

Analysis I**Arbeitsblatt 25****Übungsaufgaben**

AUFGABE 25.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx .$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

AUFGABE 25.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x .$$

AUFGABE 25.3. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x .$$

AUFGABE 25.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} .$$

AUFGABE 25.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4 + 2}} .$$

AUFGABE 25.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} .$$

AUFGABE 25.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x .$$

AUFGABE 25.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x .$$

AUFGABE 25.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1 + 3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}}.$$

AUFGABE 25.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1 + \sin x)) \cdot \sin x.$$

AUFGABE 25.11. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F . Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt + c) \cdot f(t)$$

AUFGABE 25.12. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_a^b f^{-1}(y) dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und anschließend partiell integriert.

AUFGABE 25.13. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 25.5.

AUFGABE 25.14. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

AUFGABE 25.15.*

Berechne das bestimmte Integral

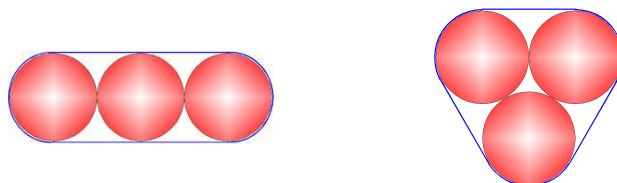
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx.$$

AUFGABE 25.16.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}.$$

AUFGABE 25.17. Bestimme die Flächeninhalte der beiden rechts skizzierten, durch die blauen Kurven umrandeten Gebiete.



Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 25.18. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x).$$

AUFGABE 25.19. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}.$$

AUFGABE 25.20. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F . Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G . Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2 + bt + c) \cdot f(t)$$

AUFGABE 25.21. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi: [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

4

b) Sei nun φ zusätzlich stetig differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s) ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

AUFGABE 25.22. (5 Punkte)

Sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

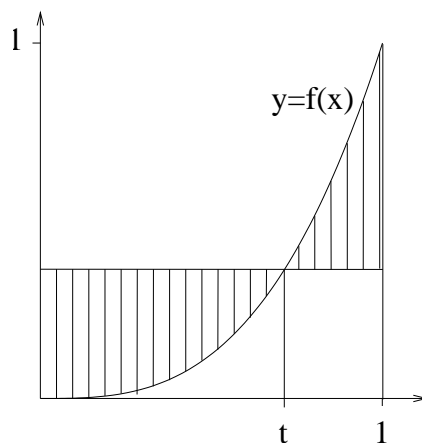
$$f(x) = \int_0^x \sin(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

AUFGABE 25.23. (5 Punkte)



Es sei

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0, 1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?