Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 32

Wir besprechen in dieser und der nächsten Vorlesung Lösungsverfahren für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen

$$y' = f(t, y).$$

wenn das Vektorfeld $f(t, y)$ eine bestimmte Form besitzt. Heute sprechen wir über sogenannte lineare Differentialgleichungen.

Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 32.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

heißt *gewöhnliche homogene lineare eindimensionale Differentialgleichung*.

Wir sprechen kurz auch von *linearen Differentialgleichungen*. Linear bedeutet hierbei, dass im (auf $I \times \mathbb{R}$ definierten) Vektorfeld $f(t, y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0, y)$ eine lineare Funktion in y.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 32.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp(G(t)) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 19.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine beliebige Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned}\left(\frac{y(t)}{\exp(G(t))}\right)' &= \frac{y'(t)\exp\left(G(t)\right) - y(t)\cdot\left(\exp(G(t))\cdot g(t)\right)}{\exp^2(G(t))}\\ &= \frac{y(t)g(t)\exp\left(G(t)\right) - y(t)\cdot\left(\exp(G(t))\cdot g(t)\right)}{\exp^2(G(t))}\\ &= 0,\end{aligned}$$

so dass aufgrund von Lemma 19.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp(G(t))}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp(G(t_0))}$ eindeutig fest. $\square$

Beispiel 32.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 19.6, aber auch aus Satz 32.2.

Beispiel 32.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 32.5. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy$$

besitzt nach Satz 32.2 die Lösungen

$$y(t) = ae^{ct} \text{ mit } a \in \mathbb{R}\,.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Diese sind insbesondere zeitunabhängig. Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 32.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 0$)

$$y' = \frac{y}{t}.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 32.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiel 32.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 1$)

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1).$$

Daher sind die Lösungen nach Satz 32.2 gleich

$$\begin{aligned} c \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right) &= c\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\ln(t-1)\right)}{\exp\left(\frac{1}{2}\ln(t+1)\right)} \\ &= c\frac{\sqrt{\exp\left(\ln(t-1)\right)}}{\sqrt{\exp\left(\ln(t+1)\right)}} \\ &= c \cdot \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}. \end{aligned}$$

Beispiel 32.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 + 1}.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

eine solche ist (nach Satz 16.20 (3)) durch

$$G(t) = \arctan t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp(\arctan t)\,.$$

Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Es gibt homogene lineare Gleichungsysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung oder einer Matrix zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig, zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 32.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.*

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 32.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h\colon I \to \mathbb{R}$. Es sei G eine Stammfunktion von g und es sei

$$a(t) = \exp(G(t))$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen

$$y(t) = c(t)a(t),$$

wobei $c(t)$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ ist. Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekannten (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t).$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als
$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$
schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn
$$c'(t)a(t) = h(t)$$
bzw.
$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$
gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit $c(t)$ ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung
$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$
legt dann c_0 eindeutig fest. □

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten*. Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 32.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung
$$y' = ay + b$$
mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion
$$z(t) = e^{at}$$
ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 32.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu be^{-at} bestimmen. Diese sind durch $-\frac{b}{a}e^{-at} + c$ gegeben. Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form
$$\left(-\frac{b}{a}e^{-at} + c\right) \cdot e^{at} = c \cdot e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Lieber den Kaffee trinken, bevor er gemäß einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung die Außentemperatur angenommen hat.

Eine solche Differentialgleichung tritt bei Abkühlungsprozessen auf. Wenn ein (heißer) Körper (beispielsweise eine Tasse Kaffee) sich in einem umgebenden Medium (beispielsweise in einem Straßencafé) mit konstanter Außentemperatur A befindet, so wird die Temperaturentwicklung $y(t)$ des Körpers nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = -d(y(t) - A)$$

beschrieben. Dieses Gesetz besagt, dass die Abkühlung proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur und Körpertemperatur ist (der Proportionalitätsfaktor $d > 0$ hängt von der Wärmeleitfähigkeit des Körpers ab). Die Lösungen sind

$$y(t) = ce^{-dt} + A.$$

Dabei ist das c durch eine Anfangsbedingung bestimmt, also typischerweise durch die Anfangstemperatur des Körpers zum Zeitpunkt 0. Für $t \to +\infty$ nimmt der Körper die Außentemperatur A an.

Beispiel 32.12. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(3) = 4$. Die Exponentialfunktion $a(t) = e^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 32.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} = t^2 \cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$\left(-t^2 - 2t - 2\right)e^{-t}.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t\left(\left(-t^2 - 2t - 2\right)e^{-t} + c\right) = -t^2 - 2t - 2 + ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9 - 6 - 2 + ce^3 = -17 + ce^3 = 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \frac{21}{e^3}e^t.$$

Beispiel 32.13. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1} + t - 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(2) = 5$. Hier ist also $h(t) = t - 1$ die Störfunktion und

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$G(t) \;=\; \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\right).$$

Daher ist nach Satz 32.2 (bzw. nach Beispiel 32.7)

$$a(t) \;=\; \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

eine Lösung zur homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} \;=\; \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}} \cdot (t-1) \;=\; \sqrt{t+1}\cdot\sqrt{t-1} \;=\; \sqrt{t^2-1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t\Big).$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\Big(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t\Big) + c\right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\Big(2\sqrt{3} - \operatorname{arcosh} 2\Big) + c_0\right) \;=\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arcosh} 2 + c_0\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 \;=\; 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) \;=\; \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\Big(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t\Big) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2\right).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass man schon bei recht einfach aussehenden linearen Differentialgleichungen schnell an die Integrationsgrenzen kommt.

Beispiel 32.14. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \;=\; ty + 1.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' = ty$ hat die Lösung

$$e^{\frac{1}{2}t^2},$$

somit sind nach Satz 32.10 die Lösungen der inhomogenen Gleichung gleich $c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$, wobei $c(t)$ eine Stammfunktion von $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ ist. Diese Funktion ist aber nicht elementar integrierbar (diese Funktion kommt auch beim sogenannten Fehlerintegral vor).

Abbildungsverzeichnis