Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 44

Übungsaufgaben

Aufgabe 44.1. Bestimme in den Beispielen aus Aufgabe 34.23 die Ableitungen der Funktionen in den Funktionsscharen und die beiden partiellen Ableitungen der Gesamtfunktionen nach x und nach a.

Aufgabe 44.2. Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

in Abhängigkeit von b und c. Was hat dies mit partiellen Ableitungen zu tun?

Aufgabe 44.3. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y^5 - \cos\left(x^3 - y^2\right).$$

Aufgabe 44.4. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2y^2+3} + x^3yz^2,\, x^{11} - x^2y^3e^{xz} - \ln\left(x^2+y^2+x^4z^6+1\right)\right).$$

Aufgabe 44.5. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y) \longmapsto \left(x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y\right).$$

Aufgabe 44.6. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y,z) \longmapsto \left(x^2yz^3 - \sin x, \exp(x^4y) - 2x^2z^3\cos(xy^2z)\right).$$

Aufgabe 44.7. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid y \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 44.8.*
Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f\colon\, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2+y^4}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2) \right),$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 44.9. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für z^3, z^4, z^5.

Aufgabe 44.10. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 44.11. Eine Schlange ist im ausgestreckten Ruhezustand einen Meter lang und ziemlich dünn, sie wird durch ihre Länge $[0,1]$ (gemessen vom Kopf bis zum Schlangenende) parametrisiert. Die Schlange schlängelt sich im Zeitintervall $[a,b]$ über den Boden. Diese Bewegung wird durch eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon\, [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (s,t) \longmapsto \varphi(s,t),$$

beschrieben, dabei bezeichnet $\varphi(s,t)$ den Ortspunkt, wo sich zum Zeitpunkt t der Schlangenpunkt s befindet.

(1) Welche Signifikanz besitzt die Abbildung

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \varphi(0,t)?$$

(2) Welche Signifikanz besitzt die Abbildung

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ s \longmapsto \varphi(s,c),$$

zu einem festen Zeitpunkt $c \in [a,b]$?

(3) Welche Signifikanz besitzt die Bedingung

$$\int_0^1 \| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,c) ds \| = 1$$

für ein (für alle) $c \in [a,b]$.

(4) Welche Signifikanz besitzt die Bedingung

$$\int_0^r \| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,c) ds \| = r$$

für alle $r \in [0,1]$ und alle $c \in [a,b]$?

Aufgabe 44.12. Wir betrachten für $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ die Funktionen

$$\psi_u \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\psi_u(s) := \begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 4s + 4u\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 4s + 4u\right) \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq s \leq u\,, \\ \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } u \leq s \leq 1-u\,, \\ \begin{pmatrix} 1-u \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 4s - 4 + 4u\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 4s - 4 + 4u\right) \end{pmatrix} \text{ für } 1-u \leq s \leq 1\,. \end{cases}$$

(1) Skizziere das Bild der Funktion ψ_u für die Parameter

$$u = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

(2) Zeige, dass die ψ_u stetig sind.
(3) Zeige, dass die ψ_u differenzierbar sind.
(4) Zeige, dass die Kurvenlänge der ψ_u gleich 1 ist.

Aufgabe 44.13. Wir definieren

$$\varphi \colon [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

durch

$$\varphi(s,t) := t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \psi_{\frac{1}{2}\sin^2 t}(s),$$

wobei $\psi_u(s)$ die Funktionsschar aus Aufgabe 44.12 ist (es ist also der Parameter $u = u(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t$ abhängig von t). Welche Eigenschaften von Aufgabe 44.11 sind erfüllt?

Aufgabe 44.14.*

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(t,x) = \sin(\lambda x)\, e^{-\lambda^2 t}.$$

Zeige, dass f die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

erfüllt.

Aufgabe 44.15. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f\colon\, \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 44.16.*

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und dort die Eigenschaft besitzt, dass die Richtungsableitung in keine Richtung $v = (a,b)$ mit $a, b \neq 0$ existiert.

Aufgabe 44.17.*

Es seien P, Q zwei komplexe (bzw. reelle) Polynome und

$$\varphi\colon\, \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y) \longmapsto (P(x,y), Q(x,y)),$$

die zugehörige Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix zu φ sei in jedem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ von 0 verschieden.

(1) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Determinante konstant ist.
(2) Zeige durch ein Beispiel, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Determinante nicht konstant sein muss.

Aufgabe 44.18.*

Zeige für Polynomfunktionen

$$f\colon\, \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

Aufgabe 44.19. Es seien V und W endlichdimensionale, $\mathbb{K}$-Vektorräume $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)\ldots) = D_{v_{\sigma(n)}}(...D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)\ldots)$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.20. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sin xy, x^2y^3z^4 - y\sinh z, xy^2z + 5\right).$$

Aufgabe 44.21. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x,y) in Richtung $(2,5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2,5)$ anwendet.

Aufgabe 44.22. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 44.23. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen 0 sind.

Aufgabe 44.24. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(P) \,=\, 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass

$$\varphi(x,y) \,=\, f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 44.25. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x,y) \,=\, \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1D_2f(0,0) \,\neq\, D_2D_1f(0,0)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis