**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2022/2023**

# Maß- und Integrationstheorie

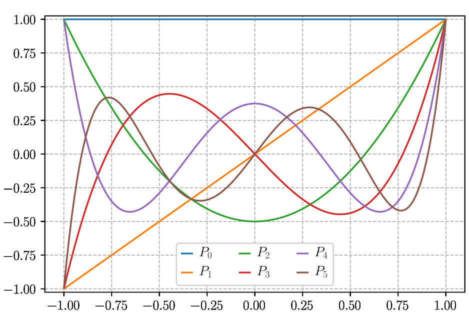
## Vorlesung 24

Wir besprechen weitere polynomiale orthonomale System in $L^2$-Räumen.

### Legendre-Polynome

Definition 24.1. Unter dem $n$-ten *Legendre-Polynom* $P_n(t)$ versteht man das Polynom

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)} .$$




Die ersten sechs Legendre-Polynome im für die Orthogonalitsärelation entscheidenden Intervall $[-1,1]$.

Aus der Definition ist ablesbar, dass das $n$-te Legendre-Polynom den Grad $n$ besitzt. Die ersten Legendre-Polynome lauten.

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1,\\
P_1(t) &= t,\\
P_2(t) &= \frac{1}{2}\big(3t^2-1\big),\\
P_3(t) &= \frac{1}{2}\big(5t^3-3t\big),\\
P_4(t) &= \frac{1}{8}\big(35t^4-30t^2+3\big),\\
P_5(t) &= \frac{1}{8}\big(63t^5-70t^3+15t\big),\\
P_6(t) &= \frac{1}{16}\big(231t^6-315t^4+105t^2-5\big).
\end{aligned}$$

Satz 24.2. *Die Legendre-Polynome $P_n$, $n \in \mathbb{N}$, bilden ein Orthogonalsystem in $L^2([-1,1])$. Die normierten (im Sinne der $L^2$-Norm) Legendre-Polynome $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n$ entstehen aus den Potenzen $t^0, t^1, t^2$ mit dem Orthonormalisierungsverfahren und bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.*

*Beweis.* Wir schreiben

$$f_n = \left(t^2 - 1\right)^n,$$

es ist also

$$P_n = \frac{f_n^{(n)}}{2^n (n!)}.$$

Für $n \geq m, 1$ ergibt sich mit iterierter partieller Integration und da $f_n^{(n-k)}$ für $k \geq 1$ den Faktor $t^2 - 1$ enthält

$$\begin{aligned}
2^n (n!) \left\langle t^m, P_n \right\rangle &= \left\langle t^m, f_n^{(n)} \right\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} t^m f_n^{(n)}(t) dt \\
&= \left(t^m f_n^{(n-1)}(t)\right) |_{-1}^{1} - m \int_{-1}^{1} t^{m-1} f_n^{(n-1)}(t) dt \\
&= -m \int_{-1}^{1} t^{m-1} f_n^{(n-1)}(t) dt \\
&= (-1)^2 m(m-1) \int_{-1}^{1} t^{m-2} f_n^{(n-2)}(t) dt \\
&= \ldots \\
&= (-1)^m (m!) \int_{-1}^{1} f_n^{(n-m)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Bei $m < n$ ist dies gleich 0, da $f_n^{(n-m-1)}(t)$ eine Stammfunktion von $f_n^{(n-m)}(t)$ ist und den Faktor $(t-1)^2$ enthält. Es liegt also ein Orthogonalsystem vor.

Bei $m = n$ ist der Ausdruck nach Aufgabe 25.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gleich

$$\begin{aligned}
(-1)^n (n!) \int_{-1}^{1} f_n(t) dt &= (-1)^n (n!) (-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{2^n (n!)}{(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \\
&= 2 \cdot \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}.
\end{aligned}$$

Somit ist insbesondere

$$\left\langle t^n, P_n \right\rangle = 2 \cdot \frac{n!}{(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

und daher ist unter Verwendung der bewiesenen Orthogonalitätsrelation und von Aufgabe 24.2

$$\left\langle P_n, P_n \right\rangle = \left\langle \frac{(2n) \cdots (n+1)}{2^n (n!)} t^n, P_n \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\langle t^n, P_n\rangle \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\cdot 2\cdot \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)\cdot(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}\cdot\frac{2}{2n+1} \\
&= \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Somit bilden die $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n$ ein Orthonormalsystem. Wegen

$$\langle t^0, t^1, \ldots, t^n\rangle = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n\rangle$$

und da die Leitkoeffizienten der $P_n$ positiv ist, ergeben sich die normierten Legendre-Polynomen auch beim Orthonormalisierungsverfahren. Die Vollständigkeit ergibt sich aus Korollar 20.12 und aus dem Weierstrassschen Approximationssatz. $\square$

## Tschebyschow-Polynome

Wir betrachten das Intervall $[-1,1]$ als Maßraum mit dem Maß $\mu$, das durch die Dichte $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ bezüglich dem Lebesgue-Maß gegeben ist. Diese Funktion beschreibt den Kehrwert des oberen Halbkreises, dadurch werden die Ränder stark gewichtet, eine Stammfunktion dieser Dichte ist $\arcsin t$ gemäß Aufgabe 21.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Die Zugehörigkeit einer messbaren Funktion $f$ zu $L^2([-1,1],\mu)$ bedeutet

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}}dt < \infty.$$

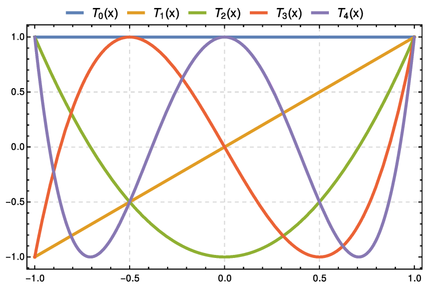
Dieses maßtheoretische Integral ist für eine stetige Funktion $f$ ein uneigentliches Integral, dessen Existenz aus Aufgabe 31.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) folgt. Das Skalarprodukt auf $L^2([-1,1],\mu)$ für bezüglich der Dichte quadratintegrierbare Funktionen $f,g$ ist durch

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

gegeben.

Definition 24.3. Unter dem $n$-ten *Tschebyschow-Polynom* versteht man das Polynom

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}t^{n-2k}(t^2-1)^k.$$




Die ersten fünf Tschebyschow-Polynome im für die Orthogonalitätsrelation entscheidenden Intervall $[-1,1]$. Der Wertebereich auf diesem Intervall ist ebenfalls $[-1,1]$, obwohl die Leitkoeffizienten große Zweierpotenzen sind.

Aus der Definition ist ablesbar, dass das $n$-te Tschebyschow-Polynom den Grad $n$ besitzt. Die ersten Tschebyschow-Polynome lauten.

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, \\ T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2-1, \\ T_3(t) &= 4t^3-3t, \\ T_4(t) &= 8t^4-8t^2+1, \\ T_5(t) &= 16t^5-20t^3+5t, \\ T_6(t) &= 32t^6-48t^4+18t^2-1. \end{aligned}$$

Satz 24.4. *Für das $n$-te Tschebyschow-Polynom gilt*

$$T_n(\cos z) = \cos(nz)$$

*für alle $z \in \mathbb{C}$.*

*Beweis.* Nach Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (1) und Satz 15.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist

$$\cos(nz) + \mathrm{i}\sin(nz) = e^{\mathrm{i}nz} = \left(e^{\mathrm{i}z}\right)^n = (\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z))^n.$$

Wenn wir die rechte Seite ausmultiplizieren erhalten wir mit Satz 3.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathrm{i}^\ell \sin^\ell z \cos^{n-\ell} z &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \sin^{2k} z \cos^{n-2k} z \\ &\quad + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1} z \cos^{n-2k-1} z. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Realteile bei $z$ reell und Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (6) ergibt

$$\cos nz = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \left(1-\cos^2 z\right)^k \cos^{n-2k} z$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} z \big(\cos^2 z - 1\big)^k \\
&= T_n(\cos z).
\end{aligned}
$$

Als eine Gleichheit für analytische Funktionen gilt sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Für reelles $t$ zwischen $-1$ und $1$ ist der Kosinus nach Korollar 21.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) bijektiv und es gibt ein eindeutiges $z \in [0, \pi]$ mit $t = \cos z$ bzw. $z = \arccos t$. Somit kann man auf diesen reellen Intervallen Satz 24.4 auch also

$$T_n(t) = T_n(\cos z) = \cos(nz) = \cos(n \arccos t)$$

schreiben.

Lemma 24.5. *Die Tschebyschow-Polynome erfüllen die Rekursionsbedingungen* $T_0 = 1$, $T_1(t) = t$ *und*

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t).$$

*Beweis.* Eine doppelte Anwendung des Additionstheorems für den Kosinus ergibt mit Satz 24.4

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos z) &= \cos((n+1)z) \\
&= \cos(nz)\cos(z) - \sin(nz)\sin z \\
&= 2\cos(nz)\cos(z) - \cos(nz)\cos(z) - \sin(nz)\sin z \\
&= 2\cos z \cos(nz) - \cos(n-1)z \\
&= 2\cos z \cdot T_n(\cos z) - T_{n-1}(\cos(z))
\end{aligned}
$$

für alle $z \in [0, \pi]$. Daher muss überhaupt die behauptete polynomiale Identität vorliegen. $\square$

Aus dieser Rekursionsformel ergibt sich unmittelbar, dass der Leitkoeffizient von $T_n$ gleich $2^{n-1}$ ist. Gelegentlich betrachtet man auch die normierten Tschebyschow-Polynome, bei denen man einfach durch $2^{n-1}$ teilt.

Lemma 24.6. *Die Tschebyschow-Polynome* $T_n$ *erfüllen im Reellen die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Das Bild von* $[-1, 1]$ *unter* $T_n$ *liegt in* $[-1, 1]$.
(2) $T_n$ *besitzt die* $n$ *reellen Nullstellen* $\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k = 1, \ldots, n$, *die alle in* $[-1, 1]$ *liegen. Diese Nullstellen sind einfach und* $T_n$ *besitzt (auch in* $\mathbb{C}$*) keine weiteren Nullstellen.*
(3) *Die Extrema von* $T_n$ *auf* $[-1, 1]$ *werden in den Punkten* $\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n$, *mit den Werten* $(-1)^k$ *angenommen. Für* $k = 1, \ldots, n-1$ *sind dies die lokalen Extrema von* $T_n$.

*Beweis.* Wir arbeiten für $t \in [-1,1]$ mit der Darstellung

$$T_n(t) \,=\, \cos\left(n \arccos t\right),$$

die sich aus Satz 24.4 ergibt. Die Aussagen folgen dann aus Korollar 21.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Dass die Nullstellen einfach sind und dass es auch im Komplexen keine weiteren Nullstellen gibt folgt aus Korollar 11.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), da $T_n$ den Grad $n$ besitzt. Dass es nicht mehr lokale Extrema geben kann folgt aus Satz 19.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). □

KOROLLAR 24.7. *Es sei $P$ ein reelles normiertes Polynom vom Grad $n$. Dann ist*

$$\max\left(|P(t)| \mid -1 \leq t \leq 1\right) \,\geq\, \frac{1}{2^{n-1}}.$$

*Beweis.* Wir betrachten die normierten Tschebyschow-Polynome

$$Q_n \,=\, \frac{1}{2^{n-1}} T_n,$$

die normiert sind und deren Bild von $[-1,1]$ nach Lemma 24.6 in $[-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ liegt, wobei die Maxima bzw. Minima in den $n+1$ Punkten $\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ mit $k = 0, \ldots, n$ abwechselnd angenommen werden. Nehmen wir an, es gebe ein normiertes Polynom $P(t)$, dessen Betrag auf $[-1,1]$ überall echt kleiner als $\frac{1}{2^{n-1}}$ ist. Wir betrachten das Differenzpolynom $D(t) = Q(t) - P(t)$. Dieses Polynom hat an den Stellen, wo $Q(t)$ den maximalen Wert $\frac{1}{2^{n-1}}$ annimmt, einen positiven Wert, und an den Stellen, wo $Q(t)$ den minimalen Wert $-\frac{1}{2^{n-1}}$ annimmt, einen negativen Wert. Da die Extrema von $Q$ sich abwechseln, besitzt $D$ zumindest $n$ Vorzeichenwechsel und somit nach dem Zwischenwertsatz zumindest $n$ Nullstellen. Da aber $D$ die Differenz von zwei normierten Polynomen vom Grad $n$ ist, besitzt $D$ höchstens den Grad $n-1$ und kann nach Korollar 11.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) höchstens $n-1$ Nullstellen besitzen. □

SATZ 24.8. *Die Tschebyschow-Polynome $T_n$ bilden ein Orthogonalsystem in $L^2[-1,1]$ bezüglich des Maßes mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Die Familie $\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\sqrt{2}T_n}{\sqrt{\pi}}$, $n \geq 1$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.*

*Beweis.* Es ist

$$\langle T_n, T_m \rangle \,=\, \int_{-1}^{1} T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Mit der Substitution (vergleiche Lemma 27.8 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))) $t = \cos z$ kann man dies unter Verwendung von Satz 24.4 überführen in

$$\int_0^{\pi} T_n(\cos z) T_m(\cos z) dz \,=\, \int_0^{\pi} \cos\left(nz\right) \cos\left(mz\right) dz.$$

Mit dem Additionstheorem für den Kosinus in der Form

$$\cos\left(x+y\right) + \cos\left(x-y\right) \,=\, 2 \cos x \cos y$$

kann man dies als

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left((n+m)z\right)dz + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left((n-m)z\right)dz\,.$$

schreiben. Beide Integral sind gleich 0, außer bei $n = m$, in diesem Fall ist bei $n \geq 1$ das Ergebnis $\pi/2$ und bei $n = 0$ gleich $\pi$. Die Vollständigkeit ergibt sich aus dem Weierstrassschen Approximationssatz und aus Korollar 20.10. $\square$

## Abbildungsverzeichnis