者
參考用

數學綱要

軌跡及作圖題

理學士 高木巖八閲
本多文次郎編

受驗者參考用

數學綱要

軌跡及作圖題

はしがき

1. 官立各種高等學校受驗者ガ數學中特ニ困難トスルハ代數學ノ因數分解法，幾何學ノ軌跡及作圖題，三角法ノ恒等式及方程式ナルベシ．本講義ハ同程度ニ於ケル生徒ノ便利ヲ計リ以上三ケ條ニ關スル尤モ有益ナル若干ノ問題ヲ撰ビソガ解法ヲ示セルモノナリト雖モ紙數ニ限リアリ充分ニ多クノ問題ヲ採リ能ハザルハ大ニ遺憾トスル所ナリ

2. 學生諸氏斯書ニ依リ受驗參考ニ裨益スルアラバ編者ノ幸ヒ之ニ過キズ

3. 同程度ノ生徒ニシテ進ンデ斯學ヲ修メントスルノ諸士ニ對シテ予ハ次ノ書ヲスヽム

代數學………クリスタル氏代數學全二冊．

幾何學………三守理學士譯ペテルセン幾何學．

三角法………ケーシー氏大三角法或ハホブソン氏大角法．

明治三十八年二月

編者白ス

軌跡及作圖題

軌　跡

1. 一般ニ中等程度ノ生徒ハ軌跡ニ就テノ觀念充分ナラザルガ如シ, 依テ玆ニ菊池博士著初等幾何學教科書中ノ軌跡ノ定義及同博士著幾何學講義中ノ軌跡ノ定義ノ説明ヲ揭ゲテ其性質ヲ明ニセントス.

2. 定義. 某ノ要件アリ; 一ツノ線或ハ線ノ一部分, 或ハ線ノ一群(如何ナル一線ニテモ) ノ上ニ在ル各ノ點ハ何レモ皆此要件ニ適シ, 其他ニハ曾テ之ニ適スル點ナケレバ, 其線或ハ線ノ部分或ハ線ノ群ヲ其要件ニ適スル點ノ軌跡ト云フ.

3. 説明. 此所ノ要件トハ點ニ對シテ要求スル條件ナリ, 例ヘバ「一ツノ與ヘラレタル直線ヨリ一定ノ距離ニ在ルコ」トカ「二ツノ與ヘラレタル一點ヨリ等距離ニ在ルコ」トカ又ハ「一ツノ與ヘラレタル有限直線ガ其點ニ於テ一定ノ角ニ對スルコ」等ノ如シ. 斯ノ如キ一ツノ要件ニ適スル點即チ其要件ヲ滿足スル點ノ總テヲ軌跡ト云フ, 而シテ此等ノ點ニ無數アリ連續シテ線ヲ成スモノナリ. 故ニ此線ハ即チ軌跡ナリ.

此所ニ最モ注意ヲ要スルハ軌跡ハ一ノ要件ニ適スル點ノ總テヲ餘ス所ナク包括シタルモノナルコナリ, 定義中ニ「其他ニハ曾テ之ニ適スル點無ケレバ」ナル語ノ意ハ即チ是ナリ, 例ヘバ一ツノ與ヘラレタル直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡トハ其與ヘラレタル直線ノ兩側ニ在ルニツノ直線ニシテ, 其何レカ一ツノミヲ軌跡トハ云ハザルナリ.

又定義中ニ「一ツノ線或ハ線ノ一部分或ハ線ノ一群」ト云フハ種々ノ場合アルヲ以テナリ,尚其例ハ問題講義ノ條ニ於テ説明スベシ.

4. 以上説明シタル所ニ由レバ一ツノ線或ハ線ノ一部分,或ハ線ノ一群ガ或ル要件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ證明スルニハ,

第一. 其上ノ點ハ皆此要件ニ適スルコトヲ證明スルハ固ヨリ言ヲ待タズト雖モ唯是ノミニテハ充分ナラズ,

第二. 此要件ニ適スル點ハ皆其上ニ在ルコトヲ證明セザルベカラズ.

第一ハ之ヲ次ノ如ク陳ブルヲ得;

第三. 此要件ニ適セザル點ハ其上ニ在ラザルコト.

第一ト第三トハ同ジコトヲ二樣ニ述ベタルニ過ギズ,故ニ便宜ニ從ヒ第一,第三ノ中何レヲ證明スルモ可ナリ,又同樣ニ第二ハ之ヲ

第四. 其上ニ在ラザル點ハ此要件ニ適セザルコト

ト同一ニシテ便宜ニ從ヒ何レヲ證明スルモ可ナリ.

故ニ軌跡ノ證明ニハ二部分無カルベカラズ,一ハ第一或ハ第三ノ證明,他ハ第二或ハ第四ノ證明ナリ,初學者ハ往々其中唯一ツヲ以テ足レリト考フルコトアリ,大ニ注意スベキコトナリ.

5. 次ニ菊地博士著初等幾何學教科書中ニアル軌跡ノ命題ヲ掲グ.

1. 與ヘラレタル直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其直線ノ兩側ニ於テ之ニ平行ニシテ,之ヨリ與ヘラレタル距離ニ等シキ距離ニアル二ツノ直線ナリ.

2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

3. 相交ル二ツノ與ヘラレタル直線ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ二ツノ直線ノ爲ス角ヲ二等分スル一對ノ直線ナリ.

4. 相交ル二ツノ直線ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡.(但シ與ヘラレタル比ガ等比ナラバ3トナル)

5. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ハ二ツノ與ヘラレタル點ヲ結ビ付クル直線ヲ其比ニ内分及外分スル二點ヲ結ビ付クル直線ヲ直徑トシテ畫キタル圓周ナリ.(但シ與ヘラレタル比ガ等比ナラバ2トナル)

問題及講義

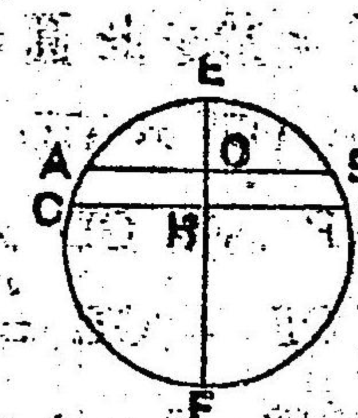
注意. 以下説ク處ノ講義ハイカニモ長タラシキ樣ナレモ出來得ル限リ嚴密ナラシメントト欲シタル結果ナルヲ以テ讀者ノ之ヲ諒セラレンコトヲ希望ス.

1. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ立ツ二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

2. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル總テノ圓周ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

二等邊三角形ノ頂點ハ恒ニ底邊ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニ在リ,又二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル總テノ圓周ノ中心ハ何レモ此二點ヨリ相等シキ距離ニ在リ,故ニ上ノ問題ハ結局二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ムルコトニ歸ス,即チ5節ノ命題2ニ歸着ス而シテ此命題ノ證明ハ一般幾何學書ニ在ルヲ信ズルヲ以テ其證明ヲ略ス.

3. 一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ之ニ垂直ナル直徑ナリ.



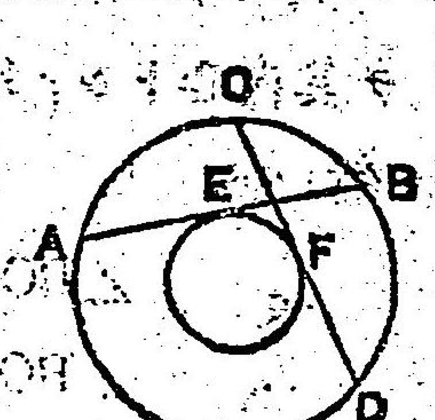
解法. AB, CD ヲ一ツノ圓 ABCD ノ二ツノ平行ナル弦, EF ヲ之ニ垂直ナル直徑, G, H ヲ EF ガ夫々 AB, CD ト交ル點トス.

然レバ H ハ CD ノ中點ナリ, 即チ弦 AB ニ平行ナル弦ノ中點ハ AB ニ垂直ナル直徑ノ上ニアリ.

次ニ AB ニ垂直ナル直線 EF 上ノ任意ノ點 H ヲ過リ, AB ニ平行ナル弦 CD ヲ引ク, EF ハ AB ニ垂直ナル直徑ナルヲ以テ, AB ニ平行ナル CD ニモ垂直ナリ, 故ニ H ハ弦 CD ノ中點ナリ. 即チ AB ニ垂直ナル直徑上ノ總テノ點ハ之ニ平行ナル弦ノ中點ナリ.

故ニ一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ之ニ垂直ナル直徑ナリ.

4. 一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ周心圓ナリ.



解法. AB, CD ヲ中心 O ナル與ヘラレタル圓ノ相等シキ弦, E, F ヲ夫々其中點トス.

OE, OF ヲ結ビ付クヨ; AB, CD ハ同ジ圓ノ相等シキ弦ニシテ E, F ハ夫々其中點ナルヲ以テ OE, OF ハ互ニ相等シク夫々 AB, CD ニ垂線ナリ. 故ニ F ハ O ヲ中心, OE ヲ半徑トスル圓周上ニ在リ, 而シテ此圓ハ E, F ニ於テ AB, CD ニ切ス.

即チ相等シキ弦ノ中點ハ與ヘラレタル圓ノ中心ヲ中心トシ, 中心ヨリ其一ツノ弦ニ引ケル垂線ヲ半徑トスル圓周上ニ在リ.

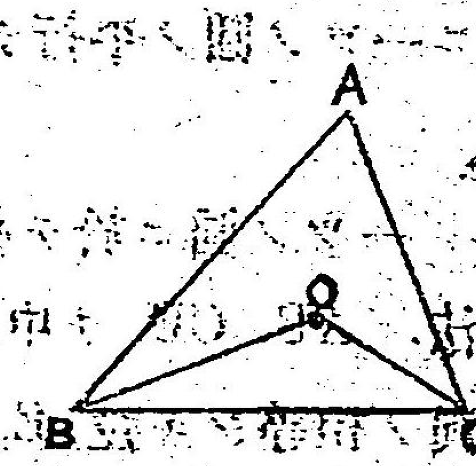
次ニ O ヲ中心, OE ヲ半徑トスル圓周上ニ任意ノ一點 F ヲ採リ, F ニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ外ノ圓ニ C, D ニ於テ終ラシム; 然レバ OF ハ CD ニ垂線ニシテ CD ハ外ノ圓ノ一ツノ弦ナリ. 故ニ F ハ弦 CD ノ中點ナリ.

又 OF ハ OE ニ等シ, 故ニ弦 CD ハ弦 AB ニ等シ,

即チ與ヘラレタル圓ノ中心ヲ中心トシ, 此中心ヨリ一ツノ弦ニ引ケル垂線ヲ半徑トシテ畫キタル圓周上ノ總テノ點ハ, 此弦ニ等シキ弦ノ中點ナリ.

故ニ一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ, 此圓ト同心ナル圓周ナリ.

5. 底邊及頂角ガ與ヘラレタル三角形ノ內心ノ軌跡ハ一ツノ圓弧ナリ.



解法. 三角形 ABC ニ於テ底邊 BC, 頂角 A ハ與ヘラレタルモノトス.

O ヲ其內心トシ, BO, CO ヲ結ビ付クヨ; 然レバ

$$\angle BOC+\angle OBC+\angle OCB=2\angle R.$$

$$\angle BOC=2\angle R-(\angle OBC+\angle OCB),$$

然ルニ BO, CO ハ夫々角 B, 角 C ノ二等線ナルヲ以テ

$$\angle OBC+\angle OCB=\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C).$$

$$\therefore\ \angle BOC=2\angle R-\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

$$=2\angle R-\tfrac{1}{2}(2\angle R-\angle A)$$

$$=\tfrac{1}{2}(2\angle R+\angle A).$$

然ルニ角 A ハ與ヘラレタル角ニシテ一定ノ大サナリ, 故ニ角 BOC

ハ一定ノ大サナリ. 故ニ內心 O ハ BC ヲ弦トシ一直角ト與ヘラレタル頂角ノ半分トノ和ナル角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ニ在リ.

即チ底邊及頂角ガ與ヘラレタル三角形ノ內心ハ,其底邊ヲ弦トシ,一直角ト與ヘラレタル頂角ノ半分トノ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧上ニ在リ.

次ニ BC ヲ弦トシ,一直角ト與ヘラレタル頂角ノ半分トノ和ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧上ニ任意ノ點 O ヲトリ,OB, OC ヲ結ブ; 次ニ O ヲ中心トシ BC ニ切スル圓ヲ畫キ,又 OB ト角 OBC ニ等シキ角ヲ爲ス直線 BA, OC ト角 OCB ニ等シキ角ヲ爲ス直線 CA; ヲ引キ其交點ヲ A トス. 然レバ BA, CA ハ共ニ此圓ニ切ス, 即チ O ハ三角形 ABC ノ內心ナリ. 而シテ角 BOC ハ直角ト與ヘラレタル頂角 (之ヲ A′ トス) ノ半分トノ和ニ等シキヲ以テ

$$\angle OBC+\angle OCB=2\angle R-\tfrac{1}{2}(2\angle R+A').$$
$$=\tfrac{1}{2}(2\angle R-A').$$

然ルニ角 ABC, 角 ACB ハ夫々角 OBC, 角 OCB ノ二倍ナルヲ以テ

$$\angle ABC+\angle ACB=2\angle R-A'$$

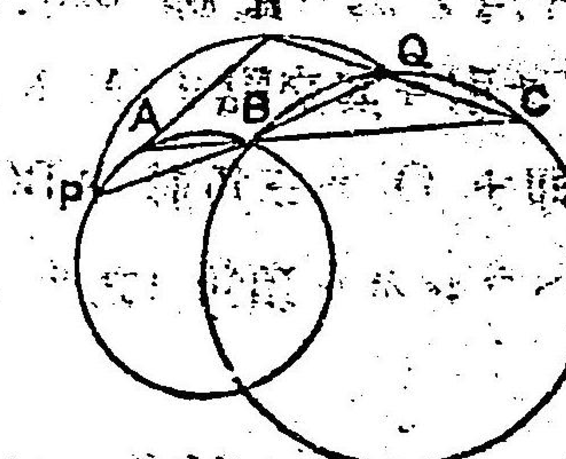
故ニ頂角 A ハ角 A′ ニ等シ即チ與ヘラレタル頂角ニ等シ.

即チ與ヘラレタル底邊ヲ弦トシ,直角ト與ヘラレタル頂角ノ半分トノ和ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ノ總テノ點ハ,與ヘラレタル底邊ト與ヘラレタル頂角ノ三角形ノ內心ナリ.

故ニ求ムル軌跡ハ與ヘラレタル底邊ヲ弦トシ,直角ト與ヘラレタル頂角ノ半分トノ和ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧ナリ; 而シテ斯ル弧ハ底邊ノ兩側ニ各一ツ宛合セテ二ツ在リ.

6. ハ二ツノ圓周ノ出會フ點 B ヲ過リ直線 ABC ヲ引キ圓周ト A, C ニ於テ出會ハシム. 又 B 點ヲ過リ任意ノ直線ヲ引キ圓周ト再ビ P, Q ニ於テ出會ハシム. AP, CQ ノ交點 R ノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.

解法. 一度引キタル直線 ABC ハ其位置ヲ變セズシテ, 後ニ任意ニ引キタル直線 PBQ ガ種々ニ其位置ヲ種々ニ變ズルモノトスレバ AP, CQ ノ交點ノ位置モ種々ニ變ズベシ, 斯クシテ軌跡ヲ生ズルモノトシテ本問題ヲ解カン.



AB ハ定マレル弦ナルヲ以テ角 APB ハ定マレル大サナリ, 又 BC モ定マレル弦ナルヲ以テ角 BQC モ亦定マレル大サナリ: 故ニ角 BQC ノ補角 RQB モ亦定マレル大サナリ.

故ニ角 R ハ定マレル大サニシテ

$$2\text{直角}-(\angle APB+2\text{直角}-\angle BQC)$$

即チ $(\angle BQC-\angle APB)$ ニ等シ.

故ニ R 點ハ定マレル直線 AB ヲ弦トシ, $\angle BQC-\angle APB$ ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧上ニ在リ.

次ニ AB ヲ弦トシ, $BQC-\angle APB$ ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧上ノ任意ノ點 R′ ヲ採リ, R′A ヲ結ビ付ケ, R′A 或ハ其ノ延長ノ圓周ト出會フ點ヲ P′ トス. 又 P′B ヲ結ビ, RC ヲ結ビ付ケル直線或ハ其ノ延長トノ交點ヲ Q′ トス.

然レバ二ツノ三角形 RPQ, R′P′Q′ ニ於テ

$$\angle R=\angle R',\quad \angle RPQ=\angle R'P'Q'$$

∠RQP＝∠R'Q'P'　∴∠BQC＝∠BQ'C

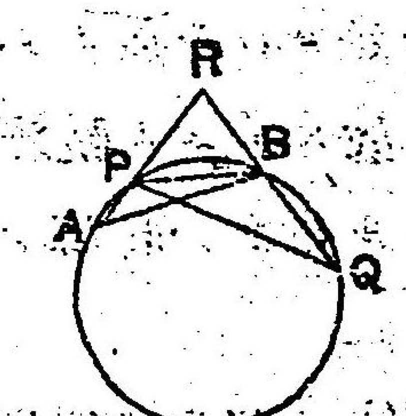
故ニQ'ハBCヲ弦トスル與ヘラレタル圓周上ニ在リ.

故ニRノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.

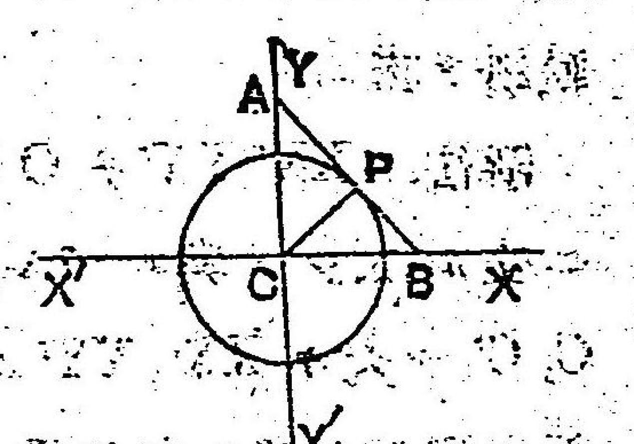
直線ABCヲ二ツノ圓ノ交リタル内部即チ二ツノ圓ニ共通ナル部分ニ引クモ稍同樣ニシテ本題ヲ解クヲ得ベシ.

7. ABハ圓APBQノ與ヘラレタル弦ナリ；PQハ同ジ圓ノ弦ニシテ其長サハ一定セリ；AP, BQガRニ於テ出會フトセバ,PQガ如何ナル位置ニ在ルモRハ恒ニ一ツノ定マレル圓周上ニ在リ.

PBヲ結ベバ角ROB,角RBPハ共ニ一定ノ角ナルヨリ,從テRハ一定ノ角ナルコトヲ知リ得ベク依テRハABヲ弦トスル一ツノ定マレル圓周上ニ在ルヲ證明シ得ベシ,説明略ス.



8. 一定マレル長サノ直線ガ,其端ガ常ニ直角ニ交ル二ツノ與ヘラレタル直線ノ上ニ在ル樣ニ動ク；其中點ノ軌跡ヲ求ム.



解法. XX'YY'ヲOニ於テ直角ニ交ル二ツノ直線, ABヲ其長サガ一定シ且ツ常ニ其一端Aハ直線YY'上ニ,他ノ一端Bハ直線XX'上ニ動ク直線トス.

ABノ中點ヲPトシ, OPヲ結ビ付ケヨ；然レバPハ直角三AOBノ斜邊ABノ中點ナルヲ以テ, OPハABノ半分ニ等シ,即チPハOヲ中心トシ,定マレル長サノ半分ヲ半徑トセル圓周上ニ在リ.

故ニOヲ中心,定マレル長サノ半分ニ等シキ直線ヲ半徑トセル

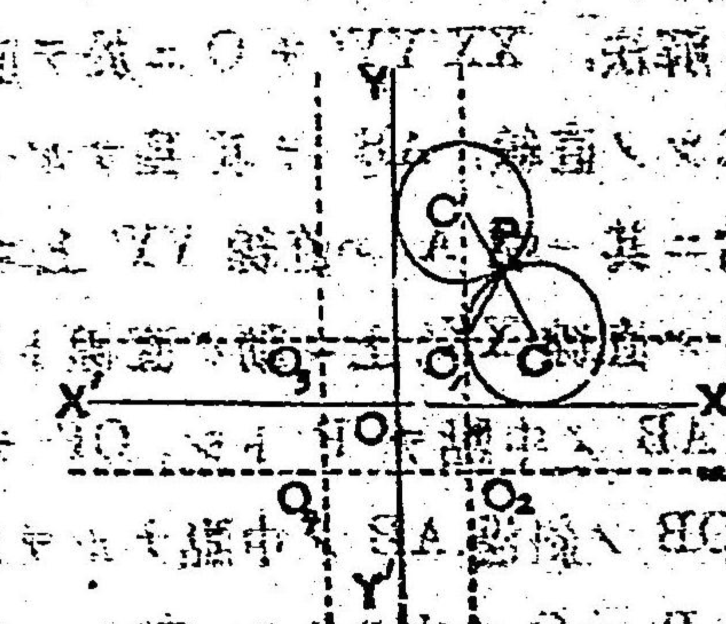
圓周上ニ任意ノ一點Pヲトリ, Pヲ中心, OPヲ半徑トセル圓ヲ畫キ其YY'トノ交點ヲAトナスAPヲ結ビ之ヲ延長シテXX'ト Bニ於テ出會ハシム.

然レバ角ABOハ角BAOノ餘角ニシテ,角POBハ角POAノ餘角ナリ,而シテ角BOAハ角POAニ等シ,故ニ角ABOハ角POBニ等シ；故ニPBハPOニ等シ；故ニABハPOノ二倍即チ定マレル長サニ等シク PハABノ中點ナリ.

即チOヲ中心, OPヲ半徑トスル圓周上ノ總テノ點ハ此點ヲ過ル定マレル長サノYY' XX'上ニ終ル直線ノ中點ナリ.

故ニ求ムル軌跡ハ二ツノ直角ニ交ル直線ノ交點ヲ中心トシ,定マレル長サノ直線ノ半分ニ等シキ直線ヲ半徑トシテ畫キタル圓周ナリ.

9. 二ツノ相等シキ圓ガ常ニ相切シ又夫々直角ニ交ル二ツノ與ヘラレタル直線ノ一ニ常ニ切スル樣ニ動ク；二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求ム.



解法. XX' YY'ヲOニ於テ直角ニ交ル二ツノ與ヘラレタル直線, C, C'ヲ夫々XX', YY'ニ切シ且ツ互ニ切スル等シキ半徑ノ圓ノ中心トス.

XX'ニ切シ與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ハXX'ノ兩側ニ在リテ是ヨリ與ヘラレタル半徑ニ等シキ距離ニ在リ且ツXX'ニ平行ナル二ツノ直線ニシテ之ヲO_1O_3, O_2O_4トス；同樣ニYY'ニ切ス

ル與ヘラレタル半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ O_1O_2, O_3O_4 トス. 依テ此四ツノ直線ノ四ツノ交點 O_1, O_2, O_3, O_4 ハ XX′, YY′ ヨリ與ヘラレタル距離ニ在ル點ニシテ, 定マル點ナリ.

而テ C, C′ ヲ中心トスル圓ノ切點ヲ P トスレバ C, C′, P ハ同一直線上ニ在リテ直線 CC′ ハ與ヘラレタル半徑ノ二倍ニ等シク一定マレル長サナリ, 而シテ P ハ其ノ中點ナリ.

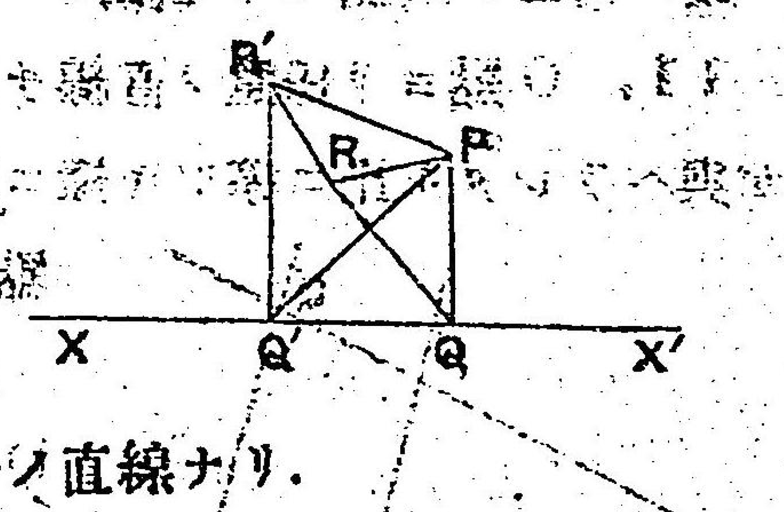
今此二ツノ圓ガ夫々 XX′ YY′ ニ切シツヽ且ツ互ニ切シツヽ動クニ當リ C, C′ ハ常ニ夫々 O_1O_3, O_1O_2 ノ上ニ在リテ動クコトハ明ナリ.

故ニ二ツノ圓ノ切點 P ノ軌跡ヲ求ムルコトハ, 與ヘラレタル半徑ノ二倍ニ等シキ直線 CC′ ガ其端ガ常ニ二ツノ直線ニ交ル二ツノ直線 O_1O_3, O_1O_2 上ニ在ル様ニ動ク時, 其中點ノ軌跡ヲ求ムルコト, 即チ前題ト同様ナル問題ニ歸ス.

故ニ求ムル軌跡ハ XX′, YY′ ヨリ與ヘラレタル半徑ニ等シキ距離ニ在ル四ツノ點 O_1, O_2, O_3, O_4 ヲ中點トシ, 與ヘラレタル半徑ニ等シキ半徑ヲ以テ畫ケル四ツノ圓周ナリ.

尙前題ヨリ獨立シタル證明ハ讀者ニ任スモ, 左迄困難ニ非ズト信ズ.

10. 與ヘラレタル三角形ニ相似ナル三角形ニシテ其頂點ガ一ツハ一ツノ定マレル點ニ在リ, 他ノ一ツノ頂點ガ常ニ定マレル直線ノ上ニ在リ; 然ル時ハ第三ノ頂點ノ軌跡ハ一ノ直線ナリ.



P ヲ一ツノ頂點ノ在ルベキ定マレル點, XX′ ヲ他ノ一ツノ頂點

ノ在ルベキ定マレル直線トス.

P ヨリ XX′ ニ垂線 PQ ヲ引キ, P, Q ヲ二ツノ頂點トシ與ヘラレタル三角形ニ相似ナル三角形 PQR ヲ作レ. 次ニ XX′ 上ニ任意ノ一點 Q′ ヲ取リ P, Q′ ヲ二ツノ頂點トシ, PQR ニ相似ナル三角形 PQ′R′ ヲ作ル, 但シ頂點 Q′ ハ頂點 Q ニ, 頂點 R′ ハ頂點 R ニ相對應スルモノトス. 然レバ PQ : PR = PQ′ : PR′ 即チ PQ : PQ′ = PR : PR′ 而シテ角 QPQ′ ハ角 RPR′ ニ等シ. 故ニ二ツノ三角形 PQQ′, PRR′ ハ相似ニシテ角 PQQ′ ハ角 PRR′ ニ等シ. 故ニ角 PRR′ ハ直角ナリ. 故ニ R′ ハ PR ニ垂線ナル直線上ニ在リ.

次ニ PR ニ垂線ナル直線上ニ任意ノ點 R″ ヲ取リ PR″ ヲ結ビ R″ ニ於テ角 PRQ ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ XX′ ト Q″ ニ於テ出會ハシム; Q″ P ヲ結ブ. 然レバ二ツノ直角三角形 PQQ″, PRR″ ニ於テ角 QPQ″ 角 RPR″ ハ相等シ. 故ニ此二ツノ三角形ハ相似ナリ. 故ニ PQ″ : PQ = PR″ : PR 即チ PQ″ : PR″ = PQ : PR 而シテ角 RPQ″ ト角 Q′PQ″ トノ和ナル角 QPR ハ角 RPR″ ト角 Q′PQ″ トノ和ナル角 Q″PR″ ニ等シ; 故ニ二ツノ三角形 PQR 及 PQ″R″ ハ相似ナリ.

故ニ第三ノ頂點 R ノ軌跡ハ PR ニ垂線ナル直線ナリ.

11. O 點ヨリ任意ノ直線ヲ引キ, 其上ニ二點 P, Q ヲ OP : OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ様ニ取レ; P 點ノ軌跡ガ直線ナルトキハ, Q 點ノ軌跡ハ之ニ平行スル直線ナリ.

解法 PP′ ヲ P 點ノ軌跡, Q [illegible] Q ノ軌跡上ノ一點トス [illegible] OP ト OQ [illegible]

ハ與ヘラレタル比ニ等シ, 故ニ

$$OP':OQ'=OP:OQ$$

故ニ Q' ハ PP' ニ平行ナル直線上ニ在リ.

次ニ Q ヲ過リ PP' ニ平行ナル直線上ニ任意ノ點 Q' ヲ取リ, OQ' ヲ結ビ PP' ト P' ニ於テ交ラシム, 然レバ

$$OP':OQ'=OP:OQ$$

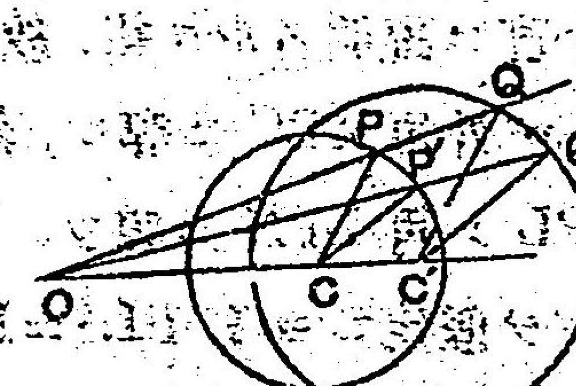
然ルニ $OP:OQ$ ハ與ヘラレタル比ニ等シ, 故ニ $OP':OQ'$ モ亦與ヘラレタル比ニ等シ.

即チ Q ヲ過リ PP' ニ平行ナル直線上ノ總テノ點ハ P ノ軌跡上ノ一點ト相俟テ問題ノ要件ニ適スル點ナリ.

故ニ Q 點ノ軌跡ハ Q ヲ過リ P 點ノ軌跡ニ平行ナル直線ナリ.

12. 前題ニ於テ P 點ノ軌跡ガ圓周ナレバ Q 點ノ軌跡モ亦圓周ナリ.

解法. C ヲ中心トスル圓周ヲ P 點ノ軌跡トス.



OC, CP ヲ結ブ又 Q ヲ過リ CP ニ平行ニ直線 QC' ヲ引キ, OC 或ハ其ノ延長ト C' ニ於テ交ラシム.

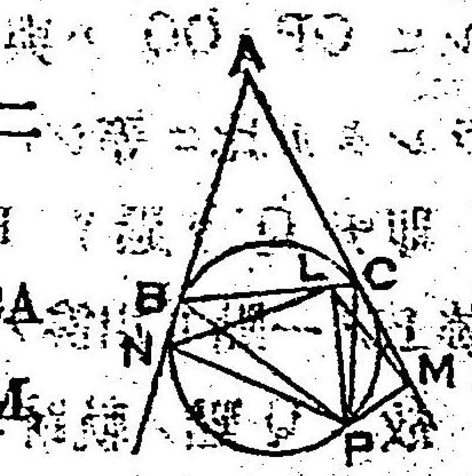
然レバ $OC:CP=OC':C'Q$ 然ルニ OC, CP, OC' ハ定マレル長サナリ, 故ニ $C'Q$ モ亦定マレル長サナリ, 故ニ Q ハ C' ヲ中心トシ $C'Q$ ヲ半徑トセル圓周上ニ在リ.

次ニ此圓周ニ任意ノ點 Q' ヲ取リ $C'Q'$ ヲ結ビ付ケ, 又 OQ' ヲ結ビ C ヨリ $C'Q'$ ニ平行ニ引ケル直線ト P' ニ於テ交ラシム, 然レバ $OC:OC'=OP':OQ'$ 故ニ $OP':OQ'=OP:OQ$

而シテ OQ' ハ OQ ニ等シ故ニ OP' ハ OP ニ等シ, 故ニ P' ハ C ヲ中心トセル圓周上ニ在リ.

故ニ Q' ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ.

13. 一ツノ點ヨリ二等邊三角形ノ相等シキ邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ガ同ジ點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ上ノ正方形ニ等シケレバ, 斯ノ如キ點ノ軌跡ハ相等シキ兩邊ニ底邊ノ端ニ於テ切スル圓周ナリ.



解法. ABC ヲ邊 AB ガ邊 AC ニ等シキ二等邊三角形トス,

軌跡上ノ一點ヲ P トシ, P ヨリ邊 BC, CA, AB ニ垂線 PL, PM, PN ヲ引キ, PB, PC, LM, LN ヲ結ブ.

然レバ四點 L, C, M, P 及四點 L, P, N, B ハ夫々同一圓周上ニ在ルハ直ニ證明スルヲ得, 故ニ角 MPL ハ外角 ACB ニ等シク, 角 LPN ハ外角 ABC ニ等シ, 然ルニ角 ACB ハ角 ABC ニ等シ, 故ニ角 MPL ハ角 LPN ニ等シ.

而シテ假定ニヨリ $PL^2=PM.PN$ 故ニ $PM:PL=PL:PN$

故ニ二ツノ三角形 LMP, PNL ハ相似形ナリ, 故ニ角 LMP ハ角 PLN ニ等シク, 然ルニ角 LMP ハ角 PBC ニ等シク, 角 PLN ハ角 PBN ニ等シ, 故ニ角 PBC ハ角 PBN ニ等シ, 故ニ邊 AB ハ B 點ニ於テ軌跡ナル圓ニ切ス; 同樣ニ AC モ亦此圓ニ切スルヲ證明スルヲ得.

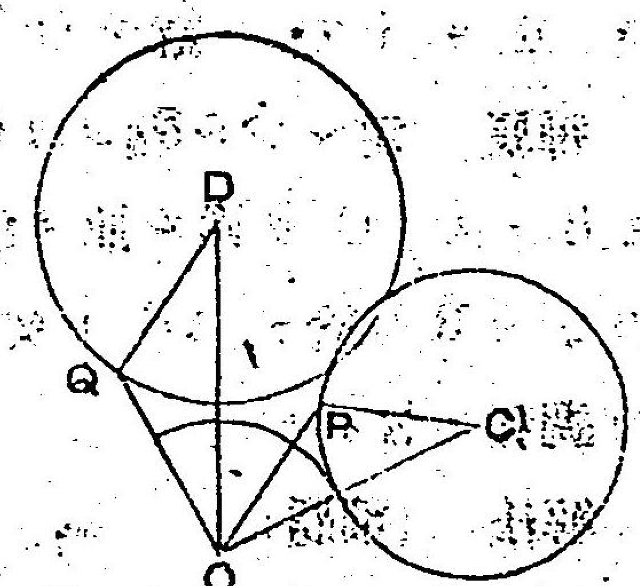
即チ P 點ノ在ル圓周ハ底邊ノ兩端ニ於テ相等シキ二邊ニ切ス.

次ニ B, C ニ於テ AB, AC ニ切スル圓周上ニ任意ノ一點 P ヲ

取リ前ト同様ナル作圖ヲ施セバ,前ト同様ニ角MPLハ角NPLニ等シク,角PLMハ角LNPニ等シキコヲ證明スルヲ得ベシ,故ニ二ツノ三角形LMP,PNLハ相似形ニシテ PM:PL=PL:PN 即チ $PL^2=PM.PN$.

故ニ B.C ニ於テ AB,AC ニ切スル圓周上ノ總テノ點ハ問題ノ要件ニ適ス,故ニ求ムル軌跡ハ底邊ノ兩端ニ於テ相等シキ二邊ニ切スル圓周ナリ.

14. O ハ定マレル點ナリ;P ハ與ヘラレタル圓周上ノ點ナリ;OQ ハ OP ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲナシ,之ト與ヘラレタル比ニ等シキ比ヲ有ス;Q點ノ軌跡ヲ求ム.



解法. 與ヘラレタル圓ノ中心ヲCト稱ス. OC ヲ結ビ O ニ於テ OC ト與ヘラレタル角ニ等シク角 COD ヲ作リ, OC:OD ヲ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニ D ヲ取ル; 然レバ

$$OP:OQ=OC:OD$$

故ニ $OP:OC=OQ:OD$.

次ニ CP, DQ ヲ結ベバ 角COP ハ角 DOQ ニ等シ,而シテ CP:OC=OQ:OD ナルヲ以テ,二ツノ三角形 POC, QOD ハ相似ナリ. 故ニ OC:CP=OD:DQ 而シテ OC, CP, OD ハ共ニ定マレルヲ以テ DQ モ亦定マル, 故ニ Q 點ハ D ヲ中心,DQ ニ等シキ半徑ニテ畫キタル圓周上ニ在リ.

次ニ此圓周上ニ任意ノ點 Q' ヲ取リ,Q'O ヲ結ビ O 點ニ於テ Q'O ト與ヘラレタル角ニ等シク角 Q'OP' ヲ作リ OP':OQ' ヲ與ヘラレ

タル比ニ等シクナル樣ニP' ヲ取ル. 然レバ

$$OP':OQ'=OC:OD,\quad 故ニ\ OP':OC=OQ':OD$$

次ニ DQ', CP' ヲ結ベバ 角P'OC ハ角Q'OD ニ等シ,故ニ二ツノ三角形 P'OC Q'OD ハ相似ニシテ

$OD:DQ'=OC:CP'$ 或ハ $OD:OC=DQ':CP'$

然ルニ $OD:OC=DQ:CP$, 故ニ $DQ':CP'=DQ:CP$

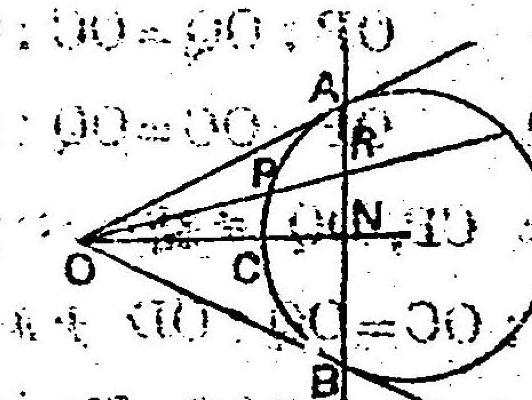
而シテ DQ' ハ DQ ニ等シ 故ニ CP' ハ CP ニ等シ.

故ニ P' ハ與ヘラレタル圓周上ニ在リ.

故ニ求ムル軌跡ハ D ヲ中心,DQ ヲ半徑トセル圓周ナリ.

15. 定ムレル點 O ヨリ圓ト P,Q ニ於テ交ル任意ノ直線ヲ引キ, R ヲ P,Q ニ就テ O ノ共軛點トス; R ノ軌跡ヲ求ム.

補題. 定マレル點ヨリ與ヘラレタル圓ニ切線ヲ引キ其ノ切點ヲ A,B トス; O ヲ過ル他ノ任意ノ直線ヲ引キ P,Q ニ於テ圓周ニ交ラシメ R ニ於テ AB ト交ラシム; 然ル時ハ P,Q ハ O 及 R ニヨリ調和ニ分タル.



解法. (補題).

O ヲ過ル直徑ヲ引キ圓周ト C.D ニ於テ交ラシメ, AB ト N ニ於テ交ラシム.

AC, AD, BC ヲ結ベバ AC, AD ハ角 OAB, 及其 A ニ於ケル外角ヲ二等分スルコハ直ニ證明スルヲ得.

故ニ $OA:AN=OC:CN$ 及 $OA:AN=OD:DN$

故ニ與ヘラレタル圓周ハ O,N ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ナリ, 故ニ $OP:PN=OQ:QN$ 即チ $OP:OQ=PN:QN$

故ニ ON ハ三角形 PNQ ノ N ニ於ケル外角ヲ二等分ス，而シテ RN ハ ON ニ垂線ナリ，故ニ RN ハ角 PNQ ヲ二等分ス，故ニ PR : QR = PN : QN 故ニ OP : OQ = PR : RQ，故ニ PQ ハ O 及 R ニヨリ調和ニ分タル.

本題ノ解法.

R′ ヲ軌跡上ノ一ツノ點トスレバ

$$OP : OQ = PR' : R'Q$$

今 O ヨリ切線 OA, OB ヲ引キ切點 A, B ヲ結ブ直線ガ OQ ト交ル點ヲ R トスレバ補題ニヨリ

$$OP : OQ = PR : RQ$$

故ニ R′ 點ハ R 點ト合ス；即チ R′ ハ O ヨリノ切線ノ切點ヲ結ビ付ケル直線上ニ在リ.

次ニ切點ヲ結ブ直線上ニ任意ノ點 R ヲ取リ，OR ヲ結ビ圓周ト交ル點ヲ P,Q トスレバ補題ニ於ケルト全ク同様ニ OP : OQ = PR : RQ ヲ證明スルヲ得.

故ニ求ムル軌跡ハ O ヨリ引ケル切線ノ切點ヲ結ビ付ケル直線ナリ.

作圖題

作圖題ノ解法及問題

1. 作圖題ノ性質ハ千變万化ニシテ同ジ手段ヲ以テ總テノ問題ニ應用スルヿ等ハ出來得ベキヿニ非ズ，從テ其一般ニシテ確カナル方法ハ指示スルコト能ハズ；然レ𪜈或ル特別ナル種類ノ問題ニハ常ニ應用シ得ベキ二三ノ方法在リ次ニ其大略ヲ述ベテ參考ニ供ス.

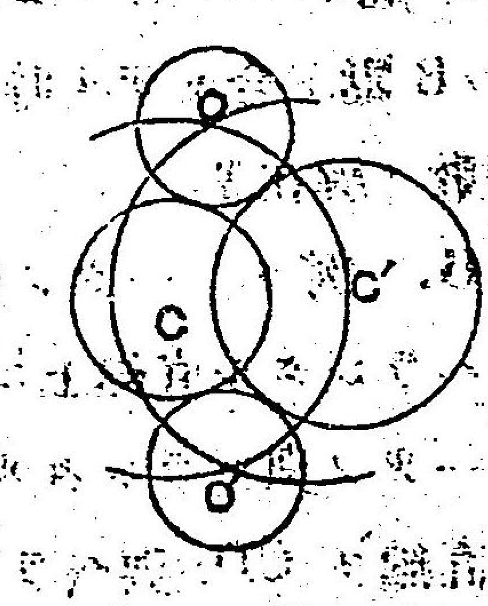
2. 軌跡ノ交リヲ求ムル法. 作圖題ノ多クハ單ニ或ル要件ニ適スル點ヲ求ムルニ歸スルヿ有リ，例ヘバ與ヘラレタル三點ヲ過ル圓周ヲ畫クヿハ結局此三點ヨリ等距離ニ在ル一點即チ求ムル圓ノ中心ヲ發見スルヿニ歸シ或ハ與ヘラレタル圓外ノ與ヘラレタル一點ヨリ之ニ切線ヲ引クヿハ切點ヲ發見スルヿニ歸スル等ノ如シ.又サテ斯ル問題ニ於テ要求スル所ノ條件ノ中或ル一ツヲ捨ツレバ殘リノ要件ニ適スル點ノ軌跡ヲ得ベシ，例ヘバ三點ヲ過ル圓周ヲ畫クニハ其三點ヨリ等距離ナル點ヲ發見スルヲ要ス此問題ハ一見唯一ツノ要件ノ如シト雖モ其實二ツノ要件ヲ備フルナリ三點ヲ A.B.C トスレバ A.B 二點ヨリ等距離ニ在ルヿ是一ツ，B,C 二點ヨリ等距離ニ在ルヿ是二ツ，即チ二ツノ要件ヲ備フ，今若シ此二ツノ要件中其一ツヲ捨テ單ニ A.B 二點ヨリ等距離ニ在ルト云フ要件ノミトスレバ此點ニ適スル點ノ軌跡ヲ得ルガ如シ；次ニ先ニ捨テタル要件ヲ容レ他ノ一ツノ要件ヲ捨ツレバ茲ニ又此要件ニ適スル點ノ軌跡ヲ得ベシ，例ヘバ先ノ例ニ於テ B.C ヨリ等距離ニ在ルト云フ要件ヲ容レ，A.B 二點ヨリ等距離ニ在ルト云フ要件ヲ捨ツレバ

又玆ニ一ツノ軌跡ヲ得ルガ如シ; 斯クシテ得タル軌跡ノ交點ハ要求スル總テノ條件ニ適スル點ナリ, 例ヘバ先ノ問題ノ A.B 二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ト, B.C 二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡トノ交點ハ三點 A.B.C ヨリ等距離ニ在ル點ナルガ如シ; 而シテ軌跡ノ交點ガ一ツ在ラバ其問題ニハ一ツノ解在リ,二ツ在ラバ二ツノ解在リ,又軌跡ガ交ラザレバ解ナシ,

3. 例 1. 與ヘラレタル底邊ヲ有スル正三角形ヲ作レ.

B.C ヲ與ヘラレタル底邊(圖ハ略ス讀者自本文ノ通リニ作圖スベシ)トスレバ求ムル頂點ハ B 點ヨリ BC ニ等シキ距離ニ在リ,又 C 點ヨリモ BC ニ等レキ距離ニ在ルヲ要ス, 而シテ B 點ヨリ BC ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ B 點ヲ中心トシ, BC ニ等シキ半徑ニテ畫キタル圓周ナリ, 同様ニ C 點ヨリ BC ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ C 點ヲ中心トシ, BC ニ等シキ半徑ニテ畫キタル圓周ナリ. 此二ツノ圓周ハ BC ノ兩側ニ於テ交ル, 故ニ其二ツノ交點 A,A′ ハ求ムル頂點ナリ. 即チ三角形 ABC, A′BC ハ求ムル三角形ナリ.

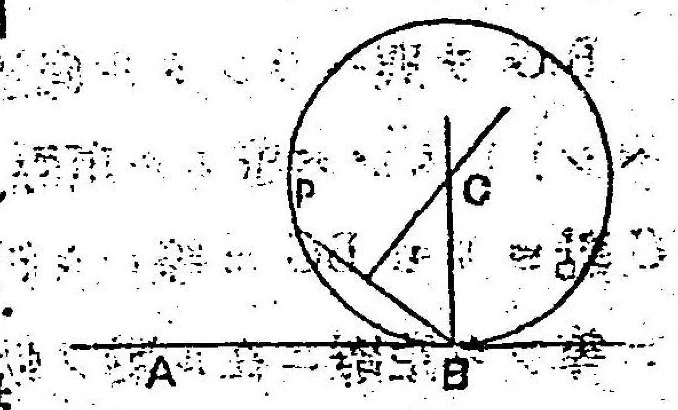
4. 例 2. 二ツノ與ヘラレタル圓ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコ.



C,C′ ヲ二ツノ與ヘラレタル圓ノ中心, L ヲ與ヘラレタル半徑トスレバ C ヨリ求ムル圓ノ中心ニ至ル距離ハ此圓ノ半徑ト L トノ和ニ等シ, 而シテ C ヨリ此和ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ C ヲ中心トシ, 此和ニ等シキ半徑ニテ畫キタル圓周ナリ; 同様ニ C′ ヨリ求ムル圓ノ中心ニ

至ル距離ハ此圓ノ半徑ト, L トノ和ニ等シク, C′ ヨリ此和ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ C′ ヲ中心トシ,此和ニ等シキ半徑ニテ畫ケル圓周ナリ. 故ニ此二圓周ノ交點ハ求ムル圓ノ中心ナリ. 而シテ此二圓周ガ二ツノ點ニテ相交レバ二ツノ解在リ,相切スレバ一ツノ解在リ,全ク出會ハザレバ解ナシ.

5. 例 3. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ,與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫クコ.



P ヲ與ヘラレタル點, B ヲ與ヘラレタル直線 AB 上ノ與ヘラレタル點トス.

然レバ求ムル圓ノ中心ハ P,B 二點ヨリ等距離ニ在ル軌跡上ニ在ルベク, 又 B ヲ過リ AB ニ垂線ナル直線上ニモ在ルベシ. 故ニ求ムル圓ノ中心ハ PB ヲ直角ニ二等分スル直線ト, B ヲ過リ AB ニ垂線ナル直線トノ交點 C ナリ,而シテ C ヲ中心, BC ニ等シキ半徑ニテ畫ケル圓周ハ求ムル圓周ナリ.

P 點ガ AB 上ニ非ザレバ唯一ツノ解在リ, P 點ガ AB 上ニ在リテ B 點ド合セザル時ハ解ナシ而シテ P 點ガ B 點ニ合シタル時ハ無數ノ解在リ.

6. 例 4. 一ツノ與ヘラレタル直線ニ切シ,中心ハ一ツノ他ノ與ヘラレタル直線上ニ在ル,與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコ.

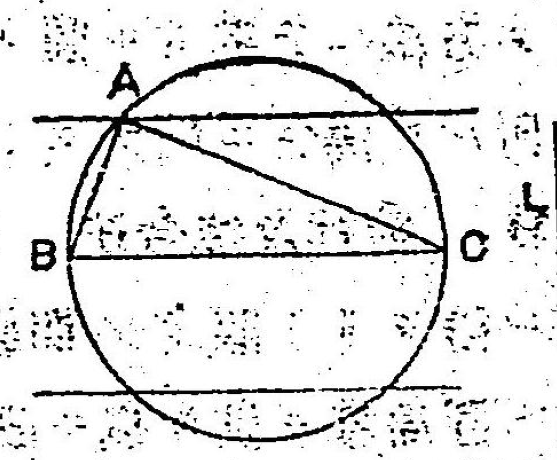
一ツノ與ヘラレタル直線ヲ AB, 中心ノ在ルベキ他ノ與ヘラレタル直線ヲ CD, 與ヘラレタル半徑ヲ L トスレバ; AB, ヨリ L ナル距離ニ在ル點ノ軌跡ハ AB ノ兩側ニ在リ之ヨリ L ニ等シキ距

離ニ在リテ之ニ平行スル二ツノ直線ナリ,故ニ此二ツノ直線ト CD トノ交點ハ求ムル圓ノ中心ナリ.

故ニ CD ガ AB ト交レバ二ツノ解在リ,CD ガ AB ニ平行ニシテ且ツ L ニ等シキ距離ニ在ラバ無數ノ解アリ,CD ガ AB ニ平行ニシテ L ニ等シカラザル距離ニ在ラバ解ナシ.

7. 例 5. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ與ヘラレタル高サノ直角三角形ヲ作ルコト.

BC ヲ與ヘラレタル底邊,L ヲ與ヘラレタル高サトス.

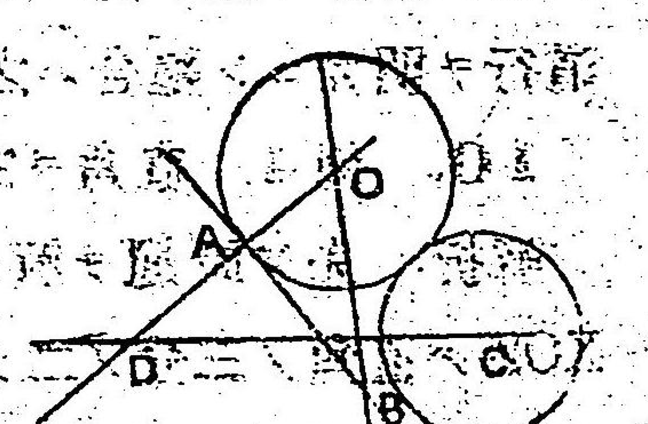


然レバ BC ヲ直徑トスル圓ノ周ハ第一ノ軌跡ニシテ,BC ノ兩側ニ在リ之ヨリ L ナル距離ニ在リテ之ニ平行ナル二ツノ直線ハ第二ノ軌跡ナリ. 故ニ此二ツノ軌跡ノ交點ハ求ムル三角形ノ頂點ナリ.

二ツノ平行線ガ圓周ニ切スレバ三角形ハ二等邊トナリ,又全ク出會ハザレバ解ナシ.

8. 例 6. 與ヘラレタル直線ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切シ且與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

A ヲ與ヘラレタル直線 AB 上ノ與ヘラレタル點,C ヲ與ヘラレタル圓ノ中心トス.



i. 外切ノ場合. A ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ハ求ムル圓ノ中心ノ第一軌跡ナルコト明ナリ.

次ニ求ムル圓ノ中心ト A トノ距離ハ

求ムル圓ノ半徑ニシテ,求ムル圓ノ中心ト C トノ距離ハ此圓ノ半徑ト,圓 C ノ半徑トノ和ニ等シ. 故ニ A ヲ過リ之ニ垂線ナル直線ノ AB ニ對シ C ノ反對ノ側ニ A ヨリ圓 C ノ半徑ニ等シク AD ヲ取ラバ,C,D ヨリ求ムル圓ノ中心ニ至ル距離ハ相等シ. 故ニ求ムル圓ノ中心ノ第二ノ軌跡ハ CD ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

故ニ第一軌跡,第二軌跡ノ交點 O ハ求ムル圓ノ中心ナリ.

ii. 內切ノ場合ニハ求ムル圓ノ中心ト,C トノ距離ハ二ツノ圓ノ半徑ノ差ニ當ルヲ以テ第二ノ軌跡ハ AB ニ關シ D ノ對點ト C トヲ結ブ直線ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ. 以下外切ノ場合ト同一ノ方法ニテ求ムル圓ノ中心ヲ發見スルヲ得.

何レノ場合ニ於テモ二ツノ軌跡ガ出會ハザレバ解ナシ.

9. 解拆及總合法. 問題ノ解法容易ニ得ザル時ハ先ヅ問題ヲ解シ得タリト假定シ,問題ノ要求スル作圖ヲ爲シ然ル後補助ノ直線或ハ圓周等ヲ畫キ以テ既知ノ件ト未知ノ件トノ關係ヲ能ク調ベ以テ作圖ノ方法ヲ得ルカ或ハ先ニ解シタル問題ニ導クカヲ得ルコト在ルベシ之ヲ問題ノ解析ト云フ.

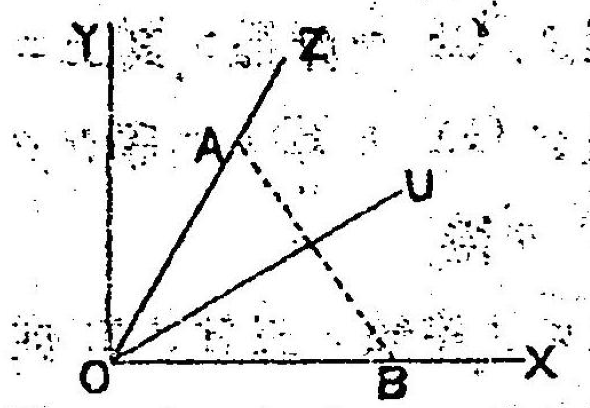
次ニ解析シテ得タル結果ヨリ逆ニ進ミ以テ問題ノ解法ヲ得ベシ之ヲ總合ト云フ.

一般ニ作圖題ノ問題ハ始メニ解析ヲ行ヒ以テ既知ノ件ト未知ノ件トノ關係ヲ探リ次ニ之ヲ總合シテ眞ノ解法ヲ得. 解析ハ作圖ノ道行ヲ明カニシ總合ハ之ヲ確メ以テ兩者相俟テ解法ヲ完全ニス.

10. 例 1. 直角ヲ三等分スルコト.

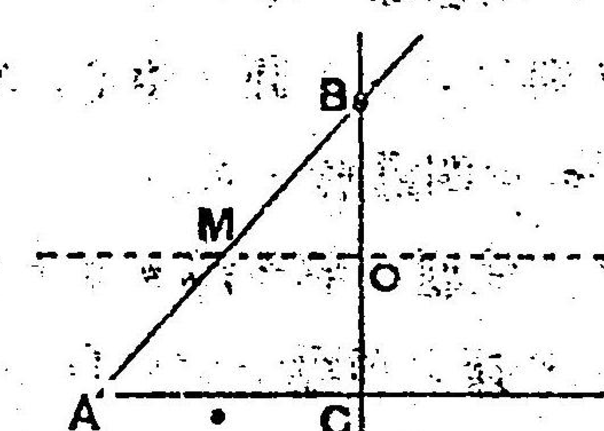
解析. 先ヅ問題ヲ解シタリト假定スレバ其二ツノ取リタル角 XOZ ハ直角ノ三分ノ二ナリ即チ正三角形ノ一ツノ內角ニ等シ. 故

ニ求ムル一ツノ角ハ正三角形ノ内角ノ半分ニ等シキヲ知ル.



總合. 故ニ直角 YOY ノ一邊 OX 上ニ任意ノ正三角形 AOB ヲ作リ,角 AOB ヲ二等分スル直線 OU ヲ引ケバ OA ト共ニ直角ノ三等分線ナリ.

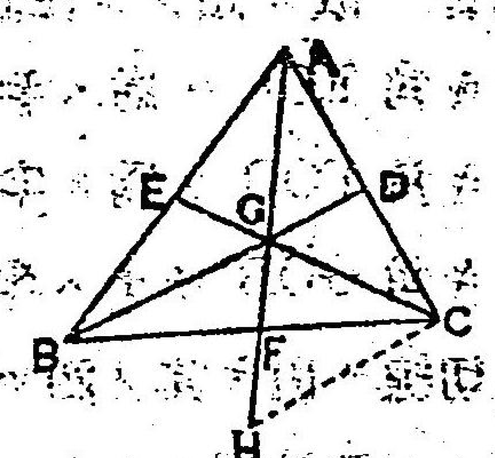
11. 例 2. 與ヘラレタル角 BAC 内ノ與ヘラレタル點 O ヲ過リ直線 BOC ヲ, OB ガ OC ニ等シキ様ニ引クコト.



解析. 問題ヲ解シ得タリトシテ, AB ノ中點 M ト O トヲ結ビ付クレバ直線 MO ハ邊 BC ニ平行ナリ.

總合. 故ニ O ヲ過リ一邊ニ平行線ヲ引キ他ノ邊ニ M ニ於テ出會ハシメ, MB ヲ AM ニ等シクトリ, BO ヲ結ビ之ヲ延長シテ他ノ邊ト C ニ於テ出會ハシムレバ, BOC ハ問題ノ要求スル直線ナリ.

12. 例 3. 三ツノ中線ヲ與ヘ三角形ヲ畫クコト.



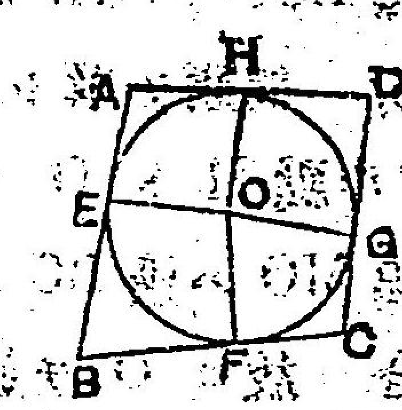
解析. 問題ヲ解シ得タリトシ, 一ツノ中線 AF ヲ延長シ其ノ上ニ FH ヲ GH ニ等シク取リ CH ヲ結ベバ, CH, BG ノ相等シキコトハ容易ニ證明スルヲ得, 故ニ三角形 CGH ハ與ヘラレタル三ツノ中線ノ三分ノ二ヲ以テ作リタル三角形ナルヲ知ル.

總合. 故ニ始メニ與ヘラレタル三ツ中線ノ三分ノ二ニ等シキ三ツノ直線ニテ三角形 CGH ヲ畫キ; C ヨリノ中線(今畫キタル三

角形ノ) CF ヲ延長シ其上ニ FB ヲ CF ニ等シク取リ, 次ニ AG ヲ延長シ GA ヲ HG ニ等シク取リ; AB, AC ヲ結ベバ求ムル三角形 ABC ヲ得.

三ツノ中線ノ三分ノ二, 從テ三ツノ直線ニ對シ何レノ二ツノ和ヲトルモ他ノ一ツヨリ大ニ, 何レノ二ツノ差ヲトルモ他ノ一ツヨリ小ナル制限ヲ要スルハ云フ迄モナシ.

13. 例 4. 與ヘラレタル圓ニ外接シ, 與ヘラレタル四邊形ト等シキ角ノ四邊形ヲ作ルコト.



O ヲ與ラレタル圓ノ中心, A′B′C′D′ ヲ與ヘラレタル四邊形トス.

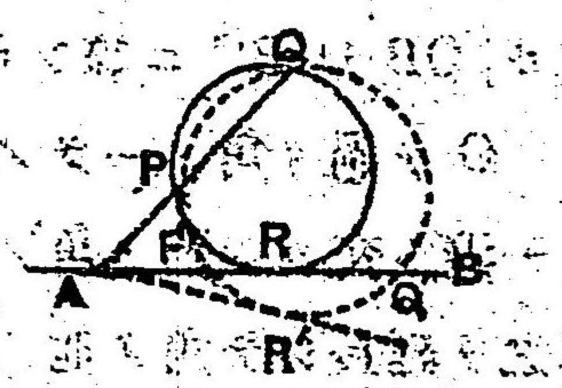
解析. 問題ヲ解キ得タリトシ ABCD ハ圓 O ニ外接シ頂點 A,B,C,D ハ夫々頂點 A′, B′,C′,D′ ニ對應スルモノトス. 中心 O ト邊 AB, BC, CD, DA ノ切點 E,F,G,H トヲ結ベバ 角 EOF, FOG, GOH, HOA ハ夫々角 B,C,D,A ノ補角從テ夫々角 B′,C′,D′,A′ ノ補角ナリ.

總合. 故ニ始メニ任意ノ半徑 OE ヲ引キ, OE ト角 B′ ノ補角ニ等シキ角 EOF ヲ爲ス半徑 OF ヲ引キ, 次ニ OF ト角 C′ ノ補角ニ等シキ角 FOG ヲ爲ス半徑 OG ヲ引キ, 次ニ OG ト角 D′ ノ補角ニ等シキ角 GOH ヲナス半徑 OH ヲ引キ; E,F,G,H ノ四點ニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ其ノ四ツノ交點ヲ A.B.C.D トスレバ四邊形 ABCD ハ求ムル四邊形ナリ.

14. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ一ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

P,Q ヲ二ツノ與ヘラレタル點, AB ヲ與ヘラレタル直線トス.

解析. 問題ヲ解シ得タリトシ PQR ヲ求ムル圓, R ヲ直線 AB 上ノ切點トス.



今 P,Q 二點ヲ過リ直線 AB ト P′,Q′ ニ於テ交ル任意ノ圓ヲ畫キ, P′Q′ ヲ結ブ直線ノ延長ガ AB ニ交ル點 A ヨリ此圓ニ切線 AR' ヲ引キ, 切點ヲ R′ トス; 然レバ

$AP'.AQ'=AR'^2$ 及 $AP.AQ=AR^2$

然ルニ $AP'.AQ'=AP.AQ$ 故ニ $AR'=AR$.

故ハ R ハ AB 上ニ於テ A ヨリ第二ノ圓ニ引ケル切線ノ切點迄ノ距離ニ等シキ距離ニ在ル點ナリ.

總合. P,Q 二點ヲ過リ AB ニ交ル任意ノ圓ヲ畫キ; P′,Q′ ヲ結ブ直線ノ延長ガ AB ニ交ル點 A ヨリ此圓ニ切線 AR' ヲ引キ其ノ切點マデノ距離 AR' ニ等シク, AB 上ニ AR ヲ取リ; P,Q,R 三點ヲ過ル圓ヲ畫ケバ求ムル圓ヲ得.

問題及其解

1. 二ツノ圓ガ相等シキ時其共通切線ヲ引クコ.

二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ノ中點ヨリ一ツノ圓ニ二ツノ切線ヲ引キ之ヲ反對ノ方向ニ延長シタル直線ハ二ツノ圓ノ共通內切線ナリ.

又二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ノ兩端ニ垂直直徑ヲ引キ,其ノ圓周ニ交ル點ヲ結ビタル二ツノ直線ハ二ツノ圓ノ共通外切線ナリ.

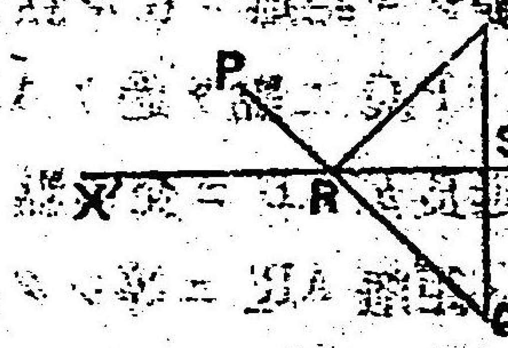
而メ二ツノ圓ガ相交ル時ハ內切線ハナシ.

證明ハ讀者ニ任ス.

2. 與ヘラレタル角BAC外ノ與ヘラレタル點Oヨリ直線OBCヲ, OBガBCニ等シキ樣ニ引クコ.

O ヲ過リ角ノ一ツノ邊ニ平行ニ一ツノ直線ヲ引キ此直線ガ他ノ一邊ト交ハル點ト角ノ頂點 A トノ中點ヲ B トナス. OB ヲ結ビ之ヲ延長シテ角ノ他ノ一邊ト交ル點ヲ C トナス, 直線 OBC ハ求ムル直線ナリ. 證明ハ之ヲ略ス第11節ヲ參照スベシ.

3. 一ツノ與ヘラレタル直線ノ同ジ側ニ在ル二ツノ與ヘラレタル點ヨリ其直線上ノ一點ヘ引ケル直線ガ此直線ト相等シキ角ヲ成ス樣ニ其點ヲ定ムルコ.

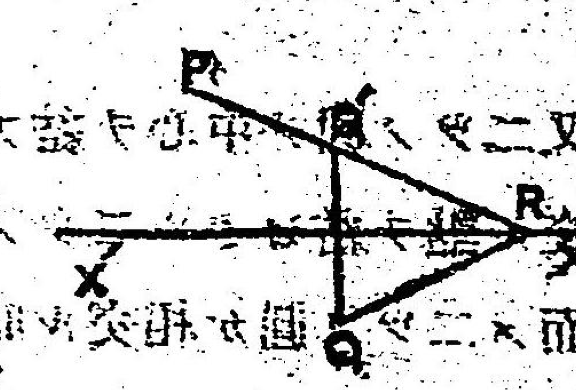


XX' ヲ一ツノ與ヘラレタル直線; P,Q ヲ XX' ノ同ジ側ニ在ル二ツノ與ヘラレタル點トス.

今 R ヲ求ムル點トスレバ PR ヲ延長シ Q ヨリ XX' ニ引ケル垂線ノ延長ト Q′ ニ於テ出會ハシム, 然レバ QS ハ SQ′ ニ等シ.

故ニ XX' ニ關シ Q ノ對點 Q′ ヲ作リ, PQ′ ヲ結ビ其ノ XX' トノ交點ヲ求ムレバ其點ハ所要ノ點ナリ. 證明ハ簡易ナリ依テ略ス.

4. 一ツノ與ヘラレタル直線上ノ一ツノ點ヘ, 其反對ノ側ニ在ル二ツノ與ヘラレタル點ヨリ引ケル二直線ガ此直線ト相等シキ角ヲナス樣ニ其點ヲ定ムルコ.



XX' ヲ一ツノ與ヘラレタル直線; P,Q ヲ其反對ノ側ニ在ル二ツノ與ヘラレタル點トス.

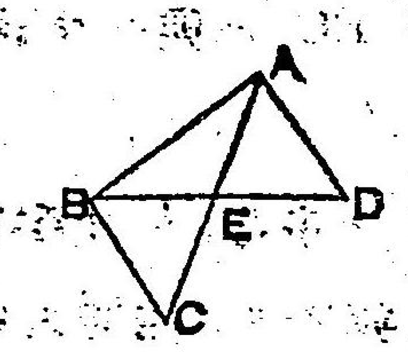
XX' ニ關シ Q ノ對點ヲ Q′ トシ PQ′

ヲ結ビ之ヲ延長シテ XX' ト R ニ於テ交ラシム，R ハ求ムル點ナリ．

又單ニ P,Q ヲ結ビ直線ガ XX' ト交ル點モ亦本問題ニ適スル點ナルコト明ナリ．

證明略ス．

5. 二ツノ邊及第三邊ヘノ中線ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

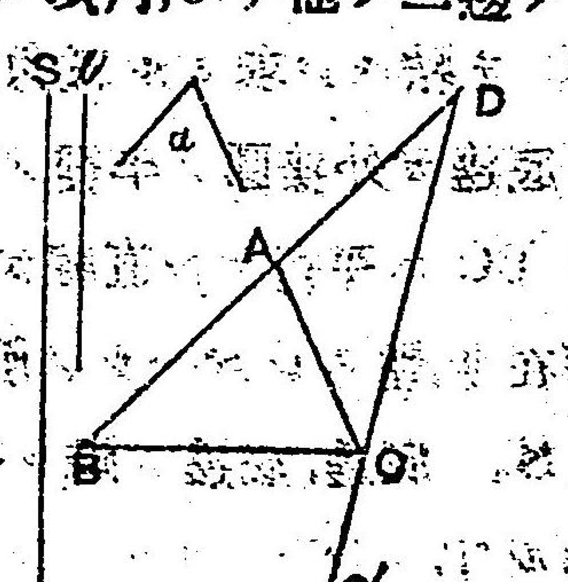


任意ノ直線上ニ，與ヘラレタル中線ノ二倍ニ等シク BD ヲ取リ，其ノ上ニ他ノ與ヘラレタル二邊ニ等シキ二邊ヲ有スル三角形 ABD ヲ作ル；次ニ A ヲ BD ノ中點 E ニ結ビ之ヲ延長シテ其ノ上ニ EC ヲ AE ニ等シク取リ，BC ヲ結ブ 然レバ三角形 ABC ハ求ムル三角形ナリ．

二ツノ三角形 BEC, DEA ハ二邊及其夾角ガ等シキ以テ全ク相等シク，邊 BC ハ邊 AD ニ等シ，而シテ AD ハ與ヘラレタル二邊ノ一ツニ等シキヲ以テ，BC モ亦之ニ等シク，AB ハ他ノ一ノ與ヘラレタル一邊ニ等シ，而メ中線 BE ハ與ヘラレタル中線ニ等シ，故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

6. 底邊，頂角及他ノ二邊ノ和ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

b ヲ與ヘラレタル底邊，a ヲ與ヘラレタル頂角，s ヲ他ノ二邊ノ和トス．



任意ノ直線上ニ s ニ等シク BD ヲ取リ BD ト D ニ於テ角 a ノ半分ニ等シキ角 BDC ヲ爲ス直線 DC ヲ引キ，次ニ B ヲ中心トシ b ニ等シキ半徑ニテ弧ヲ畫キ DC トノ交點ヲ C トナス．C ニ於テ CD ト

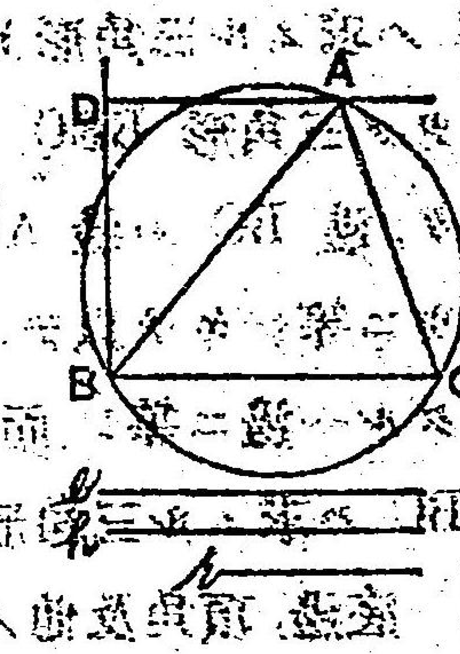
角 a ノ半分ニ等シキ角 DCA ヲ爲ス直線 CA ヲ引キ BD ト A ニ於テ交ラシム，三角形 ABC ハ求ムル三角形ナリ．

角 BAC ハ三角形 ACD ノ外角ナルヲ以テ其ノ二ツノ內對角 ACD, ADC ノ和ニ等シ，然ルニ此二ツノ角ハ共ニ角 a ノ半分ニ等シ，故ニ角 BAC ハ角 a 即チ與ヘラレタル頂角ニ等シ；而シテ底邊ハ BC ハ與ヘラレ底邊 b ニ等シ，故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

B ヲ中心，b ヲ半徑トスル圓ガ DC ト二ツノ點ニ於テ交レバ二ツノ解アリ，相切スレバ一ツノ解アリ，全ク出會ハザレバ解ナシ．

7. 底邊，高サ及外接圓ノ半徑ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

b ヲ底邊，h ヲ高サ，r ヲ外接圓ノ半徑トス．

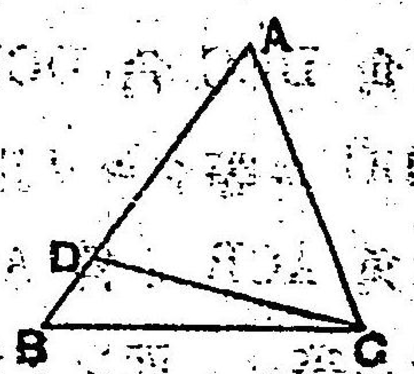


任意ノ點ヲ中心，r ニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫キ；圓周上ノ任意ノ點 B ヲ中心，b ニ等シキ半徑ニテ弧ヲ畫キ先ノ圓周トノ交點ヲ C トナス．B ニ於テ BC ニ垂線ヲ引キ其ノ上ニ h ニ等シク BD ヲ取ル，D ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ先ノ圓ノ周トノ交點ヲ A トス，AB, AC ヲ結ベバ求ムル三角形 ABC ヲ得．(證明略ス)．

底邊ガ外接圓ノ半徑ノ二倍ヨリ大ナル時ハ解ナシ，又 D ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ガ外接圓ノ周ト二ツノ點ニテ交レバ二ツノ解在リ，切スレバ一ツノ解在リ，全ク出會ハザル時ハ解ナシ．

8. 底邊，底邊ニ隣ル一ツノ角及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

BC ヲ與ヘラレタル底邊ニ等シク取リ，BC ト與ヘラレタル角ニ等シキ角 CBA ヲ爲ス直線ヲ引キ，其上ニ BD ヲ與ヘラレタル二邊ノ差ニ等シクトリ，CD ヲ結ブ；次ニ C ニ於テ CD ト角 ADC ニ等シキ角 DCA ヲ爲ス直線ヲ引キ BA ト A ニ於テ出會ハシム；然レバ三角形 ABC ハ求ムル三角形ナリ．

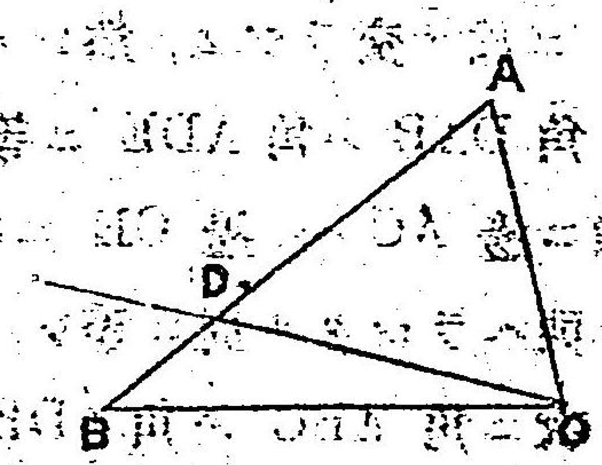


何トナレバ角 ADC ハ角 ACD ニ等シキヲ以テ AD ハ邊 AC ニ等シ，故ニ二邊 AB,AC ノ差ハ BD 即チ與ヘラレタル差ニ等シ，而シテ角 ABC，底邊 BC ハ夫々與ヘラレタル角及與ヘラレタル底邊ニ等シケレバナリ．

AB ノ延長上ニ BD ヲ取ラバ又一ツノ要件ニ適スル三角形ヲ得．與ヘラレタル二邊ノ差ガ與ヘラレタル底邊ヨリ大ナレバ解ナキコトハ云フ迄モナシ．

9． 二底角ノ差，底邊，及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘ三角ヲ作ルコト．

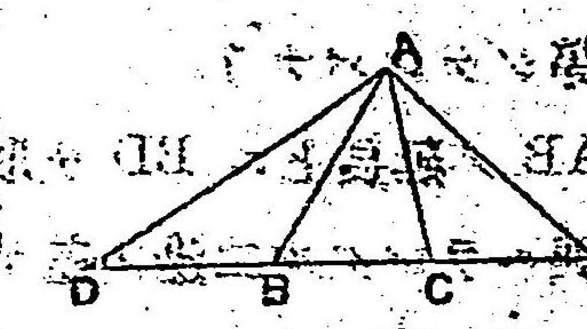
任意ノ直線上ニ BC ヲ與ヘラレタル底邊ニ等シク取リ，C ニ於テ BC ト與ヘラレタル二底角ノ差ニ等シキ角 BCD ヲナス直線ヲ引キ，次ニ B ヲ中心，與ヘラレタル二邊ノ差ニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ先ノ直線ト D ニ於テ交ラシム，BD ヲ結ビ付ケヨ，C ニ於テ DC ノ B ト反對ノ側ニ角 BDC ノ補角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ，BD ノ延長ト A ニ於テ交ラシム．然レバ ABC ハ求ムル三角形ナリ．



角 DBC 角 DCB ハ合セテ角 ADC ニ等シ，而ノ角 ACD ハ角 ADC ニ等シキヲ以テ角 ACD 角 DBC 角 DCB ノ和ニ等シ，故ニ角 ACB ト角 ABC トノ差ハ角 BCD ノ二倍即チ與ヘラレタル角ニ等シ；而シテ邊 AB,AC ノ差ハ BD ニシテ與ヘラレタル二邊ノ差ニ等シク，BC ハ與ヘラレタル底邊ニ等シク取レリ．故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

10． 周及角ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

任意ノ直線上ニ DE ヲ與ヘラレタル周ニ等シク取リ，其兩端ニ於テ之ト與ヘラレタル二ツノ角ノ一ツ宛ノ半分ニ等シキ角 EDA，DEA ヲ爲ス二ツノ直線ヲ引キ其交點ヲ A トナス；次ニ A ニ於テ AD ト角 EDA ニ等シキ角 DAB ヲナス直線ヲ引キ DE ト B ニ於テ交ラシム，又 A ニ於テ AE ト角 DEA ニ等シキ角 EAC ヲナス直線ヲ引キ DE ト C ニ於テ交ラシム，然レバ ABC ハ求ムル三角形ナリ．



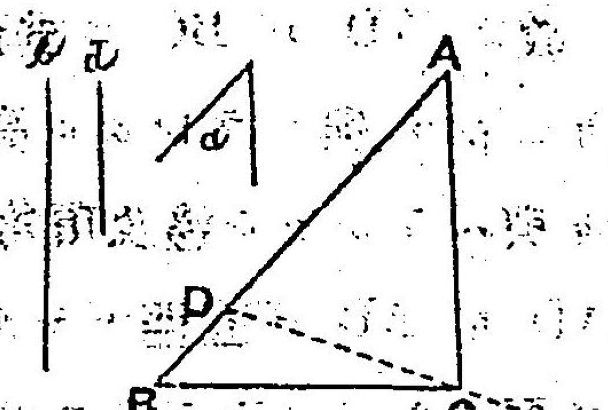
角 DAB ハ角 ADE ニ等シキヲ以テ邊 AB ハ邊 BD ニ等シ，同様ニ邊 AC ハ邊 CE ニ等シ，故ニ邊 AB,BC,CA ノ和ハ DE 即チ與ヘラレタル周ニ等シ．

次ニ角 ABC ハ角 ADE ノ二倍即チ與ヘラレタル角ノ一ツニ等シク，角 ACB ハ角 AED ノ二倍即チ與ヘラレタル他ノ一ツノ角ニ等シ．故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

與ヘラレタル角ノ和ガ二直角ヨリ大ナラザルヲ要スルハ云フ迄モナシ．

11． 底邊，頂角，及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト．

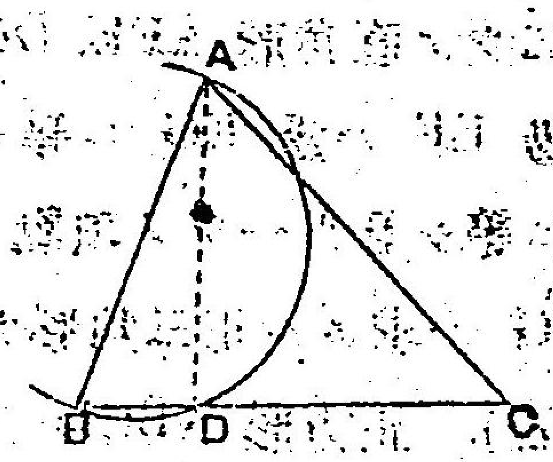
b チ底邊，a チ頂角，d チ他ノ二邊ノ差トス．



任意ノ直線上ニ BD チ d ニ等シク取リ，D ニ於テ BD ノ延長ト a ノ補角ノ半分ニ等シキ角チナス直線 DC チ引ク；次ニ B チ中心，b ニ等シキ半徑ニテ弧チ畫キ DC チ C ニ於テ切ル．C ニ於テ DC ト a ノ補角ノ半分ニ等シキ角チ爲ス直線チ引キ，BD ノ延長ト A ニ於テ出會ハシム；ABC ハ求ムル三角形ナリ．

角 ADC, ACD ハ共ニ與ヘラレタル頂角 a ノ補角ノ半分ニ等シキチ以テ角 BAC ハ角 a ニ等シ；而ソ AD ハ AC ニ等シ，故ニ AB, AC ノ差ハ BD ニシテ與ヘラレタル二邊ノ差ニ等シ；又底邊 BC ハ與ヘラレタル底邊 b ニ等シ；故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

12. 頂角及其一ツノ邊，及之ニ對スル高サチ與ヘ三角チ作ル事．



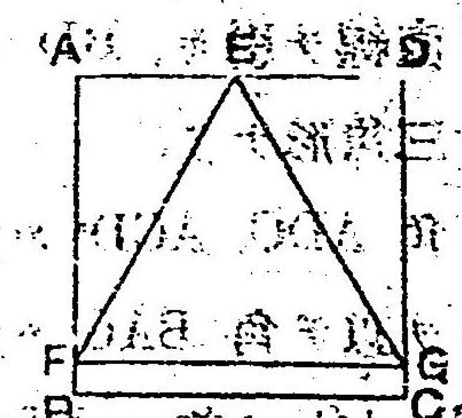
任意ノ直線ニ與ヘラレタル一邊ニ等シク BA チ取リ，A ニ於テ BA ト與ヘラレタル頂角ニ等シク BAC チ作リ次ニ BA チ直徑トシテ半圓チ畫キ，A チ中心，與ヘラレタル高サチ半徑トシテ弧チ畫キ先ノ半圓ト D ニ於テ出會ハシム；BD チ結ビ之チ延長シテ AC ト C ニ於テ出會ハシム；ABC ハ求ムル三角形ナリ．

AD チ結ブ然レバ角 ADB ハ半圓ニ於ケル角ナルチ以テ直角ナ

リ，故ニ AD ハ BC ニ垂線ニシテ頂角 A ヨリ之ニ對スル邊ヘノ高サニシテ，與ヘラレタル高サニ等シ；而ソ邊 BA ノ頂角 BAC ハ夫々與ヘラレタル邊及頂角ニ等シ故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ．

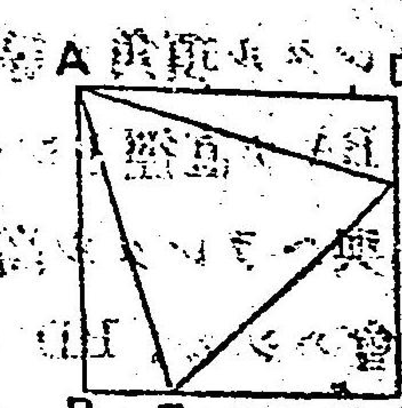
AD ガ AB チ直徑トセル圓ニ交ルニハ即チ AD ハ AB ヨリ小ナルチ要スルヿハ云フ迄モナシ．

13. 正方形ノ內ニ正三角形チ，(甲)一ツノ頂點ガ正方形ノ一邊ノ中點ニ在ル樣ニ；(乙)一ツノ頂點ガ正方形ノ一ツノ頂點ニ在ル樣ニ作ルヿ．



(甲)．正方形 ABCD ノ一邊 DA ノ中點チ E トシ E ニ於テ EA ト正三角形ノ一ツノ角ニ等シキ角 AEF チナス直線 EF チ引キ邊 AB ト F ニ於テ交ラシム；又 E ニ於テ ED ト正三角形ノ一ツノ角ニ等シキ角 DEG チ爲ス直線チ引キ邊 CD ト G ニ於テ交ラシム；FG チ結ビ付ケヨ然レバ EFG ハ求ムル正三角形ナリ．

二ツノ直角形 AFE, DGE ノ相等シキヿハ直ニ證明スルチ得，故ニ邊 EF ハ邊 EG ニ等シ，而シテ角 FEG ハ正三角形ノ一ツノ角ニ等シ且ツ一ツノ頂點 E ハ正方形ノ一邊ノ中點ニ在リ故ニ EFG ハ求ムル正三角形ナリ．

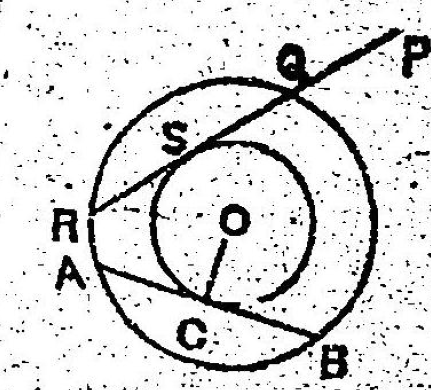


(乙)．正方形 ABCD ノ一ツノ頂點 A ニ於テ AB ト直角ノ六分ノ一ニ等シキ角 BAE チ爲ス直線 AE チ引キ邊 BC ト E ニ於テ交ラシム；又 A ニ於テ AD ト直角ノ六分ノ一ニ等シキ角 DAF チ爲ス直線 AF チ引キ，邊 CD ト F ニ於テ交ラ

シム；EF ヲ結ビ付ケヨ，然レバ AEF ハ求ムル正三角形ナリ。

二ツノ直角三角形 ABE, ADF ノ相等シキヿハ直ニ證明スルヲ得。故ニ邊 AE ハ邊 AF ニ等シ而シテ角 EAF ハ直角ノ三分ノ二即チ正三角形ノ一ツノ角ニ等シ，且一ツノ頂點 A ハ正方形ノ一ツ頂點ナリ故ニ AEF ハ求ムル正三角形ナリ。

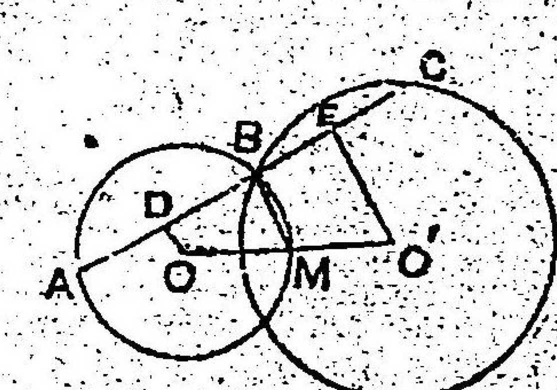
14. 與ヘラレタル圓ニ於テ與ヘラレタル長サノ弦ヲ，與ヘラレタル點ヲ過ル樣ニ引クヿ。



O ヲ與ヘラレタル圓ノ中心トス，任意ニ與ヘラレタル長サニ等シキ弦 AB ヲ引キ，O ヨリ AB ニ垂線 OC ヲ引キ，O ヲ中心，OC ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ；P ヲ過リ此圓ニ切スル直線ヲ引ケバ此直線ノ與ラレタル圓周内ニ在ル部分 QR ハ求ムル弦ナリ。

此弦ノ切點ヲ S トスレバ OC ハ OS ニ等シ，而シテ S ハ切點ナルヲ以テ OS ハ QR ニ垂線ナリ；故ニ弦 QR ハ弦 AB ニ等シ，而シテ弦 AB ハ與ヘラレタル長サノ弦ナリ．故ニ QR モ亦與ヘラレタル長サニ等シ而シテ與ヘラレタル點 P ヲ過ル故ニ QR ハ求ムル弦ナリ。

15. 二ツノ圓ノ交點ヲ過リ，一ツノ直線ヲ各ノ圓ガ其カラ截リ取ル弦ガ相等シキ樣ニ引クヿ。



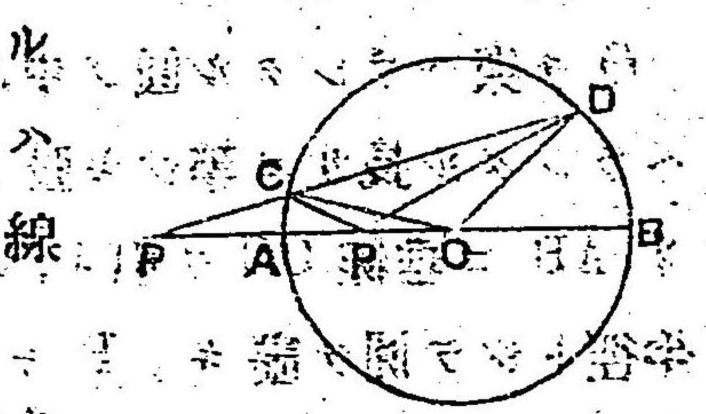
O,O′ ヲ二ツノ與ヘラレタル圓ノ中心，B ヲ二圓ノ交點ノ一ツトス。

OO′ ノ中點 M トB トヲ結ビ B ヲ過リ之ニ直角ナル直線 ABC ヲ引キ圓

周ト A,C ニ於テ交ラシム；ABC ハ求ムル直線ナリ。

O,O′ ヨリ之ニ垂線 OD, O′E ヲ引ケバ OD, MB, O′E ハ互ニ平行ナリ而シテ M ハ OO′ ノ中點ナルヲ以テ B ハ DE ノ中點トナル，故ニ DB 二倍ナル AB ハ，EB ノ二倍ナル BC ニ等シ；故ニ ABC ハ求ムル直線ナリ。

16. 圓内ノ或ハ圓外ノ與ヘラレタル點ヨリ其周ヘ最モ長キ直線及ビ最モ短キ直線ヲ引クヿ。



P ヲ圓 O ノ内或ハ外ノ與ヘラレタル點トス；P ヲ過ル直徑ヲ引ケバ PB ハ最長キ直線ニシテ，PA ハ最モ短キ直線ナリ。

P ヲ過リ與ヘラレタル圓周ヘ任意ノ他ノ直線 PC.PD ヲ引ケ；OC, OD ヲ結ベ；然レバ PO, OD ノ和ハ PD ヨリ大ナリ，而シテ PO, OD ノ和ハ PB ニ等シ，故ニ PB ハ PD ヨリ大ナリ．又 PO, OC ノ差ハ PC ヨリ小ナリ，而シテ PO, OC ノ差ハ PA ニ等シ．故ニ PA ハ PC ヨリ小ナリ．故ニ PB ハ最モ長キ直線ニシテ，PA ハ最モ短キ直線ナリ。

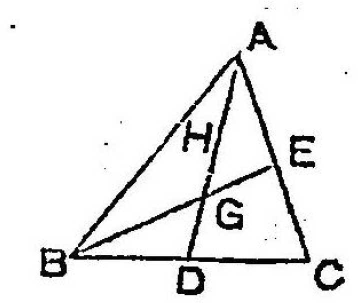
17. 與ヘラレタル角 BAC 内ノ與ヘラレタル點 O ヲ過リ直線 BOC ヲ，BO ガ CO ノ二倍ナル樣ニ引クヿ。

18. 與ヘラレタル角 BAC 外ノ與ヘラレタル點 O ヨリ直線 BOC ヲ OB ガ BC ノ二倍ナル樣ニ引クヿ。

以上二問ハ第 11 節例 2 ヲ參考シ自之ヲ求ムベシ，左程困難ナラズト信ズ。

19. 平行線ノ定理ニ依ラズシテ與ヘラレタル直線ヲ三等分ス

ルコ.



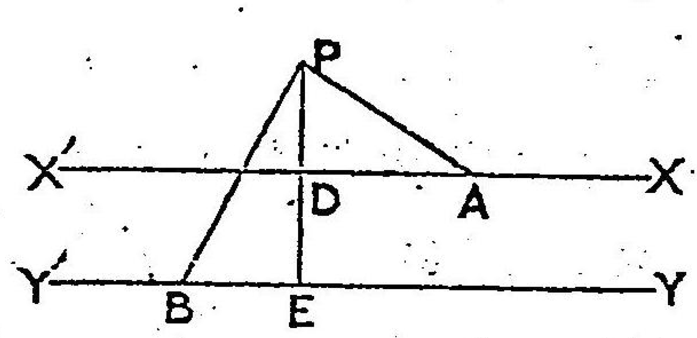
與ヘラレタル直線チ一ツノ中線トスル三角形 ABC ヲ作ル (中線 AD ヲ與ヘラレタル直線トス). CA ノ中線 BE ヲ引キ AD ト G 於テ交ラシム, GA ノ二等分點 H ヲ求ム; 然レバ G,H ハ與ヘラレタル直線ノ三等分點ナリ.

G ハ三角形ノ中線ノ交點ナルヲ以テ GD ハ AD ノ三分ノ一ナリ, 故ニ G 點ハ AD ノ三等分點ノ一ツナリ, 又 H ハ GA ノ二等分點ナルヲ以テ AD ノ三等分點ノ一ツナリ.

20. 一點ヲ過ル三ツノ與ヘラレタル直線アリ; 一ツノ直線ヲ此三ツノ間ニ在ル處ノ其二ツノ部分ガ相等シキ樣ニ引クコ.

三ツノ直線中其ノ中間ノ直線上ニ任意ノ一點ヲ取リ之ヲ第11節例 2 ノ O 點ト見レバ例 2 ト全ク同一ナル問題トナルニ依テ讀者ニ任ス.

21. 夫々二ツノ平行線ノ一ツノ上ニ在リテ, 一ツノ與ヘラレタル點ヨリ距離ガ相等シク, 且此點ニ於テ直角ニ對スル樣ナル二ツノ點ヲ求ムルコ.

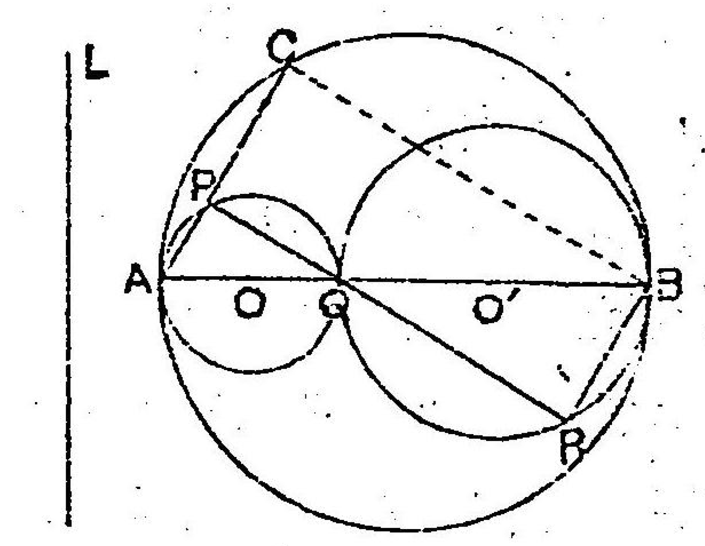


XX′ YY′ ヲ二ツノ與ヘラレタル平行線, P ヲ一ツノ與ヘラレタル點トス.

P ヨリ二ツノ平行線ニ垂線ヲ引キ, XX′ YY′ トノ交點ヲ夫々 D,E トス, D ヨリ XX′ 上ニ PE ニ等シク DA ヲ取リ, AP ヲ結ビ, P ニ於テ, PA ト直角ヲナス直線ヲ引キ YY′ ト B ニ於テ交ラシム; A,B ハ求ムル二點ナリ.

二ツノ直角三角形 PDA, BEP ノ相等シキコハ直ニ證明スルヲ得. 故ニ PA ハ PB ニ等シ而シテ作圖ニヨリ角 APB ハ直角ナリ. 故ニ A,B ハ求ムル二點ナリ.

23. 外切スル二ツノ圓アリ; 其切點ヲ過リ, 與ラヘレタル長サノ直線ヲ, 兩端ガ各ノ一ツノ圓周上ニ在ル樣ニ引クコ.

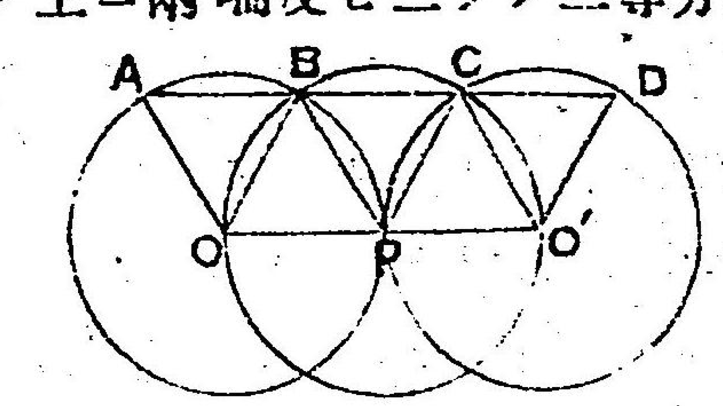


O,O′ ヲ二ツノ外切スル圓ノ中心, L ヲ與ヘラレタル長サノ直線トス.

OO′ ヲ結ビ之ヲ双方ニ延長シテ共通ノ直徑 AB ヲ作ル, 次ニ AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, B ヲ中心, L ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ先ノ圓周トノ交點ヲ C トナス; CA ヲ結ビ圓 O トノ交點ヲ P トナス, P ヲ二圓ノ切點 Q ニ結ビ之ヲ延長シテ圓 O′ ト R ニ於テ交ラシム; PQR ハ求ムル所ノ直線ナリ,

BR ヲ結ブ, 然レバ C,P,R ニ於ケル角ハ何レモ半圓ニ於ケル角ナルヲ以テ直角ナリ, 故ニ四邊形 CPRB ハ矩形ナリ; 故ニ PQR ハ BC ニ等シ, 然ルニ BC ハ L ニ等シ. 故ニ PR モ亦 L ニ等シ. 而シ其兩端 P,R ハ夫々與ヘラレタル圓周上ニ在リ, 故ニ PR ハ求ムル直線ナリ. (C ヲ AB ノ下側ニトレバ尙一ツノ直線ヲ得.)

24. 相切スル相等シキ圓ノ周ノ上ニ兩端及ビ二ツノ三等分點ガ在ル直線ヲ引クコ.

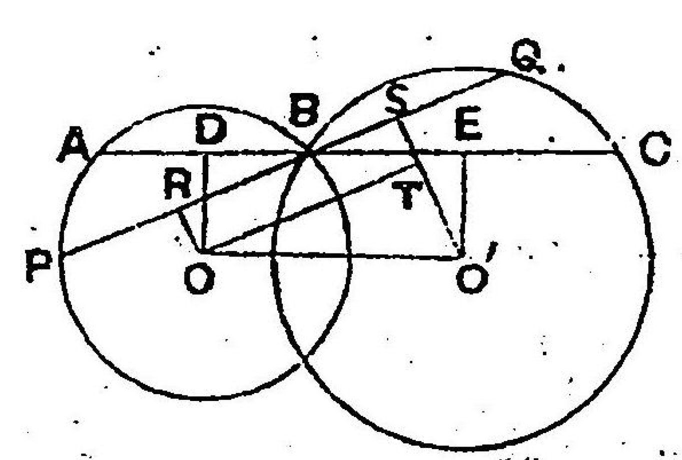


二ツノ相等シキ圓ノ中心ヲ O,O′ トシ切點ヲ P トナス. P ヲ中心, 相等シキ圓ノ半徑ニ等シキ半徑ニ

テ圓ヲ畫キ先ノ二ツノ圓周ト夫々B,Cニ於テ交ラシム．BCヲ結ブ直線ヲ双方ヘ延長シ，其端ヲ兩圓周上ニA,Dニ於テ終ラシム；然レバABCDハ求ムル直線ナリ．

PB, PC, OB, O'C, AO, DO'ヲ結ブ然レバ三角形BPCノ正三角形ナルヿ及四邊形AOPB, CPO'Dノ共ニ菱形ナルハ容易ニ證スルヲ得；故ニABCDハB,Cニ於テ三等分セラル，而シテA,Bハ夫々二ツノ圓周上ニ在リ；故ニABCDハ求ムル直線ナリ．

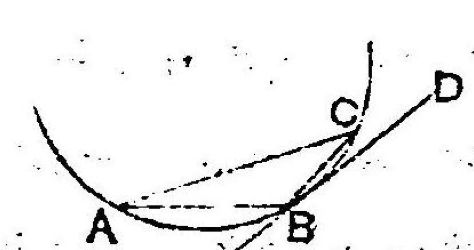
25. 二ツノ圓ノ交點ヲ過リ，各ノ圓周上ニ一ツ宛端ガ在ル最長キ直線ヲ引クヿ．



O,O'ヲ二ツノ圓ノ中心，Bヲ其交點ノ一ツトス．B點ヲ過リOO'ヲ結ブ直線ニ平行ナル直線ABCハ求ムル直線ナリ．

Bヲ過リ端ガO,O'ナル圓周上ニ在ル任意ノ直線PBQヲ引ク；O,O'ヨリABC, PBQヘ垂線OD, O'E, OR, O'Sヲ引ク．然レバACハDEノ二倍ニ等シク，PQハRSノ二倍ニ等シ．Oヲ過リPQニ平行ニOTヲ引キ，O'Sト出會フ點ヲTトナス．然レバOTハRSニ等シク，DEハOO'ニ等シ．然ルニOO'ハ直角三角形OO'Tノ斜邊ナルヲ以テ他ノ邊OTヨリ大ナリ，故ニDEハRSヨリ大ナリ，故ニACハPQヨリ大ナリ．

26. 與ヘラレタル弧上ノ一點ニ於テ之ヘ切線ヲ，先ツ其中心ヲ見出サズシテ引クヿ．

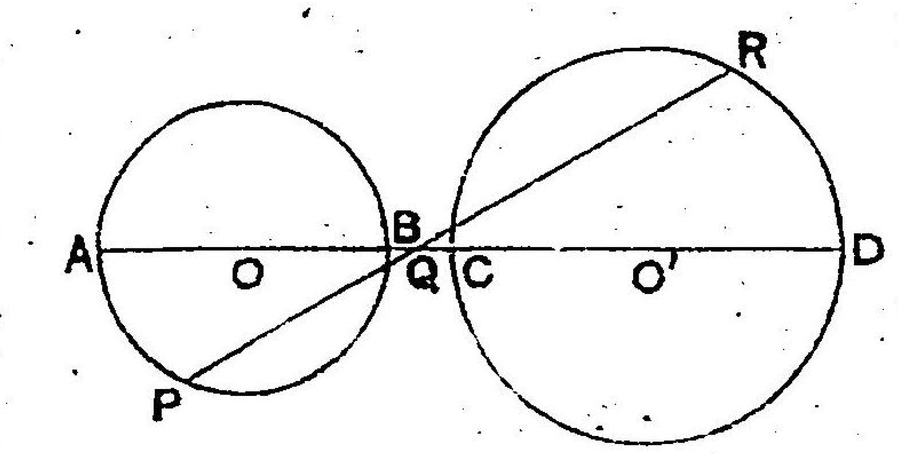


ABCヲ與ヘラレタル弧，Bヲ與ヘレタル點トス．弧上ニ任意ノ二點A,Cヲ取リ

AB, BC, CAヲ結ブ；Bニ於テBCト角BACニ等シキ角ヲナス直線BDヲ引ク；BDハB點ニ於ケル此弧ノ切線ナリ．

角CBDハ角BAC即チ隣ノ弓形ニ於テノ角ニ等シ，故ニB點ニ於テ之ニ切ス．

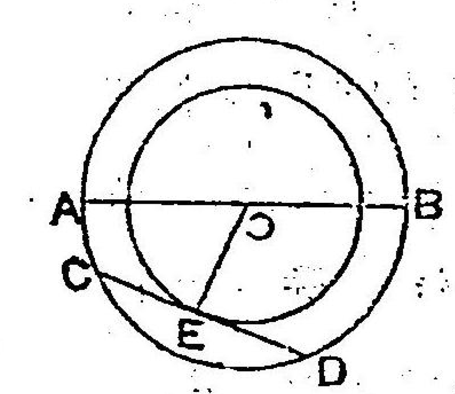
27. 相交ラザル二ツノ圓周上ニ端ガ在ル最モ長キ，及最短キ直線ヲ引クヿ．



O,O'ヲ相交ラザル二ツノ圓ノ中心トス．OO'ヲ結ビ之ヲ双方ヘ延シテ兩圓ノ周ニ終ラシムルADハ最モ長キ直線ニシテ，BCハ最モ短キ直線ナリ．

他ノ任意ノ直線PRヲ引キADトノ交點ヲQトナス，然レバQ點ヨリ圓Oノ周ニ至ル最モ長キ直線ハQAニシテ，最モ短キ直線ハQBナリ；又Qヨリ圓O'ノ周ニ至ル最モ長キ直線ハQDニシテ，最モ短キ直線ハQCナリ；故ニQA, QDノ和ADハ最モ長ク，QB, QCノ和BCハ最モ短シ．

28. 與ヘラレタル直徑平行ニ與ヘラレタル長サノ弦ヲ引クヿ．



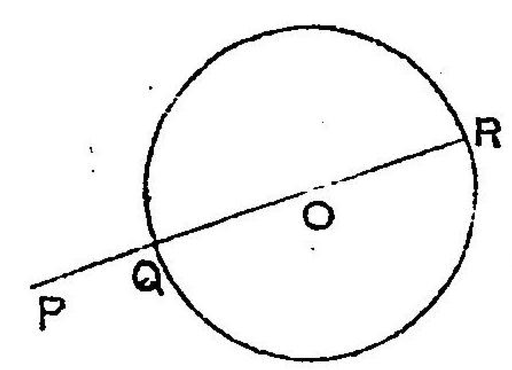
Oヲ與ヘラレタル圓ノ中心，ABヲ與ヘラレタル直徑トス．任意ニ與ヘラレタル長サノ弦CDヲ引キ其ノ中點ヲEトナス．OEヲ結ビ，Oヲ中心，OEニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫ク，ABニ直角ナル直徑ヲ引キ内ノ圓トEニ於テ出會ハシム；Eニ於テ内ノ圓ニ切線GFHヲ引キ外ノ圓トG,Hニ於テ終ラシ

ムレバ,弦 GH ハ求ムル弦ナリ.

OF ハ OE ニ等シキヲ以テ弦 GH ハ弦 CD ニ等シ故ニ與ヘラレタル長サニ等シ；而シテ AB ニ直角ナル直線ニ直角ナルヲ以テ AB ニ平行ナリ：即チ求ムル弦ナリ.

29. 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クヿ. 通例二ツノ解アルヿヲ證明セヨ. 唯一ツノ解在ル場合有リヤ.

P ヲ與ヘラレタル點, O ヲ與ヘラレタル圓ノ中心トス. PO ヲ結ビ之ヲ延長シテ與ヘラレタル圓ノ周ト Q,R ニ於テ出會ハシム；P ヲ中心, PQ, PR ヲ半徑トセル二ツノ圓ハ求ムル處ノ圓ナリ. (證明略ス).

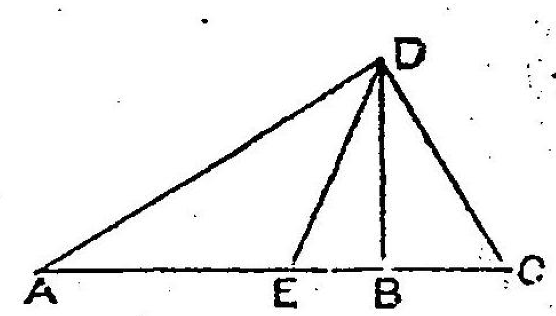


P 點ガ O 圓ノ外ニ在レバ一ツハ O 圓ニ外切シ一ツハ內切ス；而シテ P 點ガ O 圓ノ內ニ在レバ二ツノ圓ハ共ニ O 圓ニ內切ス；何レニシテモ二ツノ解在リ；然レドモ P 點ガ O 圓ノ周ノ上ニ在ル時ハ一ツノ圓ノ半徑ハ消滅シ唯一ツノ解アルノミ.

30. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ與ヘラレタル正方形ニ等シキ矩形ヲ作ルヿ.

AB ヲ與ラレタル底邊トス.

AB ノ一端 B ニ於テ垂線ヲ引キ與ヘラレタル正方形ノ一邊ニ等シク BD ヲ取ル, AD ヲ結ビ D ニ於テ AD ト直角ヲ爲ス直線ヲ引キ AB ノ延長ト C ニ於テ出會ハシム；BC ハ求ムル他ノ一邊ナリ.



AC ノ中點ヲ E トシ, DE ヲ結ベバ AE, DE, EC ハ互ニ相等

シ；直角三角形 DBE ニ於テ

$$DB^2=DE^2-EB^2=(DE+EB).(DE-EB)$$

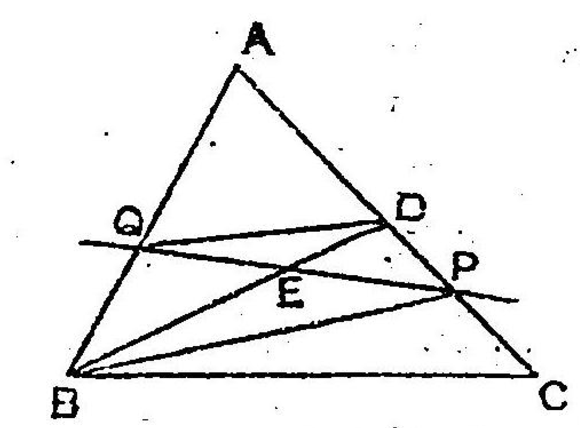
而シテ $DE+EB=AB$, $DE-EB=BC$

故ニ AB,BC ノ包ム矩形ハ DB ノ上ノ正方形ニ等シ即チ與ヘラレタル正方形ニ等シ.

31. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作ルヿ.

二ツノ正方形ノ各一邊ヲ斜邊及他ノ一邊トシ直角三角形ヲ作レバ他一邊ハ求ムル正方形ノ一邊ナリ. 證明略ス.

32. 與ヘラレタル三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル一點ヲ過リ一ツノ直線ヲ引キ,三角形ヲ二等分スルヿ.



ABC ヲ與ヘタル三角形, P ヲ邊 CA 上ノ與ラレタル一點トス.

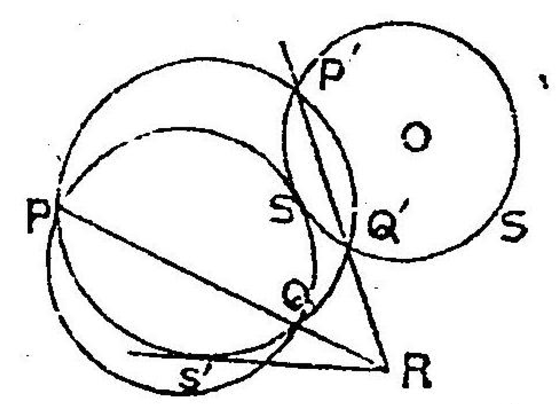
CA ノ中點 D ヲ求メ, D ヲ過リ BP ヲ結ブ直線ニ平行ニ DQ ヲ引キ, AB ト Q ニ於テ出會ハシム；PQ ヲ結ブ直線ハ三角形ヲ二等分ス.

BD ヲ結ビ, BD, PQ ノ交點ヲ E トナス. 然レバ三角形 ABD ハ三角形 DBC ニ等シ；而シテ三角形 EQB, EPD ハ相等シ,故ニ三角形 AQP ハ四邊形 QBCP ニ等シ, 故ニ PQ ハ三角形 ABC ヲ二等分ス.

33. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ,與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クヿ.

P,Q ヲ二ツノ與ヘラレタル點, O ヲ與ヘラレタル圓ノ中心トス；P,Q ヲ過リ圓 O ト相交ル任意ノ圓ヲ畫キ交點ヲ P′,Q′ トス；PQ

ヲ結ビ之ヲ延長シテ, $P'Q'$ ヲ結ブ直線或ハ其ノ延長ト R ニ於テ交ラシム; R ヨリ第二ノ圓ニ切線 RS' ヲ引キ, R ヲ中心, RS' ヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ, 與ヘラレタル圓周ト S ニ於テ交ラシム; P,Q,S 三點ヲ過ル圓ハ求ムル圓ナリ.



RQP,RQ′P′ハ圓外ノ一點ヨリ同一ノ圓ニ引ケル割線ナルヲ以テ,

$$RP.RQ=RP'.RQ'$$

而シ RS' ハ R ヨリ此圓ニ引ケル切線ニシテ, RS ハ RS' ニ等シキヲ以テ $RP.RQ=RS^2$

故ニ $RP'.RQ'=RS^2$

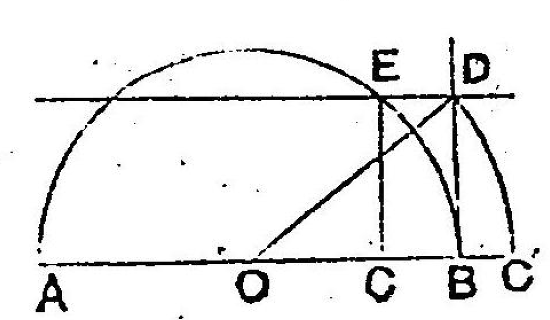
故ニ S ハ與ヘラレタル圓ノ切點ナリ,

故ニ P,Q,S ノ三點ヲ過ル圓ハ求ムル圓ナリ. PQ,P′Q′ ガ平行ナル時ハ, PQ ヲ直角ニ二等分スル直線ガ, 與ヘラレタル圓ト交ル點ガ切點トナル.

故ニ一般ニ二ツノ解在リ.

34. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ,其二ツノ分ノ包ム矩形ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ樣ニ內分及外分スルコト. 與ヘラレタル正方形ニ如何ナル制限在リヤ.

AB ヲ與ヘラレタル直線トス, B ニ於テAB ニ垂線ヲ引キ其ノ上ニ與ヘラレタル正方形ノ一邊ニ等シク BD ヲ取リ D ヲ過リ AB ニ平行ニ直線ヲ引キ, AB 上ノ半圓周ト E ニ於テ出會ハシム, E ヨリ AB ニ垂線 EC ヲ引キ



C ヲ其足トス, C ハ求ムル內分點ナリ.

AB ノ中點ヲ O トシ, OE ヲ結ブ然レバ直角三角形EOCニ於テ

$$EC^2=EO^2-OC^2=(EO+OC)(EO-OC)$$

而シ $EO+OC=AC,\quad EO-OC=CB$

故ニ $EC^2=AC.CB$

故ニ C ハ求ムル內分點ナリ.

內分ノ場合ニハ與ヘラレタル正方形ノ一邊ガ與ヘラレタル直線ノ半分ヨリ大ナラザルヲ要ス.

次ニ OD ヲ半徑トシ弧ヲ畫キ AB ノ延長ト C′ ニ於テ出會ハシム; C′ 點ハ求ムル外分點ナリ.

直角三角形 DOB ニ於テ

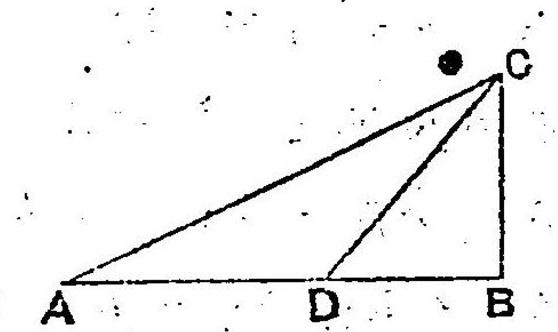
$$DB^2=DO^2-OB^2=(DO+OB).(DO-OB)$$

而シテ $DO+OB=AC',\quad DO-OB=BC'$

故ニ $DB^2=AC'.C''B$

而シテ DB ハ與ヘラレタル正方形ノ一邊ナリ. 故ニ C′ ハ求ムル外分點ナリ. 外分ノ場合ニハ何ノ制限ナシ.

35. 一ツノ直線ヲ, 其ノ二ツノ分ノ上ノ正方形ノ差ガ與ヘラレタル正方形ニ等シク內分外分スルコト.



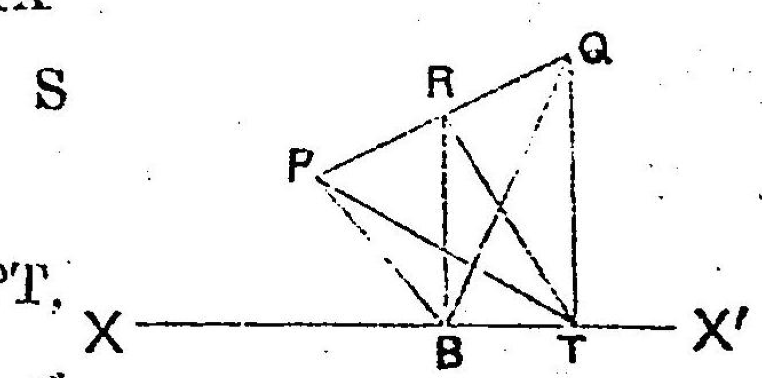
AB ヲ與ヘラレタル一ツノ直線トス, B ニ於テ AB ニ垂線ヲ引キ其ノ上ニ與ヘラレタル正方形ノ一邊ニ等シク BC ヲ取ル. CA ヲ結ビ, C ニ於テ CA ト角 BAC ニ等シキ角 ACD ヲナス直線ヲ, AC ニ關シ B ト同ジ側ニ引キ, AB ト D ニ於テ出會ハシム; D 點ハ求ムル內分點ナリ.

直角三角形 CDB ニ於テ $BC^2=CD^2-DB^2$, 然ルニ角 CAD ハ角 ACB ニ等シキヲ以テ CD ハ AD ニ等シ; 故ニ $BC^2=AD^2-DB^2$ 故ニ D ハ求ムル內分點ナリ.

若シ AB ガ正方形ノ一邊 B ヨリ小ナル時ハ D 點ハ AB ノ延長ノ上ニ來ル然ル時ハ D ハ外分點ナリ.

36. 與ヘラレタル直線ノ上ニ,二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ正方形ノ和ガ最モ小ナル樣ニ點ヲ見出スヿ.

XX′ ヲ與ヘラレタル直線, P,Q ヲ與ヘラレタル二點トス; PQ ヲ結ビ其ノ中點ヲ R トス, R ヨリ XX′ ニ垂線 RS ヲ引キ S ヲ其ノ足トス. S ハ求ムル處ノ點ナリ.



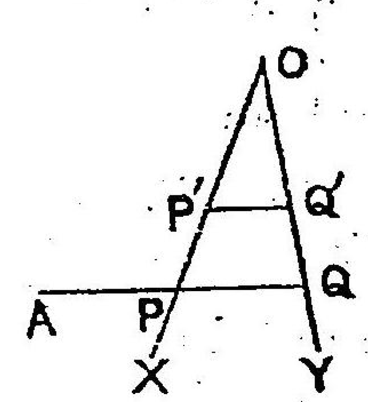
XX′ 上ニ他ノ任意ノ點 T ヲ取リ, PT, QT ヲ結ビ又 PS, QS ヲ結ブ: 然レバ

$$PS^2+QS^2=2RS^2+2PR^2,\quad PT^2+QT^2=2RT^2+2PR^2$$

然ルニ RS ハ RT ヨリ小ナリ, 故ニ PS^2+QS^2 ハ PT^2+QP^2 ヨリ小ナリ. 故ニ S ハ求ムル點ナリ.

37. 與ヘラレタル點 A ヲ過リ, 與ヘラレタヲ直線 OX,OY ト夫々 P,Q ニ於テ交リ; OP:OQ ガ與ヘラレタル比ヲ有スル樣ナル直線ヲ引クヿ.

OX, OY 上ニ OP′. OQ′ ヲ OP′ : OQ′ ガ與ヘラレタル比ヲ有スル如ク取リ, P′Q′ ヲ結ブ; 次ニ A ヲ過リ P′Q′ ニ平行ニ直線ヲ引キ OX, OY ト夫々 P,Q ニ於テ交ラシム; APQ ハ求ムル直線ナリ.



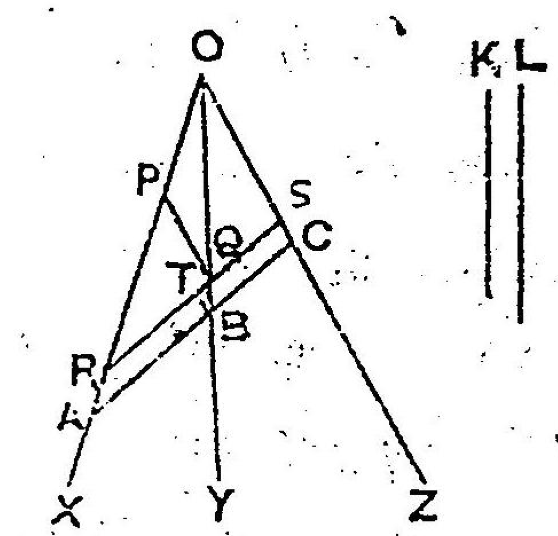
P′Q′ : PQ ハ平行ナルヲ以テ

$$OP' : OQ' = OP : OQ$$

然ルニ OP′ : OQ′ ハ與ヘラレタル比ニ等シ, 故ニ OP : OQ モ亦與ヘラレタル比ニ等シ, 而ソ APQ ハ與ヘラレタル點 A ヲ過ル,故ニ求ムル直線ナリ.

38. 一ツノ與ヘラレタル點ニ於テ三ツノ直線アリ; 一ツノ直線ヲ, 其三ツノ直線ガ之ヨリ截リ取ル二ツノ部分ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニセヨ.

OX, OY, OZ ヲ一ツノ與ヘラレタル點O ニ於テ交ル三ツノ直線トシ, K, L ヲ與ヘラレタル二ツノ長サトス.



OX 上ニ OP ヲ K ニ等シク取リ, P ヲ過リ OZ ニ平行ニ PQ ヲ引キ OY ト Q ニ於テ出會ハシム.

次ニ OX 上ニ PR ヲ L ニ等シクトリ, RQ ヲ結ビ之ヲ延シテ OZ ト S ニ於テ出會ハシム;

RS 上ニ ST ヲ K ニ等シク取リ, T ヲ過リ OZ ニ平行ニ TB ヲ引キ OY ト B ニ於テ交ラシム; B ヲ過リ RS ニ平行線 ABC ヲ引キ, OX,OZ ト夫々 A,C ニ於テ交ラシム: 直線 ABC ハ求ムル直線ナリ.

OX, PQ ハ平行ナルヲ以テ

$$SQ : QR = OP : PR = K : L$$

又 RS, AC ハ平行ナルヲ以テ

$$SQ ; QR = CB : BA$$

故ニ　CB : BA = K : L

而シテ　CB = ST = K,　故ニ　BA = L

故ニ　ABC ハ求ムル直線ナリ.

大賣捌所　全國各書林

印刷所　株式會社秀英舍第一工場
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者　天野耕一
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

發行者　巽久太郎
東京市神田區猿樂町二番地

發行者　稻葉定之助
東京市神田區南神保町十七番地

著作者　本多文次郎

定價金貳拾錢

軌跡及作圖題

明治三十八年二月廿一日發行

明治三十八年二月十八日印刷