袖珍

代數學參考書

補習復習及應試準備用

駱師曾編譯

下册

世界書局印行

MG
6122
41
32

【問　題】

將以下各式析因式:

1. $2x^2+7x-39$.　　2. $7x^2+39x-18$.

3. $4a^2-151ab+1365b^2$.

【解　答】

1. $2x^2+7x-39=0$, 則

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+312}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{361}}{4}$$

$$=\frac{-7\pm19}{4}.$$

$$\therefore\quad x=3 \text{ 或 } x=\frac{-13}{2}.$$

$$\therefore\quad 2x^2+7x-39=2(x-3)\left(x+\frac{13}{2}\right)$$

$=(x-3)(2x+13)$……………(答)

2. (答)　$(x+6)(7x-3)$.

3. $4a^2-151ab+1365b^2=0$, 則

$$a=\frac{151b\pm\sqrt{22801b^2-21840b^2}}{8}$$

$$=\frac{151b\pm\sqrt{961b^2}}{8}=\frac{151b\pm31b}{8}.$$

$$a=\frac{91}{4}b, \text{ 或 } a=15b.$$

$$\therefore\quad 4a^2-151ab+1365b^2$$

$$=\left(a-\frac{91}{4}b\right)(a-15b)$$

$=(4a-91b)(a-15b)$……………(答)

〔例〕析 $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$ 之因式。

(i) $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

$=x^2+(2y-3)x+(y-8)(y+5)$

$=\{x+(y-8)\}\{x+(y+5)\}$

$=(x+y-8)(x+y+5)$ ………(答)

(ii) $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

$=x^2+2xy+y^2-3(x+y)-40$

$=(x+y)^2-3(x+y)-40$

$=(x+y-8)(x+y+5)$ ………(答)

(iii) $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

$x^2+(2y-3)x+y^2-3y-40=0$，則

$$x=\frac{-2y+3\pm\sqrt{(2y-3)^2-4(y^2-3y-40)}}{2}$$

$$=\frac{-2y+3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-2y+3\pm13}{2}。$$

$\because$ $x=-y+8$ 或 $x=-y-5$.

$\therefore$ $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

$=(x+y-8)(x+y+5)$……(答)

【問題】

析 $2y^2-3xy+2x^2-ay-ax-a^2$ 之因式。

【解　答】

(i) $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$

$=2x^2-(5y+a)x+2y^2-ay-a^2$

$=2x^2-(5y+a)x+(2y+a)(y-a)$

$=\{x-(2y+a)\}\{2x-(y-a)\}$

$=(x-2y-a)(2x-y+a)$ ……(答)

(ii) $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$

$=2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$

$=(2x-y)(x-2y)-(x+y)a-a^2$

$=(2x-y+a)(x-2y-a)$ ……(答)

(iii) $2x^2-(5y+a)x+(2y^2-ay-a^2)=0$，

則 $x=\dfrac{5y+a\pm\sqrt{(5y+a)^2-8(2y^2-ay-a^2)}}{4}$

$=\dfrac{5y+a\pm(3y+3a)}{4}$.

$x=2y+a$ 或 $x=\dfrac{y-a}{2}$.

$\therefore$ 原式$=2(x-2y-a)\left(x-\dfrac{y-a}{2}\right)$

$=(x-2y-a)(2x-y+a)$.

(答)　$(x-2y-a)(2x-y+a)$.

7. 已知二根作方程

〔例〕證明以二數 m, n 爲根之方程爲

$$x^2-(m+n)x+mn=0.$$

又以次之二數爲根作方程:

(i) 5, -8.　　(ii) $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$.

以 m, n 爲根之方程爲

$$(x-m)(x-n)=0.$$

$$\therefore\quad x^2-(m+n)x+mn=0.$$

(i) 以 5 與 -8 爲根之方程爲

$$x^2-(5-8)x+5(-8)=0.$$

$$\therefore\quad x^2+3x-40=0 \text{ ……………(答)}$$

(ii) 以 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{4}$ 爲根之方程爲

$$x^2-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)x+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)=0,$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{2}=0.$$

$$\therefore\quad 12x^2+x-6=0 \text{ ……………(答)}$$

【問　題】

1. 已知方程之根爲$\frac{4}{3}$，$-\frac{3}{2}$，求此方程。
（青島）

2. 試以 $5+\sqrt{7}$ 及 $5-\sqrt{7}$ 爲二根作方程

3. 求作一個方程，令其二根爲 $(3+2i)$，$(3-2i)$。
（河南）

【解　答】

1. 以$\frac{4}{3}$，$-\frac{3}{2}$爲二根之方程爲

$$x^2-\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)x+\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=0.$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{1}{6}x-2=0.$$

$$\therefore\quad 6x^2+x-12=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. 所求之方程爲

$$x^2-(5+\sqrt{7})+(5-\sqrt{7})\}x$$
$$+(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})=0.$$

$$\therefore\quad x^2-10x+25-7=0.$$

$$\therefore\quad x^2-10x+18=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

3. 所求之方程爲

$$\{x-(3+2i\}\{x-(3-2i)\}=0.$$

$$\therefore\quad x^2-\{(3+2i)+(3-2i)\}x$$
$$+(3+2i)(3-2i)=0,$$

$$\therefore\quad x^2-6x+9-4(-1)=0,$$

$$\therefore\quad x^2-6x+13=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

〔例〕設 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α，β，求作以 α^2，β^2 爲根之方程。

$ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α，β。

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

以 α^2，β^2 爲根之方程爲

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0.$$

但 $$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2},$$

$$\alpha^2\beta^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

$$\therefore\ x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0.$$

$$\therefore\ a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0\cdots(答)$$

【問 題】

1. 設 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α，β，求作有以下二根之方程：

(i) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$。 (ii) $\alpha+\beta$，$\dfrac{1}{\alpha+\beta}$。

2. 方程 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 α，β，求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程。（江蘇）

【解 答】

1. $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 $\alpha,\ \beta$.

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

(i) $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{a}\Big/\frac{c}{a}=\frac{-b}{c}.$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}.$$

$$\therefore\quad x^2-\left(-\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0.$$

$cx^2+bx+a=0$ ………………(答)

(ii) $$\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha+\beta}=-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=-\frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$(\alpha+\beta)\times\frac{1}{\alpha+\beta}=1.$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{a^2+b^2}{ab}x+1=0.$$

$\therefore\quad abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$ …(答)

2. $$\alpha+\beta=\frac{3}{2},\qquad \alpha\beta=\frac{7}{2}.$$

$$(2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)$$
$$=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2},$$

$$(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2$$
$$=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=2\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}=8.$$

$$\therefore\quad x^2-\frac{9}{2}x+8=0.$$

$2x^2-9x+16=0$ ………………(答)

〔例〕設二次方程 $x^2+px+q=0$ 之二根為 α 及 β，求作以 $\dfrac{\alpha}{2\alpha+3\beta}$ 及 $\dfrac{\beta}{3\alpha+2\beta}$ 為二根之二次方程。

$x^2+px+q=0$ 之二根為 α，β.

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-p,\qquad \alpha\beta=q.$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha+2\beta}=\frac{3\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2}{6\alpha^2+13\alpha\beta+6\beta^2}$$

$$=\frac{3(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{6(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}=\frac{3p^2-2q}{6p^2+q},$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}\times\frac{\beta}{3\alpha+2\beta}=\frac{\alpha\beta}{6(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$$

$$=\frac{q}{6p^2+q}.$$

故所求之方程為

$$x^2-\frac{3p^2-2q}{6p^2+q}x+\frac{q}{6p^2+q}=0.$$

$$\therefore\quad (6p^2+q)x^2-(3p^2-2q)x+q=0$$

……………………………(答)

【問　題】

1. 設 $x^2+px+q=0$ 之二根為 α，β，求作以 $(\alpha-1)^2$，$(\beta-1)^2$ 為二根之方程。

2. 設 $x^2+px+q=0$ 之根為 α，β，試證以 p，q 為根之方程為

$$x^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0.$$

【解　答】

1. $x^2+px+q=0$ 之二根為 α，β。

$\therefore\quad \alpha+\beta=-p,\qquad \alpha\beta=q.$

$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=p^2-2q+2p+2,$

$(\alpha-1)^2(\beta-1)^2=\{(\alpha-1)(\beta-1)\}^2$

$=\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}^2=(q+p+1)^2.$

$\therefore\quad x^2-(p^2+2p-2q+2)x+(p+q+1)^2$

$=0$ ……………………………(答)

2. $x^2+px+q=0$ 之二根為 α，β。

$\therefore\quad \alpha+\beta=-p,\qquad \alpha\beta=q.$

$\therefore\quad p=-(\alpha+\beta)$

然以 p，q 為根之方程為

$x^2-(p+q)x+pq=0.$

$x^2-\{-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}x+\{-(\alpha+\beta)\alpha\beta\}$

$=0.$

$\therefore\quad x^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0.$

故得證。

8. 分式方程

〔例〕解$\dfrac{2x-3}{3x-5}+\dfrac{3x-5}{2x-3}=\dfrac{5}{2}$。

$$\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}.$$

去分母

$$2(2x-3)^2+2(3x-5)^2=5(3x-5)(2x-3),$$

$$2(4x^2-12x+9)+2(9x^2-30x+25)$$
$$=5(6x^2-19x+15),$$

$$8x^2-24x+18+18x^2-60x+50$$
$$=30x^2-95x+75,$$

$$4x^2-11x+7=0,$$

$$(x-1)(4x-7)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } x=\frac{7}{4}.$$

然 $x=1$，$x=\dfrac{7}{4}$，則原方程之分母不爲0。

故爲所求之根。

(答) $x=1$ 或 $x=\dfrac{7}{4}$。

【問 題】

1. $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$. (上海)

2. $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2x+4}{x-2}=1$.

【解 答】

1. $\frac{x+1}{x+4}=\frac{2x-1}{x+6}$.

$\therefore\quad (x+1)(x+6)=(2x-1)(x+4)$,

$x^2+7x+6=2x^2+7x-4$,

$x^2=10$. $\therefore\quad x=\pm\sqrt{10}$.

用此值，而原方程之分母不為0，故為其根。

(答) $x=\pm\sqrt{10}$.

2. $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2x+4}{x-2}=1$.

$\therefore\quad (2x+1)(x-2)+(2x+4)(x-1)$

$=(x-1)(x-2)$,

$2x^2-3x-2+2x^2+2x-4=x^2-3x+2$,

$3x^2+2x-8=0$,

$(3x-4)(x+2)=0$.

$\therefore\quad x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-2$.

$x=\frac{4}{3}$, $x=-2$ 而分母不為0. 故為其根。

(答) $x=\frac{4}{3}$, $x=-2$.

〔例〕解$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0$。

$$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0.$$

去分母。

$$x^2-3x+x+1+2(x^2-1)=0,$$

$$3x^2-2x-1=0,$$

$$(3x+1)(x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{3}\text{ 或 }x=1.$$

$x=1$，則原方程之分母爲 0，故非其根。

而 $x=-\frac{1}{3}$爲其根。

(答)　$x=-\frac{1}{3}$。

〔注意〕$x=1$爲計算中途混入之根，稱爲增根或假根。

【問　題】

1. 解$\frac{4}{x-1}-\frac{8}{x^2-1}=1$。

2. 解$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+\frac{5}{x-1}+2=0$。

【解 答】

1. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{8}{x^2-1}=1,$

$4(x+1)-8=x^2-1,$

$x^2-4x+3=0,$

$(x-1)(x-3)=0.$

$\therefore\quad x=1$ 或 $x=3.$

$x=1$，則原方程之分母爲 0，故非其根。

$x=3$ 爲其根.

(答) $x=3.$

2. $\dfrac{x^2-11x}{x^2-1}+\dfrac{5}{x-1}+2=0,$

$x^2-11x+5(x+1)+2(x^2-1)=0,$

$3x^2-6x+3=0.$

$\therefore\quad x^2-2x+1=0,$

$(x-1)^2=0.\qquad\therefore\quad x=1.$

$x=1$，則原方程之分母爲 0. 故原方程無根。

〔注意〕 此式如不去分母而計算之，得

$\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}=0.\qquad\therefore\quad\dfrac{x-1}{x+1}=0.$

$\therefore\quad x=1.$

此解法似甚正當，中學生不加詳察，每易誤將 $x=1$，卽原方程之根，實則原方程無根存在。

〔例〕解 $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}$.

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}.$$

將各分式之分子，以分母除之，得

$$1-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x-1}$$

$$=1-\frac{1}{x-2}+1-\frac{1}{x-1}.$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}=0,$$

$$2x(x-2)+x(x-1)-(x-1)(x-2)=0,$$

$$2x^2-4x+x^2-x-x^2+3x-2=0,$$

$$2x^2-2x-2=0,$$

$$x^2-x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

此值使原方程之分母不爲0，故爲其根.

（答）$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

【問　題】

$$\frac{x+1}{x+4}-\frac{x+4}{x+1}+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{3}.$$

【解　答】

$$\frac{x+1}{x+4}-\frac{x+4}{x+1}+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{3}.$$

將各分式之分子以分母除之，得

$$1-\frac{3}{x+4}-\left(1+\frac{3}{x+1}\right)+1+\frac{3}{x-2}$$
$$-\left(1-\frac{3}{x+1}\right)=\frac{2}{3},$$

$$-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad \frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+4}=\frac{2}{3}.$$

$9(x+4)-9(x-2)=2(x-2)(x+4)$,

$9x+36-9x+18=2x^2+4x-16$,

$2x^2+4x-70=0$,

$x^2+2x-35=0$,

$(x-5)(x+7)=0$.

$\therefore\quad x=5$ 或 $x=-7$.

$x=5$，$x=-7$，則原方程式之分母不爲 0;

〔例〕解$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$.

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0,$$

$$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)$$
$$+(x-a)(x-b)=0,$$

$$x^2-(b+c)x+bc+x^2-(a+c)+ac$$
$$+x^2-(a+b)x+ab=0,$$

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ac+ab=0.$$

$$x=\frac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(bc+ac+ab)}}{3}$$

$$=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab}}{3}$$

………………(答)

【問　題】

解次之方程:

1. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

2. $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2$.

3. $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{x}{a}-2=0$.　(江西)

【解答】

1. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$,

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{x-a}=0$,

$\dfrac{x-b-a}{a(x-b)}+\dfrac{x-a-b}{b(x-a)}=0$.

$(x-a-b)\left\{\dfrac{1}{a(x-b)}+\dfrac{1}{b(x-a)}\right\}=0$,

$(x-a-b)(bx-ab+ax-ab)=0$.

$\therefore\quad x=a+b$ 或 $x=\dfrac{2ab}{a+b}$……(答)

2. $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2$,

$\dfrac{a}{x+a-c}-1+\dfrac{b}{x+b-c}-1=0$,

$\dfrac{c-x}{x+a-c}+\dfrac{c-x}{x+b-c}=0$,

$(c-x)\{(x+b-c)+(x+a-c)\}=0$,

$(c-x)(2x+a+b-2c)=0$.

$\therefore\ x=c$ 或 $x=\dfrac{2c-a-b}{2}$……(答)

3. $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{x}{a}-2=0$,　$2a^2-x^2-2ax=0$,

$x^2+2ax-2a^2=0$.

$\therefore\ x=-a\pm\sqrt{a^2+2a^2}$

$=-a(1\pm\sqrt{3})$…………(答)

9. 分式方程應用問題

〔例〕有汽車往來於相距 60 公里之兩地間，如歸途每時之速增 5 公里，則可比去時早到24分鐘。問此汽車每時之速幾何？

設去時之速爲每時 x 公里，則行60公里所要之時間爲 $\frac{60}{x}$ 時，歸途所要之時間爲 $\frac{60}{x+5}$ 時。

$$\therefore \quad \frac{60}{x}-\frac{60}{x+5}=\frac{24}{60},$$

$$\frac{5}{x}-\frac{5}{x+5}=\frac{1}{30},$$

$$150(x+5)-150x=x(x+5),$$

$$x^2+5x-750=0,$$

$$\therefore \quad (x+30)(x-25)=0.$$

$$x=-30 \text{ 或 } x=25.$$

$x=-30$ 與題意不合。

$$25+5=30.$$

(答) 去時25公里，歸途30公里。

【問題】

1. 兩車同行 200 里，甲車比乙車每時快 7 里，而先到 1 小時45分鐘，求兩車的速度. (上海)

2. 甲乙二人合作20日可成之工程，如令乙獨作之，則比甲獨作之要多9日。問甲乙獨作時各要幾日？　（南京）

【解　答】

1. 設每時速度，甲車爲x里，則乙車爲$(x-7)$里。

$$\therefore\quad \frac{200}{x-7}-\frac{200}{x}=1\frac{45}{60}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4},$$

$$800x-800x+5600=7(x^2-7x),$$

$$x^2-7x+800=0.$$

$$\therefore\quad (x-32)(x+25)=0.$$

$$x=32 \text{ 或 } x=-25.$$

$x=-25$ 不合理。

$$x-7=32-7=25.$$

（答）　甲32里，乙25里。

2. 設甲獨作要x日，則乙要$(x+9)$日，

故得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{1}{20},$

$$20x+180+20x=x^2+9x,$$

$$x^2-31x-180=0,$$

$$\therefore\quad (x-36)(x+5)=0.$$

$$x=36 \text{ 或 } x=-5.$$

$x=-5$ 不合理。

$$x+9=36+9=45.$$

（答）　甲36日，乙45日。

〔例〕 有滿桶之酒精，先取出18升，以水補之，再取出18升，以水補之，如是桶中酒精與水容量之比如 16∶9．問桶之容量如何?

設桶之容量為 x 升，則初取18升以水補滿後酒精之量為$\frac{x-18}{x}$．

第二回取出18升中之酒精為$\frac{18(x-18)}{x}$升。

故所餘之酒精為

$$x-18-\frac{18(x-18)}{x},$$

由是得次之方程：

$$\frac{x-18-\dfrac{18(x-18)}{x}}{x}=\frac{16}{25}.$$

$$\therefore\quad \frac{(x-18)^2}{x^2}=\frac{16}{25},$$

$$\frac{x-18}{x}=\pm\frac{4}{5}.$$

若負數不用，

$$\frac{x-18}{x}=\frac{4}{5},$$

解之，$x=90$。 (答) 90升。

【問 題】

一桶有酒精 480 升，先取出若干升，以水補之，更比前回多取出84升，又以水補之，於是桶內水與酒精之容量相等，問最初取出酒精之量如何？

【解 答】

設最初取出之量爲 x 升，則第一回以水補足時酒精之量爲

$$\frac{480-x}{480}.$$

故第二回取出後所餘之酒精爲

$$\frac{480-x}{480}\{480-(x+84)\},$$

此爲最初時之半，故等於 240 升.

$$\frac{480-x}{480}\{480-(x+84)\}=240,$$

$$(480-x)(396-x)=240\times480,$$

$$x^2-876x+74880=0.$$

解之， $x=780$ 或 $x=96$.

$x=780$ 與題意不合，故捨之.

(答) 96升.

10. 餘式定理

〔例〕試不用除法，求 $x-2$ 除 x^2-4x+6 時之餘式.

其次凡關於 x 之整式 P，以 $x-a$ 除之，其餘式等於以 a 代 P 式中之 x 所得之值，試證明之.

其次應用此理，求 $x-3$ 除 x^3-2x^2+3x+7 時之餘式.

以 $x-2$ 除 x^2-4x+6，設商爲 Q，餘式爲 R，則

$$x^2-4x+6=(x-2)Q+R,$$

$$\therefore\quad R=x^2-4x+6-(x-2)Q.$$

此時 Q 式含 x，R 不含 x. 故 x 之值有變化，而 R 無變化.

此等式爲恆等式，不論 x 爲何數皆能成立，今以 2 代 x，則

$(x-2)Q$ 因 $x-2$ 爲 0 而等於 0.

$$\therefore\quad R=2^2-4\times2+6-0=2\cdots\cdots(\text{答})$$

其次同樣於 $P=(x-a)Q+R$，以 a 代 x，則因 $(x-a)Q$ 爲 0，故 R 等於以 a 代 P 式中之 x

所得之值．此定理稱爲餘式定理．

其次以 $x-3$ 除 x^3-2x^2+3x+7，設餘式爲 R，則

$$R=3^3-2\times3^2+3\times3+7$$

$$=27-18+9+7=25\cdots\cdots(答)$$

〔注意〕 由餘式定理，如 $R=0$，則 $x-a$ 必能整除 P 而爲 P 之因式，是名因式定理．

【問　題】

應用餘式定理，求以下第二式除第一式之餘式．

1. x^2-7x+5，　$x-3$．

2. x^3-7x+5，　$x+1$．

3. x^3+2x^2-x-1，　$x+2$．

【解　答】

1. $R=3^2-7\times3+5$

$=9-21+5=-7\cdots\cdots(答)$

2. $R=(-1)^3-7(-1)+5$

$=-1+7+5=11\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$

3. $R=(-2)^3+2(-2)^2-(-2)-1$

$=-8+8+2-1=1\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$

〔例〕設 x^3+2x^2+x+m 能以 $x+2$ 除盡，則m為如何之值？

設以 $x+2$ 除 x^3+2x^2+x+m 之餘式為 0，

則 $(-2)^3+2(-2)^2+(-2)+m=0$,

$-8+8-2+m=0$,

$\therefore\ m=2.$ (答) $m=2$.

【問 題】

1. 求下列各式除 $3x^4-2x^3+5x-1$ 之餘式：

(a) $x+2$, (b) $2x-1$, (c) $2x+3$.

2. 設 $2x^5-3x^3+mx+7-3m$ 能以 $x-1$ 整除，試定m之值。

3. 應用剩餘定理，求 a 與 b 之值，若 x^3+ax^2+2x+b 能為 $(x-1)$，$(x+4)$ 除盡之。 (上海)

【解 答】

1. (a) $R=3(-2)^4-2(-2)^3+5(-2)-1$

$=48+16-10-1=53$ ……(答)

(b) 以 $2x-1$ 為 0 時 x 之值即$\frac{1}{2}$代入 $3x^4-2x^3+5x-1$，而求其餘式，得

$$\therefore \quad R=3\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\left(\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=\frac{3}{16}-\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{3}{16}-\frac{4}{16}+2\frac{8}{16}-1$$

$$=1\frac{7}{16}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(c) $$R=3\left(-\frac{3}{2}\right)^4-2\left(-\frac{3}{2}\right)^3+5\left(-\frac{3}{2}\right)-1$$

$$=\frac{243}{16}+\frac{27}{4}-\frac{15}{2}-1$$

$$=13\frac{7}{16}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $2-3+m+7-3m=0$。

$\therefore \quad -2m=-6, \quad m=3\cdots\cdots$(答)

3. 以 $x=1$ 代入，得

$1+a+2+b=0$。

$\therefore \quad a+b=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又以 $x=-4$ 代入，得

$-64+16a-8+b=0$。

$\therefore \quad 16a+b=72\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(2)－(1)，$15a=75$， $\therefore \quad a=5$，

以此代入(1)，$5+b=-3$， $\therefore \quad b=-8$。

(答) $a=5$， $b=-8$。

〔例〕證明 x^4-81y^4 能以 $x-3y$ 或 $x+3y$ 除盡。

以 $x=3y$ 代入 x^4-81y^4 之 x，則

$$(3y)^4-81y^4=81y^4-81y^4=0。$$

故 x^4-81y^4 能以 $x-3y$ 除盡。

又以 $x=-3y$ 代入 x^4-81y^4 之 x，則

$$(-3y)^4-81y^4=81y^4-81y^4=0。$$

故 x^4-81y^4 能以 $x+3y$ 除盡。

【問　題】

1. 證明 $3x^3-2x^2-7x-2$ 能為 x^2-x-2 整除。

2. 證明 $a-b$ 能整除

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)。$$

3. 證明 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 有 $a+b+c$ 之因式。

【解　答】

1. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$，

以 $x-2$ 除 $3x^3-2x^2-7x-2$，則

$$R=3\times2^3-2\times2^2-7\times2-2$$
$$=24-8-14-2=0。$$

又以 $x+1$ 除 $3x^3-2x^2-7x-2$，則

$$R=3(-1)^3-2(-1)^2-7(-1)-2$$
$$=-3-2+7-2=0.$$

如是則 $3x^3-2x^2-7x-2$ 能為 $x-2$ 或 $x+1$ 整除，故能為 $(x-2)(x+1)$ 即 x^2-x-2 整除。

2. 以 b 代入

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$

之 a，則

$$R=b^3(b-c)+b^3(c-b)+c^3(b-b)$$
$$=b^4-b^3c+b^3c-b^4+0=0.$$

故 $a-b$ 能整除

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

3. 以 $-(b+c)$ 代入 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之 a。

$$R=\{-(b+c)\}^3+b^3+c^3$$
$$-3\{-(b+c)bc\}$$
$$=-(b+c)^3+b^3+c^3+3bc(b+c)$$
$$=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3$$
$$+3b^2c+3bc^2=0.$$

故 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 有 $a+b+c$ 之因式。

〔例〕設以 $x-1$ 除 x^2+px+q 而餘 6，又以 $x+1$ 除而餘 2，則 p 及 q 之值如何？

以 $x-1$ 除 x^2+px+q 而餘 6，故

$$1+p+q=6.$$

$$\therefore\quad p+q=5 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又以 $x+1$ 除而餘 2，故

$$(-1)^2+p(-1)+q=2.$$

$$\therefore\quad -p+q=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)+(2)，　$2q=6$，　$q=3$.

以此代入(1)，　$p=2$.

（答）　$p=2$，　$q=3$。

【問　題】

1. 設 $(x^2-1)(x+2)$ 能整除

$$x^4+3x^3+mx^2+nx+p,$$

試定 m，n，p 之值.

2. 有 x 之二次整式，能以 $x-1$ 整除．如以 $x-2$ 除之，則餘 1．又以 $x-3$ 除之，則餘 6．求此二次式．

【解　答】

1. $(x^2-1)(x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$.

$\therefore$ $x^4+3x^3+mx^2+nx+p$ 能以 $x-1$, $x+1$, $x+2$ 整除.

$\therefore\quad 1+3+m+n+p=0$.

$\therefore\quad m+n+p=-4$ ……………(1)

又　$1-3+m-n+p=0$.

$\therefore\quad m-n+p=2$ ……………(2)

又　$16-24+4m-2n+p=0$.

$\therefore\quad 4m-2n+p=8$ ……………(3)

(1)－(2)，　$2n=-6$，　$n=-3$.

$\therefore$　由(1)，　$m+p=-1$ ……………(4)

由(3)，　$4m+p=2$ ……………(5)

由(4)與(5)，　$m=1$，　$p=-2$.

(答)　$m=1$，$n=-3$，$p=-2$.

2. 設所求之整式爲 ax^2+bx+c，則

$a+b+c=0$ ……………(1)

$4a+2b+c=1$ ……………(2)

$9a+3b+c=6$ ……………(3)

解之得，　$a=2$，　$b=-5$，　$c=3$.

(答)　$2x^2-5x+3$.

〔例〕試證 $x-y$ 能除盡 x^n-y^n. 又 n 爲奇數時，$x+y$ 能除盡 x^n+y^n. 再應用此理，證明 7 能除盡 8^7-1，9 能除盡 8^7+1.

於 x^n-y^n，以 y 代 x，則

答 $R=y^n-y^n=0$.

故 $x-y$ 能除盡 x^n-y^n.

次於 x^n+y^n，以 $-y$ 代 x，則

$$R=(-y)^n+y^n \quad (n\text{ 爲奇數故})$$

$$=-y^n+y^n=0.$$

故 n 爲奇數時，$x+y$ 能除盡 x^n+y^n.

於 8^7-1，設 $x=8$，$y=1$，則

$$8^7-1=x^7-y^7.$$

故能以 $x-y=8-1=7$ 除盡.

又於 8^7+1，設 $x=8$，$y=1$，則

$$8^7+1=x^7+y^7.$$

故能以 $x+y=8+1=9$ 除盡.

【問　題】

1. 試證明 7^5+1 爲 8 之倍數.

2. 試證明 10^8-1 爲 9 及 11 之倍數.

【解　答】

1. 設 $x=7$, $y=1$, 則

$$7^5+1=x^5+y^5.$$

故爲 $x+y=7+1=8$ 之倍數.

2. 設 $x=10$, $y=1$, 則

$$10^8-1=x^8-y^8.$$

故爲 $x-y=10-1=9$ 之倍數.

次設 $x=10$, $y=-1$ 則

$$10^8-1=10^8-(-1)^8=x^8-y^8.$$

故爲 $x-y=10-(-1)=11$ 之倍數.

或應用析因式法如下解之:

$$10^8-1=(10^4+1)(10^4-1)$$

$$=(10^4+1)(10^2+1)(10+1)(10-1).$$

故 10^8-1 爲 9 及 11 之倍數.

〔例〕試由觀察將次式析因式：

x^3+4x^2-5.

因不含 x 之項 -5 之因數為 1 與 5，故如以 $x=1$，$x=-1$，$x=5$，$x=-5$ 之内代入而此式為 0，則有 $x-1$，$x+1$，$x-5$，$x+5$ 之因式存在。

設 $x=1$，則

$$x^3+4x^2-5=1+4-5=0.$$

故此式有 $x-1$ 之因式。

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+5 \\ \hline x-1 & x^3+4x^2-5 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & 5x^2-5 \\ & 5x^2-5x \\ \hline & 5x-5 \\ & 5x-5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

x^2+5x+5 不能再析因式，故

$$x^3+4x^2-5=(x-1)(x^2+5x+5).$$

【問　題】

將以下各式析因式：

1. $2x^3+3x^2-1$。

2. $2x^3+x^2-15x-18$。

【解　答】

1. 設 $x=-1$，則

$$2x^3+3x^2-1=-2+3-1=0。$$

故此式有因式 $x+1$。

$$\begin{aligned}2x^3+3x^2-1&=2x^3+2x^2+x^2-1\\&=2x^2(x+1)+(x+1)(x-1)\\&=(x+1)(2x^2+x-1)\\&=(x+1)(2x-1)(x+1)\\&=(x+1)^2(2x-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

2. 設 $x=-2$，則

$$\begin{aligned}&2x^3+x^2-15x-18\\&=-16+4+30-18=0。\end{aligned}$$

故此式有因式 $x+2$。

$$\begin{aligned}&2x^3+x^2-15x-18\\&=2x^3+4x^2-3x^2-6x-9x-18\\&=2x^2(x+2)-3x(x+2)-9(x+2)\\&=(x+2)(2x^2-3x-9)\\&=(x+2)(2x+3)(x-3)\ \cdots\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

11. 一元高次方程

〔例〕解次之方程：

(i) $x^3-3x^2-x+3=0$.

(ii) $(x^2-3x)^2+4x^2-12x-21=0$.

高次方程可析因式而解之者。

(i) $x^3-3x^2-x+3=0$,

$x^2(x-3)-(x-3)=0$,

$(x-3)(x^2-1)=0$,

$(x-3)(x+1)(x-1)=0$,

$\therefore$ $x=3$，或 $x=-1$，或 $x=1$.

(答) $x=3$, $x=-1$, $x=1$.

(ii) $(x^2-3x)^2+4x^2-12x-21=0$,

$(x^2-3x)^2+4(x^2-3x)-21=0$,

$(x^2-3x+7)(x^2-3x-3)=0$,

$\therefore$ $x^2-3x+7=0$ 或 $x^2-3x-3=0$.

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}i}{2}$ 或 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

(答) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}i}{2}$ 或 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

【問　題】

解次之方程：

1. $x^4-1=0$.

2. $x^3-2x^2+3=0$.

3. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

【解　答】

1. $x^4-1=0$, $\therefore (x^2+1)(x^2-1)=0$.

$x=\pm i$ 或 $x=\pm 1$…………(答)

2. 由觀察知一根爲 $x=-1$.

$x^3-2x^2+3=0$,

$x^3+x^2-3x^2-3x+3x+3=0$,

$x^2(x+1)-3x(x+1)+3(x+1)=0$,

$(x+1)(x^2-3x+3)=0$.

$\therefore \quad x=-1$ 或 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$……(答)

3. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$,

$(x^2+x+6)(x^2+x-2)=0$,

$(x^2+x+6)(x+2)(x-1)=0$.

$\therefore \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$,

或 $x=-2$ 或 $x=1$.

(答)　$x=1$, $x=-2$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$.

〔例〕解 $x^3=1$。

$$x^3=1.\qquad \therefore\quad x^3-1=0.$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=1\text{ 或 }x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},$$

$$\text{(答)}\quad x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

〔注意〕　此虛根常如下表之:

$$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega,\quad \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\omega'.$$

卽1之立方根為1，ω，ω'。

如是則

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\omega'.$$

又 $$\omega'^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}\,i-3}{4}$$

$$=\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega.$$

故1之立方根，亦可以1，ω，ω^2 表之。

【問　題】

解次之方程:

1. $x^3=a^3$。
2. $x^3+1=0$。
3. $x^6-7x^3-8=0$。
4. $x^3=1$ 之虛根爲 1，ω，ω'，試證 $1+\omega+\omega'=0$。

【解　答】

1. $x^3=a^3$.　　$\therefore\ x^3-a^3=0$。

$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$。

$$\therefore\quad x=a \text{ 或 } x=\frac{-a\pm\sqrt{3a^2}\,i}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}a.$$

（答）　$x=a$，$x=a\omega$，$x=a\omega^2$。

2. $x^3+1=0$，

$x^3-(-1)^3=0$。

（答）　$x=-1$，$x=-\omega$，$x=-\omega^2$。

3. $x^6-7x^3-8=0$，

$(x^3-8)(x^3+1)=0$，

$\therefore\quad x^3-8=0$ 或 $x^3+1=0$。

（答）　$x=2$，　$x=2\omega$，　$x=2\omega^2$，

$x=-1$，$x=-\omega$，$x=-\omega^2$。

4. $1+\omega+\omega'$

$$=1+\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=0.$$

〔例〕解次之方程:

(i) $100x^4-229x^2+9=0$.

(ii) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

(i) $100x^4-229x^2+9=0$.

設 $x^2=y$, 則

$$100y^2-229y+9=0,$$
$$(25y-1)(4y-9)=0.$$
$$\therefore\quad y=\frac{1}{25}\ 或\ y=\frac{9}{4}.$$
$$\therefore\quad x^2=\frac{1}{25}\ 或\ x^2=\frac{9}{4}.$$
$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{5}\ 或\ x=\pm\frac{3}{2}.$$

(答) $x=\pm\dfrac{1}{5}, x=\pm\dfrac{3}{2}$.

(ii) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

設 $\dfrac{x}{x^2+1}=y$, 則原方程爲

$$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2},\quad 2y^2-5y+2=0.$$
$$\therefore\ (2y-1)(y-2)=0.$$
$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}\ 或\ y=2.$$
$$\therefore\quad \frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2},\ 或\ \frac{x}{x^2+1}=2.$$

如　$\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$，則　$x^2-2x+1=0$。

$(x-1)^2=0$。　$\therefore$　$x=1$。

如　$\dfrac{x}{x^2+1}=2$，　則　$2x^2-x+2=0$。

$\therefore$　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$。

(答)　$x=1$，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$。

【問　題】

解次之方程：

1.　$x^4-10x^2+9=0$。

2.　$(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$。

【解　答】

1.　(答)　$x=\pm1$，$x=\pm3$。

2.　設 $x^2+4x=y$，則

$(y+5)^2-12y-40=0$，

$y^2+10y+25-12y-40=0$，

$y^2-2y-15=0$，　$(y-5)(y+3)=0$，

$y=5$ 或 $y=-3$。

$\therefore$　$x^2+4x=5$ 或 $x^2+4x=-3$。

由 $x^2+4x=5$，得 $x^2+4x-5=0$，

為 $(x+5)(x-1)=0$。　$\therefore$　$x=-5$ 或 $x=1$。

由 $x^2+4x=-3$，得 $x^2+4x+3=0$，

$(x+1)(x+3)=0$。　$\therefore$　$x=-1$ 或 $x=-3$。

〔例〕解次之方程:

(i) $x(x-1)(x+1)=6\times7\times8$.

(ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$.

(i) $x(x-1)(x+1)=6\times7\times8$,

由視察知有 $x=7$ 之根.

$x^3-x-6\times7\times8=0$,

$x^3-7x^2+7x^2-49x+48x-7\times48=0$,

$x^2(x-7)+7x(x-7)+48(x-7)=0$.

$\therefore\quad (x-7)(x^2+7x+48)=0$.

$\therefore\quad x=7$ 或 $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{143}\,i}{2}$.

(答) $x=7$ 或 $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{143}\,i}{2}$.

(ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$,

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=0$,

$(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24=0$,

$(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$.

$\therefore\quad x=0$ 或 $x=-5$, 或 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}$

(答) $x=0$, $x=-5$, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}$.

【問　題】

解次之方程：

1. $x(x+1)(x+2)=24$.

2. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

【解　答】

1. $x(x+1)(x+2)=24$,

$$x(x+1)(x+2)=2\times3\times4.$$

故知一根爲 2。

$$x^3+3x^2+2x-2\times3\times4=0,$$

$$x^3-2x^2+5x^2-10x+12x-2\times12=0,$$

$$x^2(x-2)+5x(x-2)+12(x-2)=0,$$

$$(x-2)(x^2+5x+12)=0.$$

$$\therefore\quad x=2\text{ 或 }x=\frac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{2}\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$,

$$(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44=0,$$

$$(x^2-2x)-23(x^2-2x)+76=0,$$

$$(x^2-2x-4)(x^2-2x-19)=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore\quad x=1\pm\sqrt{5}\\&\text{或}\quad x=1\pm2\sqrt{5}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

〔例〕解次之方程：
(i) $2x^3+7x^2+7x+2=0$。
(ii) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$。

此方程之係數，前與後順次相等，稱爲相反方程或逆數方程，另有特別之解法。

(i) $2x^3+7x^2+7x+2=0$，

$2(x^3+1)+7x(x+1)=0$，

$(x+1)(2x^2-2x+2+7x)=0$，

$(x+1)(2x^2+5x+2)=0$，

$(x+1)(2x+1)(x+2)=0$。

$\therefore\quad x=-1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $x=-2$。

（答） $x=-1$，$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=-2$。

(ii) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$，

因無 $x=0$ 之根，故以 x^2 除兩邊，

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0。$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0，$$

設 $x+\dfrac{1}{x}=y$，將其兩邊各平方之，

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2，$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2。$$

$\therefore\ 6(y^2-2)+5y-38=0,$

$6y^2+5y-50=0,$

$(2y-5)(3y+10)=0.$

$\therefore\ y=\frac{5}{2}$ 或 $y=-\frac{10}{3}.$

如 $y=\frac{5}{2}$，則 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$

$\therefore\ 2x^2-5x+2=0.$

$\therefore\ (2x-1)(x-2)=0.$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2.$

如 $y=-\frac{10}{3}$，則 $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3},$

$3x^2+10x+3=0,\quad (3x+1)(x+3)=0.$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=-3.$

(答) $x=2,\ x=-3,\ x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{3}.$

【問　題】

1. 解方程 $x^3+2x^2+2x+1.$ (江蘇)
2. 解 $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0.$

【解　答】

1. (答) $x=-1$ 或 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$

2. (答) $x=1$(等根)，$x=-2,\ x=-\frac{1}{2}.$

12. 無理方程

〔例〕解 $x+\sqrt{x+1}=5$.

$$x+\sqrt{x+1}=5.$$

$$\sqrt{x+1}=5-x.$$

兩邊各平方之，

$$x+1=25-10x+x^2,$$

$$x^2-11x+24=0,$$

$$(x-3)(x-8)=0.$$

$$\therefore \quad x=3 \text{ 或 } x=8.$$

〔驗〕 $x=3$，則

$$\text{左邊}=3+\sqrt{3+1}=3+2=5.$$

故 $x=3$ 爲其根.

又 $x=8$，則

$$\text{左邊}=8+\sqrt{8+1}=8+3=11.$$

故 $x=8$ 非其根.

(答) $x=3$.

〔注意〕 將 $\sqrt{x+1}=5-x$ 之兩邊平方之[illegible]得 $x+1=(5-x)^2$，此式雖爲 $\sqrt{x+1}=5-x$，

兩邊之平方，然同時亦爲 $\sqrt{x+1}=-(5-x)$ 兩邊之平方。

即知兩邊因平方而有 $\sqrt{x+1}=-(5-x)$ 之根，實係題外之根。

$x=8$ 爲 $\sqrt{x+1}=-(5-x)$之根。

即知兩邊因平方而生之根爲增根。故解無理方程，必須驗算。

【問　題】

解 $x+\sqrt{3x-14}=6$。　　　　(上海)

【解　答】

$$x+\sqrt{3x-14}=6.$$

$$\therefore\quad \sqrt{3x-14}=6-x,$$

$$3x-14=36-12x+x^2.$$

$$\therefore\quad x^2-15x+50=0,$$

$$(x-10)(x-5)=0.$$

$$\therefore\quad x=10 \text{ 或 } x=5.$$

(驗)　$x=5$，則

左邊 $=5+\sqrt{15-14}=5+1=6$。

故 $x=5$ 爲其根，而 $x=10$ 非其根。

(答)　$x=$

〔例〕 解$\sqrt{x}+\sqrt{5x+1}=2$。

$$\sqrt{x}+\sqrt{5x+1}=2,$$
$$\sqrt{5x+1}=2-\sqrt{x}.$$

兩邊各平方之，

$$5x+1=4-4\sqrt{x}+x.$$
$$\therefore\quad 4\sqrt{x}=-4x+3,$$

兩邊再平方之，

$$16x=16x^2-24x+9.$$
$$\therefore\quad 16x^2-40x+9=0,$$
$$(4x-9)(4x-1)=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{9}{4}\ \text{或}\ x=\frac{1}{4}.$$

〔驗〕 $x=\frac{9}{4}$，則

$$\text{左邊}=\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{45}{4}+1}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5.$$

故 $x=\frac{9}{4}$ 非其根。

$x=\frac{1}{4}$，則

$$\text{左邊}=\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{5}{4}+1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

故 $x=\frac{1}{4}$ 爲其根。 (答) $x=\frac{1}{4}$。

【問　題】

1.　解$\sqrt{x+36}-\sqrt{x}=2$.　　　(上海)

2.　解$2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=1$.

【解　答】

1.　$\sqrt{x+36}-\sqrt{x}=2$,

$\sqrt{x+36}=2+\sqrt{x}$.

兩邊各平方，$x+36=4+4\sqrt{x}+x$.

$\therefore\ 4\sqrt{x}=32$, $\sqrt{x}=8$, $x=64$.

〔驗〕　$x=64$，則左邊爲

左邊$=\sqrt{64+36}-\sqrt{64}=10-8=2$.

故 $x=64$ 爲其根.　　　(答)　$x=64$.

2.　$2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=1$,

$2\sqrt{x-1}=1+\sqrt{2x-1}$.

兩邊各平方，$4x-4=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1$.

$\therefore\ 2\sqrt{2x-1}=2x-4$,

$\sqrt{2x-1}=x-2$,

兩邊再平方，$2x-1=x^2-4x+4$,

$x^2-6x+5=0$,　$(x-1)(x-5)=0$.

$x=1$ 或 $x=5$.

〔驗〕　$x=1$，則

左邊$=2\sqrt{1-1}-\sqrt{2-1}=0-1=-1$.

$x=5$，則

左邊$=2\sqrt{5-1}-\sqrt{10-1}=4-3=1$.

故$x=5$爲其根，$x=1$非其根.　(答)　$x=5$.

〔例〕解次之方程：

$$2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+8}=2.$$

$$2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+8}=2,$$

$$2\sqrt{x+5}=2+\sqrt{2x+8}.$$

兩邊各平方，

$$4x+20=4+4\sqrt{2x+8}+2x+8,$$

$$2x+8=4\sqrt{2x+8},$$

$$x+4=2\sqrt{2x+8}.$$

兩邊再平方，

$$x^2+8x+16=4(2x+8).$$

$$x^2=16. \qquad \therefore \quad x=\pm 4.$$

〔驗〕 $x=4$，則

左邊$=2\sqrt{4+5}-\sqrt{8+8}=6-4=2.$

$x=-4$，則

左邊$=2\sqrt{-4+5}-\sqrt{-8+8}=2-0=2.$

(答) $x=\pm 4.$

【問 題】

解下列方程：

1. $\sqrt{2x+10}+2\sqrt{x+6}=2.$

2. $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1.$ (習題)

【解　答】

1.　$\sqrt{2x+10}+2\sqrt{x+6}=2$,

$\sqrt{2x+10}=2-2\sqrt{x+6}$.

兩邊平方，$2x+10=4-8\sqrt{x+6}+4x+24$,

$\therefore\quad 8\sqrt{x+6}=2x+18$,

$4\sqrt{x+6}=x+9$,

兩邊再平方，$16x+96=x^2+18x+81$,

$\therefore\quad x^2+2x-15=0$,

$(x+5)(x-3)=0$.

$\therefore\quad x=-5$ 或 $x=3$.

〔驗〕　$x=-5$，則

左邊$=\sqrt{-10+10}+2\sqrt{-5+6}=2$.

故 $x=-5$ 爲其根.

$x=3$，則

左邊$=\sqrt{6+10}+2\sqrt{3+6}=4+6=10$.

故 $x=3$ 非其根.　　　　（答）　$x=-5$

2.　$\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1$,

$\therefore\quad \sqrt{x+10}=1+\sqrt{x+1}$.

兩邊各平方，$x+10=1+2\sqrt{x+1}+x+1$.

$\therefore\quad 2\sqrt{x+1}=8$,　$\sqrt{x+1}=4$.

兩邊再平方，$x+1=16$,　　$\therefore\quad x=15$.

〔驗〕　$x=15$，則

左邊$=\sqrt{15+10}-\sqrt{15+1}=5-4=1$.

故 $x=15$ 爲其根.　　　　（答）　$x=15$.

〔例〕解次之方程

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x}.$$

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x}.$$

兩邊各平方，

$$2x-1-2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1}+x-1=6-x,$$

$$\therefore\quad -2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1}=-4x+8,$$

$$\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1}=2x-4.$$

兩邊再平方，

$$2x^2-3x+1=4x^2-16x+16,$$

$$\therefore\quad 2x^2-13x+15=0,$$

$$(2x-3)(x-5)=0,$$

$$x=\frac{3}{2}\text{ 或 }x=5.$$

〔驗〕 $x=\frac{3}{2}$，則

$$左邊=\sqrt{3-1}-\sqrt{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$右邊=\sqrt{6-\frac{3}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$x=5$，則

$$左邊=\sqrt{10-1}-\sqrt{5-1}=3-2=1,$$

$$右邊=\sqrt{6-5}=1.$$

故 $x=\frac{3}{2}$ 非其根，$x=5$ 爲其根。(答) $x=5$.

【問 題】

1. 解$\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$。

(上海)

2. 解$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$。(江蘇)

【解 答】

1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$,

$\therefore\quad \sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$.

兩邊各平方,

$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{3x-5}+3x-5=5x-6$.

$\therefore\quad 2\sqrt{2x-3}\sqrt{3x-5}=2$,

$\sqrt{2x-3}\sqrt{3x-5}=1$。

兩邊再平方,$6x^2-19x+15=1$,

$\therefore\quad 6x^2-19x+14=0$,

$(6x-7)(x-2)=0$, $\therefore\quad x=\frac{7}{6}$或$x=2$.

$x=\frac{7}{6}$非其根,$x=2$爲其根. 各自驗之.

2. $\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$,

$x+9=2x+35-2\sqrt{2x+35}\sqrt{x+2}+x+2$.

$\therefore\quad 2\sqrt{2x+35}\sqrt{x+2}=2x+28$,

$\therefore\quad \sqrt{2x+35}\sqrt{x+2}=x+14$.

$2x^2+39x+70=x^2+28x+196$,

$\therefore\quad x^2+11x-126=0$,

$(x+18)(x-7)=0$. $\therefore\quad x=-18$或$x=7$.

$x=-18$非其根,$x=7$爲其根,各自驗之.

〔例〕解下之方程：

$$3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0.$$

$$3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0,$$

$$3x^2-4x+5+2\sqrt{3x^2-4x+5}-15=0.$$

設　$\sqrt{3x^2-4x+5}=y$，則

$$y^2+2y-15=0,$$

$$(y+5)(y-3)=0.$$

$$\therefore\quad y=-5\ \text{或}\ y=3.$$

$\sqrt{3x^2-4x+5}$為正，故捨 -5 不用.

$$\therefore\quad \sqrt{3x^2-4x+5}=3,$$

$$\therefore\quad 3x^2-4x+5=9,$$

$$\therefore\quad 3x^2-4x-4=0,$$

$$(x-2)(3x+2)=0.$$

$$\therefore\quad x=2\ \text{或}\ x=-\frac{2}{3}.$$

（答）　$x=2$；$x=-\dfrac{2}{3}$.

〔注意〕　如此之解法，無驗算之必要．因 $x=2$ 及 $x=-\dfrac{2}{3}$ 必為 $2x^2-4x+5=9$ 之根．故此式左邊為 9，而 $\sqrt{3x^2-4x+5}$ 必為 3，即等於右邊．

【問　題】

解次之方程：

1. $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1$。 （浙江）

2. $2\sqrt{x^2-2x+5}+3x^2=6x+1$。

【解　答】

1. $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1$，

$x^2-4x+7+2\sqrt{x^2-4x+7}-8=0$。

設 $\sqrt{x^2-4x+7}=y$，則

$y^2+2y-8=0$， $(y+4)(y-2)=0$。

$\therefore$ $y=-4$ 或 $y=2$。

捨負數不用，即 $\sqrt{x^2-4x+7}=2$。

$\therefore$ $x^2-4x+7=4$， $x^2-4x+3=0$。

$(x-1)(x-3)=0$，

$\therefore$ $x=1$ 或 $x=3$ ……………（答）

2. $2\sqrt{x^2-2x+5}+3x^2=6x+1$，

$3(x^2-2x+5)+2\sqrt{x^2-2x+5}-16=0$，

設 $\sqrt{x^2-2x+5}=y$，則

$3y^2+2y-16=0$， $(3y+8)(y-2)=0$，

$\therefore$ $y=-\frac{8}{3}$ 或 $y=2$。捨 $y=-\frac{8}{3}$ 不用。

$\sqrt{x^2-2x+5}=2$， $x^2-2x+5=4$，

$x^2-2x+1=0$， $(x-1)^2=0$，

$x-1=0$。 $\therefore$ $x=1$…………（答）

〔例〕解次之方程：

$$\sqrt{7x-4}+\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}.$$

$$\sqrt{7x-4}+\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2},$$
$$\sqrt{7x-4}-\sqrt{4x-2}=\sqrt{4x-1}-\sqrt{7x-5}.$$

兩邊各平方，

$$7x-4-2\sqrt{7x-4}\sqrt{4x-2}+4x-2$$
$$=4x-1-2\sqrt{4x-1}\sqrt{7x-5}+7x-5.$$
$$\therefore\quad -2\sqrt{7x-4}\sqrt{4x-2}$$
$$=-2\sqrt{4x-1}\sqrt{7x-5},$$
$$\sqrt{7x-4}\sqrt{4x-2}=\sqrt{4x-1}\sqrt{7x-5},$$
$$28x^2-30x+8=28x^2-27x+5,$$
$$-3x=-3.\quad\therefore\quad x=1.$$

〔驗〕 左邊 $=\sqrt{7-4}+\sqrt{7-5}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

右邊 $=\sqrt{4-1}+\sqrt{4-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

(答) $x=1$.

【問 題】

解次之方程：

1. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}$
$=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

2. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}$
$=\sqrt{(a+c)-(b+d)x}$.

【解 答】

1. $\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}$
$=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$，
$x^2+x-1-2\sqrt{x^2+x-1}\sqrt{x^2-x+1}$
$+x^2-x+1$
$=x^2+1-2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}+x^2-1$.
$\therefore\ \sqrt{x^2+x-1}\sqrt{x^2-x+1}$
$=\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}$，
$\{x^2+(x-1)\}\{x^2-(x-1)\}=x^4-1$，
$x^4-(x-1)^2=x^4-1$;
$x^4-x^2+2x-1=x^4-1$，
$-x^2+2x=0$， $x(x-2)=0$.
$\therefore\ x=0$ 或 $x=2$.

〔驗〕 $x=0$，則
左邊$=\sqrt{-1}-1$， 右邊$=1-\sqrt{-1}$.
故 $x=0$ 非其根。
$x=2$，則
左邊$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$， 右邊$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
故 $x=0$ 爲其根。 (答) $x=2$.

2. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}$
$=\sqrt{(a+c)-(b+d)x}$.
$\therefore\ a-bx+2\sqrt{a-bx}\sqrt{c-dx}+c-dx$
$=a+c-bx-dx$，
$(a-bx)(c-dx)=0$.
$\therefore\ x=\dfrac{a}{b}$ 或 $x=\dfrac{c}{d}$.
驗算之結果，兩者皆爲其根。

〔例〕解次之方程：

$$\frac{1}{x^2+x-1}+\frac{4}{\sqrt{(x^2+x-1)}}=12.$$

$$\frac{1}{x^2+x-1}+\frac{4}{\sqrt{(x^2+x-1)}}=12,$$

$$\frac{1}{x^2+x-1}+\frac{4\sqrt{(x^2+x-1)}}{x^2+x-1}=12.$$

$$\therefore\quad 1+4\sqrt{x^2+x-1}=12(x^2+x-1).$$

設 $\sqrt{x^2+x-1}=y$,

$$12y^2-4y-1=0,$$

$$(2y-1)(6y+1)=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}\text{ 或 }y=-\frac{1}{6}$$

y 不爲負，故捨 $y=-\frac{1}{6}$ 不用.

$$\sqrt{x^2+x-1}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad 4x^2+4x-4=1,$$

$$4x^2+4x-5=0.$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+20}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}.$$ (答) $x=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}$.

【問 題】

解 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$.

【解 答】

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}.$$

因 $\sqrt{x+2}\sqrt{3x-2}=\sqrt{3x^2+4x-4}$,

故去分母得

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=4.$$

兩邊各平方,

$$3x-2+2\sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}+x+2=16,$$

$$2\sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}=16-4x,$$

$$\sqrt{3x-2}\sqrt{x+2}=8-2x,$$

$$3x^2+4x-4=64-32x+4x^2,$$

$$x^2-36x+68=0,$$

$$(x-2)(x-34)=0.$$

$\therefore$ $x=2$ 或 $x=34$.

〔驗〕 $x=2$, 則

左邊$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. 右邊$=1$.

故爲其根.

$x=34$ 非其根.

(答) $x=2$.

13. 一次與二次之聯立方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$2y-3x=1,\quad 13x^2-8xy+3=0.$$

一次與二次之二元聯立方程，必可由一次式將 x 或 y 以其他之部分表之，再以此代入二次式而解之.

$$2y-3x=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$13x^2-8xy+3=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，$y=\dfrac{1+3x}{2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

以此式代入(2)，

$$13x^2-4x(1+3x)+3=0,$$

$$13x^2-4x-12x^2+3=0,$$

$$x^2-4x+3=0,$$

$$(x-1)(x-3)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } x=3.$$

$x=1$，則由(3)，得 $y=2$.

$x=3$，則由(3)，得 $y=5$.

(答) $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$3x-4y=5,\quad 3x^2-xy-3y^2=21.$$

【解　答】

$$3x-4y=5 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$3x^2-xy-3y^2=21 \quad \cdots\cdots(2)$$

由(1)，$x=\dfrac{5+4y}{3}$ ……(3)

以(3)代入(2)，

$$\frac{(5+4y)^2}{3}-\frac{(5+4y)y}{3}-3y^2=21,$$

$$25+40y+16y^2-5y-4y^2-9y^2=63,$$

$$3y^2+35y-38=0,$$

$$(3y+38)(y-1)=0.$$

$$\therefore y=1 \text{ 或 } y=-\frac{38}{3}.$$

$y=1$，由(3)得 $x=3$.

$y=-\dfrac{38}{3}$，由(3)得 $x=-\dfrac{137}{9}$.

(答) $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{137}{9}, \\ y=-\dfrac{38}{3}. \end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$x+y=5$，　$xy=4$。

此可與前同樣之方法求得，但亦可如下之方法解之。

$$x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)^2-(2)\times 4$，　$x^2-2xy+y^2=9$。

$\therefore$　$(x-y)^2=9$，　$x-y=\pm 3$。

與(1)組合，

$$\begin{cases}x+y=5,\\x-y=3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=5,\\x-y=-3.\end{cases}$$

$\therefore$ $x=4$，$y=1$。　$\therefore$ $x=1$，$y=4$。

(答) $\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$

〔別解〕　以和為 5，積為 4 之二根作方程，由根與係數之關係，得

$$z^2-5z+4=0.$$

$\therefore$　$(z-1)(z-4)=0$。

$\therefore$　$z=1$ 或 $z=4$。

(答) $\begin{cases}x=1.\\y=4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

【問　題】

解下列聯立方程：

1. $x^2+y^2=25$，　$x-y=10$。　　(上海)

2. $x+y=5$，　$x^2+y^2=13$。　　(青島)

【解　答】

1. $x^2+y^2=25$ ……………………(1)

$x-y=10$ ……………………(2)

(1)−(2)², $2xy=-75$ ……………(3)

(1)+(3)，　$(x+y)^2=-50$，

$\therefore\ x+y=\pm 5\sqrt{2}\,i$。

由 $\begin{cases} x+y=5\sqrt{2}\,i, \\ x-y=10. \end{cases}$　得 $\begin{cases} x=\dfrac{10+5\sqrt{2}\,i}{2}, \\ y=\dfrac{-10+5\sqrt{2}\,i}{2}. \end{cases}$

由 $\begin{cases} x+y=-5\sqrt{2}\,i, \\ x-y=10. \end{cases}$　得 $\begin{cases} x=\dfrac{10-5\sqrt{2}\,i}{2}, \\ y=\dfrac{-10-5\sqrt{2}\,i}{2}. \end{cases}$

2. $x+y=5$……(1)　$x^2+y^2=13$……(2)

(1)²−(2)，　$2xy=12$ ………………(3)

(2)−(3)，　$(x-y)^2=1$，　$\therefore\ x-y=\pm 1$。

由 $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1. \end{cases}$　得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

由 $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1. \end{cases}$　得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

14. 二次與二次之同次聯立方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$x^2-3xy+2y^2=3,\quad 2x^2+y^2=6.$$

二次與二次之同次聯立方程，消去其含未知數之項，必可解之。一般有根四組。

$$x^2-3xy+2y^2=3\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+y^2=6\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×2−(2)，　$-6xy+3y^2=0$。

$\therefore\quad 2xy-y^2=0,\qquad y(2x-y)=0$。

$\therefore\quad y=0$ 或 $y=2x$。

$y=0$，則由 (2) 得

$2x^2=6,\quad x^2=3,\quad x=\pm\sqrt{3}$。

$y=2x$，則由 (2) 得

$2x^2+4x^2=6$。

$\therefore\quad x^2=1,\qquad x=\pm1$。

$x=1$ 時，$y=2$。

$x=-1$ 時，$y=-2$。

(答) $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\y=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\y=0.\end{cases}$

$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$xy+y^2=18,\qquad x^2-2xy=21.$$

【解　答】

$$xy+y^2=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$x^2-2xy=21 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)×7，$7xy+7y^2=126$.

(2)×6，$6x^2-12xy=126$.

各邊相減，$6x^2-19xy-7y^2=0$，

$$(3x+y)(2x-7y)=0.$$

$$\therefore\ y=-3x \text{ 或 } y=\frac{2x}{7}.$$

$y=-3x$，則由 (2) 得 $x^2+6x^2=21$，

$7x^2=21$，　$x^2=3$，　$x=\pm\sqrt{3}$.

$x=\pm\sqrt{3}$ 時，$y=\mp3\sqrt{3}$.

$y=\frac{2x}{7}$，則由 (2) 得

$$x^2-\frac{4x^2}{7}=21,\qquad 3x^2=147,$$

$x^2=49$，　$x=\pm7$.

$x=\pm7$ 時，$y=\pm2$.

(答) $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=-3\sqrt{3}.\end{cases}$　$\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=3\sqrt{3}.\end{cases}$

$\begin{cases}x=7,\\ y=2.\end{cases}$　$\begin{cases}x=-7,\\ y=-2.\end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$$3x^2+2xy-y^2=0,\quad x^2+y^2+2x=12.$$

$$3x^2+2xy-y^2=0 \cdots\cdots(1)$$
$$x^2+y^2+2x=12 \cdots\cdots(2)$$

將 (1) 析因式， $(3x-y)(x+y)=0$，

$\therefore\ y=3x$ 或 $y=-x$.

$y=3x$，則由 (2) 得 $x^2+9x^2+2x=12$，

$10x^2+2x-12=0$，$5x^2+x-6=0$，

$(5x+6)(x-1)=0$. $\therefore\ x=1$ 或 $x=\dfrac{-6}{5}$，

$x=1$ 時 $y=3$. 又 $x=-\dfrac{6}{5}$ 時 $y=-\dfrac{18}{5}$.

$y=-x$，則由 (2) 得

$x^2+x^2+2x=12$，$x^2+x-6=0$.

$\therefore\ (x+3)(x-2)=0$. $\therefore\ x=2$ 或 $x=-3$.

$x=2$ 時，$y=-2$. 又 $x=-3$ 時，$y=3$.

(答) $\begin{cases}x=1,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{6}{5},\\ y=-\dfrac{18}{5}.\end{cases}$

$\begin{cases}x=2,\\ y=-2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\ y=3.\end{cases}$

【問 題】

1. 解 $x^2-3xy=0$，$5x^2+3y^2=48$.
2. 解 $x^2+xy-6=0$，$x^2-5xy+6y^2=0$.

(上海)

【解 答】

1. $x^2-3xy=0\cdots(1)$ $5x^2+3y^2=48\cdots(2)$
由(1)，$x(x-3y)=0$。 $\therefore$ $x=0$ 或 $x=3y$。
$x=0$，則由 (2) 得
$3y^2=48$， $y^2=16$， $\therefore$ $y=\pm4$。
$x=3y$，則由 (2) 得 $45y^2+3y^2=48$，
$48y^2=48$， $y^2=1$。 $\therefore$ $y=\pm1$。
$y=1$ 時，$x=3$。 又 $y=-1$ 時，$x=-3$。

(答) $\begin{cases}x=0,\\y=4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=-4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-1.\end{cases}$

2. $x^2+xy-6=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$
$x^2-5xy+6y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$
由(2)，$(x-2y)(x-3y)=0$。 $\therefore$ $x=2y$ 或 $3y$。
$x=2y$，則由 (1) 得 $4y^2+2y^2-6=0$，
$6y^2=6$， $y^2=1$。 $\therefore$ $y=\pm1$。
$y=1$ 時，$x=2$。 又 $y=-1$ 時，$x=-2$。
$x=3y$，則由 (1) 得 $9y^2+3y^2-6=0$，

$$12y^2=6,\quad y^2=\frac{1}{2}.\quad \therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

又 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

(答) $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-1.\end{cases}$

$\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$$2xy-3y^2=4,\quad 2x^2-xy-3y^2=11.$$

$$2xy-3y^2=4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-xy-3y^2=11 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)， $y(2x-3y)=4$.

由(2)， $(2x-3y)(x+y)=11$.

各邊相除，

$$\frac{y}{x+y}=\frac{4}{11}.$$

$$\therefore\quad 4x+4y=11y.\qquad \therefore\quad 4x=7y.$$

$$\therefore\quad x=\frac{7y}{4}.$$

以此代入(1)，

$$\frac{7y^2}{2}-3y^2=4,\qquad 7y^2-6y^2=8.$$

$$y^2=8,\qquad y=\pm2\sqrt{2}.$$

$y=2\sqrt{2}$ 時，$x=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

$y=-2\sqrt{2}$ 時，$x=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{(答)}\begin{cases}x=\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\\ y=2\sqrt{2}.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\\ y=-2\sqrt{2}.\end{cases}$$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$2x^2-xy=56, \qquad 2xy-y^2=48.$$

【解　答】

$$2x^2-xy=56 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$2xy-y^2=48 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)，　$x(2x-y)=56.$

由(2)，　$y(2x-y)=48.$

各邊相除，

$$\frac{x}{y}=\frac{7}{6}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{7}{6}y.$$

以此代入(2)，

$$\frac{7}{3}y^2-y^2=48,$$

$$7y^2-3y^2=144,$$

$$4y^2=144, \qquad y^2=36,$$

$$y=\pm 6.$$

$y=6$ 時 $x=7.$

$y=-6$ 時 $x=-7.$

（答）$\begin{cases} x=7, \\ y=6. \end{cases}$　$\begin{cases} x=-7, \\ y=-6. \end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$$x^2+y^2=25, \qquad xy=12.$$

今 $x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)+(2)×2,

$(x+y)^2=49.$

$\therefore \quad x+y=\pm 7.$

合併 $x+y=7$ 與 (2)，由根與係數之關係考之。

$X^2-7X+12=0,$

$(X-3)(X-4)=0.$

$\therefore \quad X=3$ 或 $X=4.$

又合併 $x+y=-7$ 與 (2) 考之，

$Y^2+7Y+12=0,$

$(Y+3)(Y+4)=0.$

$\therefore Y=-3$ 或 $Y=-4.$

(答) $\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

$\begin{cases}x=-3,\\y=-4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-3.\end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^2-xy+y^2=7.$$

【解　答】

$$x^2+xy+y^2=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)-(2)$，　$2xy=12$，　$xy=6 \cdots\cdots(3)$

$(1)+(3)$，　$(x+y)^2=25$，

$(x+y)=\pm 5$。

由 $x+y=5$ 與 $xy=6$，以此二根爲X，則得

$X^2-5X+6=0$。

$\therefore\ (X-2)(X-3)=0$。

$\therefore\ X=2$ 或 $X=3$。

$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

由 $x+y=-5$ 與 $xy=6$，以此二根爲Y，則得

$Y^2+5Y+6=0$。

$\therefore\ (Y+2)(Y+3)=0$。

$\therefore\ Y=-2$ 或 $Y=-3$。

$\begin{cases}x=-2,\\y=-3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$

（答）$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

$\begin{cases}x=-2,\\y=-3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$

15. 雜二元二次聯立方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$2x^2-xy+y^2=2y,\quad 2x^2+4xy=6y.$$

$$2x^2-xy+y^2=2y \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+4xy=6y \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)\times 3-(2)$,

$$4x^2-7xy+3y^2=0,$$

$$(4x-3y)(x-y)=0.$$

$$\therefore\quad y=x \text{ 或 } y=\frac{4}{3}x.$$

$y=x$，則由 (2) 得

$$2x^2+4x^2=6x,\qquad x^2=x.$$

$$\therefore\quad x=0 \text{ 或 } x=1.$$

$x=0$ 時，$y=0$.

$x=1$ 時，$y=1$.

$y=\frac{4}{3}x$，則由 (2) 得

$$2x^2+\frac{16}{3}x^2=8x,\quad 22x^2=24x,$$

$$11x^2=12x.\quad\therefore\quad x=0 \text{ 或 } x=\frac{12}{11}.$$

$x=0$ 時，$y=0$。

$x=\dfrac{12}{11}$ 時，$y=\dfrac{16}{11}$。

$$(答)\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{12}{11},\\ y=\dfrac{16}{11}.\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}(二重根)$$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$3x^2+5x-8y=36,\quad 2x^2-3x-4y=3.$$

【解　答】

$$3x^2+5x-8y=36\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-3x-4y=3\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)\times2-(2)\times3$，　$19x-4y=63$。

$$\therefore\ y=\frac{19x-63}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以此代入(2)，

$2x^2-3x-19x+63=3$，　$x^2-11x+30=0$。

解之，　$x=5$ 或 $x=6$。

$x=5$ 時，$y=8$。　又 $x=6$ 時，$y=\dfrac{51}{4}$。

$$(答)\begin{cases}x=5,\\ y=8.\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\ y=\dfrac{51}{4}.\end{cases}$$

〔例〕解次之聯立方程：

$$x^2+xy+2y=16,\quad y^2+xy+2x=19.$$

$$x^2+xy+2y=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y^2+xy+2x=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)+(2)，　$(x+y)^2+2(x+y)-35=0.$

$$(x+y+7)(x+y-5)=0.$$

$$\therefore\quad x+y=-7 \text{ 或 } x+y=5.$$

$x+y=5$，則

$$y=5-x \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以(3)代入(1)，

$$x^2+x(5-x)+2(5-x)=16,$$

$$3x=6,\qquad x=3.\qquad \therefore\quad y=2.$$

$x+y=-7$，則

$$y=-x-7 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以(4)代入(1)，

$$x^2+x(-x-7)+2(-x-7)=16,$$

$$x^2-x^2-7x-2x-14=16,$$

$$-9x=30.\qquad \therefore\quad x=-\frac{10}{3}.$$

$$\therefore\quad y=-\frac{11}{3}.$$

(答) $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{10}{3},\\ y=-\dfrac{11}{3}.\end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$x^2+y^2=13,\quad xy+y-x=-1.$$

【解　答】

$$x^2+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy+y-x=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設 $x-y=X$，$xy=Y$，則由(1)(2)，

$$X^2+2Y=13,\qquad Y-X=-1.$$

解之，$\begin{cases}X=3,\\ Y=2.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}X=-5,\\ Y=-6.\end{cases}$

$$\begin{cases}x+(-y)=3,\\ x(-y)=-2.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2},\\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}.\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+(-y)=-5,\\ x(-y)=6.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-3,\\ y=2.\end{cases}$$

(答) $\begin{cases}x=-2,\\ y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\ y=2.\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2},\\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}.\end{cases}$$

16. 二元高次方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$x+y+xy=11,\quad x^2y+xy^2=30.$$

〔解〕 $x+y+xy=11$ ……(1)

$xy(x+y)=30$ ……(2)

設 $x+y=\mathrm{X}$, $xy=\mathrm{Y}$，則

由(1)， $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=11$，

由(2)， $\mathrm{XY}=30$.

解之， $\begin{cases}\mathrm{X}=5,\\ \mathrm{Y}=6.\end{cases}$ $\begin{cases}\mathrm{X}=6,\\ \mathrm{Y}=5.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x+y=6\\ xy=5\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=5.\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=1.\end{cases}$

(答) $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\ y=5.\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=1.\end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

$$x^2y+xy^2=30,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$$

【解 答】

$$x^2y+xy^2=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)， $xy(x+y)=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)， $x+y=\frac{5}{6}xy \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以(4)代入(3)，

$x^2y^2=36$， $xy=\pm6$。

$xy=6$，則由(4)得 $x+y=5$，

$xy=-6$，則由(4)得 $x+y=-5$。

取 $\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}$

以 x，y 爲二根作方程，

$z^2-5z+6=0$， $(z-2)(z-3)=0$。

$\therefore$ $z=2$ 或 $z=3$。

$\therefore \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases} \quad \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

由 $\begin{cases}x+y=-5\\xy=-6\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=-6.\end{cases} \quad \begin{cases}x=-6,\\y=1.\end{cases}$

(答) $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases} \quad \begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

$\begin{cases}x=1,\\y=-6.\end{cases} \quad \begin{cases}x=-6.\\y=1.\end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=91.\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$$

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=91 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設 $\frac{1}{x}=X$，$\frac{1}{y}=Y$，則

$$X^3-Y^3=91 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$X-Y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$(3)\div(4)$，$X^2+XY+Y^2=91 \cdots\cdots(5)$

$(5)-(4)^2$，$3XY=90$，$XY=30 \cdots\cdots(6)$

由(4)與(6)，

$$\begin{cases}X+(-Y)=1,\\ X(-Y)=-30.\end{cases} 得 \begin{cases}X=6,\\ Y=5.\end{cases} \begin{cases}X=-5,\\ Y=-6.\end{cases}$$

x，y 爲 X，Y 之倒數，故可由此求答。

$$(答)\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\ y=\frac{1}{5}.\end{cases} \begin{cases}x=-\frac{1}{5},\\ y=-\frac{1}{6}.\end{cases}$$

【問　題】

1. 解 $x+y=12$，$x^3+y^3=468$.　(江蘇)

2. 解 $x+y=12$，$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18$.

【解 答】

1. $x+y=12$ ……………………(1)

$x^3+y^3=468$ ……………………(2)

(2)÷(1)， $x^2-xy+y^2=39$ ………(3)

$(1)^2-(3)$， $3xy=105$， $xy=35$……(4)

以(1)與(4)之 x 與 y 爲二根作方程，

$z^2-12z+35=0$. ∴ $(z-5)(z-7)=0$.

∴ $z=5$ 或 $z=7$.

∴ $\begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$ $\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$ ……………(答)

2. $x+y=12$ ……………………(1)

$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18$ ……………………(2)

由(2)， $x^3+y^3=18xy$ ……………………(3)

(3)÷(1)， $x^2-xy+y^2=\dfrac{3}{2}xy$.

∴ $2x^2-2xy+2y^2=3xy$，

$2x^2-5xy+2y^2=0$.

∴ $(2x-y)(x-2y)=0$.

∴ $2x-y=0$ 或 $x-2y=0$.

由 $2x-y=0$ 得 $y=2x$，

代入(1)， $3x=12$， $x=4$ 而 $y=8$.

由 $x-2y=0$ 得 $x=2y$，

代入(1)， $3y=12$， $y=4$ 而 $x=8$.

(答) $\begin{cases}x=4,\\y=8.\end{cases}$ $\begin{cases}x=8,\\y=4.\end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$$x+y=4,\quad x^3+y^3=5(x^2+y^2).$$

$$x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x^3+y^3=5(x^2+y^2) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)，$(x+y)(x^2-xy+y^2)=5(x^2+y^2)$。

以(1)代入，

$$4(x^2-xy+y^2)=5(x^2+y^2),$$
$$4\{(x+y)^2-3xy\}=5\{(x+y)^2-2xy\}.$$
$$\therefore\quad (x+y)^2+2xy=0.$$

再以(1)代入，$16+2xy=0$。

$$\therefore\quad xy=-8 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1)與(3)，

$$z^2-4z-8=0,$$
$$z=2\pm\sqrt{4+8}=2\pm2\sqrt{3}.$$

(答) $\begin{cases}x=2+2\sqrt{3},\\ y=2-2\sqrt{3}.\end{cases}$ $\begin{cases}x=2-2\sqrt{3},\\ y=2+2\sqrt{3}.\end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$$x+y=5,\quad (x^2+y^2)(x^3+y^3)=455.$$

【解 答】

$$x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=455 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)，

$$(x^2+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)=455,$$

以(1)代入此式而約之，

$$(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=91,$$

$$\{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^2-3xy\}=91.$$

再以(1)代入，

$$(25-2xy)(25-3xy)=91,$$

$$625-125xy+6x^2y^2=91,$$

$$6x^2y^2-125xy+534=0,$$

$$(xy-6)(6xy-89)=0.$$

$$\therefore\quad xy=6 \quad 或 \quad xy=\frac{89}{6}.$$

由 $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=\dfrac{89}{6}.\end{cases}$ $\therefore\quad z^2-5z+\dfrac{89}{6}=0.$

$$\therefore\quad 6z^2-30z+89=0.$$

$$z=\frac{15\pm\sqrt{225-534}}{6}=\frac{15\pm\sqrt{309}\,i}{6}.$$

(答) $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\dfrac{15\pm\sqrt{309}\,i}{6},\\ y=\dfrac{15\mp\sqrt{309}\,i}{6}.\end{cases}$$

〔例〕解次之聯立方程：

$$x^2+xy+y^2=13,\quad x^4+x^2y^2+y^4=91.$$

[解] $x^2+xy+y^2=13$ ……………………(1)

$x^4+x^2y^2+y^4=91$ ……………………(2)

(2)÷(1)，$x^2-xy+y^2=7$ ……………………(3)

(1)−(3)，$2xy=6.$ ∴ $xy=3$ ……(4)

(1)+(4)，$(x+y)^2=16.$

∴ $x+y=\pm4.$

由 $\begin{cases}x+y=4,\\xy=3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x+y=-4,\\xy=3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3.\\y=-1.\end{cases}$

(答) $\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-1.\end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

1. $x^2+xy+y^2=189,\quad x-\sqrt{xy}+y=9.$
2. $x^2-xy+y^2=13,\quad x^3+y^3=91.$

【解　答】

1. $x^2+xy+y^2=189$ ……………………(1)

$x-\sqrt{xy}+y=9$ ……………………(2)

x，y 爲正，則

(2)爲 $x-\sqrt{x}\sqrt{y}+y=9$ ……(3)

(1)÷(3)，

$x+\sqrt{x}\sqrt{y}+y=21$ ……(4)

(3)+(4)，$2x+2y=30$。

$\therefore\quad x+y=15$ ……(5)

(4)−(2)，$2\sqrt{x}\sqrt{y}=12$

$\sqrt{x}\sqrt{y}=6$ ……(6)

$\therefore\quad xy=36$ ……(7)

由(5)與(7)得

$$\begin{cases}x=3,\\y=12.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=12,\\y=3.\end{cases}$$

此二根可滿足(6)，且爲正，故爲原方程之解。

(答) $\begin{cases}x=3,\\y=12.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=12,\\y=3.\end{cases}$

2. $x^2-xy+y^2=13$ ……(1)

$x^3+y^3=91$ ……(2)

(2)÷(1)，$x+y=7$ ……(3)

$(3)^2-(1)$，$3xy=36$，$\quad xy=12$。

由 $\begin{cases}x+y=7,\\xy=12.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

(答) $\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

17. 多元聯立方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$yz=12,\quad zx=15,\quad xy=20.$$

$$yz=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$zx=15 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$xy=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$(1)\times(2)\div(3)$，　$z^2=9$，　$z=\pm3$。

$z=3$，則由 (1)，(2) 得　$x=5$，　$y=4$。

$z=-3$，則由 (1)，(2) 得

$x=-5$，　$y=-4$。

(答) $\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5, \\ y=-4, \\ z=-3. \end{cases}$

〔別解〕 $(1)\times(2)\times(3)$，

$(xyz)^2=12\times15\times20$.

$\therefore\quad xyz=\pm60$.

$xyz=60$，則各以 (1)，(2)，(3) 除，得

$x=5$，　$y=4$，　$z=3$。

$xyz=-60$，則各以 (1)，(2)，(3) 除，得

$x=-5$，　$y=-4$，　$z=-3$。

(答) $\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5, \\ y=-4, \\ z=-3. \end{cases}$

【問　題】

解次之聯立方程：

$x(y+z)=6$，　$y(z+x)=12$，

$z(x+y)=10$。

【解　答】

$x(y+z)=6$ ……………………(1)

$y(z+x)=12$ ……………………(2)

$z(x+y)=10$ ……………………(3)

由(1)，　$xy+xz=6$ ……………………(4)

由(2)，　$yz+xy=12$ ……………………(5)

由(3)，　$xz+yz=10$ ……………………(6)

$(4)+(5)-(6)$，

$2xy=8$，　　$xy=4$ ……………………(7)

以(7)代入(4)，(5)，　$xz=2$，　$yz=8$。

$$\begin{cases} xy=4 & \cdots\cdots(7) \\ xz=2 & \cdots\cdots(8) \\ yz=8 & \cdots\cdots(9) \end{cases}$$

$(7)\times(8)\div(9)$，　$x^2=1$。　∴　$x=\pm1$。

以 $x=1$ 代入(7)，(8)，得　$y=4$，　$z=2$。

以 $x=-1$ 代入(7)，(8)，得

$y=-4$，　$z=-2$。

(答) $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4, \\ z=-2. \end{cases}$

〔例〕 解次之聯立方程：

$(x+y)(y+z)=12$，

$(y+z)(z+x)=20$，

$(z+x)(x+y)=15$。

$(x+y)(y+z)=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$(y+z)(z+x)=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$(z+x)(x+y)=15 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(1)\times(2)\div(3)$， $(y+z)^2=16$。

$\therefore \quad y+z=\pm 4$。

$y+z=4 \cdots\cdots (4)$ 時，由 (1)，(2)，得

$x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$z+x=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

$(4)+(5)-(6)$， $2y=2$， $y=1$。

以此代入 (4)，(5)，

$z=3$， $x=2$。

$y+z=-4 \cdots\cdots (7)$ 時，由 (1)，(2) 得

$x+y=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

$z+x=-5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

$(7)+(8)-(9)$， $2y=-2$， $y=-1$。

以此代入 (7)，(8)，

$z=-3$， $x=-2$。

(答) $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1, \\ z=-3. \end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$xy+x+y+3=0$， $yz+y+z+7=0$，

$zx+z+x-11=0$。

【解 答】

$$xy+x+y+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$yz+y+z+7=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$zx+z+x-11=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1)， $xy+x+y+1=-2$。

$\therefore\ (x+1)(y+1)=-2 \cdots\cdots\cdots(4)$

同樣， $(y+1)(z+1)=-6 \cdots\cdots\cdots(5)$

$(z+1)(x+1)=12 \cdots\cdots\cdots(6)$

$(4)\times(5)\div(6)$，

$(y+1)^2=1$， $y+1=\pm1$，

$y+1=1$ 卽 $y=0$ 時，

由(4)， $x+1=-2$， $\therefore\ x=-3$。

由(5)， $z+1=-6$， $\therefore\ z=-7$。

$y+1=-1$ 卽 $y=-2$ 時，

由(4)， $x+1=2$， $\therefore\ x=1$。

由(5)， $z+1=6$， $\therefore\ z=5$。

(答) $\begin{cases} x=-3, \\ y=0, \\ z=-7. \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=5. \end{cases}$

〔例〕 解次之聯立方程：

$x(x+y+z)=6$， $y(x+y+z)=12$，

$z(x+y+z)=18$。

$$x(x+y+z)=6 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$y(x+y+z)=12 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$z(x+y+z)=18 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)+(2)+(3)， $(x+y+z)^2=36$。

$\therefore\ x+y+z=\pm6$。

$x+y+z=6$ 時，由 (1)，(2)，(3)，得

$x=1$， $y=2$， $z=3$。

$x+y+z=-6$ 時，由 (1)，(2)，(3)，得

$x=-1$， $y=-2$， $z=-3$。

(答) $\begin{cases}x=1,\\ y=2,\\ z=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\ y=-2,\\ z=-3.\end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$(y+z)(x+y+z)=10$，

$(z+x)(x+y+z)=20$，

$(x+y)(x+y+z)=20$。

【解　答】

$$(y+z)(x+y+z)=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(z+x)(x+y+z)=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$(x+y)(x+y+z)=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)+(2)+(3)，　$2(x+y+z)^2=50$，

$x+y+z=\pm5$。

$x+y+z=5$ 時，由 (1)，(2)，(3)，得

$$y+z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$
$$z+x=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$
$$x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(4)+(5)−(6)，　$2z=2$。　$\therefore$　$z=1$。

以此代入(4)，(5)，　$y=1$，　$x=3$。

$x+y+z=-5$ 時，由 (1)，(2)，(3)，得

$$y+z=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$
$$z+x=-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$
$$x+y=-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(7)+(8)−(9)，　$2z=-2$，　$z=-1$。

以此代入 (7)，(8)，

$y=-1$，　$x=-3$。

$$\text{(答)}\begin{cases}x=3,\\ y=1,\\ z=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3,\\ y=-1,\\ z=-1.\end{cases}$$

〔例〕解次之聯立方程:

$$x+y+z=13,\quad x^2+y^2+z^2=65,$$
$$yz=10.$$

$$x+y+z=13 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x^2+y^2+z^2=65 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$yz=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$(2)+(3)\times2,\quad x^2+(y+z)^2=85 \cdots\cdots(4)$

由(1), $y+z=13-x \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

以(5)代入(4),

$$x^2+(13-x)^2=85,$$
$$2x^2-26x+84=0,\quad x^2-13x+42=0,$$
$$(x-6)(x-7)=0.$$
$$\therefore\quad x=6 \text{ 或 } x=7.$$

$x=6$, 則由(5)得 $y+z=7 \cdots\cdots\cdots(6)$

由(3)與(6),得 $\begin{cases} y=2, \\ z=5. \end{cases}$ $\begin{cases} y=5, \\ z=2. \end{cases}$

$x=7$, 則由(5),得 $y+z=6 \cdots\cdots\cdots(7)$

由(3)與(7),得 $X^2-6X+7=0$,

$$X=3\pm\sqrt{9-7}=3\pm\sqrt{2}.$$

(答) $\begin{cases} x=6, \\ y=2, \\ z=5. \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=5, \\ z=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=7, \\ y=3\pm\sqrt{2}, \\ z=3\mp\sqrt{2}. \end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$x-y-z=2$, $x^2+y^2-z^2=22$, $xy=5$.

【解 答】

$x-y-z=2$ ……………………(1)

$x^2+y^2-z^2=22$ ……………………(2)

$xy=5$ ……………………(3)

$(2)-(3)\times 2$, $(x-y)^2-z^2=12$ ……(4)

由(1), $x-y=2+z$ ……………………(5)

以(5)代入(4), $(2+z)^2-z^2=12$.

$\therefore$ $4z+4=12$. $\therefore$ $z=2$.

以此代入(5), $x-y=4$ ……………(6)

取(3)與(6)如次考之:

$x+(-y)=4$ ……………………(7)

$x(-y)=-5$ ……………………(8)

以 x, $-y$ 爲二根作方程,

$X^2-4X-5=0$, $(X-5)(X+1)=0$.

$\therefore$ $X=5$ 或 $X=-1$.

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases}$

以此各代入(5), 皆得 $z=2$.

(答) $\begin{cases} x=5, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-5, \\ z=2. \end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程:

$$x+y+z=4,\quad yz+zx+xy=-4,$$
$$yz=2x^2.$$

$$x+y+z=4 \cdots\cdots(1)$$
$$yz+zx+xy=-4 \cdots\cdots(2)$$
$$yz=2x^2 \cdots\cdots(3)$$

以(3)代入(2),

$$2x^2+x(y+z)=-4 \cdots\cdots(4)$$

由(1), $y+z=4-x \cdots\cdots(5)$

以(5)代入(4),

$$2x^2+x(4-x)=-4,$$
$$x^2+4x+4=0. \quad \therefore \quad (x+2)^2=0.$$
$$\therefore \quad x=-2 \cdots\cdots(6)$$

以(6)代入(5), $y+z=6 \cdots\cdots(7)$

以(6)代入(3), $yz=8 \cdots\cdots(8)$

由(7), (8), $\begin{cases} y=2, \\ z=4. \end{cases}$ $\begin{cases} y=4, \\ z=2. \end{cases}$

(答) $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \\ z=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=4, \\ z=2. \end{cases}$

【問　題】

解 $x+y+z+u=0$, $3x+z+u=0$,
$3y+2z=0$, $x^2+y^2+zu=5$. (上[illegible])

【解 答】

$$x+y+z+u=0 \cdots\cdots(1)$$

$$3x+z+u=0 \cdots\cdots(2)$$

$$3y+2z=0 \cdots\cdots(3)$$

$$x^2+y^2+zu=5 \cdots\cdots(4)$$

(1)−(2)，$-2x+y=0$，

$\therefore \quad y=2x \cdots\cdots(5)$

以此代入(3)，$6x+2z=0$，$2z=-6x$。

$\therefore \quad z=-3x \cdots\cdots(6)$

以此代入(2)，$3x-3x+u=0$，

$\therefore \quad u=0 \cdots\cdots(7)$

以(5)，(6)，(7)代入(4)，

$x^2+(2x)^2+0=5$。

$\therefore \quad 5x^2=5$，$x^2=1$，$x=\pm 1$。

$x=1$，由(5)，(6)得

$y=2$，$z=-3$。

$x=-1$，由(5)，(6)得

$y=-2$，$z=3$。

(答) $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-3, \\ u=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=3, \\ u=0. \end{cases}$

〔例〕解次之聯立方程：

$y^2+yz+z^2=19,\quad z^2+zx+x^2=13,$

$x^2+xy+y^2=7.$

$$y^2+yz+z^2=19 \cdots\cdots(1)$$
$$z^2+zx+x^2=13 \cdots\cdots(2)$$
$$x^2+xy+y^2=7 \cdots\cdots(3)$$

(1)−(2)，$y^2+yz-zx-x^2=6,$

$y^2-x^2+z(y-x)=6.$

$\therefore\quad (y-x)(x+y+z)=6 \cdots\cdots(4)$

(2)−(3)，$(z-y)(x+y+z)=6 \cdots\cdots(5)$

(4)÷(5)，$\dfrac{y-x}{z-y}=1$，$y-x=z-y.$

$\therefore\quad x=2y-z \cdots\cdots(6)$

以(6)代入(5)，$(z-y)3y=6.$

$\therefore\ yz-y^2=2,$

$y^2-yz=-2 \cdots\cdots(7)$

(1)×2，$2y^2+2yz+2z^2=38.$

(7)×19，$19y^2-19yz=-38.$

各邊相加，$21y^2-17yz+2z^2=0.$

$(7y-z)(3y-2z)=0,$

$\therefore\quad z=7y$ 或 $z=\dfrac{3}{2}y.$

$z=\dfrac{3}{2}y$ 時，由(7)，

$$y^2-\frac{3}{2}y^2=-2.$$

$\therefore\quad 2y^2-3y^2=-4.\qquad\therefore\quad y^2=4.$

$\therefore\quad y=\pm 2.$

$y=2$ 時 $z=3$，又由 (6) 得 $x=1$.

$y=-2$ 時 $z=-3$，又由 (6) 得 $x=-1$.

$z=7y$ 時，由 (7)，

$y^2-7y^2=-2$，$\quad -6y^2=-2.$

$\therefore\quad y^2=\frac{1}{3}$，$\quad\therefore\quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 時，$z=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，

又由 (6) 得 $\quad x=\frac{-5\sqrt{3}}{3}.$

$y=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ 時，$z=\frac{-7\sqrt{3}}{3}$，

又由 (6)，得 $\quad x=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$

(答) $\begin{cases}x=1,\\ y=2,\\ z=3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1,\\ y=-2,\\ z=-3.\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{-5\sqrt{3}}{3},\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ z=\frac{7\sqrt{3}}{3}.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\frac{5\sqrt{3}}{3},\\ y=\frac{-\sqrt{3}}{3},\\ z=\frac{-7\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

18. 聯立文字方程

〔例〕解次之聯立方程：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b.$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{2a-x}{a}$.

$$\therefore\quad y=\frac{b(2a-x)}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以(3)代入(2)，

$$\frac{x^2}{a}+\frac{b(2a-x)^2}{a^2}=a+b,$$

$$ax^2+4a^2b-4abx+bx^2=a^2(a+b),$$

$$(a+b)x^2-4abx-a^2(a-3b)=0,$$

$$(x-a)\{(a+b)x+a(a-3b)\}=0.$$

$$\therefore\quad x=a,\ 或\ x=\frac{a(3b-a)}{a+b}.$$

$x=a$ 時，由(3)得 $y=b$.

$x=\dfrac{a(3b-a)}{a+b}$ 時，由(3)得

$$y=\frac{b(3a-b)}{a+b}.$$

$$(\text{答})\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{a(3b-a)}{a+b},\\y=\dfrac{b(3a-b)}{a+b}.\end{cases}$$

【問 題】

解次之聯立方程：……

$$x+y=a+b,\qquad \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1.$$

【解 答】

$$x+y=a+b\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)， $ay+a^2+bx+b^2=xy+ax+by+ab$,

$$xy+(a-b)x-(a-b)y$$
$$-(a^2-ab+b^2)=0\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1)， $y=a+b-x\cdots\cdots\cdots(4)$.

以 (4) 代入 (3) 而簡單之，

$$x^2-(3a-b)x+a(2a-b)=0.$$

$\therefore\quad (x-a)(x-2a+b)=0.$

$\therefore\quad x=a$ 或 $x=2a-b$.

以 $x=a$ 代入 (4) 得 $y=b$.

以 $x=2a-b$ 代入 (4) 得 $y=2b-a$.

$$(\text{答})\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}\quad\begin{cases}y=2a-b,\\y=2b-a.\end{cases}$$

【例】解次之聯立方程：

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=45,\quad \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=9.$$

解
$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=45 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設 $\frac{a}{x}=X$，$\frac{b}{y}=Y$，則

由(1)， $X^2+Y^2=45 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)， $X-Y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)$-(4)^2$，$2XY=-36$。 $\therefore XY=-18$。

由 $\begin{cases} X+(-Y)=9, \\ X(-Y)=18. \end{cases}$

得 $\begin{cases} X=3, \\ -Y=6, \end{cases}$ $\begin{cases} X=6, \\ -Y=3. \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{a}{x}=3, \\ \frac{b}{y}=-6. \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a}{x}=6, \\ \frac{b}{y}=-3. \end{cases}$

故 $\begin{cases} x=\frac{a}{3}, \\ y=-\frac{b}{6}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{a}{6}, \\ y=-\frac{b}{3}. \end{cases}$

(答) $\begin{cases} x=\frac{a}{3}, \\ y=-\frac{b}{6}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{a}{6}, \\ y=-\frac{b}{3}. \end{cases}$

【問 題】

解次之聯立方程：

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=10, \quad \frac{ab}{xy}=3.$$

【解 答】

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{ab}{xy}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設 $\frac{a}{x}=X$；$\frac{b}{y}=Y$，則

由(1)， $X^2+Y^2=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)， $XY=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4)×2， $(X+Y)^2=16$，

$\therefore$ $X+Y=\pm4$。

由 $\begin{cases}X+Y=4,\\XY=3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}X=1,\\Y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}X=3,\\Y=1.\end{cases}$

$\therefore$ $\begin{cases}x=a,\\y=\frac{b}{3}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{a}{3},\\y=b.\end{cases}$

由 $\begin{cases}X+Y=-4,\\XY=3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}X=-1,\\Y=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}X=-3,\\Y=-1.\end{cases}$

$\therefore$ $\begin{cases}x=-a,\\y=-\frac{b}{3}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{a}{3},\\y=-b.\end{cases}$

【答】 $\begin{cases}x=a,\\y=\frac{b}{3}.\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{a}{3},\\y=b.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-a,\\y=-\frac{b}{3}.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{a}{3},\\y=-b.\end{cases}$

19.　聯立二次方程應用問題

〔例〕有舟夫划行於15里之河中，其順流所需之時間與逆流所需之時間，相差5時．若此舟夫有2倍之划力，則其時間之差爲1時．求划力及水流之速．

設划力及水流之速，每時各爲x里，y里，則得次之方程：

$$\frac{15}{x-y}-\frac{15}{x+y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{15}{2x-y}-\frac{15}{2x+y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以5除(1)之兩邊，又去分母，則得

$$3(x+y)-3(x-y)=x^2-y^2.$$

$$\therefore\ x^2-y^2-6y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(2)，$15(2x+y)-15(2x-y)=4x^2-y^2.$

$$\therefore\ 4x^2-y^2-30y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$(4)-(3)\times4$，$3y^2-6y=0$，$y^2-2y=0.$

$$\therefore\ y(y-2)=0.$$

$$\therefore\ y=0 \text{ 或 } y=2.$$

捨$y=0$不用，而用$y=2$，則由(3)，

卽　$x^2=16$，　$x=\pm4$.

捨　$x=-4$ 而 $x=4$.

（答）划力 4 里，水流之速 2 里.

【問　題】

有一輛長途汽車，途中因修繕機械，費30分鐘，其後依前之速力減半，而行全路程30哩，共費 5 時間. 若此機械之破損，在此前再進10哩後發生，則全路程費 4 時間可達. 問破損發生處之哩數及最初之速力如何?

【解　答】

設破損發生處之哩數爲 x 哩，最初之速力爲 $2y$哩，則以後之速力爲 y 哩.

$$\frac{x}{2y}+\frac{30-x}{y}=4\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x+10}{2y}+\frac{20-x}{y}=3\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)-(2)$，　$\frac{-10}{2y}+\frac{10}{y}=1$.　$\therefore\ y=5$.

由此以求 x，則

$x=15$.

（答）15哩，速力10哩.

〔例〕甲乙二旅客，甲在午後一時由東地出發向西地而行，乙於同時由西地出發向東地而行．至午後三時，兩人在距東地24哩之處相會．而乙至東地之時，甲尚在未達西地20哩之處。求甲乙之速及東西兩地之距離。

設乙之速爲每時 x 哩，東西兩地之距離爲 y 哩，則甲於 2 時間行24哩，故甲每時之速爲12哩。

$$2x=y-24 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

自相會後乙至東地之時間，與甲至西地尚未達20哩之時間相等，

$$\frac{24}{x}=\frac{y-24-20}{12} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)， $xy-44x-288=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(1)， $y=2x+24$，

以此代入(3)，

$$x^2-10x-144=0,$$

$$(x-18)(x+8)=0.$$

$$\therefore \quad x=18 \text{ 或 } x=-8.$$

捨 $x=-8$ 不用，而以 $x=18$ 代入 $y=2x+24$，

得 $y=60$。

(答) 每時之速，甲12哩，乙18哩，
東西兩地之距離60哩。

【問 題】

甲乙兩地間之距離爲385哩。A號飛機由甲地出發而向乙地，經1時後，B號飛機由乙地出發而向甲地。迨途中相會之後，A號再經2時55分鐘至乙地，B號再經3時至甲地。問兩飛機之速每時幾哩？

【解 答】

設甲乙飛機之速，每時各爲 x 哩，y 哩，則相會之處距甲地$3y$哩，距乙地 $2\frac{55}{60}x$ 哩，即 $\frac{35}{12}x$ 哩。

$$\therefore\quad 3y+\frac{35}{12}x=385\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3y}{x}=\frac{\frac{35}{12}x}{y}+1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)，$(7x-6y)(5x+6y)=0$。

以此由(1)解之，$x=60$，$y=70$。

(答) A號60哩，B號70哩。

〔例〕於10哩之競走，甲比乙後5分鐘出發，25分鐘後追及乙，而比乙早7分鐘至決勝點．問兩人之速每時幾哩？

設甲乙每分鐘之速，各為 x 哩，y 哩．甲於25分間所行之距離，與乙於30分間所行之距離相等．

$$25x=30y \cdots\cdots(1)$$

又走10哩，甲比乙少（5+7）分鐘．

$$\frac{10}{x}=\frac{10}{y}-(5+7) \cdots\cdots(2)$$

由(1)，$\dfrac{6}{x}=\dfrac{5}{y} \cdots\cdots(3)$

由(2)，$\dfrac{5}{x}=\dfrac{5}{y}-6 \cdots\cdots(4)$

(3)−(4)，$\dfrac{1}{x}=6$． $\therefore\ x=\dfrac{1}{6}$．

以此代入(3)，$y=\dfrac{5}{36}$．

$$\therefore\ \frac{1}{6}\times 60=10,$$

$$\frac{5}{36}\times 60=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}.$$

（答） 甲10哩，乙 $8\frac{1}{3}$ 哩．

【問　題】

甲乙丙三人乘車自A地至B地，甲在A地出發後經40分鐘，乙在同地出發，其後再經40分鐘，丙亦在同地出發，而三人同時至B地．今丙之速爲每時15哩，乙比甲每時速2哩，則A，B兩地間之距離及甲乙兩人之速各幾何？

【解　答】

設甲每時之速爲 x 哩，則乙爲 $(x+2)$ 哩。AB間之距離爲 y 哩.

$$\frac{y}{x}=\frac{y}{x+2}+\frac{40}{60}=\frac{y}{15}+\frac{80}{60},$$

$$3xy+6y=3xy+2x^2+4x.$$

$$\therefore\quad x^2+2x=3y,$$

$$y=\frac{x^2+2x}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$15y=xy+20x.$$

$$\therefore\quad xy+20x-15y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 (1) 代入 (2)，

$$x(x^2+2x)+60x-15(x^2+2x)=0,$$

$$x\neq 0.\quad\therefore\quad x^2+2x+60-15x-30=0,$$

$$x^2-13x+30=0,\quad (x-3)(x-10)=0.$$

$$\therefore\quad x=3\ \text{或}\ x=10.$$

（答）　甲10哩，乙12哩，AB間40哩。

　又　　甲3哩，乙5哩，AB間5哩。

20. 開二重根號之法

〔例〕a, b, c, d 爲有理數, $\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ 爲無理數時, $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$, 試證 $a=c$, $b=d$. 應用此理化 $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$ 爲 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 之形.

$$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d},$$

$$\therefore\quad \sqrt{b}=(c-a)+\sqrt{d}.$$

兩邊各平方之,

$$b=(c-a)^2+2(c-a)\sqrt{d}+d.$$

$$\therefore (b-d)-(c-a)^2=2(c-a)\sqrt{d}.$$

然 $\sqrt{d}$ 爲無理數, 故如 $c-a$ 不爲 0, 則右邊爲無理數.

又左邊必爲有理數,

因有理數不能與無理數相等, 故此等式之成立, 非 $c-a=0$ 不可.

卽 $a=c$.

$c-a=0$ 則 $b-d=0$, 卽 $b=d$.

$$\therefore\quad a=c,\qquad b=d.$$

次設 $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$,

兩邊各平方，

$$11+2\sqrt{30}=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore\quad x+y=11,$$

$$xy=30.$$

解之，$\begin{cases}x=6,\\y=5.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=5,\\y=6.\end{cases}$

$$\therefore\quad\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}=\sqrt{6}\pm\sqrt{5}\cdots(答)$$

〔注意〕 此方法稍繁，如無特別大之數，可由和爲11，積爲30，用心算想得二數爲 6 與 5，而如次變化之：

$$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{6+2\sqrt{6\times5}+5}$$

$$=\sqrt{\sqrt{6}^2+2\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

【問　題】

1. 將$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 簡單之.
2. 將$\sqrt{13+2\sqrt{42}}$ 簡單之.

【解　答】

1. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdots\cdots(答)$$

2. $\sqrt{13+2\sqrt{42}}=\sqrt{7+2\sqrt{7}\sqrt{6}+6}$

$$=\sqrt{7}+\sqrt{6}\cdots\cdots(答)$$

〔例〕將次式化簡:

$$\sqrt{13-4\sqrt{10}}.$$

$$\sqrt{13-4\sqrt{10}}=\sqrt{13-2\sqrt{40}}$$
$$=\sqrt{8-2\sqrt{8}\sqrt{5}+5}=\sqrt{8}-\sqrt{5}$$
$$=2\sqrt{2}-\sqrt{5}\ \text{……………………(答)}$$

〔注意〕 不可如次化之:

$$\sqrt{13-4\sqrt{10}}=\sqrt{13-2\sqrt{40}}$$
$$=\sqrt{5-2\sqrt{5}\sqrt{8}+8}=\sqrt{5}-\sqrt{8}$$

因$\sqrt{\ }$表正數,而$\sqrt{5}-\sqrt{8}$則為負,故必須將較大之數置於前.

【問 題】

(二)…………

簡單以下各式:

1. $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.　　2. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$,
3. $\sqrt{8+\sqrt{28}}$.　　4. $\sqrt{28-5\sqrt{12}}$.
5. $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.　　6. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
7. $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.　　8. $\sqrt{126+22\sqrt{5}}$.

【解 答】

1. $\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{6-2\sqrt{6}\times1+1}$

$$=\sqrt{6}-1\ \text{…………(答)}$$

2. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\times2\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ …………(答)

3. $\sqrt{8+\sqrt{28}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$

$=\sqrt{7+2\sqrt{7}\times 1+1}=\sqrt{7}+1$ (答)

4. $\sqrt{28-5\sqrt{12}}=\sqrt{28-2\sqrt{75}}$

$=\sqrt{25-2\sqrt{25}\sqrt{3}+3}=\sqrt{25}-\sqrt{3}$

$=5-\sqrt{3}$ ……………………………(答)

5. $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=\sqrt{37-2\sqrt{300}}$

$=\sqrt{25-2\sqrt{25}\sqrt{12}+12}=\sqrt{25}-\sqrt{12}$

$=5-2\sqrt{3}$ ……………………………(答)

6. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{3}\times 1+1}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ …………(答)

7. $\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{7-2\sqrt{7}\sqrt{3}+3}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$ ………(答)

8. $\sqrt{126+22\sqrt{5}}$

$=\sqrt{121+2\times 11\times\sqrt{5}+5}$

$=11+\sqrt{5}$ ……………………………(答)

〔例〕將次式簡單之:

$$\frac{14}{\sqrt{(18-8\sqrt{2})}}-\sqrt{2}.$$

$$\frac{14}{\sqrt{(18-8\sqrt{2})}}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{(16-2\times4\times\sqrt{2}+2)}}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{14}{4-\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{14(4+\sqrt{2})}{16-2}-\sqrt{2}$$

$$=4+\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

【問 題】

簡單下列各式:

1. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

3. $\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

4. $\dfrac{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$.

【解 答】

1. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2(4+2\sqrt{3})}}$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3+2\sqrt{3\times1}+1}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$ ……………………(答)

2. $$\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$=5-3\sqrt{3}$$ …………(答)

3. $$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{17-4\sqrt{10}}{3}$$ ………………………(答)

4. $$\frac{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5-(\sqrt{12}+1)}}{2-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3+(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$=7+4\sqrt{3}$$ ………(答)

〔例〕將次式化簡:

$$\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{2}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{2}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}-\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}-\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{3}(3\sqrt{6}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}-3\sqrt{6}+3\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

【問　題】

將下列各式簡單之:

1. $\frac{1}{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}+\frac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$.

3. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

【解　答】

1. 原式$=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$

$=\dfrac{3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}}{9-7}=\dfrac{6}{2}=3$……(答)

2. 原式$=\dfrac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{8-1}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$……………(答)

3. 原式$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+(\sqrt{3}+1)}+\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+\sqrt{2}(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})+\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3})}{6}$

$=\sqrt{2}$……………………………(答)

第九編　比及比例

1　比　之　值

〔例〕設 $8x^2-15y^2=2xy$，求 $x:y$ 之值。

$8x^2-15y^2=2xy$，

$8x^2-2xy-15y^2=0$，

$(2x-3y)(4x+5y)=0$，

$\therefore\quad 2x=3y$ 或 $4x=-5y$.

$\therefore\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{4}$.

(答)　$\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{5}{4}$.

【問　題】

1. 設 $\dfrac{7x+5y}{x+3y}=3$，求 $x:y$ 之值.

2. 設 $15x^2-16xy+4y^2=0$，求 $x:y$ 之值.

3. 由 $x-y-7z=0$，$x-4y+z=0$，求 $y:z$ 之值.

4. 由 $15(2x^2-y^2)=7xy$，求 x 與 y 之比.

【解　答】

1. $\dfrac{7x+5y}{x+3y}=3$，　　$7x+5y=3x+9y$。

$\therefore$　$4x=4y$。　　$\therefore$　$\dfrac{x}{y}=1$。

（答）　1。

2. $15x^2-16xy+4y^2=0$，

$(3x-2y)(5x-2y)=0$，

$\therefore$　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5}$。

（答）　$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{5}$。

3. $x-y-7z=0$ ……………………(1)

$x-4y+z=0$ ……………………(2)

由(1)，　$\dfrac{x}{z}-\dfrac{y}{z}=7$ ……………………(3)

由(2)，　$\dfrac{x}{z}-\dfrac{4y}{z}=-1$ ……………(4)

(3)－(4)，　$\dfrac{3y}{z}=8$。　　$\therefore$　$\dfrac{y}{z}=\dfrac{8}{3}$。

（答）　$\dfrac{8}{3}$。

4. $15(2x^2-y^2)=7xy$，

$30x^2-7xy-15y^2=0$。

（答）　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{6}$ 或 $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{5}$。

2. 證明問題

〔例〕設 $a:b=c:d$，試證明

$a+c:b+d=a^2d:b^2c$.

設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，則

$c=dk$,　　$a=bk$.

$\therefore\quad \dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$,

$\dfrac{a^2d}{b^2c}=\dfrac{b^2k^2d}{b^2dk}=k$.

$\therefore\quad a+c:b+d=a^2d:b^2c$.

【問　題】

設 $a:b=c:d$，試證下列各式：

1. $a^2+b^2:c^2+d^2=a^2:c^2$

2. $a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$.

3. $\dfrac{a+c}{a-c}:\dfrac{b+d}{b-d}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

【解　答】

設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，則

$c=dk$，　$a=bk$.

1. $$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{d^2k^2+d^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{d^2(k^2+1)}$$

$$=\frac{b^2}{d^2},$$

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2k^2}{d^2k^2}=\frac{b^2}{d^2}.$$

$\therefore\quad a^2+b^2:c^2+d^2=a^2:c^2$

2. $$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k+d^2k}$$

$$=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k(b^2+d^2)}=k,$$

$$\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2+d^2}=k.$$

$\therefore\quad a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$。

3. $$\frac{a+c}{a-c}\div\frac{b+d}{b-d}=\frac{bk+dk}{bk-dk}\times\frac{b-d}{b+d}$$

$$=\frac{k(b+d)}{k(b-d)}\times\frac{(b-d)}{(b+d)}=1,$$

$$\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}\div\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}\div\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}$$

$$=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}\times\frac{k^2(b^2-d^2)}{k^2(b^2+d^2)}=1.$$

$$\therefore\frac{a+c}{a-c}:\frac{b+d}{b-d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

〔解〕設 $a:b=b:c$，試證

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$$

設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$，則

$b=ck$，　$a=bk=(ck)k=ck^2$。

$(a+b+c)(a-b+c)$

$=(ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$

$=c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

$=c^2(k^4+k^2+1)$。

$a^2+b^2+c^2$

$=c^2k^4+c^2k^2+c^2=c^2(k^4+k^2+1)$。

$\therefore\quad (a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$。

【問　題】

設 $a:b=b:c$，試證下列各式：

1. $a^2+b^2:b(a+c)=b(a+c):b^2+c^2$。

2. $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$。

3. $\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{c^2-b^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 之值如何？

【解　答】

設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$，則

$b=ck$，　$a=bk=ck^2$。

1. $\frac{a^2+b^2}{b(a+c)}=\frac{c^2k^4+c^2k^2}{ck(ck^2+c)}=\frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2k(k^2+1)}$

$=k$。

$\frac{b(a+c)}{b^2+c^2}=\frac{ck(ck^2+c)}{c^2k^2+c^2}=\frac{c^2k(k^2+1)}{c^2(k^2+1)}$

$=k$。

$\therefore$　$a^2+b^2:b(a+c)=b(a+c):b^2+c^2$。

2. $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)$

$=(c^2k^2+c^2k+c^2)(c^2k^2-c^2k+c^2)$

$=c^2(k^2+k+1)c^2(k^2-k+1)$

$=c^4(k^4+k^2+1)$。

$b^4+ac^3+c^4=c^4k^4+c^4k^2+c^4$

$=c^4(k^4+k^2+1)$。

$\therefore$　$(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)$

$=b^4+ac^3+c^4$。

3. $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{c^2-b^2}+\frac{1}{b^2}$

$=\frac{1}{c^2k^4-c^2k^2}+\frac{1}{c^2-c^2k^2}+\frac{1}{c^2k^2}$

$=\frac{1-k^2+(k^2-1)}{c^2k^2(k^2-1)}=0$ …………(答)

〔例〕 設 $a:b=b:c=c:d$，試證

$$(b+c)(b+d)=(a+c)(c+d).$$

證 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$，則

$c=dk$，$b=ck=dk^2$，$a=bk=dk^3$。

$(b+c)(b+d)$

$=(dk^2+dk)(dk^2+d)$

$=dk(k+1)d(k^2+1)$

$=d^2k(k+1)(k^2+1)$.

$(a+c)(c+d)$

$=(dk^3+dk)(dk+d)$

$=dk(k^2+1)d(k+1)$

$=d^2k(k^2+1)(k+1)$.

$\therefore\quad (b+c)(b+d)=(a+c)(c+d)$.

【問　題】

設 $a:b=b:c=c:d$，試證下列各式：

1. $a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3=a:d$.

2. $\frac{a}{b-d}=\frac{c^3}{c^2d-d^3}$.

【解　答】

設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=k$，則

$$c=dk,\quad b=ck=dk^2,\quad a=bk=dk^3$$

1. $$\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{d^3k^9+d^3k^6+d^3k^3}{d^3k^6+d^3k^3+d^3}$$

$$=\frac{d^3k^3(k^6+k^3+1)}{d^3(k^6+k^3+1)}=k^3.$$

$$\frac{a}{d}=\frac{dk^3}{d}=k^3$$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3 : b^3+c^3+d^3=a:d.$$

2. $$\frac{a}{b-d}=\frac{dk^3}{dk^2-d}=\frac{dk^3}{d(k^2-1)}$$

$$=\frac{k^3}{k^2-1}.$$

$$\frac{c^3}{c^2d-d^3}=\frac{d^3k^3}{d^3k^2-d^3}=\frac{d^3k^3}{d^3(k^2-1)}$$

$$=\frac{k^3}{k^2-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b-d}=\frac{c^3}{c^2d-d^3}$$

〔例〕設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，試證次式：

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$$

設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$，則

$e=fk$，　$c=dk$，　$a=bk$.

$$\therefore\ \frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}$$

$$=\frac{k\sqrt{b^2+d^2+f^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}=k.$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$$

【問　題】

1. 設 $x:a=y:b=z:c$，試證

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

設 $a:b=c:d=e:f$，試證下列二式：

2. $\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{ace}{bdf}$.

3. $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)$
$=(ab+cd+ef)^2$.

【解答】

1. 設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$，則

$x=ak$， $y=bk$， $z=ck$。

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}$$

$$=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}$$

$$=ak^3+bk^3+ck^3$$

$$=k^3(a+b+c).$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{k^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=k^3(a+b+c).$$

故 $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$.

2. 可倣本例自證之.

3. 如本例，設 $a=bk$， $c=dk$， $e=fk$.

$$\therefore\quad (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)$$

$$=(b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2)$$

$$=k^2(b^2+d^2+f)^2.$$

$$(ab+cd+ef)^2$$

$$=(b^2k+d^2k+f^2k)^2$$

$$=k^2(b^2+d^2+f^2)^2.$$

$$\therefore\quad (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)$$

$$=(ab+cd+ef)$$

〔例〕設 $x-z:y-z=x^2:y^2$，而 $x\neq y$，

試證 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$。

$$x-z:y-z=x^2:y^2$$

$$\therefore\quad x^2(y-z)=y^2(x-z),$$

$$x^2y-x^2z-xy^2+y^2z=0,$$

$$xy(x-y)-z(x^2-y^2)=0,$$

$$(x-y)(xy-xz-yz)=0$$

$$\therefore\quad x\neq y，而\ xy-xz-yz=0.$$

$xy-xz-yz=0$；則

$$xy=yz+xz.$$

兩邊各以 xyz 除之。

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

故 $x\neq y$ 而 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$。

【問　題】

1. 設 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，試證

2. 設 $b+c\neq 0$，而

$$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{z+y}{x+z},$$

試證各比皆等於$\frac{x}{y}$。

【解 答】

1. 設 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，則

$x=k(a-b)$，　$y=k(b-c)$，

$z=k(c-a)$

$\therefore\quad x+y+z=k(a-b+b-c+c-a)=0$。

故 $x+y+z=0$。

2. $$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{z+y}{x+z}$$

$$=\frac{a(z+y)}{a(x+z)}=\frac{az+ay}{ax+az}$$

$$=\frac{(bx-ay)+(cx-az)+(az+ay)}{(cy-az)+(by-ax)+(ax+az)}$$

(應用加比之理)

$$=\frac{bx+cx}{cy+by}=\frac{x(b+c)}{y(b+c)}=\frac{x}{y}.$$

試得證明!

〔例〕設 $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$
$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$
試證明 $a:b=c:d$.

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$
$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$
$$\therefore\quad \{(a+d)+(b+c)\}\{(a+d)-(b+c)\}$$
$$=\{(a-d)-(b-c)\}\{(a-d)+(b-c)\}.$$
$$\therefore\quad (a+d)^2-(b+c)^2$$
$$=(a-d)^2-(b-c)^2.$$
$$\therefore\quad a^2+2ad+d^2-b^2-2bc-c^2$$
$$=a^2-2ad+d^2-b^2+2bc-c^2.$$
$$\therefore\quad 4ad=4bc. \qquad \therefore\quad ad=bc.$$
$$\therefore\quad a:b=c:d.$$

故得證明.

【問 題】

1. 設 $a+b:b+c=c+d:a+d$, 如 $a\neq c$, 試證 $a+b+c+d=0$.

2. 設 $a^2-b^2=c^2$, 試證
$$(a+b+c):(c+a-b)$$
$$=(a+b-c):(b+c-a).$$

【解　答】

1. $a+b:b+c=c+d:a+d$.

$$(a+b)(a+d)=(b+c)(c+d),$$

$$a^2+ab+ad+bd=bc+c^2+bd+cd,$$

$$a^2-c^2+ab-bc+ad-cd=0,$$

$$(a+c)(a-c)+b(a-c)+d(a-c)=0.$$

$$\therefore\quad (a-c)(a+c+b+d)=0.$$

$$\therefore\quad a\neq c \text{ 而 } a+b+c+d=0.$$

故得證明.

2. $a^2-b^2=c^2$,

$$\therefore\quad (a+b)(a-b)=c^2$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{c}=\frac{c}{a-b}.$$

應用加比之理,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{c}{a-b}=\frac{a+b+c}{c+a-b}$$

$$=\frac{a+b-c}{c-a+b}=\frac{a+b-c}{b+c-a}.$$

$$\therefore\quad (a+b+c):(c+a-b)$$

$$=(a+b-c):(b+c-a).$$

〔例〕設 $\dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c}$,

試證明 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=k.$$

$$bz-cy=ak \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$cx-az=bk \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$ay-bx=ck \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times a$, $\quad abz-acy=a^2k \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(2)\times b$, $\quad bcx-abz=b^2k \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(3)\times c$, $\quad acy-bcx=c^2k \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(4)+(5)+(6)$, $\quad (a^2+b^2+c^2)k=0$.

然 a, b, c 爲所與式之分母，故皆不爲 0。

即 a, b, c 爲實數，故其平方皆爲正.

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\neq0.\qquad\therefore\quad k=0.$

$\therefore\quad bz-cy=0.$

$\therefore\quad \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$

又 $cx-az=0$.

$\therefore\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}.$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

故已證明。

【問　題】

設　$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$，試證

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

【解　答】

$$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y).$$

各邊以 abc 除之，

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}$$

$$=\frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc}$$

$$=\frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac}$$

$$=\frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab}$$

$$=\frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}.$$

$$\therefore \quad \frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}$$

故已證明。

3. 比例配分

〔例〕以銀p圓，分配與甲乙丙三人，其所得之比為 $a:b:c$。求各人所得之銀。

設甲乙丙之所得，各為x圓，y圓，z圓。

$$x+y+z=p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x:y:z=a:b:c\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$

$$=\frac{p}{a+b+c}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ap}{a+b+c},\quad y=\frac{bp}{a+b+c},$$

$$z=\frac{cp}{a+b+c}.$$

(答) 甲$\dfrac{ap}{a+b+c}$圓，乙$\dfrac{bp}{a+b+c}$圓。

丙$\dfrac{cp}{a+b+c}$圓。

【問題】

1. 今以4800圓分與甲乙丙三人，甲，乙，丙之比為 3∶6∶7. 問各人之所得如何？

2. 甲乙丙丁四人共同經營某事業，其出資之數，甲爲1500圓，乙爲2100圓，丙爲2400圓，丁爲3000圓．而得純益5400圓．如以出資額爲比例而分之，則各人之所得如何？

【解　答】

1. 甲　$\frac{4800\times 3}{3+6+7}=900$，

乙　$\frac{4800\times 6}{3+6+7}=1800$，

丙　$\frac{4800\times 7}{3+6+7}=2100$．

（答）　甲900圓，乙1800圓，丙2100圓．

2. 甲，乙，丙，丁出資額之比，化簡之爲

$5:7:8:10$．

$5+7+8+10=30$．

故將5400圓各以　$\frac{5}{30}$，$\frac{7}{30}$，$\frac{8}{30}$，$\frac{10}{30}$

乘之而得答．

（答）　甲900圓，乙1260圓，

丙1440圓，丁1800圓．

4. 混 合 法

〔例〕欲將每石8元4角之米，與每石12元之米混合，而成每石9元6角之米18石，問應各取若干混合之?

設取8元4角者x石，與12元者y石而混合之，則

$$x+y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$84x+120y=96\times18 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解之，得 $x=12$，$y=6$。

（答） 8元4角者12石，12元者6石。

〔別解〕 $x+y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$84x+120y=96\times(x+y),$$

$$\therefore\quad (96-84)x=(120-96)y.$$

$$12x=24y. \qquad \therefore\quad x=2y.$$

$$\therefore\quad x:y=2:1.$$

故18依2：1比例配分而得

$$x=12, \qquad y=6.$$

（答） 8元4角者12石，12元6石。

〔注意〕此題如次計算，較爲簡單。

	1石之價	損　益	混合之比
上米酒	120 角	損24角	1
混合米	96 角		
下　米	84 角	益12角	2

混合之比爲損益之比之反比。如是將18石依1：2比例配分卽得。

【問　題】

有純金塊與14開之金塊，欲熔合而成18開金60公分，問應由各金塊取若干而混合之？

【解　答】

純金爲24開金。

	品　位	損　益	混合之比
純　金	24	損　6	2
18開金	18		
14開金	14	益　4	3

$$60\text{公分}\times\frac{2}{2+3}=24\text{公分},$$

$$60\text{公分}\times\frac{3}{2+3}=36\text{公分}$$

（答）　純金24公分；14開金36公分。

〔例〕有成色0.75之甲銀塊，成色0.85及0.9之乙，丙銀塊，宜依如何之比混合之，而得成色0.8之銀塊？但甲乙銀塊分量之比爲3：2.

	成　色	損　益	混合之比
甲	0.75	益0.05	3
混　合	0.8		
乙	0.85	損0.05	2
丙	0.9	損0.1	x

$\because\quad 0.05\times3=0.05\times2+0.1x.$

$\therefore\quad x=0.5.$

$\therefore\quad 3:2:0.5=6:4:1.$

(答)　甲：乙：丙＝6：4：1.

【問　題】

欲取每斤價1角2分，7分，5分之甲乙丙三種酒與水混合之，而成每斤8分之酒54斤．問應各取若干斤？但水與甲酒丙酒混合之比爲1：10：8.

【解】答

設水不值錢考之．

	1斤之價	損 益	混合之比
甲 酒	12 分	損 4	10
混合酒	8 分		
乙 酒	7 分	益 1	x
丙 酒	5 分	益 3	8
水	0 分	益 8	1

$4\times10=x+3\times8+8,$

$40=x+24+8.$

$\therefore\ x=8.$

故混合之比爲 10 : 8 : 8 : 1.

甲 $54\times\dfrac{10}{10+8+8+1}=20,$

乙，丙 $54\times\dfrac{8}{10+8+8+1}=16,$

水 $54\times\dfrac{1}{10+8+8+1}=2.$

答．甲20斤，乙．丙各16斤，水2斤。

5. 變 數 法

〔例〕設 z 隨 x，y 而變化，y 爲一定時，z 與 x 爲正比例，x 爲一定時，z 與 y 爲反比例，試證明 z 與 $\frac{x}{y}$ 爲正比例。

設 x，y 之值各爲 x_1，y_1 時，z 之值爲 z_1；又設 x，y 之值各爲 x_1，y_2 時，z 之值爲 z_3，又設 x，y 之值各爲 x_2，y_2 時，z 之值爲 z_2，則

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{z_3}{z_2}=\frac{x_1}{x_2}, \quad \therefore$$

各邊相乘，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1y_2}{x_2y_1}=\frac{x_1}{y_1}\div\frac{x_2}{y_2}.$$

卽 z 與 $\frac{x}{y}$ 爲比例.

【問 題】

1. 設 $y \propto x$，試證明 $x \propto y$.

2. 氣體之體積，與其絕對温度爲正比例，

與壓力爲反比例。今有壓力 3 氣壓，絕對溫度 280 度時20公升之氣體，問壓力 4 氣壓絕對溫度 300 度時爲幾公升？

【解答】

1. $y \propto x$ 故 $y=kx$。(但 k 爲常數)

$\therefore \quad x=\frac{1}{k}y.$

然 k 爲常數，故 $\frac{1}{k}$ 亦爲常數。

$\therefore \quad x \propto y.$

2. 設氣體之體積爲 v 公升，壓力爲 p，絕對溫度爲 t 度，則

$$v \propto \frac{t}{p} \qquad v=k\frac{t}{p}.\ (k \text{ 爲常數})$$

$p=3$，$t=280$ 時，$v=20$，故

$$20=k\frac{280}{3}. \qquad \therefore \quad k=\frac{3}{14}.$$

$\therefore$ $p=4$，$t=300$ 時，

$$v=\frac{3}{14}\cdot\frac{300}{4}=\frac{225}{14}=16\frac{1}{14}.$$

(答) $16\frac{1}{14}$ 公升。

第十編 不等式

1. 絕對不等式

〔例〕設 a，b 爲正數而不等，試證明

$$a^3+b^3>ab(a+b)$$

$$\begin{aligned}&a^3+b^3-ab(a+b)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\\&=(a+b)(a^2-2ab+b^2)\\&=(a+b)(a-b)^2.\end{aligned}$$

因 a，b 爲正，故 $a+b>0$。

因 a，b 爲不相等之正數，故

$(a-b)^2>0$。

$\therefore\ (a+b)(a-b)^2>0$.

$\therefore\ a^3+b^3-ab(a+b)>0$.

$\therefore\ a^3+b^3>ab(a+b)$.

【問 題】

1. 設 a，b 皆爲正數而不相等，試證

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

2. 設 a，b，c 爲實數，試證

$$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca.$$

【解 答】

1. $$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2}-2\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

因 a，b 皆爲正數而不相等，故

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

2. $$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ca+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\}.$$

給 a，b，c 爲實數，故

$$(a-b)^2\geqq 0,\ (a-c)^2\geqq 0,\ (b-c)^2\geqq 0.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\}\geqq 0.$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca.$$

〔例〕設 a，b，c 爲相異之正數，試證
$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

$$\begin{aligned}&(a+b)(b+c)(c+a)-8abc\\&=(ab+b^2+ac+bc)(c+a)-8abc\\&=2abc+b^2c+ac^2+bc^2+a^2b+ab^2+a^2c\\&\qquad\qquad-8abc\\&=(a^2c-2abc+b^2c)+(a^2b-2abc+bc^2)\\&\qquad\qquad+(ab^2-2abc+ac^2)\\&=c(a-b)^2+b(a-c)^2+a(b-c)^2.\end{aligned}$$

因 a，b，c 皆正，故各項皆爲正。

$$\therefore\quad (a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

〔別解〕 由 438 頁 1 題，

$$a+b>2\sqrt{ab}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$b+c>2\sqrt{bc}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$c+a>2\sqrt{ca}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)×(2)×(3)，

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

【問 題】

設 a，b，c 爲正數而不相等，試證
$a^3+b^3+c^3>3abc.$

2. 設 a，b，c，x，y，z 為實數，試比較 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ 與 $(ax+by+cz)^2$ 之大小。

【解　答】

1. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

既 $a+b+c>0$，

又 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$。

$\therefore\ a^3+b^3+c^3>3abc$.

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2+a^2z^2+b^2z^2+c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2acxz$$

$$=(b^2x^2-2abxy+a^2y^2)+(c^2y^2-2bcyz+b^2z^2)+(c^2x^2-2acxz+a^2z^2)$$

$$=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(cx-az)^2.$$

因 a，b，c，x，y，z 為實數，故各項皆大於0或等於0。

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+bx+cz)^2$

〔例〕分子大於分母，且皆爲正數之分數，於其兩項加同一正數，則分數之值減少，試證明之。

設已知之分數爲$\frac{a}{b}$，所加之正數爲p。

$$\frac{a}{b}-\frac{a+p}{b+p}=\frac{ab+ap-ab-bp}{b(b+p)}$$

$$=\frac{p(a-b)}{b(b+p)}.$$

因b，p爲正，故

$$p>0,\quad b>0,\quad b+p>0.$$

又$a>b$，故$a-b>0$。

$$\therefore\quad \frac{p(a-b)}{b(b+p)}>0.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}>\frac{a+p}{b+p}.$$

故得證明。

【問　題】

1. 設a，b，c，d皆爲正數，且$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$，

試證明　$\frac{b}{a}>\frac{b+d}{a+c}>\frac{d}{c}$.

【解　答】

$$\frac{b}{a}-\frac{b+d}{a+c}=\frac{ab+bc-ab-ad}{a(a+c)}$$

$$=\frac{bc-ad}{a(a+c)}.$$

然 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$.

而 a，c 皆爲正，故此兩邊以 ac 乘之，不等號之向不變。

即 $bc>ad$。　$\therefore$　$bc-ad>0$

而 a，c 皆爲正，故 $a(a+c)>0$.

$$\therefore\quad \frac{bc-ad}{a(a+c)}>0.$$

$$\therefore\quad \frac{b}{a}>\frac{b+d}{a+c}.$$

同樣 $\frac{b+d}{a+c}>\frac{d}{c}$.

$$\therefore\quad \frac{b}{a}>\frac{b+d}{a+c}>\frac{d}{c}.$$

〔注意〕 如 $a=b$，則不論 c 之爲正或負，而 $ac=bc$. 如 $a>b$，則兩邊以正數 c 乘之而得 $ac>bc$. 若以負數 d 乘之而得 $ad<bd$.

故去不等式之分母，須視分母之正負，而定不等號之同向或異向。

2. 條件不等式

〔例〕設 $\frac{x}{5}-\frac{1}{3}>\frac{x}{3}+\frac{1}{5}$，試定 x 之界限。

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{3}>\frac{x}{3}+\frac{1}{5}.$$

兩邊各以15乘之，

$$3x-5>5x+3.$$

$$\therefore\quad 3x-5x>3+5.$$

$$\therefore\quad -2x>8.$$

兩邊各以 -2 除之，

$x<-4$。　　　　(答) $x<-4$。

〔注意〕 不等式之兩邊，以正數乘之或除之則不等號之向不變，如以負數乘之或除之，則不等號之向卽變。

又移項可如等式同樣行之，並無差異。故例如於 $3x-5>5x+3$ 之兩邊各加 $(5-5x)$，不等號之向不變，而得

$$3x-5+(5-5x)>5x+3+(5-5x).$$

卽 $3x-5x>3+5$。

【問　題】

解次之不等式：

1. $9x-5>2x+9.$

2. $\dfrac{5x-6}{5}-\dfrac{3x}{4}<\dfrac{x-9}{10}.$

2. $\dfrac{12-3x}{4}-\dfrac{3x-11}{3}>2.$

【解　答】

1. $9x-5>2x+9.$

$$9x-2x>9+5,$$

$7x>14.$　兩邊以 7 除之，

$x>2.$　　　　　　（答）　$x>2.$

2. $\dfrac{5x-6}{5}-\dfrac{3x}{4}<\dfrac{x-9}{10},$

$20x-24-15x<2x-18$

$\therefore\ 3x<6.$　兩邊以 3 除之，

$x<2.$　　　　　　（答）　$x<2.$

3. $\dfrac{12-3x}{4}-\dfrac{3x-11}{3}>2.$

$\therefore\quad 36-9x-12x+44>24,$

$-21x>-56,$　兩邊以 -21 除之，

$x<\dfrac{8}{3}.$　　　　　　（答）　$x<\dfrac{8}{3}.$

〔例〕 解次之不等式:

(i) $(x-3)(x+5)>0$.

(ii) $(x+3)(x-7)<0$

(i) $(x-3)(x+5)>0$.

如此式之左邊爲0，則其值以 3，-5 爲限，就數列考之，則

$\cdots\cdots5,4,\overset{\circ}{3},2,\cdots0,\cdots-4,\overset{\circ}{-5},-6,-7,\cdots\cdots$

如 $x>3$，則 $x-3>0$，$x+5>0$.

故 $(x-3)(x+5)>0$ 能成立。

如 $x=3$ 及 $x=-5$，則左邊爲0，故原式不成立。

如 $3>x>-5$，則 $x-3<0$，$x+5>0$。

故 $(x-3)(x+5)<0$，即原式不成立。

如 $x<-5$，則 $(x-3)<0$，$x+5<0$，

$\therefore$ $(x-3)(x+5)>0$ 能成立。

故 $x>3$ 或 $x<-5$.

〔注意〕 此等之事，可以心算定

$x>3$，$x<-5$.

(ii) $(x+3)(x-7)<0$,

$\cdots\cdots9,8,\overset{\circ}{7},6,5,\cdots0,\cdots-2,\overset{\circ}{-3},-4,\cdots\cdots$

$7>x>-3$ ……………………………(答)

【問　題】

解次之不等式：

1. $x^2-7x+12>0$。

2. $x^2-4x-12<0$。

3. $2x^2+5x+2\geqq 0$。

4. $3x^2+4x-7\leqq 0$。

【解　答】

1. $x^2-7x+12>0$。

$\therefore\quad (x-3)(x-4)>0$。

$x>4$ 及 $x<3$。

(答)　$x>4$ 及 $x<3$。

2. $x^2-4x-12<0$，

$(x-6)(x+2)<0$。

$\therefore\quad 6>x>-2$ ……………………(答)

3. $2x^2+5x+2\geqq 0$。

$\therefore\quad (2x+1)(x+2)\geqq 0$。

$\therefore\quad x\geqq -\dfrac{1}{2}$ 及 $x\leqq -2$。

(答)　$x\geqq -\dfrac{1}{2}$ 及 $\leqq -2$。

4. $3x^2+4x-7\leqq 0$，

$(3x+7)(x-1)\leqq 0$。

$\therefore\quad 1\geqq x\geqq -\dfrac{7}{3}$ ……………………(答)

〔例〕 解次之不等式:

$$\frac{(x-5)(x+3)}{x-2}>0.$$

$$\frac{(x-5)(x+3)}{(x-2)}>0.$$

$\cdots\cdots 6,\overset{\circ}{5},4,3,\overset{\circ}{2},1,0,\cdots\cdots -2,-\overset{\circ}{3},-4,\cdots\cdots$

$x=5$, $x=2$, $x=-3$ 時不成立。

$x>5$ 時能成立。

$5>x>2$ 時不成立。

$2>x>-3$ 能成立。

$-3>x$ 時不成立。

（答） $x>5$ 及 $2>x>-3$。

【問 題】

解次之不等式:

1. $\dfrac{x-1}{x+7}<0.$

2. $\dfrac{(x-3)(x-7)}{(x+9)(x-1)}<0.$

3. $x+2y=3$, $3x-y>0.$

4. $2x-3y>8$, $-3x+y>0.$

【解 答】

1. $\frac{x-1}{x+7}<0$.

$\therefore\ 1>x>-7$ ……………………(答)

2. $\frac{(x-3)(x-7)}{(x+9)(x-1)}<0$.

(答) $7>x>3$ 及 $1>x>-9$。

3. $x+2y=3$ ……………………………(1)

$3x-y>0$ ……………………………(2)

$(1)+(2)\times 2$, $7x>3$. $\therefore\ x>\frac{3}{7}$.

$(2)-(1)\times 3$, $-7x>-9$. $\therefore\ y<\frac{9}{7}$。

(答) $x>\frac{3}{7}$, $y<\frac{9}{7}$。

4. $2x-3y>8$ ……………………………(1)

$-3x+y>0$ ……………………………(2)

$(1)+(2)\times 3$, $-7x>8$. $\therefore\ x<-\frac{8}{7}$。

$(1)\times 3+(2)\times 2$,

$-7y>24$. $\therefore\ y<-\frac{24}{7}$.

(答) $x<-\frac{8}{7}$, $y<-\frac{24}{7}$

〔注意〕 解聯立不等式，亦如解聯立方程，依同向之不等號，由相加或相減而得未知數之值之界限。

〔例〕 求同時能滿足下列二不等式 x 之值之界限。

$$x^2+2x-15<0,\quad x^2+2x-8>0.$$

$$x^2+2x-15<0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+2x-8>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)， $(x+5)(x-3)<0.$

$\therefore\quad 3>x>-5 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)， $(x+4)(x-2)>0.$

$\therefore\quad x>2$ 及 $x<-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

滿足 (3) 與 (4) 中 x 之值為

$3>x>2,\quad -4>x>-5.$

(答) $3>x>2,\quad -4>x>-5.$

【問 題】

1. 將 $x^2-3x-4>0$，與 $x^2-x-6<0$ 同立，求 x 之值之範圍。

2. 設方程 $x^2-2(a-5)x+1=0$ 之根為實數，則 a 之值如何？

3. 設 x 為實數，試證明 $x+\dfrac{1}{x}$ 不能取 -2 與 2 間之值。

【解　答】

1. $x^2-3x-4>0$ ……………………(1)

$x^2-x-6<0$ ……………………(2)

由(1)，$(x-4)(x+1)>0$。

$\therefore\quad x>4$ 及 $x<-1$ ……………(3)

由(2)，$(x-3)(x+2)<0$。

$\therefore\quad 3>x>-2$ ……………………(4)

由(3)與(4)，$-1>x>-2$ …………(答)

2. $x^2-2(a-5)x+1=0$，

判別式 $=(a-5)^2-1$

$=a^2-10a+25-1=a^2-10a+24$

$=(a-4)(a-6)$.

因有實根，故 $(a-4)(a-6)\geqq 0$。

$\therefore\quad a\geqq 6$ 及 $a\leqq 4$ ………………(答)

3. 設 $x+\dfrac{1}{x}=y$，

$x^2-yx+1=0$。

然 x 爲實數，故

判別式 $y^2-4\geqq 0$。

$\therefore\quad (y+2)(y-2)\geqq 0$。

$\therefore\quad y\geqq 2$ 及 $y\leqq -2$。

故 y 即 $x+\dfrac{1}{x}$ 不能取 -2 與 2 間之值。

3. 極大極小

〔例〕 $x^2+4x+10$ 式中，x 取如何值時爲極小？又求此時之極小值.

$$x^2+4x+10=x^2+4x+4+6$$

$$=(x+2)^2+6$$

此式以 $(x+2)^2$ 極小時爲極小. 卽 $x+2=0$ 時.

卽 $x=-2$ 時爲極小，而極小值爲 6.

〔別解〕 設 $x^2+4x+10=y$，則

$$x^2+4x+10-y=0.$$

極大極小須就實數而論之，如 x 爲實數.

$$\therefore\quad 判別式=2^2-(10-y)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad y\geqq 6.$$

卽 y 可比 6 大或相等，故以相等時爲極小，而極小值爲 6.

$$x^2+4x+10=6.$$

$$\therefore\quad (x+2)^2=0.$$

$$\therefore\quad x=-2 \text{ 時爲極小.}$$

卽 $x=-2$ 時爲極小，而極小值爲 6.

【問　題】

1. 求 $8-6x-x^2$ 之極大值。

2. 二正數 x，y 之和爲一定，試證其積以 $x=y$ 時爲極大。

【解　答】

1. $8-6x-x^2=8-x^2-6x$

$$=17-(x^2+6x+9)=17-(x+3)^2.$$

故 $x=-3$ 時爲極大，而極大值爲17.

(答)　極大值17。

〔別解〕　$8-6x-x^2=y$，

$$x^2+6x+y-8=0,$$

判別式$=9-(y-8)\geqq 0$，

$\therefore\ y\leqq 17.$　　(答)　極大值17。

2. 設 $x+y=a$……一定數，則 $y=a-x$。

$$\therefore\ xy=x(a-x)=-x^2+ax$$

$$=-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{4}$$

$$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

$\therefore\ x=\dfrac{a}{2}$時爲極大，即 $x=y$。

〔別解〕　$xy=S$，則 $x(a-x)=S$，

$x^2-ax+S=0$.　　$\therefore\ a^2-4S\geqq 0$.

$\therefore\ S=\dfrac{a^2}{4}$ 時爲極大，由此得 $x=y$。

〔例〕設x爲實數，試求$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$之極大值及極小值.

設　$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=y$，則

$$(1-y)x^2-(1+y)x+(1-y)=0.$$

因x爲實數，故

$$(1+y)^2-4(1-y)^2\geqq 0,$$

$$-3y^2+10y-3\geqq 0.$$

$$\therefore\quad 3y^2-10y+3\leqq 0.$$

$$\therefore\quad (y-3)(3y-1)\leqq 0.$$

$$\therefore\quad 3\geqq y\geqq\frac{1}{3}.$$

故y之極大值爲3，極小值爲$\frac{1}{3}$.

〔注意〕從$2\geqq y$可求極大值而不能求極小值.

【問　題】

1. 求$\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$之值之範圍.

2. 設x爲實數，試證明$\frac{2x^2+3x-4}{2+3x-4x^2}$可取任何之值.

【解　答】

1. 設 $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}=y$.

$(1-y)x^2-2(1+y)x+(4-4y)=0$.

$\therefore\quad (1+y)^2-(1-y)(4-4y)\geqq 0$.

$\therefore\quad -3y^2+10y-3\geqq 0$.

$\therefore\quad 3y^2-10y+3\leqq 0$.

$\therefore\quad (y-3)(3y-1)\leqq 0$.

$\therefore\quad 3\geqq y\geqq \dfrac{1}{3}$……………………(答)

2. 設 $\dfrac{2x^2+3x-4}{2+3x-4x^2}=y$.

$2x^2+3x-4=2y+3yx-4yx^2$,

$2(1+2y)x^2+3(1-y)x-2(2+y)=0$.

判別式 $=9(1-y)^2+16(1+2y)(2+y)$

$=9-18y+9y^2+32+80y+32y^2$

$=41y^2+62y+41$

$=41\left\{y^2+\dfrac{62}{41}y+1\right\}$

$=41\left\{y^2+\dfrac{62}{41}y+\left(\dfrac{31}{41}\right)^2\right\}-\dfrac{961}{41}+41$

$=41\left(y+\dfrac{31}{41}\right)^2+\dfrac{720}{41}>0$.

無論 y 爲如何之實數，(因與其相應之 x 之判別式爲正) 皆可求得其相應之 x 之實數值.

卽 y 可取任何之值.

〔例〕某機關車之速，不連結貨車，每時可行36哩，如連結貨車，則與貨車數之平方根爲比例而減其速．今連結貨車4輛，其速爲每時30哩．試求其保持每時20哩以上之速，可連結貨車之最大數．

設連結貨車 x 輛時，其速減至 y 哩，則

$y=36-k\sqrt{x}$，但 k 爲常數。

$x=4$ 時 $y=30$，故

$30=36-k\sqrt{4}$。

$\therefore\quad k=3$。

$\therefore\quad y=36-3\sqrt{x}$。

故保持20哩以上，必須

$36-3\sqrt{x}\geqq 20$，

$16\geqq 3\sqrt{x}$。

$\therefore\quad \sqrt{x}\leqq\dfrac{16}{3}$，因 x 爲正，故

$x\leqq\dfrac{256}{9}$。

$\therefore\quad x\leqq 28.4\cdots\cdots$

（答）28輛。

【問　題】

有電車公司，車票每張售10分，平均一日售出 n 張。今漲價 p 成，其結果少售出 $\frac{1}{20}pn$ 張。問該公司欲使收入額最多，則每張須售若干分?

【解　答】

設每張售 x 分，公司之收入額爲 y 分，則

$$y=\left(n-\frac{1}{20}pn\right)x.$$

然由10分漲至 x 分，故

$$\frac{p}{10}=\frac{x-10}{10}.\qquad\therefore\quad p=x-10.$$

$$y=\left\{n-\frac{n(x-10)}{20}\right\}x.$$

$$\therefore\quad nx^2-30nx+20y=0\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 x 爲實數，故

$$(15n)^2-20ny\geqq 0.$$

$$\therefore\quad y\leqq\frac{45}{4}n.$$

$$\therefore\quad y=\frac{45}{4}n$$ 之時爲最大。

因判別式爲0時而 x 最大，故

$$x=\frac{15n\pm\sqrt{0}}{n}=15.$$　　(答)　15分

第十一編　圖解線

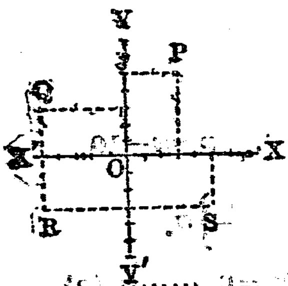
1. 點之坐標

〔例〕試於圖上求次之諸點:

$P(x=3,\ y=5)$，$Q(x=-5,\ y=3)$，

$R(x=-5,\ y=-3)$，

$S(x=5,\ y=-3)$.



就於一定點O相交成直角之二直線 XX′，YY′考之，x 之正值，取 YY′ 右方所表之數，x 之負值，則取其左方所表之數．y 之正值，取 XX′ 上方所表之數，y 之負值，則取 XX′ 下方所表之數．此種之值，稱爲該點之坐標．

故 $P(x=3,\ y=5)$ 爲如圖之點，Q，R，S 亦如圖中表出．

【問　題】

1. XX′ 與 YY′ 之交點爲原點，問原點之坐標如何?

2. 試於圖上求下列諸點之位置：

P($x=1.5$, $y=3$),

Q($x=0$, $y=2$),

R($x=-3$, $y=0$),

S($x=-2$, $y=-3$).

3. 試以下列四點爲頂點畫四邊形：

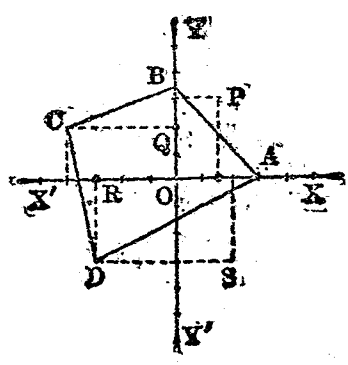
A(3, 0)，　　B(0, 3.5)，

C(−4, 2)，　　D(−3, −3).

【解　答】

1. $x=0$, $y=0$

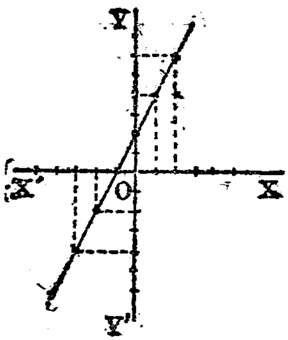
2. 3.



【注意】　如A($x=3$, $y=0$) 之點亦可簡書爲 A(3, 0).

2. 一次式之圖解線

〔例〕 畫 $2x+2$ 之圖解線.



設 $y=2x+2$.

如 $x=2$，則 $y=6$.

如 $x=1$，則 $y=4$.

如 $x=0$，則 $y=2$.

如 $x=-1$，則 $y=0$.

如 $x=-2$，則 $y=-2$.

如 $x=-3$，則 $y=-4$.

求此等諸點順次連結之，卽得 $y=2x+2$ 之圖解線.

因一次式之圖解線爲直線，故普通於 $y=2x+2$ 求得 $(x=0, y=2)$ 與 $(x=-1, x=0)$ 之二點而畫之，較爲簡單.

【問　題】

畫次式之圖解線，求 (i) 與 (ii) 之交點 P 之坐標：

(i) $y=\frac{5}{3}x-5$。　　(ii) $2x+3y=-6$。

【解　答】

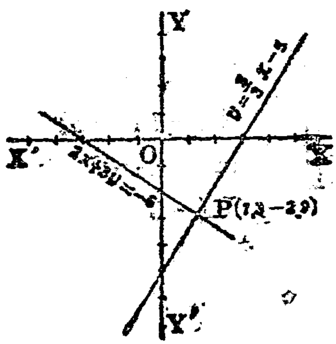
(i) 設 $x=0$，則 $y=-5$。

　　設 $y=0$，則 $x=3$。

故此式之圖解線，爲過 (0，−5) (3，0) 二點之直線。

同樣 (ii) 之圖解線爲過 (0，−2) (−3，0) 二點之直線。

解 (i)，(ii) 之聯立方程，則



$$\begin{cases} x=1\frac{2}{7}, \\ y=-2\frac{6}{7}. \end{cases}$$

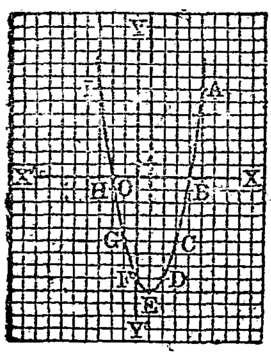
在圖上求交點 P 之位置，卽爲聯立方程之根，但不能十分正確，祗以目力所能及者爲限。

3. 二次式之圖解線

〔例〕畫 x^2-2x-8 之圖解線.

置 $y=x^2-2x-8$，設 x 之值爲 5，4，3，……而求 y 之值，則如次表:

x	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7



求得
A (5，7)
B (4，0)
C (3，-5)
D (2，-8)
E (1，-9)
F (0，-8)
G (-1，-5)
H (-2，0)
I (-3，7)

畫點而連結之，卽爲圖解線.

起始可求極小值 -9，置於中央而作表.

〔注意〕 如此之圖解線，稱爲拋物線.

【問　題】

畫次式之圖解，又求 (i) 與 (ii) 交點之坐標：

(i) $y=x^2+x-6$.

(ii) $y=x^2-2x-3$.

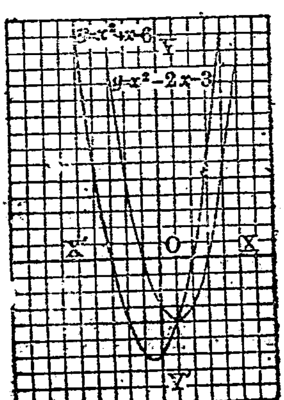
【解　答】

(i)

x	3	2	1	0	−0.5	−1	−2	−3	−4
y	6	0	−4	−6	−6.25	−6	−4	0	6

(ii)

x	4	3	2	1	0	−1	−2
y	5	0	−3	−4	−3	0	5



(i) 與 (ii) 交點之坐標爲

(1，−4)。

〔注意〕

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-4. \end{cases}$$

爲此二聯立方程之根。

第十二編　級　　數

1. 等差級數

〔例〕設等差級數之初項爲 a，公差爲 d，第 n 項卽末項爲 l，試證明

$$l=a+(n-1)d$$

再由此公式求等差級數初項爲 2，公差爲 3 時之第12項.

逐項列出如下

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots\cdots$$

故 d 之係數，比項數之次序數小 1，卽

$$第\,n\,項=a+(n-1)d.$$

$$\therefore\ l=a+(n-1)d.$$

初項 2，公差 3 時，

$$第12項=2+(12-1)\times3=35.$$

（答）35.

【問　題】

1. 等差級數之初項爲 3，公差爲 2，求第20項.

2.　等差級數之初項爲 1，公差爲$\frac{1}{2}$，求第15項.

3.　求$\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，…… 等差級數之第 9 項.

4.　有等差級數，公差爲9，第 7 項爲33.求初項.

5.　求下列等差級數之項數：

$5,\ 2,\ -1, \cdots\cdots\cdots -52.$

【解　答】

1.　第20項$=3+(20-1)\times 2=41$ ……(答)

2.　第15項$=1+(15-1)\times\frac{1}{2}=8$ ……(答)

3.　公差$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}$

$$=\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

第 9 項$=\sqrt{2}+(9-1)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$ …(答)

4.　初項爲 a，則

$33=a+(7-1)\times 9.$

$a=-21.$　　　　(答)　-21.

5.　項數爲 n，則

$-52=5+(n-1)\times(-3).$　　(答)　20項.

〔例〕試於 13 與 29 之間，插入三個等差中項.

以 13 為初項，29 為末項考之，其間插入 3 個等差中項，則29為第 5 項，故設公差為 d，則

$$29=13+(5-1)d,\qquad d=4.$$

(答)　17，21，25.

〔注意〕　如單言13與29之間插入等差中項，卽指其間插入一個等差中項. 又求等差中項時亦同.

【問　題】

1. 於18與43之間，插入 4 個等差中項.

2. 於 5 與 -4 之間，插入 2 個等差中項.

3. 求 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ 與 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 之等差中項.

4. 於 a 與 b 之間，插入 n 個中項而作等差級數，再求其第 p 項.

【解　答】

1. 設公差爲 d，則

$43=18+(6-1)d$.　　$\therefore\ d=5$.

（答）23，28，33，38.

2. 設公差爲 d，則

$-4=5+(4-1)d$.　　$\therefore\ d=-3$.

（答）2，-1.

3. 求等差中項，祗須將二數相加，以 2 除之.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\div 2$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{2-1}\div 2$$

$$=2\sqrt{2}\div 2=\sqrt{2}.$$　　（答）$\sqrt{2}$.

4. 設公差爲 d，則

$b=a+(n+2-1)d$.

$\therefore\ d=\dfrac{b-a}{n+1}$.

故可求初項 a，公差 $\dfrac{b-a}{n+1}$ 之等差級數第 p 項.

第 p 項 $=a+(p-1)\dfrac{b-a}{n+1}$.

（答）$a+(p-1)\dfrac{b-a}{n+1}$.

〔例〕設初項爲 a，而公差爲 d，項數爲 n，且 n 項之和爲 S，試作以下二公式：

$$S=\frac{n}{2}(a+l)；$$

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

用此公式求 8，13，18，…… 之等差級數20項之和。

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$$

將此式顚倒其順序書之，

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

將此二式相加，

$$2S=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

$$=n(a+l).$$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}(a+l)$$

而 $l=a+(n-1)d$，代入此式

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}。$$

8，13，18 之級數，初項爲 8，公差爲 5，

數20項之和爲

之總和為 $S=\frac{20}{2}\{2\times8+(20-1)\times5\}$

$=10(16+95)=1110.$

（答）　1110。

【問　題】

1. 求 5，2，−1，……−55 等差級數之總和。

2. 求從 1 爲始整數 n 個之總和。

3. 求等差級數 5，3，1，−1，……至 100 項之總和。

【解　答】

1. $a=5$，$d=-3$。故求其末項當第幾項得

$$-55=5+(n-1)\times(-3)。$$

$$\therefore\quad n=21$$

用前之公式

$$S=\frac{21}{2}\{5+(-55)\}=-525\cdots\cdots（答）$$

2. $S=1+2+3+4+\cdots\cdots+n$

$$=\frac{n}{2}(1+n)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（答）$$

$$S=\frac{100}{2}\{2\times5+(100-1)\times(-2)\}$$

$$=-9400\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（答）$$

〔例〕於200及400之間，求7能整除之一切數之和。

$$200 \div 7 = 28 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{剩餘 }4,$$

$$400 \div 7 = 57 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{剩餘 }1.$$

故初項爲　$200-4+7=203,$

末項爲　$400-1=399.$

設項數爲 n，則

$$399=203+(n-1)\times 7.$$

$$\therefore\quad n=29.$$

$$S=\frac{29}{2}(203+399)=8729.$$

（答）　8729.

【問　題】

1. 試證從1起 n 個奇數之總和，恆爲完全平方數.

2. 從1至100之整數中，不能以3整除者，其總和若干？

3. 在200至700中之數，以13除而得餘數7者，其總和若干？

【解 答】

1. 初項1，公差2，項數n. 故

$$S=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\times 2\}=n^2.$$

故爲完全平方數.

2. 設自1至100整數之總和爲S，則

$$S=\frac{100}{2}(1+100)=5050.$$

3能整除之數，初項爲3，末項爲99，故項數爲33.

故設3能整除之數之總和爲S′，則

$$S'=\frac{33}{2}(3+99)=1683.$$

$$\therefore\quad S-S'=5050-1683=3367.$$

（答） 3367.

3. $200\div 13=15$ ……………………餘5，

$700\div 13=53$ ……………………餘11.

故初項爲 $200-5+7=202.$

末項爲 $700-11+7=696.$

設項數爲n，則 $696=202+(n-1)\times 13.$

$$\therefore\quad n=39.$$

$$S=\frac{39}{2}\{202+696\}=17511\text{……（答）}$$

〔例〕 等差級數 10，9.6，9.2，…… 幾項之和爲 126?

初項 10，公差 −0.4，故由

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$ 之公式，

$$126=\frac{n}{2}\{2\times10+(n-1)\times(-0.4)\},$$

$$n\{10-0.2(n-1)\}=126.$$

兩邊各以 5 乘之，

$$n(50-n+1)=630.$$

$$\therefore\quad n^2-51n+630=0.$$

$$(n-30)(n-21)=0.$$

$$\therefore\quad n=30 \text{ 或 } n=21.$$

（答）　第21項或30項.

【問　題】

1. 等差級數之第 6 項爲初項之 3 倍，則第幾項爲初項之 9 倍?

2. 有級數 11，16，21，26 等，級數之和爲 273，求級數之項.　（福建）

3. 有初項 −25，公差 7 之等差級數，問從初項至第幾項之和，大於 500?

【解　答】

1. 設初項爲 a，公差爲 d.

$3a=a+5d$. 　　$2a=5d$ ……(1)

設所求之項爲第 n 項，則

$9a=a+(n-1)d$. 　$\therefore$ 　$8a=(n-1)d$.

以 (1) 代入此式，

$20d==(n-1)d$. 　　$\therefore$ 　$n=21$.

（答） 第21項。

2. 設所求之項數爲 n，

$279=\frac{n}{2}\{2\times 11+(n-1)\times 5\}$,

$n(22+5n-5)=558$,

$5n^2+17x-558=0$.

$\therefore$ 　$n=\frac{-17\pm\sqrt{17^2+4\times 5\times 558}}{2\times 5}$

$=\frac{-17\pm\sqrt{11449}}{10}$

$=\frac{-17\pm 107}{10}=9$ 或 -12.4.

負數不合理，故捨之. 　　（答） 9 項。

3. 設所求之項數爲 n，則

$\frac{n}{2}\{2\times(-25)+(n-1)\times 7\}>500$,

$n(-50+7n-7)>1000$,

$7n^2-57n-1000>0$, ……

$(n-16.6)(n+8.5)>0$.

解之， $n>16.6$ 或 $n<-8.5$.

（答） 17項。

〔例〕某等差級數起始 n 項之和，不論 n 之值如何而爲 $n(5n-4)$. 求初項及公差.

設 $n=1$，則求由初項至一項之和，卽初項得

$$1\times(5\times1-4)=1.$$

設 $n=2$，則求由初項至二項之和，卽初項與第二項之和得

$$2(5\times2-4)=12.$$

故第二項爲

$$12-1=11.$$

卽公差　$11-1=10.$

(答)　初項 1，公差 10.

〔別解〕　設初項爲 a，公差爲 d，則

$$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=n(5n-4).$$

$$\therefore\quad n(nd+2a-d)=2n(5n-4).$$

$$\therefore\quad dn^2+(2a-d)n=10n^2-8n.$$

此式不論 n 爲何值而成立，故由未定係數法之理論（參看第十四編），

$$d=10\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2a-d=-8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 (1) 代入 (2)，則　$a=1.$

(答)　初項 1，公差 10.

【問　題】

1. 有起始 n 項之和，不論 n 之值如何而等於 $n(2n+1)$ 之等差級數，試求其第 9 項.

2. 有二等差級數，其 n 項之和之比爲 $\frac{7n+2}{5n-2}$. 試求13項之比.

【解　答】

1. 自初項至 9 項之和爲　$9(18+1)=171$

自初項至 8 項之和爲　$8(16+1)=136$.

故第 9 項爲　$171-136=35$…………(答)

2. 設二等差級數之初項各爲 a, a', 公差各爲 d, d', 則

$$\frac{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}}{\frac{n}{2}\{2a'+(n-1)d'\}}=\frac{7n+2}{5n-2}.$$

$$\therefore\quad \frac{2a+(n-1)d}{2a'+(n-1)d'}=\frac{7n+2}{5n-2}\cdots\cdots(1)$$

(1) 式不論 n 爲何值而成立，故求 $\frac{a+12d}{a'+12d'}$ 時，以 $n=25$ 代入 (1)，得

$$\frac{2a+24d}{2a'+24d'}=\frac{7\times25+2}{5\times25-2}.$$

$$\therefore\quad \frac{a+12d}{a'+12d'}=\frac{177}{123}\text{…………(答)}$$

〔例〕有三數成等差級數，其和爲6，其各數之平方和爲14，求各數．（安徽）

三數可如 a，$a+d$，$a+2d$ 而成等差級數，然設中央之數爲 x，公差爲 y，則三數爲

$$x-y,\quad x,\quad x+y.$$

$$\therefore\ (x-y)+x+(x+y)=6\ \cdots\cdots(1)$$

$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=14\ \cdots\cdots(2)$$

由(1)，$3x=6$．　$\therefore\ x=2\ \cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)，$3x^2+2y^2=14$．

以(3)代入此式，$12+2y^2=14$．

$$\therefore\ 2y^2=2,\qquad y^2=1.$$

$$\therefore\ y=\pm1.$$

$y=1$ 時，三數爲 1，2，3．

$y=-1$ 時，三數爲 3，2，1．

（答）1，2，3．

【問　題】

1．直角三角形之三邊成等差級數，求其三數之比．

2．有成等差級數之四數，其和爲20，第一第四項之積爲16．問各數幾何？

【解　答】

1. 三邊可設爲 $x-y$，x，$x+y$，則

$(x+y)^2=x^2+(x-y)^2$。

$\therefore\quad x^2+2xy+y^2=x^2+x^2-2xy+y^2$。

$\therefore\quad x^2=4xy$。　然　$x\neq0$. 故

$x=4y$。

故三邊之比

$3y:4y:5y=3:4:5$。

(答)　$3:4:5$

2. 四數成等差級數時，可設四數爲

$x-3y$，　$x-y$，　$x+y$，　$x+3y$。

$\therefore\quad (x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)$

$=20\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$(x-3y)(x+3y)=16\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)，　$4x=20$。　$\therefore\quad x=5\cdots\cdots(3)$

由(2)，　$x^2-9y^2=16$。

以 (3) 代入此式，

$25-9y^2=16$。　$\therefore\quad 9y^2=9$。

$\therefore\quad y^2=1$。　$\therefore\quad y=\pm1$。

$y=1$ 時，四數爲 2，4，6，8。

$y=-1$ 時，四數爲 8，6，4，2。

(答)　2，4，6，8。

〔例〕設 $\dfrac{a+b}{1-ab}$, b, $\dfrac{b+c}{1-bc}$ 爲等差級數：試證 $\dfrac{1}{a}$, b, $\dfrac{1}{c}$ 亦爲等差級數.

三數成等差級數，故

$$2b=\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc},$$

$$2b(1-ab)(1-bc)$$

$$=(a+b)(1-bc)+(b+c)(1-ab).$$

$$2b-2ab^2-2b^2c+2ab^3c$$

$$=a-abc+b-b^2c+b-ab^2+c-abc.$$

$$\therefore\quad 2ab^3c-ab^2-b^2c+2abc-a-c=0.$$

$$b^2(2abc-a-c)+(2abc-a-c)=0.$$

$$\therefore\quad (2abc-a-c)(b^2+1)=0.$$

於級數不取虛數，故 $b^2\geqq 0$.

$$\therefore\quad b^2+1>0.$$

$$\therefore\quad 2abc-a-c=0.$$

$$\therefore\quad 2abc=a+c.$$

$$\therefore\quad 2b=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}$, b, $\dfrac{1}{c}$ 成等差級數.

【問　題】

1. 設 $\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{b+c}$ 爲等差級數，試證 a^2，b^2，c^2 亦爲等差級數。

2. a，b，c 爲等差級數，試證

$$a^2(b+c),\ b^2(c+a),\ c^2(a+b)$$

亦爲等差級數。

1. $\frac{2}{a+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$。

$\therefore\quad 2(a+b)(b+c)$

$=(a+c)(b+c)+(a+c)(a+b)$。

$2ab+2b^2+2ac+2bc$

$=ab+bc+ac+c^2+a^2+ac+ab+bc$。

$\therefore\quad 2b^2=a^2+c^2$。

$\therefore\quad a^2$，b^2，c^2 成等差級數。

2. $2b=a+c$ ……………………………(1)

$\therefore\quad a=2b-c$ ……………………………(2)

$2b^2(c+a)=2b^2(2b)=4b^3$

$a^2(b+c)+c^2(a+b)$

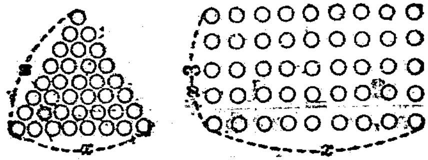
$=(2b-c)^2(b+c)+c^2(2b-c+b)$

$=4b^3-4b^2c+bc^2+4b^2c-4bc^2+c^3+3bc^2$

$-c^3=4b^3$

故可證明。

〔例〕有碁子若干個，可排列之成一正三角形，如再加 4 個，則可排列之成一矩形．而矩形一邊之數，等於三角形一邊之數，其他一邊之數，比三角形一邊之數少 3 個．問碁子之數幾何?



設正三角形一邊之數爲 x，則求初項 1，末項 x，項數 x 之等差級數之總和，可知碁子之總數．

$$\frac{x}{2}(1+x)+4=x(x-3),$$

$$x+x^2+8=2x^2-6x.$$

$$\therefore\quad x^2-7x-8=0,$$

$$(x-8)(x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=8\text{ 或 }x=-1.$$

$x=-1$ 不合題意，故捨之。

$x=8$，則總數爲 36.

（答）36.

【問　題】

1. 有旅人旅行280公里之路程，第一日行程若干公里，其後每日減4公里，7日而到，問第一日旅行之路程如何？

2. 有桿n枝，置在一處，先於此處立1枝，再從此起，每隔4公尺立一枝，使同在一列，每立一枝後，再回至原處取一枝，如是順次由近及遠，問至全部立畢，步行之路程義何？

【解　答】

1. 設第一日旅行之路程爲a公里，則因公差爲-4公里，故得

$$280=\frac{7}{2}\{2a+(7-1)\times(-4)\}$$

$$280=7(a-12).$$

$$\therefore\quad a-12=40.\qquad\therefore\quad a=52.$$

(答) 52公里。

2. 最先之一枝，勿必步行，故初項爲0，公差爲4公尺。而往返於此間之路程爲

$$2\times\frac{n}{2}\{2\times0+(n-1)\times4\}=4n(n-1).$$

2. 調和級數

〔例〕倒數成等差級數之級數，稱爲調和級數.

求二數 a, b 之調和中項.

設調和中項爲 x，則 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{b}$ 等差級數.

$$\therefore\quad \frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.\qquad \therefore\quad \frac{2}{x}=\frac{a+b}{ab}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2ab}{a+b}.\qquad (答)\ \frac{2ab}{a+b}.$$

【問　題】

1. 設 a, b, c 爲調和級數，試證

$$\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b}.$$

亦爲調和級數.

2. 設 a, b, c, d 爲調和級數，試證

$$3(a-b)(c-d)=(b-c)(a-d)$$

【解　答】

1. $$\frac{c+a}{b}-\frac{b+c}{a}=\frac{ac+a^2-b^2-bc}{ab}$$

$$=\frac{a^2-b^2+c(a-b)}{ab}=\frac{(a-b)(a+b+c)}{ab}\cdots(1)$$

$$\frac{a+b}{c}-\frac{c+a}{b}=\frac{ab+b^2-c^2-ac}{bc}$$

$$=\frac{b^2-c^2+a(b-c)}{bc}=\frac{(b-c)(a+b+c)}{bc}\cdots(2)$$

然 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$,

$$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}.$$

$\therefore$ (1) 與 (2) 相等.

故成調和級數.

2. 因 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ 爲等差級數，故設

公差爲 x，則

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=x \qquad \therefore a-b=abx \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=x. \qquad \therefore c-d=cdx \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=x. \qquad \therefore b-c=bcx \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{a}=3x. \qquad \therefore a-d=3adx\cdots\cdots(4)$$

$$3(a-b)(c-d)=3abcdx^2,$$

$$(b-c)(a-d)=3abcdx^2.$$

$$\therefore \quad 3(a-b)(c-d)=(b-c)(a-d).$$

3. 等比級數

〔例〕設等比級數之初項為 a，公比為 r，第 n 項為 l，總和為 S，試證下列各公式：

$$l=ar^{n-1},\qquad S=a\frac{1-r^n}{1-r},$$

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1},\quad S=\frac{a-lr}{1-r}.$$

逐項列之如下：

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\cdots\cdots$$

故 r 之指數比項數之次序數小 1。

第 n 項 $=ar^{n-1}$.

$$\therefore\quad l=ar^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

將此二式各邊相減，

$$S(1-r)=a(1-r^n)$$

$r\neq1$，故 $S=a\dfrac{1-r^n}{1-r}=a\dfrac{r^n-1}{r-1}$.

$$\therefore\quad S=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

然由(1)，$lr=ar^n$.

以此式代入上式，$S=\dfrac{a-lr}{1-r}$.

〔注意〕 $r=1$ 時，$S=na$。

【問　題】

1. 求 1，2，4，8，……等比級數 8 項之和
2. 試於 6 與96之間，插入三個等比中項。
3. 設一等比級數之第一項爲 2，第四項爲1024，求第二項與第三項。　　　(上海)

【解　答】

1. 初項 1，公比 2，故

$$S=1\times\frac{2^8-1}{2-1}=2^8-1=255\cdots\cdots(\text{答})$$

2. 設公比爲 r，則96爲第 5 項。

$96=6\times r^{5-1}$　　$\therefore\ r^4=16$。

$\therefore\ r=\pm2$。(捨虛數不用)

$$(\text{答})\begin{cases}12, & 24, & 48, \\ -12, & 24, & -48.\end{cases}$$

3. 設公比爲 r，則第四項爲

$2r^{4-1}=1024$。

$\therefore\ r^3=512$，　$r=8$。

(答)　第二項 16，第三項 128。

〔例〕等比級數之和爲1456，初項爲4，末項爲972，求公比及項數．（綏遠）

由 $S=\dfrac{lr-a}{r-1}$ 之公式，得

$$1456=\frac{972r-4}{r-1},$$

$$1456r-1456=972r-4,$$

$$484r=1452. \qquad \therefore \quad r=3.$$

又由 $l=ar^{n-1}$ 之公式，得

$$972=4\times 3^{n-1}, \qquad 3^{n-1}=243=3^5.$$

$$\therefore \quad n-1=5, \qquad n=6.$$

〔答〕公比3；項數6.

〔注意〕求項數多者，須用對數.

【問　題】

1. 有等比級數，第一，第二，第三項之和爲26．第一，第三，第五項之和爲182．求其初項及公比．

2. 求下列二多項式之積：

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1},$$

$$x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1}$$

3. 有三數成等比級數，其和爲14，其平方之和爲84，求各數．

【解 答】

1. 設初項爲 a，公比爲 r，則得

$$a+ar+ar^2=26 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a+ar^2+ar^4=182 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，$a(1+r+r^2)=26 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)，$a(1+r^2+r^4)=182 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)÷(3)，$1-r+r^2=7$

$\therefore\ r^2-r-6=0,\quad (r-3)(r+2)=0.$

$\therefore\ r=3$ 或 $r=-2.$

$r=3$ 時，$a=2.$

$r=-2$ 時，$a=\dfrac{26}{3}$

(答) 初項2，公比3，或初項$\dfrac{26}{3}$，公比-2.

2. $x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1}=x\dfrac{1-x^{2n}}{1-x},$

$$x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1}=x\frac{1-x^{2n}}{1+x}.$$

故積爲 $\dfrac{x^2(1-x^{2n})^2}{1-x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

3. 設初項爲 a，公比爲 r，則得

$$a+ar+ar^2=14,\quad a^2+a^2r^2+a^2r^4=84.$$

$$(1-r+r^2)=6.$$

(答) 2，4，8.

〔例〕設 $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 係以 r 爲公比之等比級數，試證明 $r^3+r^2+r=1$。

$$r=\frac{b+c-a}{a+b+c},\quad r^2=\frac{c+a-b}{a+b+c},$$

$$r^3=\frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

$$\therefore\quad r^3+r^2+r=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

$$\therefore\quad r^3+r^2+r=1.$$

【問 題】

1. 設 a, b, c, x 爲實數，試證 a, b, c 係以 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ 之 x 爲公比之等比級數。

2. 設等比級數自初項至第 n 項之積爲 P，其和爲 S，其各項倒數之和爲 S′，試證

$$P^2=\left(\frac{S}{S'}\right)^n.$$

【解 答】

1. $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$.

$$\therefore\quad a^2x^2-2abx+b^2+b^2x^2-2bcx+c^2=0.$$

$$\therefore\quad (ax-b)^2+(bx-c)^2=0.$$

然 a, b, c, x 爲實數，故

$$(ax-b)^2\geqq 0,\qquad (bx-c)^2\geqq 0.$$

今其和爲0，故各項非爲0不可.

$$x=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}.$$

卽 a, b, c 係以 x 爲公比之等比級數.

2. $P=a\cdot ar\cdot ar^2\cdots\cdots\cdots\cdots ar^{n-1},$

$P=ar^{n-1}\cdot ar^{n-2}\cdot ar^{n-3}\cdots\cdots\cdots a,$

$$\therefore\quad P^2=a^2r^{n-1}\cdot a^2r^{n-1}\cdot a^2r^{n-1}\cdots a^2r^{n-1}$$

$$=(a^2r^{n-1})^n.$$

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

$$S'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1-\frac{1}{r}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)}.$$

$$\therefore\quad \frac{S}{S'}=a^2\cdot\frac{r^n}{r}=a^2r^{n-1}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{S}{S'}\right)^n=(a^2r^{n-1})^n.$$

$$\therefore\quad P^2=\left(\frac{S}{S'}\right)^n.$$

4. 無限等比級數

〔例〕 於等比級數之和 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，

設公比之絕對值小於 1 而項數無限多，

試證明

$$S=\frac{a}{1-r}.$$

應用此式求 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots\cdots$ 至無限項之和。

於 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 式中，

如 r 之絕對值小於 1，則 r^n 因 n 之增大而減小，n 增加至非常大時，r^n 漸近於 0。

故 n 爲無限大，則可視 r^n 爲 0。

$$\therefore \quad S=\frac{a}{1-r}.$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdots\cdots(\text{答})$$

【問 題】

1. 求等比級數 $\dfrac{5}{7}+\dfrac{10}{21}+\dfrac{20}{63}+\dfrac{40}{189}+\cdots\cdots$

無限項之和。　(江蘇)

2. 設各項爲正之無限等比級數，其公比小於$\frac{1}{2}$，試證任意之項必大於自此以後各項之和。

【解　答】

1. 因 $r=\frac{10}{21}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}$。

故 $$\frac{5}{7}+\frac{10}{21}+\frac{20}{63}+\frac{40}{189}+\cdots\cdots=\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{7}$$　(答) $\frac{15}{7}$。

2. 設任意之項爲 a，則自此以下各項之和，

因 $\frac{1}{2}>r>0$，故

$$ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots=\frac{ar}{1-r}.$$

$$\therefore\quad a-\frac{ar}{1-r}=\frac{a(1-2r)}{1-r}.$$

因 a 爲正，故 $a>0$。

因 $\frac{1}{2}>r>0$，故 $1-2r>0$，$1-r>0$。

$$a>\frac{ar}{1-r}.$$ 故得證。

〔例〕連結三角形各邊之中點，得第二個三角形，再連結第二個三角形各邊之中點，得第三個三角形．以下依同樣之方法，作無限個三角形．試求如此所作一切三角形面積之和，與原三角面積之比．

連結三角形各邊之中點，則分原形為四個全等三角形，故公比為$\frac{1}{4}$．

設原三角形之面積為 a，則新三角形之總和為

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2a+\cdots\cdots=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a.$$

$\frac{4}{3}a:a=4:3.$ (答) $4:3.$

【問 題】

1. 有一邊長1公尺之正方形，以其一邊為對角線畫正方形，次以此新正方形之一邊為對角線畫正方形，逐次如此作無限多之正方形，則一切新正方形之和，等於原正方形之幾倍？

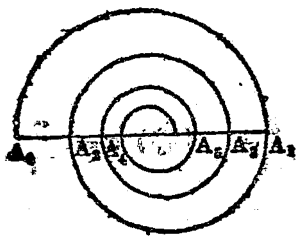
圓，於其上依 $A_1A_2=\frac{4}{5}A_0A_1$ 求一點 A_2，以 A_1A_2 爲直徑，畫半圓於前半圓反對之側，次於 A_1A_2 上依 $A_2A_3=\frac{4}{5}A_1A_2$ 求 A_3，以 A_2A_3 爲直徑，畫半圓於前半圓反對之側，如是依次作之而成渦狀，則其中心與 A_0 之距離如何？

【解　答】

1. $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$=2$(倍) ……………………………(答)

2.



$A_0A_1=1$,

$A_0A_2=1-\frac{4}{5}$,

$A_0A_3=1-\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

A_0A_4

$=1-\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

∴　中心之位置與 A_0 之距離爲

$1-\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{1+\frac{4}{5}}=\frac{5}{9}$.　　(答) $\frac{5}{9}$公尺.

5. 循環小數

〔例〕試將循環小數 $0.\dot{2}\dot{7}$ 化爲分數.

$$0.\dot{2}\dot{7}=0.27272727\cdots\cdots$$

$$=0.27+0.0027+0.000027+\cdots\cdots$$

$$=\frac{0.27}{1-0.01}=\frac{.27}{0.99}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}.$$

(答) $\frac{3}{11}$.

〔別解〕設 $x=0.\dot{2}\dot{7}$ ……………………(1)

$100x=27.\dot{2}\dot{7}$ ……………………(2)

(2)−(1)，$99x=27.$

$\therefore\quad x=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}.$ (答) $x=\frac{3}{11}.$

【問　題】

將下列循環小數化爲分數：

1. $0.\dot{6}.$　　2. $0.\dot{8}1\dot{4}.$

3. $0.12\dot{1}3\dot{5}.$　　4. $5.\dot{2}8\dot{7}.$

【解　答】

1. 設 $x=0.\dot{6}$.

$10x=6.\dot{6}$.

$\therefore\ 9x=6.\quad \therefore\ x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$……(答)

2. 設 $x=0.\dot{8}1\dot{4}$.

$1000x=814.\dot{8}1\dot{4}.\quad \therefore\ 999x=814.$

$\therefore\ x=\frac{814}{999}=\frac{22}{27}$……………(答)

3. 設 $x=0.12\dot{1}3\dot{5}$.

$100000x=12135.135.$

$100x=12.\dot{1}3\dot{5}.$

$\therefore\ 99900x=12123.$

$x=\frac{12123}{99900}=\frac{1347}{11100}=\frac{449}{3700}$……(答)

4. 設 $x=0.2\dot{8}\dot{7}$.

$1000x=287.\dot{8}\dot{7}$

$10x=2.\dot{8}\dot{7}.$

$\therefore\ 990x=285.$

$x=\frac{285}{990}=\frac{19}{66}.$　　(答) $5\frac{19}{66}$.

6. 級數雜題

〔例〕設 a, b, c 爲等比級數，x 爲 a, b 之等差中項，y 爲 b, c 之等差中項，試證 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=2$.

設公比爲 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$.

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a+ar}{2}=\frac{a(1+r)}{2},$$

$$y=\frac{b+c}{2}=\frac{ar+ar^2}{2}=\frac{ar(1+r)}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a(1+r)}+\frac{2ar^2}{ar(1+r)}$$

$$=\frac{2ar(1+r)}{ar(1+r)}=2.$$

【問 題】

1. 有一成等差級數之三數，三數相加之和爲36，如以 1，4，43 分別加此三數，彼此關係，適成等比級數．求各數． (上海)

2. 設各不爲 0 之三數 a, b, c 成等差級數 $c-a$, b, $c+a$ 成等比級數．試求 $a:b:c$.

【解 答】

1. 設公差爲 d，第二數爲 x，則依等差級數得

$$(x-d)+x+(x+d)=36.$$

$$3x=36, \quad x=12.$$

而第一數爲 $12-d$，第三數爲 $12+d$。

依等比級數得

$$\frac{12-d+1}{12+4}=\frac{12+4}{12+d+43},$$

$$\frac{13-d}{16}=\frac{16}{55+d}, \quad 715-42d-d^2=256,$$

$$d^2+42d-459=0.$$

$$\therefore \quad (d-9)(d+51)=0.$$

$$\therefore \quad d=9 \text{ 或 } -51.$$

$d=9$，則 $12-d=3$， $12+d=21$。

$d=-51$，則 $12-d=63$， $12+d=-39$。

(答) 3，12，21 或 63，12，-39。

2. $2b=a+c$ ……………………………(1)

$b^2=(c-a)(c+a)$ ……………………(2)

以(1)代入(2)，

$b^2=2b(c-a)$。 但 $b\neq0$。

$\therefore \quad b=2c-2a$ ……………………(3)

$(1)\times2+(3)$， $5b=4c$。 $\therefore$ $b:c=4:5$。

$(1)\times2-(3)$， $3b=4a$。 $\therefore$ $a:b=3:4$。

$$a:b:c=3:4:5.$$

(答) 3 : 4 : 5。

〔例〕求 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ 至 n 項之和

$$S=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$$
$$Sx=\quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n$$

各邊相減，

$$S(1-x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$
$$S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}\cdots\cdots(\text{答})$$

【問　題】

1. 求 $a^2+2b,\ a^4+4b,\ a^6+6b,\cdots\cdots$ 級數 n 項之和.

2. 求次列級數 n 項之總和.

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)+(5+1)+(7-2)+\cdots\cdots$$

3. 求下列級數自初項至第 n 項之和.

$$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2r+1)x^r+\cdots\cdots$$

【解　答】

1. $(a^2+2b)+(a^4+4b)+(a^6+6b)+\cdots\cdots$
$$=(a^2+a^4+a^6+\cdots)+(2b+4b+6b\cdots)$$

$$=a^2\times\frac{1-(a^2)^n}{1-a^2}+\frac{n}{2}\{4b+(n-1)\times 2b\}$$

$$=\frac{a^2(1-a^{2n})}{1-a^2}+nb(1+n)\ \cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)+(5+1)+(7-2)\cdots\cdots$$

$$=(1+3+5+7+\cdots\cdots)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-2+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\times 2\}+\frac{1}{4}\times\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$$

$$=n^2+\frac{1-(-2)^n}{12}$$

$$=\frac{1}{12}\{12n^2+1-(-2)^n\}\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

3. $$S=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$$

$$Sx=\quad x+3x^2+5x^3+\cdots\cdots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n$$

各邊相減，

$$S(1-x)=1+2x+2x^2+\cdots\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n$$

$$=1+2x\times\frac{1-x^{n-1}}{1-x}-(2n-1)x^n$$

$$\therefore S=\frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}+\frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}\qquad(\text{答})$$

〔例〕將連續之偶數如次分羣，試求屬於第n羣諸數之和：

$2, 4 \mid 6, 8, 10 \mid 12, 14, 16, 18 \mid \cdots$

$$2, 4 \mid 6, 8, 10 \mid 12, 14, 16, 18 \mid \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mid \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p \mid \cdots\cdots$$

第n羣之項數爲$n+1$.

次就第n羣之末項p考之。

考p在區分中所取之數，與自2數起之第幾個相當，因各區分之中，有如

$$2, 3, 4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (n+1)$$

等之數n個存在，故其次序之數爲

$$2+3+4+\cdots\cdots+(n+1)$$
$$=\frac{n}{2}\{2+(n+1)\}=\frac{n(n+3)}{2}$$

卽p爲$2, 4, 6, 8, \cdots\cdots$級數之第$\frac{n(n+3)}{2}$項，故

$$p=2+\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)\times 2.$$

$$\therefore\quad p=n(n+3)$$

將第n羣之數，視作反列而考之，則爲初項p，公差-2，項數$n+1$之等差級數。

$$\therefore S=\frac{n+1}{2}\{2n(n+3)+(n+1-1)\times(-2)\}$$

$$=(n+1)\{n(n+3)-n\}$$

$$=n(n+1)(n+2)\text{ ....(答)}$$

【問　題】

如 $1|2,3|4,5,6|7,8,9,10|\cdots\cdots$ 將自1爲始之連續整數，分作多羣，試求第 n 羣諸項之和。

【解　答】

$$1|2,3|4,5,6,|\cdots\cdots|\cdots p|\cdots\cdots$$

第 n 羣之項數有 n 項。

就第 n 羣之末項 p 考之，p 在區分中次序之數爲

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

即 p 爲此級之第 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項，其數亦爲 $\frac{n(n+1)}{2}$，

故第 n 羣之級數，爲初項 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項數 n，公差 -1 之等差級數。

$$S=\frac{n}{2}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}+(n-1)\times(-1)\right\}$$

$$=\frac{n}{2}(n^2+n-n+1)=\frac{n}{2}(n^2+1).$$

(答)　$\frac{n}{2}(n^2+1)$。

〔例〕求下列級數至 n 項之和：

$$0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} S&=0.9+0.99+0.999+\cdots\cdots \\ &=(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\cdots \\ &=n-(0.1+0.01+0.001+\cdots\cdots) \\ &=n-0.1\times\frac{1-0.1^n}{1-0.1}=n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right). \end{aligned}$$

（答）　$n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

【問　題】

1. 試證級數

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ 0.3333,\cdots\cdots$$

n 項之和為 $\frac{1}{27}\left\{9n-1+\frac{1}{10^n}\right\}$.

2. 求級數 5, 55, 555, 5555,……至 n 項之和.

【解　答】

1. $S=0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{3}(0.9+0.99+0.999+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}\{(1-0.1)+(1-0.01)+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{1}{3}\{n-(0.1+0.01+0.001+\cdots\cdots)\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n-0.1\times\frac{1-0.1^n}{1-0.1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n-\frac{1}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{27}\left\{9n-1+\frac{1}{10^n}\right\}.$$

2. $S=5+55+555+5555+\cdots\cdots$

$$=\frac{5}{9}(9+99+999+9999+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{5}{9}\{(10+100+1000+\cdots\cdots)-n\}$$

$$=\frac{5}{9}\left(10\times\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)$$

$$=\frac{5}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right\}$$

$$=\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10)\cdots\cdots(\text{答})$$

〔例〕求

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

之和。

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

各邊相加，

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

【問 題】

1. 求 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

2. 求 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

【解 答】

$$\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+3n+2-2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

〔例〕 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$。

由 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ 公式，令 n 等於 0，1，2，3，則

$$1^3=0^3+\quad 0^2+\quad 0+1$$
$$2^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$4^3=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1$$

$$n^3=(n-1)^3+3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$$
$$(n+1)^3=n^3\quad+3\cdot n^2\quad+3\cdot n\quad+1$$

各邊相加，約其同類項，

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+3(1+2+3+\cdots+n)+n+1$$

設 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=S$，則

$$(n+1)^3=3S+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{3}(n+1)\left\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots\cdots\cdots(答)$$

【問　題】

簡單表示

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)$ 之和。

【解　答】

一般項爲 $n(n+1)=n^2+n$ 故

$$1\cdot2=1^2+1$$
$$2\cdot3=2^2+2$$
$$3\cdot4=3^2+3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n(n+1)=n^2+n.$$

各邊相加，

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots)$$
$$+(1+2+3+\cdots\cdots)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

(答) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

第十三編　對　數

1. 一般之指數

> 〔例〕設 m，n 爲任意之正整數，則
> $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，　$a^0=1$（但 $a\neq0$），
> $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ 其理由如何？

(i) 如 $\sqrt[3]{a^6}$ 之式，則 $\dfrac{m}{n}$ 爲整數，可

如$a^{\frac{6}{3}}=a^2$ 考之。

故擴張此法則，而 $\dfrac{m}{n}$ 不爲整數時，得

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

(ii) 如 $a^5\div a^2=a^{5-2}$ 之式，設 $m>n$，則可

如$a^m\div a^n=a^{m-n}$ 考之。

於 $a^m\div a^m$ 用此法則，則得

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0.$$

然因 $a^m\div a^m=1$，故可定 $a^0=1$

(iii) 於 $a^m\div a^n$ 而 $m<n$，例如 $a^2\div a^5$ 時，

用 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 之法訓，訓得

$$a^2\div a^5=a^{2-5}=a^{-3}.$$

然　$a^2\div a^5=\dfrac{a^2}{a^5}=\dfrac{1}{a^3}.$

故　$a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}.$

即　$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

〔注意〕　擴張此等指數定義，一般可證明次之公式能成立：

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^m=a^mb^m,$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

【問　題】

求次式之值：

1.　$27^{\frac{2}{3}}$.

2.　$16^{-\frac{1}{4}}$.

【解　答】

1.　$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$ …………(答)

2.　$16^{-\frac{1}{4}}=(2^4)^{-\frac{1}{4}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$…………(答)

〔例〕將下列各式化簡:

(i) $4^{\frac{3}{4}} \div 4^{-\frac{1}{2}}$. (ii) $a^2 b^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}}$.

(iii) $\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$.

(i) $4^{\frac{3}{4}} \div 4^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{5}{4}} = (2^2)^{\frac{5}{4}}$

$= 2^{\frac{5}{2}}$

(ii) $a^2 b^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} = a^{2-\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{5}{3}} b^{-1}$

(iii) $\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$

$= a + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} - b$

$= a - b$.

【問 題】

下列各式, 試簡單之:

1. $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{5}{6}}$. 2. $49^{\frac{1}{2}} \times 36^{\frac{3}{2}}$.

3. $(a^4 b^{-3})^{-\frac{1}{2}}$. 4. $(\sqrt[6]{a^2})^{-4}$.

5. $\left(ab^{-\frac{4}{2}} c^3\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(a^8 b^2 c^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$.

7. $\left(a^{-4}-a^{-2}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-4}+a^{-2}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

【解 答】

1. $2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=2^{-\frac{1}{2}}$ ……………(答)

2. $49^{\frac{1}{2}}\times 36^{\frac{3}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}\times(6^2)^{\frac{3}{2}}=7\times 6^3$

$=1512$ ……………(答)

3. $(a^{4}b^{-6})^{-\frac{1}{2}}=a^{-2}b^{3}$ ……………(答)

4. $(\sqrt[6]{a^2})^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{2}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}$ ……(答)

5. 原式$=a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{2}}\times ab^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{9}}$

$=a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{25}{18}}$ ……………(答)

6. (答) $x-y$.

7. 設 $a^{-2}=A$, $b^{\frac{1}{3}}=B$, 則

原式$=(A^2-AB+B^2)(A^2+AB+B^2)$

$=A^4+A^2B^2+B^4$

$=a^{-8}+a^{-4}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$ ……………(答)

〔例〕 解指數方程 $3^{x+2}-9^{x}+486=0$.

$$3^{x+2}=9\times3^{x},\quad 9^{x}=(3^{2})^{x}=(3^{x})^{2}.$$

故原方程爲

$$9\times3^{x}-(3^{x})^{2}+486=0,$$

$$(3^{x})^{2}-9\times3^{x}-486=0.$$

$$\therefore\quad (3^{x}-27)(3^{x}+18)=0.$$

$$\therefore\quad 3^{x}=27 \text{ 或 } -18.$$

由 $3^{x}=27$，$3^{x}=3^{3}$，　$\therefore\quad x=3$.

$3^{x}=-18$ 不可能，故捨之

(答) 3.

【問　題】

1. 設 $2^{x+2}=2\sqrt{2}$，求 x.　(湖南)

2. 解 $2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}}\times0.25=1$.

3. 解 $4\times2^{2x}-9\times2^{x+2}+32=0$.

【解　答】

1. $2^{x+2}=2\sqrt{2}$.

$$2\sqrt{2}=2\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}.$$

$$2^{x+2}=2^{\frac{3}{2}}.$$

$\therefore\quad x+2=\frac{3}{2},\quad 2x+4=3,$

$2x=-1,\quad x=-\frac{1}{2}$ ……………(答)

2. $2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}}\times 0.25=1$

設 $2^{\frac{x}{3}}=y$，則 $2^{-\frac{x}{3}}=\frac{1}{y}$。而原方程爲

$y+\frac{1}{y}\times\frac{1}{4}=1,\qquad 4y^2+1=4y,$

$4y^2-4y+1=0,\qquad (2y-1)^2=0.$

$\therefore\quad 2y-1=0,\quad y=\frac{1}{2}=2^{-1}.$

$\therefore\quad 2^{\frac{x}{3}}=2^{-1},\qquad \frac{x}{3}=-1,\quad x=-3.$

(答) -3。

3. $4\times 2^{2x}-9\times 2^{x+2}+32=0,$

$4\times 2^{2x}-9\times 4\times 2^{x}+32=0;$

$2^{2x}-9\times 2^{x}+8=0.$

$\therefore\quad (2^{x}-8)(2^{x}-1)=0.$

$2^{x}=8$ 或 1。

由 $2^{x}=8=2^{3}$，得 $x=3$。

由 $2^{x}=1=2^{0}$，得 $x=0$。

(答) 3 或 0。

2. 對數之定義

〔例〕 求 $log_2 64$。

如 $64=2^6$，則 6 稱爲64之對數。

如 $64=4^3$，則 3 稱爲64之對數。

前者爲2^6，後者爲4^3，因欲區別之，故 6 稱爲以 2 爲底64之對數，3 稱爲以 4 爲底64之對數。

以 2 爲底64之對數，書爲

$$log_2 64.$$

$log_2 64=6$。 (答) 6。

【注意】 $log_4 64=3$。

【問 題】

求次之對數。

1. $log_3 81$.
2. $log_5 125$.
3. $log_8 2$.
4. $log_2 \sqrt[3]{64}$.
5. $log_{10} \sqrt[3]{100}$.
6. $log_{0.01} \sqrt[4]{1000}$.

【解 答】

1. $81=3^4$.

$\therefore\quad log_3 81=4$ ……………………(答)

2. $125=5^3$.

$\therefore\quad log_5 125=3$ ……………………(答)

3. $8=2^3$.

$\therefore\quad 2=\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}$.

$\therefore\quad log_8 2=\dfrac{1}{3}$ ……………………(答)

4. $log_2 \sqrt[3]{64}=log_2 \sqrt[3]{2^6}=log_2 2^2$

$=2$ ……………………(答)

5. $log_{10}\sqrt[3]{100}=log_{10}10^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ ……(答)

6. $log_{0.01}\sqrt[4]{1000}=log_{0.01}10^{\frac{3}{4}}$.

$\therefore\quad (0.01)^x=10^{\frac{3}{4}}$,

$(10^{-2})^x=10^{\frac{3}{4}}$.

$\therefore\quad 10^{-2x}=10^{\frac{3}{4}}$

$\therefore\quad -2x=\dfrac{3}{4}$. $\quad\therefore\quad x=-\dfrac{3}{8}$.

$\therefore\quad log_{0.01}\sqrt[4]{1000}=-\dfrac{3}{8}$ ……(答)

3. 對數之性質

〔例〕證明次之定理:

(i) 底之對數爲 1。

(ii) 1 之對數爲 0。

(iii) 積之對數，等於各因數對數之和。

(iv) 商之對數，等於從被除數之對數減除數之對數之差。

(v) 某數乘冪之對數，等於以其指數乘其對數之積。

(i) $a=a^1$

$\therefore \quad \log_a a=1$。

(ii) $1=a^0$。

$\therefore \quad \log_a 1=0$。

(iii) 求證 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$。

設 $\log_a M=x$，$\log_a N=y$，則

$M=a^x$，$N=a^y$。

$\therefore \quad MN=a^{x+y}$。

$\therefore \quad \log_a MN=x+y=\log_a M+\log_a N$。

(iv) 求證 $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$。

設 $\log_a M=x$，

$\log_a N=y$，

$\therefore \quad M=a^x, \qquad N=a^y$。

$\therefore \quad \frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$。

$\therefore \quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y$

$=\log_a M-\log_a N$。

(v) 求證 $\log_a M^n=n\log_a M$。

設 $\log_a M=x$，

則 $M=a^x$。

$\therefore \quad M^n=(a^x)^n=a^{nx}$

$\therefore \quad \log_a M^n=nx=n\log_a M$。

〔注意〕 同樣，

$\log_a \sqrt[n]{M}=\log_a M^{\frac{1}{n}}$

$=\frac{1}{n}\log_a M$。

又 $\log_a PQR=\log_a P+\log_a Q+\log_a R$。

〔例〕 (i) 試將 $\log_a\dfrac{m^2np^5}{\sqrt{m^{-3}n^4p^3}}$ 以 $\log_a m$，$\log_a n$，$\log_a p$ 表之．

(ii) 解 $\log_a(x+3)+\log_a(x-3)=0$ 之方程．

(i) $\log_a\dfrac{m^2np^5}{\sqrt{m^{-3}n^4p^3}}=\log_a\dfrac{m^2np^5}{m^{-\frac{3}{2}}n^2p^{\frac{3}{2}}}$

$=\log_a m^{\frac{7}{2}}n^{-1}p^{\frac{7}{2}}$

$=\log_a m^{\frac{7}{2}}+\log_a n^{-1}+\log_a p^{\frac{7}{2}}$

$=\dfrac{7}{2}\log_a m-\log_a n+\dfrac{7}{2}\log_a p$ ……(答)

(ii) $\log_a(x+3)+\log_a(x-3)=0$，

$\log_a(x+3)+\log_a(x-3)=\log_a 1$，

$\log_a(x+3)(x-3)=\log_a 1$．

$\therefore\quad (x+3)(x-3)=1$．

$x^2-9=1$，　　$x^2=10$．

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{10}$．

$x=-\sqrt{10}$，則 $x+3<0$．負數無對數，[illegible]之．

(答) $x=\sqrt{10}$．

【問 題】

下列各式，試以 $\log_m a$，$\log_m b$，$\log_m c$ 表之。

1. $\log_m \dfrac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab^5}}$.

2. $\log_m \left(\dfrac{a^3 b\sqrt{c}}{ab^3c^4}\right)^{\frac{1}{5}}$.

3. 解方程 $\log_a(x-1)=1$。

【解 答】

1. $\log_m \dfrac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab^5}} = \log_m \dfrac{ab^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}}$

$= \log_m a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{4}{3}}$

$= \dfrac{2}{3}\log_m a - \dfrac{4}{3}\log_m b$ ……………(答)

2. $\log_m \left(\dfrac{a^3 b\sqrt{c}}{ab^3c^4}\right)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\log_m a^2 b^{-2} c^{-\frac{7}{2}}$

$= \dfrac{1}{5}\left(2\log_m a - 2\log_m b - \dfrac{7}{2}\log_m c\right)$

$= \dfrac{2}{5}\log_m a - \dfrac{2}{5}\log_m b - \dfrac{7}{10}\log_m c$ …(答)

3. $\log_a(x-1)=1$，　$\log_a(x-1)=\log_a a$。

$\therefore$　$x-1=a$。　　$\therefore$　$x=1+a$。

(答)：$x=1+a$。

4. 常用對數

〔例〕以10底之對數，稱爲常用對數，通常皆不書其底數，如 $log_{10}1000$ 可書爲 $log1000$。

求 $log1000$ 之數値。

又求 $log\dfrac{1}{1000\sqrt[8]{10}}$。

$$log1000=3.$$

$$log\frac{1}{1000\sqrt[8]{10}}=log\frac{1}{1000}+log\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$$

$$=log10^{-3}+log10^{-\frac{1}{8}}$$

$$=-3+\left(-\frac{1}{8}\right)=-3\frac{1}{8}=-3.125.$$

$$=-4+0.875=\bar{4}.875.$$

〔注意〕對數如 -3.125 常以 $\bar{4}.825$ 表之。其小數點以上爲負，小數點以下爲正。

如 $\bar{4}$ 者稱爲指標，如 .875 者稱爲假數。

【問 題】

1. 設 $log3=0.4771$，求

$log30$， $log3000$， $log0.003$.

2. 已知 $log2=0.3010$，$log3=0.4771$，

$log12$， $log5$， $log75$.

【解 答】

1. $log30=log(10\times3)=log10+log3$

$=1+0.4771=1.4771$ ………(答)

$log3000=log1000+log3$

$=3+0.4771=3.4771$ ……(答)

$log0.003=log0.001+log3$

$=-3+0.4771=3.4771$ (答)

2. $log12=log(2^2\times3)=2log2+log3$

$=2\times0.3010+0.4771$

$=0.6020+0.4771=1.0791$ (答)

$log5=log\frac{10}{2}=log10-log2$

$=1-0.3010=0.6990$ …………(答)

$log75=log5^2\times3=2log5+log3$

$=2log\frac{10}{2}+log3$

$=2log10-2log2+log3$

$=2-2\times0.3010+0.4771$

$=1.8751$ ……………………(答)

【例】 解指數方程 $5^{7-3x}=2^{x+4}$. 求根至二位小數，但 $log2=0.3010$.

將原方程之兩邊各取對數，得

$$(7-3x)log5=(x+4)log2.$$

$$\therefore \quad 7log5-3x(log5)=xlog2+4log2,$$

$$(3log5+log2)x=7log5-4log2,$$

$$\therefore \quad x=\frac{7log5-4log2}{3log5+log2}.$$

但 $log5=log\dfrac{10}{2}=log10-log2$

$$=1-log2.$$

以此代入上式，

$$x=\frac{7(1-log2)-4log2}{3(1-log2)+log2}$$

$$=\frac{7-11log2}{3-2log2}=\frac{7-11\times0.3010}{3-2\times0.3010}$$

$$=\frac{7-3.3110}{3-0.6020}=\frac{3.689}{2.398}$$

$$=1.537.$$

（答） 1.54.

【問 題】

解下之聯立指數方程：

$$(3-x)^{y}=100(3+x)^{-y}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(8x)^{y}=100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $3>x>0$.

【解 答】

兩邊各取對數，

由 (1) 得，

$$y\log(3-x)=\log100-\log y(3+x),$$

$$y[\log(3-x)+\log(3+x)]=2,$$

$$y[\log(3-x)(3+x)]=2,$$

$$y\log(3^{2}-x^{2})=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(2)， $y\log8x=\log100$.

$$y\log8x=2,$$

$$y=\frac{2}{\log8x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 (4) 代入 (3)，

$$\frac{2}{\log8x}\log(3^{2}-x^{2})=2,$$

$$\log(9-x^{2})=\log8x,\quad\therefore\quad 9-x^{2}=8x,$$

$$x^{2}+8x-9=0.$$

$$\therefore\quad (x+9)(x-1)=0.$$

$x=-9$ 或 1. $x=-9$ 不合題意。

故 $x=1,\quad y=\dfrac{2}{\log8}\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

5.……複利及年金

〔例〕 設本銀爲 P，年利率爲 r，每年計算複利，至 n 年後之本利和爲 S，利息爲 I，試證下列公式：

$$S=P(1+r)^n.$$

再由此公式，用對數求本銀 300 圓，年利率 7 釐，每年計算複利，15 年後之本和和。

但 $\log 300=2.47712$，

$\log 1.07=0.02938$.

$\log 827.6=2.91782$.

第一年終之本利和爲 $P(1+r)$

第二年終之本利和爲 $P(1+r)^2$

第三年終之本利和爲 $P(1+r)^3$

依此類推，則第 n 年終之本利和爲

$$S=P(1+r)^n$$

以各數代入於此公式，

$$S=300(1.07)^{15}.$$

兩邊各取對數，

$$\begin{aligned}\log S&=2.47712+15\times 0.02938\\&=2.47712+0.44070\\&=2.91782=\log 827.6.\end{aligned}$$

$\therefore S=827.6.$ (答) 827.6圓。

〔注意〕 由此公式，可導出下列各公式：

$$I=S-P=P[(1+r)^n-1],$$

$$P=\frac{S}{(1+r)^n},$$

$$r=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1,$$

$$n=\frac{\log S-\log P}{\log(1+r)}$$

I 表利息，P 亦可稱為 S 圓之複利現價。

【問　題】

有滿 5 年後可支取之銀 100 圓，今依年利率 8 釐，每半年之複利計算，可得現價若干？用對數計算。

$$\log 1.04=0.01703,$$

$$\log 67.562=1.8297.$$

【解　答】

5 年有10期，每期之利率為 4 釐。

由公式　$P=\frac{S}{(1+r)^n}=\frac{100}{1.04^{10}}.$

兩邊各取對數，

$$\log P=\log 100-10\log 1.04$$
$$=2-10\times 0.01703=2-0.1703$$
$$=1.8297=\log 67.562.$$

$\therefore P=67.562.$　　（答） 67.562圓。

〔例〕設每年初可取年金 a 圓，依年利率 r 每年計算複利，至 n 年初之本利和爲 S 圓（亦稱年金終價），試證公式：

$$S=\frac{a}{r}[(1+r)^n-1].$$

再由此公式求每年初可取 120 圓，依年利率 6 釐，每年計算複利，至 6 年初之年金終價.

但 $\log 1.06=0.02531$,

$\log 1.418=0.15186$.

第一年初終價爲 a

第二年初終價爲 $a+a(1+r)$

第三年初終價爲 $a+a(1+r)+a(1+r)^2$

……………………………………………

第 n 年初終價爲

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-1}$$

此爲等比級數，公比爲 $(1+r)$，故

$$S=\frac{a[(1+r)^n-1]}{(1+r)-1}=\frac{a}{r}[(1+r)^n-1].$$

以各數代入此公式，

$$S=\frac{120}{0.06}(1.06^6-1)=2000(1.06^6-1).$$

因 $\log 1.06^6=6\log 1.06=6\times 0.02531$

$=0.15186=\log 1.418$.

$1.06^6=1.418$

故 $S=2000\times(1.418-1)=836$

（答） 836 圓

【問　題】

有公債票，每年終可取本利銀50圓，如依年利率4.8%，每年計算複利，問至第幾年終，本利和可超過千圓？

但 $\log 1.048=0.02036$，

$\log 1.96=0.29226$。

【解　答】

依題意代公式 $S=\frac{a}{r}[(1+r)^n-1]$，得

$$\frac{50}{0.048}(1.048^n-1)>1000,$$

$$50\times(1.048^n-1)>48.$$

$$1.048^n-1>0.96.$$

$$1.048^n>1.96.$$

兩邊取對數，

$$n\log 1.048>\log 1.96$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log 1.96}{\log 1.048}=\frac{0.29226}{0.02036}=14.3.$$

（答） 15年後。

〔例〕設n年中，每年終可取a圓之定期年金；今依年利率r，每年計算複利，於第一年初一次得A圓算淸，試作求現價A之公式。

第一年終可取年金a圓之現價爲 $\dfrac{a}{1+r}$

第二年終可取年金a圓之現價爲 $\dfrac{a}{(1+r)^2}$

第三年終可取年金a圓之現價爲 $\dfrac{a}{(1+r)^3}$

第四年終可取年金a圓之現價爲 $\dfrac{a}{(1+r)^4}$

....

第n年終可取年金a圓之現價爲 $\dfrac{a}{(1+r)^n}$

此等現價之總和爲A圓，則

$$A=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{a}{1+r}\times\frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}{1-\dfrac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

(答) $A=\dfrac{a}{r}\left\{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}\right\}.$

〔注意〕 此爲定期年金之現價，如爲永久年

金，則 $\frac{1}{(1+r)^n}=0$，故其公式爲 $A=\frac{a}{r}$。

【問　題】

設借入銀A圓，依年利率 r 每年計算複利，每滿一年，還相等之金額 a 圓，至 n 年後本利皆清，試作求年金 a 之公式。

【解　答】

第一年終之本利和爲　$A(1+r)$

第二年初之本銀爲　$A(1+r)-a$

第二年終之本利和爲　$A(1+r)^2-a(1+r)$

第三年初之本銀爲

$$A(1-r)^2-a(1+r)-a$$

第三年終之本利和爲

$$A(1-r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)$$

如是至第 $(n+1)$ 年初之本銀還清卽爲0，故

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\cdots\cdots-a(1+r)-a=0.$$

$$\therefore\quad A(1+r)^n=a+a(1+r)+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-1}$$

$$=a\times\frac{(r+1)^n-1}{(r+1)-1}=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

$$\therefore\quad a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

（答）　$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$。

第十四編　未定係數法

1. 未定係數法

〔例〕設 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n.$$

不論 x 為何值皆能成立，試證其必要之條件為 $a_0=p_0$，$a_1=p_1$，$\cdots\cdots$

$$a_{n-1}=p_{n-1}, a_n=p_n.$$

將原式之右邊移於左邊，

$$(a_0-p_0)x^n+(a_1-p_1)x^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-1}-p_{n-1})x+(a_n-p_n)$$
$$=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因此等式在以何值代 x 而能成立，故 $x=0$ 時亦眞。

設 $x=0$，則 $a_n-p_n=0$. $\therefore$ $a_n=p_n$.

(1) 式於 $a_n=p_n$ 時，其左邊之絕對項消滅成為 $\{(a_0-p_0)x^n+(a_1-p_1)x^{n-1}+\cdots\cdots$

$$+(a_{n-1}-p_{n-1})\}x=0$$

此式當 x 為任何值能成立，故得

$$(a_0-p_0)x^{n-1}+(a_1-p_1)x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-1}-p_{n-1})=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此式當 $x=0$ 時亦眞，故設 x 爲 0，則

$$a_{n-1}-p_{n-1}=0.\quad\therefore\quad a_{n-1}=p_{n-1}.$$

如是繼續行之，可得 $a_1=p_1$，$a_0=p_0$.

(1) 式不論 x 爲何値而能成立，以 x 諸乘冪之係數及絕對項皆等於 0 爲必要，故此式成立之必要條件爲 $a_0=p_0$，$a_1=p_1$，………

$$a_{n-1}=p_{n-1},\ a_n=p_n.$$

【問　題】

有 x 之同次二式如下：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=f(x),$$

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=f'(x).$$

如 $f'(x)$ 能整除 $f(x)$，則其必要條件爲

$$\frac{a_0}{p_0}=\frac{a_1}{p_1}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{p_n}.$$

【解　答】

設 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=k$，則 $f(x)=kf'(x)$.

由是左右兩邊 x 同次冪之係數相等，故得

$$k=\frac{a_0}{p_0}=\frac{a_1}{p_1}=\frac{a_2}{p_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{p_n}.$$

〔注意〕 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 均表示 x 之函數，因函數有二，故右角記 ′ 以別之。

〔例〕設 x^3+2x^2+x+2 能整除
$x^4+3x^3+px^2+qx+r$,
則 p, q, r 之值如何?

第一式爲 x 之三次式,能整除第二式之四次式,故商必爲 x 之一次式.而 x 最高次之係數爲 1,故商可作爲 $x+a$ 之形.即得

$$x^4+3x^3+px^2+qx+r$$
$$=(x+a)(x^3+2x^2+x+2),$$
$$x^4+3x^3+px^2+qx+r=x^4+(2+a)x^3$$
$$+(1+2a)x^2+(2+a)x+2a.$$

此爲關於 x 之恆等式,其兩邊 x 之同次項係數必相等,如

$$3=2+a\cdots\cdots(1)\quad p=1+2a\cdots\cdots(2)$$
$$q=2+a\cdots\cdots(3)\quad r=2a\cdots\cdots\cdots(4)$$

解此 a, p, q, r 四元一次聯立方程,得

$$a=1,\quad p=3,\quad q=3,\quad r=2.$$

〔注意〕此例如直接用除法,則得商爲 $x+1$,餘式爲 $(p-3)x^2+(q-3)x+(r-2)$.

因其能整除,則不論 x 爲何值,餘式必爲 0,故 $(p-3)x^2+(q-3)x+(r-2)=0$ 爲 x 之恆等式,其 $p-3=0$, $q-3=0$, $r-2=0$ 必能同時成立,即得 $p=3$, $q=3$, $r=2$.

【問　題】

1. 設 x^2-x+b 能整除
$6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$,試定 a, b 之值.

2. 設 ax^2+bx+c 除 ax^4+bx^2+c，而餘式不含 x，則 a，b，c 之間，有如何之關係？又求其餘式．(但 $ab\neq 0$)

【解　答】

1. 以二次式整除四次式，其商必爲二次式，而最高次之係數爲 6，故商可作爲 $6x^2+px+q$ 之形，即

$$\begin{aligned}&6x^4-7x^3+ax^2+3x+2\\&=(x^2-x+b)(6x^2+px+q)\\&=6x^4+(p-6)x^3+(6b-p+q)x^2\\&\quad+(bp-q)x+bq.\end{aligned}$$

比較兩邊 x 之同次項係數，得

$p-6=-7$……(1)　$6b-p+q=a$……(2)

$bp-q=3$ ……(3)　$bq=2$ ……………(4)

解之，得 $p=-1$，$q=-1$，$b=-2$，$a=-12$.

或　$p=-1$，$q=-2$，$b=-1$，$a=-7$.

(答) $\begin{cases}a=-12, & b=-2.\\a=-7, & b=-1.\end{cases}$

2. 設商爲 x^2+px+q，餘式爲 R，則

$$ax^4+bx^2+c=(ax^2+bx+c)(x^2+px+q)+\mathrm{R}.$$

去括弧比較其係數，得

$ap+b=0$ ……(1)　$bp+aq+c=b$……(2)

$cp+bq=0$……(3)　$cq+\mathrm{R}=c$…………(4)

由 (1)，$p=-\dfrac{b}{a}$，　由 (3)，$q=\dfrac{c}{a}$，

代入 (2)，$-\dfrac{b^2}{a}+2c=b$，

$\therefore\ b(a+b)=2ac$……………(關係式)

以 $q=\dfrac{c}{a}$ 代入(4)，$\mathrm{R}=c-\dfrac{c^2}{a}=\dfrac{c(a-c)}{a}$……(餘式)

〔例〕設 $\dfrac{1-2x+2x^2}{1+3x-4x^2}=A+Bx+Cx^2$
$+Dx^3+Ex^4+\cdots\cdots$，而 A，B，C……
為數字係數，試求 A，B，C……之值。

去分母，得

$$1-2x+2x^2$$
$$=A+\left.\begin{array}{r}B\\+3A\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}C\\+3B\\-4A\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}D\\+3C\\-4B\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}E\\+3D\\-4C\end{array}\right|x^4+\cdots\cdots$$

〔式中縱線係代括弧之用，如

$$+\left.\begin{array}{r}B\\+3A\end{array}\right|x=(B+3A)x〕$$

此式兩邊 x 之同次項係數必相等，即

$$A=1$$
$$B+3A=-2 \quad 故\ B=-5.$$
$$C+3B-4A=2 \quad 故\ C=21.$$
$$D+3C-4B=0 \quad 故\ D=-83.$$
$$E+3D-4C=0 \quad 故\ E=333.$$
$$\therefore\ \frac{1-2x+2x^2}{1+3x-4x^2}$$
$$=1-5x+21x^2-83x^3+333x^4+\cdots\cdots$$

【問　題】

試將下列分式展開至第五項：

1. $\dfrac{1-x}{1+x}$.　　2. $\dfrac{1+2x-3x^2}{1-2x-3x^2}$

【解 答】

1. 設$\dfrac{1-x}{1+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots$

去分母，

$$1-x=A+\left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}D\\+C\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}E\\+D\end{matrix}\right|x^4+\cdots\cdots$$

此式兩邊x之同次項係數必相等，即

$A=1.$

$B+A=-1.\quad\therefore\ B=-2$

$C+B=0.\quad\therefore\ C=2$

$D+C=0.\quad\therefore\ D=-2$

$E+D=0.\quad\therefore\ E=2.$

(答) $\dfrac{1-x}{1+x}=1-2x+2x^2-2x^3+2x^4-\cdots$

2. 設 $\dfrac{1+2x-3x^2}{1-2x-3x^2}$

$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots\cdots.$

$1+2x-3x^2$

$$=A+\left.\begin{matrix}B\\-2A\\ \end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}C\\-2B\\-3A\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}D\\-2C\\-3B\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}E\\-2D\\-3C\end{matrix}\right|x^4+\cdots\cdots$$

此式兩邊x同次項係數相等，即

$A=1.$

$B-2A=2.\quad\therefore\ B=4.$

$C-2B-3A=-3.\quad\therefore\ C=8.$

$D-2C-3B=0.\quad\therefore\ D=28.$

$E-2D-3C=0.\quad\therefore\ E=80.$

(答) $\dfrac{1+2x-3x^2}{1-2x-3x^2}$

$=1+4x+8x^2+28x^3+80x^4+\cdots\cdots$

〔例〕設 $4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16$ 爲完全平方式，則A及B之値如何？

原式爲 x 之四次式，首項爲 $4x^4$，故完全平方式可如 $(2x^2+ax+b)^2$，卽

$$4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16=(2x^2+ax+b)^2,$$

$$4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16=4x^4+4ax^3+(4b+a^2)x^2+2abx+b^2.$$

兩邊 x 之同次項係數相等，卽

$4a=-A\cdots\cdots\cdots(1)$ $4b+a^2=B\cdots\cdots(2)$

$2ab=-40\cdots\cdots(3)$ $b^2=16\cdots\cdots\cdots(4)$

由(4)，$b=\pm4$.

如 $b=4$，由(3)，$a=-5$;

由(1)，$A=20$; 由(2)，$B=41$.

如 $b=-4$，由(3)，$a=5$;

由(1)，$A=-20$; 由(2)，$B=9$.

(答) $A=20$，$B=41$，或 $A=-20$，$B=9$.

【問 題】

1. 設 $x^4+6x^3+7x^2+px+q$ 爲完全平方式，試定 p，q 之値。

2. 於 $x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$，其 a，b，c 須爲如何之數値，則此式爲完全平方式？

【解　答】

1.　設 $x^4+6x^3+7x^2+px+q=(x^2+Ax+B)^2$

$\therefore\ x^4+6x^3+7x^2+px+q$

$=x^4+2Ax^3+(2B+A^2)x^2+2ABx+B^2$

比較兩邊同次項之係數，

$2A=6\cdots\cdots(1)\quad 2B+A^2=7\cdots\cdots(2)$

$2AB=p\cdots\cdots(3)\quad B^2=q\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(1)，$A=3$，　由(2)，$B=-1$。

由(3)，$p=-6$。　由(4)，$q=1$。

(答)　$p=-6$，$q=1$。

2.　原式為 x 之六次式，故其平方根為三次式，可如 x^3+Ax^2+Bx+C 之形，即

$x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$

$=(x^3+Ax^2+Bx+C)^2$，

$x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$

$=x^6+2Ax^5+(2B+A^2)x^4+(2C+2AB)x^3$

$+(2AC+B^2)x^2+2BCx+C^2$。

兩邊 x 之同次項係數相等，

$2A=-8\cdots\cdots(1)\quad (2B+A^2)=a\cdots(2)$

$2C+2AB=b\cdots(3)\quad 2AC+B^2=c\cdots(4)$

$2BC=-44\cdots\cdots(5)\quad C^2=4\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

由(1)，$A=-4$。　由(6)，$C=\pm2$。

由(5)，$B=\mp11$。

如 $A=-4$，$C=2$，$B=-11$，由(2)，(3)，(4)得

$a=-6$，$b=92$，$c=105$。$\cdots\cdots$(答)

如 $A=-4$，$C=-2$，$B=11$，由(2)，(3)，(4)得

$a=38$，$b=-92$，$c=137$。$\cdots\cdots$(答)

2. 分項分數

(i) 分母之因式爲一次而各不相同者

〔例〕 分開 $\dfrac{12-x}{x^3-7x^2+12x}$ 爲分項分數。

因　$x^3-7x^2+12x=x(x-3)(x-4)$，

假定　$$\frac{12-x}{x^3-7x^2+12x}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

去分母而整理之，

$$12-x=A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)$$
$$+Cx(x-3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$=12A-(7A+4B+3C)x+(A+B+C)x^2$$

取 x 之同次項係數相等，

$$\left.\begin{aligned}12A&=12,\\-(7A+4B+3C)&=-1,\\A+B+C&=0.\end{aligned}\right\}\text{解之得}\begin{cases}A=1,\\B=-3,\\C=2.\end{cases}$$

代入 (1) 式，

$$\frac{12-x}{x^3-7x^2+12x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-4}\cdots(\text{答})$$

〔別解〕 以 0，3，4 順次代 (2) 式中之 x.

如 $x=0$，得 $12=12A$.　　$\therefore\ A=1$.

如 $x=3$，得 $9=-3B$.　　$\therefore\ B=-3$.

如 $x=4$，得 $8=4C$.　　$\therefore\ C=2$.

〔注意〕 分項分數亦稱散分數或部分分數，即由分式加減法之結果，回求其原式之法也。

【問 題】

分開 $\dfrac{12x^2-31x+17}{6x^2-18x+12}$ 爲分項分數。

【解 答】

此式中分母與分子之次數相等，故可先化作帶分式再求。

$$\frac{12x^2-31x+17}{6x^2-18x+12}=2+\frac{5x-7}{6x^2-18x+12}$$

$$=2+\frac{5x-7}{6(x-1)(x-2)}.$$

假定 $\dfrac{-7+5x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$.

去分母而整理之，

$$-7+5x=A(x-2)+B(x-1)$$

$$=-2A-B+(A+B)x.$$

故 $-2A-B=-7$， $A+B=5$.

解此方程，得 $A=2$， $B=3$.

故 $\dfrac{5x-7}{6x^2-18x+12}=\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{1}{2(x-2)}$.

即 $\dfrac{12x^2-31x+17}{6x^2-18x+12}$

$$=2+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}$$ ………(答)

(ii) 分母之因式爲一次式而有重複者

〔例〕分開 $\dfrac{x^2+7x+1}{(x-2)^3}$ 爲分項分數。

因分項分數分母之最低公倍式必爲 $(x-2)^3$，故其各分母可爲 $(x-2)$，$(x-2)^2$ 及 $(x-2)^3$，假定

$$\frac{x^2+7x+1}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}.$$

去分母而整理之，

$$\begin{aligned} x^2+7x+1&=A(x-2)^2+B(x-2)+C\\ &=Ax^2-(4A-B)x+4A-2B+C. \end{aligned}$$

取兩邊 x 之同次項係數相等，

$A=1$，　$-(4A-B)=7$，

$4A-2B+C=1$。

解之，得 $A=1$，　$B=11$，　$C=19$。

故 $\dfrac{x^2+7x+1}{(x-2)^3}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{11}{(x-2)^2}+\dfrac{19}{(x-2)^3}.$

(答) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{11}{(x-2)^2}+\dfrac{19}{(x-2)^3}.$

【問　題】

分開 $\dfrac{6x^3+27x^2+43x+14}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}$ 爲分項分數。

【解 答】

因分母$=(x+2)(x-2)(x+2)^2$
$=(x-2)(x+2)^3$.

假定 $\dfrac{6x^3+27x^2+43x+14}{(x-2)(x+2)^3}=\dfrac{A}{(x-2)}$
$+\dfrac{B}{(x+2)}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{D}{(x+2)^3}$.

去分母而整理之,

$6x^3+27x^2+43x+14$
$=A(x+2)^3+B(x-2)(x+2)^2$
$+C(x-2)(x+2)+D(x-2)$
$=(8A-8B-4C-2D)$
$+(12A-4B+D)x$
$+(6A+2B+C)x^2+(A+B)x^3$.

兩邊x之同次項係數相等,

$8A-8B-4C-2D=14$,
$12A-4B+D=43$,
$6A+2B+C=27$.
$A+B=6$.

解之,得 $A=4$, $B=2$, $C=-1$, $D=3$.

$\therefore\ \dfrac{6x^3+27x^2+43x+14}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}=\dfrac{4}{x-2}$
$+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{(x+2)^3}$.

(答) $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{(x+2)^3}$.

(iii) 分母之因式有二次式者

〔例〕 分開 $\dfrac{4-5x}{x(1+2x+2x^2)}$ 爲分項分數.

分項分數之分母爲二次式者，其分子顯然可爲一次式，故假定

$$\frac{4-5x}{x(1+2x+2x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+2x+2x^2}$$

$$\therefore\quad 4-5x=A(1+2x+2x^2)+(Bx+C)x$$
$$=A+(2A+C)x+(2A+B)x^2.$$

兩邊 x 之同次項係數相等，$A=4$，

$2A+C=-5.\qquad \therefore\ C=-13.$

$2A+B=0.\qquad \therefore\ B=-8.$

$$\therefore\ \frac{4-5x}{x(1+2x+2x^2)}=\frac{4}{x}-\frac{8x+13}{1+2x+2x^2}\cdots(\text{答})$$

【問 題】

1. 散分 $\dfrac{4x^2-5x}{(x+1)(x^2-x+1)}$ 爲分項分數.

2. 散分 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^3+1)}$ 爲分項分數.(上海)

【解 答】

1. 假定

$$\frac{4x^2-5x}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$\therefore\quad 4x^2-5x$

$=A(x^2-x+1)+(x-1)(Bx+C)$

$=(A+B)x^2-(A+B-C)x+(A-C).$

取係數相等， $A+B=4$，

$-(A+B-C)=-5$， $A-C=0.$

解之， $A=-1$， $B=5$， $C=-1$。

故 $$\frac{4x^2-5x}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\frac{5x-1}{x^2-x+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

2. 因 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，故假定

$$\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^3+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

$$\therefore\quad x^2-4x+5=A(x^3+1)(x-1)$$
$$+B(x^3+1)+C(x-1)^2(x^2-x+1)$$
$$+Dx(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2(x+1)$$
$$=(A+C+D)x^4-(A-B+3C+D-E)x^3$$
$$+(4C-D-E)x^2+(A-3C+D-E)x$$
$$-(A-B-C-E).$$

兩邊同次項之係數相等， $A+C+D=0$，
$-(A-B+3C+D-E)=0$，
$4C-D-E=1$， $A-3C+D-E=-4$，
$-(A-B-C-E)=5$。 解之得，

$$A=-\frac{5}{2},\ B=1,\ C=\frac{5}{6},\ D=\frac{5}{3},\ E=\frac{2}{3}.$$

故 $$\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^3+1)}=\frac{-\frac{5}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{\frac{5}{6}}{x+1}+\frac{\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=-\frac{5}{2(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{5}{6(x+1)}+\frac{5x+2}{3(x^2-x+1)}\cdots\cdots\cdots(答)$$

第十五編　排列分析

1. 順　　列

(i)　$_nP_r$ 之公式

〔例〕設有各不相同之物 n 個，每次取其中之 r 個，依種種不同之順序排列之，其列法有 $_nP_r$ 種，試證下之公式：

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1).$$

設有 a，b，c，d，e 五文字，若每次取其一個，則其順列數爲五種甚明，可記爲

$$_5P_1=5.$$

若每次取其二個，則首置 a，次置 b，c，d，e 各文字，其列法有四種；同理，首置 b，c，d，e 各文字，其列法亦各有四種，故其順列之總數爲

$$_5P_2=5\times4.$$

又若每次取其三個，則首置每取二個之各順列，後附其餘三文字之一，如於 ab 及 ba 之後，各附 c，d，e 各文字之一，如是則每次之列法，又各有三種，故此時順列總數爲

$$_5P_3=5\times4\times3$$

依次類推 $_nP_3=n(n-1)(n-2)$。

同樣 $_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$。

故一般

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)。$$

〔注意〕 若每次將 n 個全取之，則上式之 $r=n$，其順列總數爲

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1。$$

此式右邊爲自 1 至 n 之連續整數，常以 $\underline{|n}$ 或 $n!$ 表之，稱爲 n 之階乘，卽如 $_nP_n=\underline{|n}$ 或 $n!$。

【問 題】

1. 從 a，b，c…… 二十六個字母中，每次取三個之順列數有若干?

2. 六人並坐攝影，其坐法之變化有幾種?

3. 數字片十張，每張寫十個數字 0，1，…9 中之一個，每次取片作三位數之法，可有幾種?

【解 答】

1. $_{26}P_3=26\times25\times24=15600$。

(答) 15600 種。

2. $_6P_6=\underline{|n}=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$。

(答) 720 種。

3. 從十張中每取三張之順列數爲

$_{10}P_3=10\times9\times8=720$;

但 0 在左位不成三位數，其應扣去之數爲

$_9P_2=9\times8=72$。

故 $_{10}P_3-{}_9P_2=720-72=648$。

(答) 648 種。

(ii)　重複順列

〔例〕設有 n 個相異之物，每次取 r 個而順列之，且同一之物，可以重複取用，則其列法之數如何？

如從三文字 a, b, c, 每次取二文字而順列之，且許重複，則得九種列法如下：(注意 $9=3^2$)

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc.$$

次從三文字 a, b, c, 每次取三文字而順列之，且許重複，則如前次每一列法中，各有如下之三種：

aa 中有　aaa,　aab,　aac

ab 中有　aba,　abb,　abc

ac 中有　aca,　acb,　acc

………………………………

………………………………

即共有 $3^2\times3=3^3$ 種。

依次類推，一般從 n 個之物中，每次取 r 個可許重複之順列總數爲 n^r。

【問　題】

1. 用9個有效數字作三位整數，共可有若干個?

2. 用 0，1，……9 之十個數字作三位整數，可有若干個?

【解　答】

1. 有效數字爲除0以外自1至9之九個基數．如123，122，111等皆爲有效數字所作之三位整數，故此題爲重複順列．

所求三位整數之個數爲

$$9^3=729.$$

（答） 729 個．

2. 用十個數字作三位數，卽從十個每次取三個之重複順列，本可有個數如下：

$$10^3=1000.$$

但0在左位不成三位數，係爲二位數，其個數爲

$$10^2=100.$$

故所求三位整數之個數爲

$$10^3-10^2=1000-100=900.$$

（答） 900 個．

(ii) 各物中有相同者每次全取之順列數.

〔例〕設 n 個之物，其中有 p 個為同物，q 個為其他同物，r 個又為其他同物，盡取 n 個而順列之，則其列法之數如何?

如有 $aabbbbcdef$ 十個文字，其中有 2 個 a，4 個 b，設其順列之數為 P.

先任取P個順列法之一，將其二個 a 變為不同如 a_1 及 a_2，則取此二文字之列法有 ${}_2P_2=\underline{|2}$ 個，今此列法各行於P個順列法，故得 $P\underline{|2}$ 個之順列.

次任取 $P\underline{|2}$ 個順列法之一，將其中四個 b 變為不同，如 b_1，b_2，b_3 及 b_4 之四個，則取此四文字之列法有 ${}_4P_4=\underline{|4}$ 個，今此列法各行於 $P\underline{|2}$ 個順列法，故得 $P\underline{|2}\,\underline{|4}$ 個之順列.

然全取十個各異之物而順列之，其數為

$${}_{10}P_{10}=\underline{|10}$$

由是 $P\underline{|2}\,\underline{|4}=\underline{|10}$

$$\therefore\ P=\frac{\underline{|10}}{\underline{|2}\,\underline{|4}}.$$

一般於 n 個之物中，有 p 個相同，q 個相同，r 個相同，盡取其 n 個之順列數為

$$P=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}.$$

【問　題】

1. 有 *degree* 一語，其各字母不同之列法有幾種?

2. 將 *Combination* 一語之字母排列之，可有幾種不同之方法?

3. 用 5，6，7，8，7，6，5 七個數字作七位整數，使其偶數在偶位，奇數在奇位，可有幾種列法?

【解　答】

1. *degree* 有 6 個字母，其中 *e* 有 3 個，故其列法之數爲

$$P=\frac{|\underline{6}}{|\underline{3}}=6\times5\times4=120.\quad\text{(答) 120種.}$$

2. *Combination* 有11字母，其中有 2 個 *o*，2 個 *i*，2 個 *n*，故其列法之數爲

$$P=\frac{|\underline{11}}{|\underline{2}\,|\underline{2}\,|\underline{2}}=4989600.\quad\text{(答) 4989600種.}$$

3. 偶數 6，8，6 之順列數爲 $\dfrac{|\underline{3}}{|\underline{2}}=3.$

奇數 5，7，7，5 之順列數爲 $\dfrac{|\underline{4}}{|\underline{2}\,|\underline{2}}=6.$

因偶數之每一順列與奇數之每一順列相配，故所求列法之總數爲

$$P=3\times6=18.\qquad\text{(答) 18種.}$$

(iv)　環狀順列

> 〔例〕設有 n 人以手握手作環狀，則其列法之數如何？

設 a，b，c，d，e 五人並立作線狀之順列，則其列法之數爲 ${}_5P_5$.

今作環狀，則其中尙有同一之列法，卽如

$$abcde,\ bcdea,\ cdeab,\ deabc,\ eabcd.$$

之五種，在線狀爲相異作五種，在環狀則相同僅作一種．故線狀之順列數爲環狀之 5 倍，卽環狀之順列數爲線狀之 $\frac{1}{5}$.

故設所求列法之數爲 P，則

$$P\times 5={}_5P_5=\lfloor\underline{5}.$$

$$\therefore\ P=\frac{\lfloor\underline{5}}{5}=\lfloor\underline{4}=24.$$

依此類推，則一般 n 人之環狀順列，其列法之數 P 爲

$$P={}_nP_n\div n=\lfloor\underline{n}\div n=\lfloor\underline{n-1}.$$

〔注意〕若於 n 人中選 r 人作環狀順列，則其列法之數爲

$$P={}_nP_r\div r$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r}$$

【問　題】

1. 八人合坐圓桌，其坐位之列法有幾種?

2. 有不同之眞珠10粒，以線穿成環形，其列法有幾種?

3. 從7人中選出4人，作環狀順列，其方法有幾種?

4. 有四男四女圍坐圓桌，男與男不相鄰，女與女亦然，問坐法有幾?　　　(福建)

【解　答】

1. 所求列法之數爲

$P={}_8P_8\div 8=\lfloor 8\div 8=\lfloor 7=5040$……(答)

2. 依環狀順列，其列法之數爲

$P={}_{10}P_{10}\div 10=\lfloor 10\div 10=\lfloor 9=362880$.

但眞珠無上下表裏之別，故 $abcdefghij$ 之現狀，與 $jihgfedcba$ 無異，其正反相對之各列全然相同，故其列法之數爲前數之$\frac{1}{2}$，卽

$362880\times\frac{1}{2}=181440$……………(答)

3. $P={}_7P_4\div 4=\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4}=210$……(答)

4. 四男與四女列法之數各爲 ${}_4P_4=\lfloor 4=24$.

故其線狀列法之數爲　$24\times 24=576$.

今爲環狀順列，故其列法之數爲

$576\div 4=144$　……………………(答)

2. 組 合

〔例〕從 n 個各不相同之物，每次取其 r 個爲一組，以 r 個中有一相異爲主，不論其順序如何，是謂從 n 個取 r 個之組合。今設其組合之數爲 ${}_nC_r$，試證下之公式：

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$$

或

$${}_nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}.$$

如有 a，b，c，d 四文字，每次取其二個作組合，則有六種如下：

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad bc,\quad bd,\quad cd.$$

但其每一組合中，各有 ${}_2P_2=\lfloor 2$ 個順列，即全組合中共有 ${}_4C_2\times\lfloor 2$ 個順列，故順列數爲組合數之 $\lfloor 2$ 倍，即 ${}_4C_2\times\lfloor 2={}_4P_2$.

又若每次其三個作組合，則有下之三種：

$$abc,\quad abd,\quad acd,\quad bcd.$$

此每一組合中，各有 ${}_3P_3=\lfloor 3$ 個順列，即全組合中共有 ${}_4C_3\times\lfloor 3$ 個順列，故順列數爲組合數之 $\lfloor 3$ 倍，即 ${}_4C_3\times\lfloor 3={}_4P_3$.

依此推之，一般得 ${}_nC_r\times\lfloor r={}_nP_r$.

$$\therefore\quad {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\lfloor r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$$

但　$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times|\underline{n-r}=|\underline{n}$.

$\therefore\quad {}_nC_r=\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}$.

【問　題】

1. 有董事11人，欲選舉 3 人爲常務董事，其選法有幾種?

2. 如上題，若有一人必須在內，則選法有幾?

3. 旅行團中，有男 8 人女 6 人，欲選舉男 2 人，女 2 人爲幹事，其選法有幾?

【解　答】

1. $${}_{11}C_3=\frac{|\underline{11}}{|\underline{3}\,|\underline{11-3}}=\frac{|\underline{11}}{|\underline{3}\,|\underline{8}}=\frac{11\times10\times9}{3\times2}$$
$$=165\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. 因有一人必須在內，即爲從10人選舉 3 人，故其選法之數爲

$${}_{10}C_3=\frac{|\underline{10}}{|\underline{3}\,|\underline{10-3}}=\frac{|\underline{10}}{|\underline{3}\,|\underline{7}}=\frac{10\times9\times8}{2\times3}$$
$$=120\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

3. 男之選法有　$${}_8C_2=\frac{|\underline{8}}{|\underline{2}\,|\underline{8-2}}=\frac{|\underline{8}}{|\underline{2}\,|\underline{6}}=28.$$

女之選法有　$${}_6C_2=\frac{|\underline{6}}{|\underline{2}\,|\underline{6-2}}=\frac{|\underline{6}}{|\underline{2}\,|\underline{4}}=15.$$

但男之任一種選法與女之任一種相配，故所求選法之總數爲　$28\times15=420$ ⋯⋯　⋯⋯(答)

〔例〕試證定理：　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

由公式，

$$
{}_nC_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|n-(n-r)}}
$$

$$
=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|r}}={}_nC_r.
$$

【問　題】

1. 試證定理：　${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$.
2. 設 ${}_nC_5={}_nC_6$，　求 n.
3. 設 ${}_nC_6={}_nC_{12}$，求 ${}_nC_{16}$.
4. 設 $3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$，求 n.
5. 設 ${}_nP_r=272$ 及 ${}_nC_r=136$，求 n 及 r.

【解　答】

1. ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$$
=\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r-1}}+\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r-1}\;\underline{|n-r}}
$$

$$
=\frac{\underline{|n-1}\,(n-r)}{\underline{|r}\;\underline{|n-r-1}\,(n-r)}+\frac{r\,\underline{|n-1}}{r\,\underline{|r-1}\;\underline{|n-r}}
$$

$$
=\frac{\underline{|n-1}\,(n-r)}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}+\frac{r\,\underline{|n-1}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}
$$

$$
=\frac{\underline{|n-1}\,(n-r+r)}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}
$$

$$
=\frac{n\,\underline{|n-1}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}={}_nC_r.
$$

2. ${}_nC_5={}_nC_6$，但由定理，${}_nC_5={}_nC_{n-5}$，

$\therefore\quad {}_nC_{n-5}={}_nC_6$。　$\therefore\quad n-5=6$，

$n=11$ ……………………………(答)

3. ${}_nC_6={}_nC_{12}$，因 ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$。

$\therefore\quad {}_nC_{n-6}={}_nC_{12}$。

即 $n-6=12$，　$\therefore\quad n=18$。

故 ${}_{18}C_{16}=\dfrac{\lfloor\underline{18}}{\lfloor\underline{16}\,\lfloor\underline{18-16}}=\dfrac{18\times17}{1\times2}=153$。

4. $3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$。

$$\therefore\quad 3\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor\underline{4}}$$

$$=5\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor\underline{5}}$$

$\therefore\quad 3n=(n-4)(n-5)$，$n^2-12n+20=0$。

$\therefore\quad (n-10)(n-2)=0$。　$\therefore\quad n=10$ 或 2。

但由 ${}_nC_4$ 知 n 不能小於 4，故 $n=2$ 不合。

(答)　$n=10$。

5. 因 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{\lfloor\underline{r}}$，以 ${}_nP_r=272$ 及 ${}_nC_r=136$

代入，得　$136=\dfrac{272}{\lfloor\underline{r}}$。

$\therefore\quad \lfloor\underline{r}=\dfrac{272}{136}=2=\lfloor\underline{2}$，　$r=2$。

故 ${}_nC_r={}_nC_2=136$，

$\therefore\quad \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{n-2}}=136$，　$\dfrac{n(n-1)}{2}=136$，

即 $n(n-1)=272=16\times17$。

$\therefore\quad n=17$。　(答)　$r=2$，$n=17$。

〔例〕 已知 n 之值，求 ${}_nC_r$ 之最大值.

由組合公式，

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\div\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}=\frac{n+1}{r}-1.$$

$$\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor r+1\,\lfloor n-r-1}\div\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$$

$$=\frac{n-r}{r+1}=\frac{n+1}{r+1}-1.$$

設 ${}_nC_{r-1}<{}_nC_r>{}_nC_{r+1}$.

則 $\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}>1>\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}$.

$\therefore\ \frac{n+1}{r}-1>1>\frac{n+1}{r+1}-1$.

$\therefore\ \frac{n+1}{r}>2>\frac{n+1}{r+1}$.

$\therefore\ r<\frac{1}{2}(n+1)$ 及 $r>\frac{1}{2}(n-1)$.

故 ${}_nC_r$ 之值為最大時，r 之值在 $\frac{1}{2}(n+1)$ 與 $\frac{1}{2}(n-1)$ 之間.

若 n 為奇數，則 $\frac{1}{2}(n+1)$ 與 $\frac{1}{2}(n-1)$ 為連續整數，故 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $r=\frac{1}{2}(n-1)$ 時，${}_nC_r$ 之值為最大.

若n爲偶數，則$\frac{1}{2}(n+1)$與$\frac{1}{2}(n-1)$皆非整數，惟其間之$\frac{1}{2}n$爲整數．故$\underline{r=\frac{1}{2}n}$時$_nC_r$之值爲最大．

【問 題】

1. 求$_{12}C_7$，$_{12}C_6$，$_{12}C_5$，再比較其大小
2. 求$_{10}C_r$之最大值．
3. 求$_{11}C_r$之最大值．

【解 答】

1. $$_{12}C_7=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 7\lfloor 12-7}=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 7\lfloor 5}$$
$$=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=792.$$
$$_{12}C_6=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 6\lfloor 12-6}=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 6\lfloor 6}$$
$$=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=924.$$
$$_{12}C_5=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 5\lfloor 12-5}=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 5\lfloor 7}=792.$$
……(答)．$_{12}C_6>{}_{12}C_7={}_{12}C_5$．

2. 10爲偶數，故$r=10\div 2=5$時$_{10}C_r$爲最大，即$\frac{\lfloor 10}{\lfloor 5\lfloor 10-5}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=252$……(答)．

3. 11爲奇數，故$r=(11+1)\div 2=6$或$r=(11-1)\div 2=5$時$_{11}C_r$爲最大，其值皆爲
$\frac{\lfloor 11}{\lfloor 6\lfloor 5}=462$……………………………(答)

3. 或 然 率

〔例〕設一事出現之機會均等，共有 n 個，其中有 a 個可成功，餘者遭失敗，則其成功與失敗之或然率各如何？

成功之機會，爲 n 個中之 a 個，故設其或然率爲 p，則 $p=\frac{a}{n}$.

又失敗之機會，爲 $n-a$ 個，故失敗之或然率爲 $$\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}=1-p.$$

【問 題】

1. 用2粒骰子擲出6點之或然率如何？又擲出7點之或然率如何？

2. 甕中盛5個紅球，4個白球，3個黑球。
(i) 任取其一，求其所出者爲白球之或然率。
(ii) 任取其三，求其所出者皆爲紅球之或然率。
(iii) 任取其六，求其所出者爲2紅3白1黑之或然率。

【解 答】

1. 骰子每粒有6面，故2粒出現之機會總數爲 $6^2=36$.

擲出6點之機會，有 $1+5$，$2+4$，$3+3$，$4+2$，$5+1$ 之五種，故 $p=\frac{5}{36}$.

擲出7點之機會，有 $1+6$，$2+5$，$3+4$，$4+3$，$5+2$，$6+1$ 之六種，故

$P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。　　　　答）$\frac{5}{36}$，$\frac{1}{6}$

2. (i) 白球有 4，故取一白球之機會爲 4，又囊中共有12球，取出一球之機會總數爲12，

故取一白球之或然率爲 $P=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$……(答)

(ii) 從 5 紅球取其 3 之組合數爲

$${}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10.$$

卽取出 3 紅球之機會有10次。

從12球中取其 3 之組合數爲

$${}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{1\times2\times3}=220.$$

卽 3 球出現之機會共有 220 次。

故取 3 紅球之或然率爲 $P=\frac{10}{200}=\frac{1}{22}$…(答)

(iii) 從 5 紅球取其 2 之組合數爲

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10.$$

從4白球取其3之組合數爲 ${}_4C_3=\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}=4$。

從 3 黑球取其 1 之組合數爲 3。

但紅球之10個組合數中，各有白球 4 個組合數及黑球 3 個組合數之任一個相配，故其組合之共數爲 $10\times4\times3=120$。

又從12球中取其 6 之組合數爲

$${}_{12}C_6=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=924.$$

故取 2 紅球 3 白球 1 黑球之或然率爲

$\frac{120}{924}=\frac{10}{77}$……………………………(答)

〔例〕設有不同諸事，不能於同時成功，試證此諸事中任一事成功之或然率，等於各事成功或然率之和。

設有不同三事 A，B，C，而此三事成功之或然率，以同母之分數表之，如 $\frac{a}{d}$，$\frac{b}{d}$，$\frac{c}{d}$。

卽 d 次內，各事成功之機會，順次有 a 次，b 次，c 次。惟三事不能同時成功，故知 d 次內，三事中任一事成功之或然率爲

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}.$$

依此類推，設不同諸事成功之或然率爲 p_1，p_2，p_3，…… 則其中任一事成功之或然率爲

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots$$

【問　題】

1. 骰子一粒，擲出奇數點之或然率如何？

2. 甲袋中有銅圓 5 枚，銀角 3 枚；乙袋中有銅圓 6 枚，銀角 4 枚；今於無意中任從一袋取 2 枚，求其皆爲銀角之或然率。

3. 皮夾中有10圓票 4 張，1 圓票 6 張。設一人於無意中取出 2 張，則其預期金額如何？

【解　答】

1. 擲出 1 點 3 點 5 點之或然率各爲 $\frac{1}{6}$，而

此三事又不能同時出現，故擲出奇數點之或然率爲 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ……(答)

2. 任從二袋中之一袋之或然率爲$\frac{1}{2}$。

從甲袋中取出銀角2枚之或然率爲

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{\lfloor 3 \div \lfloor 2}{\lfloor 8 \div \lfloor 2 \lfloor 6}=\frac{3}{28}.$$

故得任意從甲袋取銀角2枚之或然率爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{28}=\frac{3}{56}$$

同理，得任意從乙袋取銀角2枚之或然率爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{\lfloor 4 \div \lfloor 2 \lfloor 2}{\lfloor 10 \div \lfloor 8 \lfloor 2}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{45}=\frac{1}{15}.$$

故所求之或然率爲 $\frac{3}{56}+\frac{1}{15}=\frac{101}{840}$ ……(答)

3. 取10圓票2張之或然率爲 $\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$.

故其相應之預期金額爲 20圓 $\times\frac{2}{15}=\frac{8}{3}$圓

又取1圓票2張之或然率爲 $\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$,

故其相應之預期金額爲2圓 $\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$圓.

又取10圓票1張1圓票1張之或然率爲

$\frac{6\times 4}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15}$, 故其預期金額爲 11圓 $\times\frac{8}{15}=\frac{88}{15}$圓.

故所求之預期金額爲

$$\frac{8}{3}\text{圓}+\frac{2}{3}\text{圓}+\frac{88}{15}\text{圓}=9.2\text{圓}$$ ……(答)

〔例〕設有諸事各無關係，試證此諸事俱成功之或然率，等於各事成功或然率之積。

設有二事，第一事於 $a+b$ 次中，有 a 次成功，b 次失敗。第二事於 a_1+b_1 次中，有 a_1 次成功，b_1 次失敗。惟第一事 $a+b$ 次中之任一次可與第二事 a_1+b_1 次之任一次聯合，即成為 $(a+b)(a_1+b_1)$ 次，而其中有 aa_1 次為二事俱能成功，故其或然率為

$$\frac{aa_1}{(a+b)(a_1+b_1)}=\frac{a}{a+b}\times\frac{a_1}{a_1+b_1}.$$

依此類推，設無關係各事成功之或然率為 p_1，p_2，p_3，……，則諸事俱成功之或然率為 $p_1p_2p_3$……

【問 題】

1. 袋中有紅籌 4 白籌 5，取 1 籌後放入再取，求二次皆得白籌之或然率。

2. 甕中有一圓票 5 張，十圓票 7 張，先取出一張，再取出一張，求取出之二張俱為十圓票之或然率。

3. 將一粒骰子連擲 3 次，求俱不出 1 之或然率。又至少有一次出 1 之或然率如何？

【解　答】

1. 籌數共有9，而白籌有5，且取出後仍放入，則每次得白籌之或然率皆爲$\frac{5}{9}$，故二次俱得白籌之或然率爲

$$\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{25}{81}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

2. 票共有12張，而十圓票有7張，則第一次取十圓票一張之或然率爲$\frac{7}{12}$.

第一次取出後，囊中尙有一圓票5張，十圓票6張，共11張，則第二次取十圓票一張之或然率爲$\frac{6}{11}$.

故二回俱取出十圓票之或然率爲

$$\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

3. 骰子有6面，每擲一次不出1之或然率爲　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

故擲三次不出1之或然率爲

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}.$$

從全數1減去三次不出1之或然率，卽爲至少有一次出1之或然率，故得

$$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}.\qquad\text{(答)}\ \frac{125}{216},\ \frac{91}{126}.$$

4. 二項式定理

[例] 設 n 爲正整數，表二項因式之個數；試證

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+h)(x+k)\\&=x^n+(a+b+c+\cdots\cdots+k)x^{n-1}\\&\quad+(ab+ac+ad+\cdots\cdots+hk)x^{n-2}\\&\quad+(abc+abd+\cdots\cdots+ghk)x^{n-3}\\&\quad+\cdots\cdots+abc\cdots\cdots k.\end{aligned}$$

實行乘法得

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

再以 $x+c$ 乘上式，得

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\\&=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.\end{aligned}$$

再以 $x+d$ 乘上式，得

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\\&=x^4+(a+b+c+d)x^3\\&\qquad+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&\qquad+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.\end{aligned}$$

從以上之結果，可推知次之法則:

(i) 右邊之項數，比左邊因式之數多一.

(ii) 右邊第一項 x 之指數，等於左邊因式之數，以下各項之指數，次第減一.

(iii) 右邊第一項之係數爲1. 第二項之係數，爲左邊各二項因式第二項之和. 第三項之係數，

爲各因式第二項中取其二以爲積之和。第四項之係數，爲各因式第二項中取其三以爲積之和。以下做此。而最後不含 x 之項，爲各因式第二項之連乘積。

上法係由因式有二個三個四個即 $n=2, 3, 4$ 時歸納而得，則推而至於 n 遞次大一，亦不相合明矣。故一般原式能成立。

〔注意〕 如此之證法，稱爲數學歸納法。

【問　題】

求下各式之積:

1. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
2. $(y+5)(y+6)(y+7)(y+8)$.
3. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

【解　答】

1. $(x+1)(x+2)(x+3)$
$$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times2+1\times3+2\times3)x+1\times2\times3$$
$$=x^3+6x^2+11x+6.$$
2. $(y+5)(y+6)(y+7)(y+8)$
$$=y^4+(5+6+7+8)y^3+(5\times6+5\times7+5\times8+6\times7+6\times8+7\times8)y^2+(5\times6\times7+5\times6\times8+5\times7\times8+6\times7\times8)y+5\times6\times7\times8$$
$$=y^4+26y^3+251y^2+1306y+1680.$$
3. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$$=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

〔例〕設 n 爲正整數，試證下之二項式定理：$(x+a)^n$
$$=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+a^n.$$

由534頁公式：
$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+h)(x+k)\\&=x^n+(a+b+c+\cdots\cdots+k)x^{n-1}\\&\quad+(ab+ac+ad+\cdots\cdots+hk)x^{n-2}\\&\quad+(abc+abd+\cdots\cdots+ghk)x^{n-3}\\&\quad+\cdots\cdots+abc\cdots\cdots k.\end{aligned}$$

此式如 $a,\ b,\ c,\ d,\cdots\cdots k$ 各等於 a，則
$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+h)(x+k)\\&=(x+a)^n,\\&a+b+c+\cdots\cdots k=na={}_nC_1a,\\&ab+ac+ad+\cdots\cdots+hk\\&=a^2+a^2+\cdots\cdots a^2={}_nC_2a^2,\\&abc+abd+\cdots\cdots+ghk\\&=a^3+a^3+\cdots\cdots+a^3={}_nC_3a^2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&abc\cdots\cdots k=aaa\cdots\cdots a=a^n.\end{aligned}$$

故　$(x+a)^n$
$$=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+a^n.$$

〔注意〕此定理之右邊，稱爲 $(x+a)^n$ 之展開式，如設 $x=1$，$a=x$，則得簡式如下：
$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+x^n.$$

【問　題】

1. 展開 $(x+y)^6$.
2. 求 $(a-2x)^7$ 之展開式.
3. 用二項式定理展開 1.05^{10}，計算至五位小數

4. 試證明 $49^n+16n-1$ 能以64整除.

【解 答】

1. $(x+y)^6=x^6+{}_6C_1yx^5+{}_6C_2y^2x^4+{}_6C_3y^3x^3$
$+{}_6C_4y^4x^2+{}_6C_5y^5x+y^6$
$=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3$
$+15x^2y^4+6xy^5+y^6$ ……(答)

2. $(a-2x)^7=a^7+{}_7C_1a^6(-2x)+{}_7C_2a^5(-2x)^2$
$+{}_7C_3a^4(-2x)^3+{}_7C_4a^3(-2x)^4$
$+{}_7C_5a^2(-2x)^5+{}_7C_6a(-2x)^6+(-2x)^7$
$=a^7-14a^6x+84a^5x^2-280a^4x^3+560a^3x^4$
$-672a^2x^5+448ax^6-128x^7$ ……(答)

3. $(1.05)^{10}=(1+0.05)^{10}$
$=1+{}_{10}C_1(0.05)+{}_{10}C_2(0.05)^2$
$+{}_{10}C_3(0.05)^3+{}_{10}C_4(0.05)^4$
$+{}_{10}C_5(0.05)^5+\cdots\cdots+(0.05)^{10}$
$=1+10(0.05)+45(0.05)^2+120(0.05)^3$
$+210(0.05)^4+252(0.05)^5+\cdots\cdots$
$=1+0.5+0.1125+0.015+0.0013125$
$+0.0000787+\cdots\cdots=1.62889$ ……(答)

4. $49^n+16n-1=(8-1)^{2n}+2\times8n-1$
$=\{8^{2n}+{}_{2n}C_1\times8^{2n-1}(-1)^{2n-1}$
$+{}_{2n}C_2\times8^{2n-2}(-1)^{2n-2}+\cdots\cdots$
$+{}_{2n}C_{2n-1}\times8+(-1)^{2n}\}+2n\times8-1$
$=\{8^{2n}-2n\times8^{2n-1}+\dfrac{2n(2n-1)}{\underline{|2}}\times8^{2n-2}$
$-\cdots\cdots-2n\times8+1\}+2n\times8-1$
$=8^{2n}-2n\times8^{2n-1}+\dfrac{2n(2n-1)}{\underline{|2}}\times8^{2n-2}$
$-\cdots\cdots=P\times8^2=P\times64.$

〔例〕觀察二項式定理之展開式，知

$(x+a)^n$ 之第 $(r+1)$ 項 $={}_nC_ra^rx^{n-r}$.

此 ${}_nC_ra_rx^{n-r}$ 稱為 $(x+a)^n$ 展開式之公項。試由此式求 $(3a+b^2)^8$ 之第7項.

因 $r+1=7$，即 $r=6$，而 $n=8$，$x=3a$，$a=b^2$。

故　第7項 $={}_8C_6(b^2)^6(3a)^{8-6}$

$$=\frac{8\times7}{1\times2}b^{12}(3a)^2=28(9a^2)b^{12}=252a^2b^{12}.$$

〔注意〕$(1+x)^n$ 展開式中之公項為 ${}_nC_rx^n$，

即 $=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$

【問　題】

1. 求 $(1+2x)^8$ 展開式中之第五項.(河南)
2. 求 $(x-2y)^{10}$ 展開式中之中央項.
3. 求 $\left(a^2+\dfrac{2b^2}{3}\right)^{10}$ 展開式中之第六項.
4. 求 $\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)^{14}$ 之中央項.
5. 求 $\left(x-\dfrac{1}{3x^2}\right)^{18}$ 展開式不含 x 之項.
6. $(x^2-ax^{-1})^{20}$ 之展開式中，其 x^7 在第幾項?

【解　答】

1. $r+1=5$，即 $r=4$.

故　第5項 $={}_8C_4(2x)^4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}(2x)^4$

$=70(16x^4)=1120x^4$ ……………(答)

2. 此展開式有11項，故中央項為六項.

$r+1=6$，即 $r=5$.

故　中央項 $={}_{10}C_5(-2y)^5x^{10-5}$

$=252(-32x^5y^5)=-8064x^5y^5$……(答)

3. $\left(a^2+\frac{2b^2}{3}\right)^{10}$ 展開式之第六項為

$${}_{10}C_5\left(\frac{2b^2}{3}\right)^5(a^2)^{10-5}$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}\times\frac{2^5b^{10}}{3^5}\times a^{10}$$

$$=\frac{896}{81}a^{10}b^{10}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

4. $\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^{14}$ 之中央項為第 8 項。

$$\text{中央項}={}_{14}C_7\left(-\frac{x^2}{3}\right)^7$$

$$=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9\times8}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}\left(-\frac{x^{14}}{3^7}\right)$$

$$=-\frac{1144}{729}x^{14}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

5. $\left(x-\frac{1}{3x^2}\right)^{18}$ 之公項即第 $(r+1)$ 項為

$${}_{18}C_r\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^r x^{18-r}=(-1)^r{}_{18}C_r\frac{x^{18-r}}{3^rx^{2r}}$$

$$=(-1)^r{}_{18}C_r\frac{1}{3^r}x^{18-3r}.$$

因不含 x，故必須 $18-3r=0$，即 $r=6$.

故所求之項為 ${}_{18}C_6\times\frac{1}{3^6}=\frac{6188}{243}\cdots\cdots(\text{答})$

6. $(x^2-ax^{-1})^{20}=\left(x^2-\frac{a}{x}\right)^{20}$,

$$\text{公項}={}_{20}C_r\left(-\frac{a}{x}\right)^r(x^2)^{20-r}$$

$$=(-a)^r{}_{20}C_r\left(\frac{1}{x}\right)^r x^{40-2r}=(-a)^r{}_{20}C_r x^{40-3r}.$$

故 $40-3r=7$,　$\therefore\ r=11$.

故 x^7 在 $(11+1)$ 即十二項.　(答) 十二項.

5. 多項式定理

〔例〕試由二項式定理求

$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^n$ 展開式之公項.

因 $(a+b+c+d+\cdots\cdots)^n$

$$=\{a+(b+c+d+\cdots\cdots)\}^n.$$

依二項式定理，求其展開式之公項為

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^r(b+c+d+\cdots\cdots)^{n-r}.$$

由同理再求 $(b+c+d+\cdots\cdots)^{n-r}$ 展開式之公項為

$$\frac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\,\underline{|n-r-s}}b^s(c+d+\cdots\cdots)^{n-r-s}.$$

又求 $(c+d+\cdots\cdots)^{n-r-s}$ 展開式之公項為

$$\frac{\underline{|n-r-s}}{\underline{|t}\,\underline{|n-r-s-t}}t(d+\cdots\cdots)^{n-r-s-t}$$

依此類推，得 $(a+b+c+d+\cdots\cdots)$ 展開式之公項為

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\times\frac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\,\underline{|n-r-s}}\times\frac{\underline{|n-r-s}}{\underline{|t}\,\underline{|n-r-s-t}}$$

$$\times\cdots\cdots a^rb^sc^t\cdots\cdots=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\cdots}a^rb^sc^t\cdots.$$

但 $r,\ s,\ t,\cdots\cdots$ 之值各為正整數或0，而 $r+s+t+\cdots\cdots=n$.

【問 題】

1. 試求 $(2a+b+3c)^7$ 展開式中含 a^3b^3c 之項.

2. 求 $(1+x+x^2)^3$ 展開式中 x^4 之係數。

3. 求 $(1+2x+3x^2)^4$ 展開式 x^5 之係數。

【解 答】

1. 由公項之公式，得

$$\frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\,\lfloor 3\,\lfloor 1}(2a)^3b^3(3c)=140\times 8\times 3a^3b^3c$$
$$=3360a^3b^3c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. $(1+x+x^2)^3$ 之公項爲 $\frac{\lfloor 3}{\lfloor r\,\lfloor s\,\lfloor t}1^r1^sx^{s+2t}$。

而所求爲 x^4 之項，故

$s+2t=4$， $r+s+t=3$。

即 $s=4-2t$， $r=3-s-t$。

故 t 不能大於 2。

如 $t=1$， 則 $s=2$， $r=0$。

如 $t=2$， 則 $s=0$， $r=1$。

故 x^4 之係數爲 $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2\,\lfloor 1}+\frac{\lfloor 3}{\lfloor 1\,\lfloor 2}=6$。

(答) 6。

3. 公項爲 $\frac{\lfloor 4}{\lfloor r\,\lfloor s\,\lfloor t}1^r2^s3^tx^{s+2t}$， 而所求爲 x^5 之項，故 $s+2t=5$， $r+s+t=4$。

即 $s=5-2t$。 $r=4-s-t$。故 t 不大於 3。

如 $t=1$， 則 $s=3$， $r=0$。

如 $t=2$， 則 $s=1$， $r=1$。

故所求之係數爲

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor 3\,\lfloor 1}2^3 3^1+\frac{\lfloor 4}{\lfloor 1\,\lfloor 1\,\lfloor 2}2^1 3^2$$
$$=96+216=312\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

第十六編　無盡連級數

1. 斂級數發級數

〔例〕試決定下列二級數爲收斂抑爲發散？

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

(ii) $1+2+3+4+\cdots\cdots$

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 爲初項 1 公比 $\frac{1}{2}$ 之等比級數，其和爲 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$，故爲斂級數。

(ii) $1+2+3+4+\cdots\cdots$ 爲初項 1 公差 1 之等差級數，其 n 項之和爲 $\frac{1}{2}n(n+1)$。如 n 無限增大，則其和亦無限增大，故爲發級數。

【問　題】

1. 試證 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 爲發級數。

2. 試證 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}\times\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots$ 爲斂級數。

3. 設級數 $\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)}+\cdots\cdots$ 其 a，b 及 x 俱爲正整數；試證其斂級數。

【解　答】

1. 此級數雖n無限增大，其第n項無限減小，然自第$(n+1)$項起至n項之和

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n},$$

比其最小項$\frac{1}{2n}$之n倍卽$\frac{1}{2}$爲大，則此級數之和，常大於$\frac{1}{2}$不能小於定限，故爲發級數。

2. 設原級數爲

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=\mathrm{U},$$

另設一級數

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2}+\cdots=\mathrm{V},$$

因U之各項，比V之對應各項爲小，而V爲等比級數，其公比爲$\frac{1}{2}$，故V爲歛級數。

U旣小於V，故U亦爲歛級數。

3. 因a，b，x俱爲正而$b>a$，另設r爲大於1之任何整數，則　$\frac{ra+x}{rb+x}<\frac{a+x}{b+x}$。

故級數$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\frac{(a+x)(3a+x)}{(b+x)(3b+x)}$

$+\cdots\cdots$之各項，小於

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)^2}{(b+x)^2}+\frac{(a+x)^3}{(b+x)^3}+\cdots\cdots$$

之對應各項。

但此第二級數爲等比級數，其公比爲$\frac{a+x}{b+x}$而小於1，故爲歛級數

原級數旣比此第二級數爲小，故亦爲歛級數。

〔例〕設正項級數自任意特別項以下，其各項與相鄰前項之比，常比小於 1 之定限爲小者，試證此級數爲斂級數。

設定限 $k<1$，自 r 項以下，各項爲 u_r，u_{r+1}，u_{r+2}，……則

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}<k,\qquad \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}}<k,\cdots\cdots$$

即　$u_{r+1}<u_rk$，　$u_{r+2}<u_{r+1}k<u_rk^2$，……

由是　$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots$

$$<u_r(1+k+k^2+\cdots\cdots)$$

但　$k<1$，則　$1+k+k^2+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-k}$。

故　$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-k}$。

此級數第 r 項以前 r 項之和爲有限，而自第 r 項以後各項之和常小於定限 $\dfrac{1}{1-k}$ 而爲斂級數，故全級數亦爲斂級數。

【問　題】

試決定下列級數爲斂級數抑爲發級數？

1. $$\frac{3}{4}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{3\cdot4\cdots\cdots(n+2)}{4\cdot6\cdots\cdots(2n+2)}+\cdots\cdots$$

2. $$\frac{3}{4}+\frac{3\cdot5}{4\cdot7}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}{4\cdot7\cdot10\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots$$

【解 答】

1. 設第 n 項 $n+1$ 項各爲 u_n，u_{n+1}，則

$$u_n=\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(n+2)}{4\cdot6\cdot8\cdots\cdots(2n+2)},$$

$$u_{n+1}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(n+2)(n+3)}{4\cdot6\cdot8\cdots\cdots(2n+2)(2n+4)}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(n+2)(n+3)}{4\cdot6\cdot8\cdots\cdots(2n+2)(2n+4)}$$

$$\div\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(n+2)}{4\cdot6\cdot8\cdots\cdots(2n+2)}$$

$$=\frac{n+3}{2n+4}=\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{4}{n}}.$$

如 n 無限增大，則比值之極限爲 $\frac{1}{2}$ 而常小於 1，故此級數爲斂級數。

2. $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)(2n+3)}{4\cdot7\cdot10\cdots\cdots(3n+1)(3n+4)}$$

$$\div\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}{4\cdot7\cdot10\cdots\cdots(3n+1)}$$

$$=\frac{2n+3}{3n+4}=\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}.$$

如 n 無限增大，則比值之極限爲 $\frac{2}{3}$ 而常小於 1；故此級數爲斂級數而非發級數。

〔例〕設正項級數自任意特別項以下，其各項與相鄰前項之比，等於 1 或大於 1 者，試證此級數爲發級數。

設級數自 r 項以下各項爲 u_r，u_{r+1}，u_{r+2}，u_{r+3}，……

(1) 若 r 項以後，各項與其前項之比等於 1，

則　$u_r=u_{r+1}=u_{r+2}=u_{r+3}=\cdots\cdots$

故　$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots+u_n=nu_r$.

但 nu_r 因 n 之增大而增大，如 n 增大至無限，而 nu_r 亦增大至無限，故此級數爲發級數。

(2) 若 r 項以後，各項與其前項之比大於 1，

則　$u_{r+1}>u_r$，　$u_{r+2}>u_{r+1}>u_r$，

$u_{r+3}>u_{r+2}>u_r$，……

故　$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots+u_{r+n}>nu_r$.

因 nu_r 隨 n 之增大而增大，與 (1) 相同，故此級數爲發級數。

【問　題】

試判定下列級數爲發級數抑爲歛級數？

1. $\dfrac{\lfloor 1}{x}+\dfrac{\lfloor 2}{x^2}+\dfrac{\lfloor 3}{x^3}+\cdots\cdots+\dfrac{\lfloor n}{x^n}+\cdots\cdots$

(但 $x>0$)

2. $\dfrac{m}{x+m}+\dfrac{m^2}{x+2m}+\dfrac{m^3}{x+3m}+\cdots\cdots$

【解　答】

1. 設第 n 項為 u_n，第 $n+1$ 項為 u_{n+1}，則

$$u_n=\frac{\underline{|n}}{x^n},$$

$$u_{n+1}=\frac{\underline{|n+1}}{x^{n+1}}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\underline{|n+1}}{x^{n+1}}\div\frac{\underline{|n}}{x^n}=\frac{n+1}{x}.$$

因 $x>0$，故 n 如無限增大，則比值 $\frac{n+1}{x}$ 亦無限增大，即此級數為發級數。

2. 設第 n 項 $n+1$ 項各為 u_n，u_{n+1}，則

$$u_n=\frac{m^n}{x+nm},$$

$$u_{n+1}=\frac{m^{n+1}}{x+(n+1)m}.$$

$$\frac{u^{n+1}}{u_n}=\frac{m^{n+1}}{x+(n+1)m}\div\frac{m^n}{x+nm}$$

$$=\frac{m(x+nm)}{x+(n+1)m}$$

$$=m-\frac{m^2}{x+(n+1)m}$$

$$=\left(1-\frac{m}{x+(n+1)m}\right)m.$$

如 $m<1$，則此比值小於 1，故為斂級數。

如 $m\nless 1$，則此比值不小於 1，故為發級數。

〔例〕試證級數 $\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots$，若 $k>1$，則爲歛級數．若 $k=1$ 或 $k<1$，則爲發級數．

(1) 若 $k>1$，則其各項小於前項，有下之關係：

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{2}{2^k},$$

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<\frac{4}{4^k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{nk}}+\frac{1}{(2^n+1)^k}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)_n}<\frac{2^n}{2^{nk}}.$$

故全級數小於

$$\frac{1}{1^k}+\frac{2}{2^k}+\frac{4}{4^k}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{2^{nk}}+\cdots$$

卽小於

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^2(k-1)}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n(k-1)}+\cdots\cdots$$

此爲等比級數，其公比 $\frac{1}{2^{k-1}}<1$（因 $k>1$），故爲歛級數，卽原級數亦爲歛級數．

(2) 若 $k=1$，則原級數爲 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$，如下分羣：

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots$$

但 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，
……………
$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}.$$

故 原級數 $>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$至$n+1$項

$$=1+\frac{1}{2}n.$$

如n無限大，則 $1+\frac{1}{2}n$ 亦無限大，故爲發級數。

(3) 若 $k<1$，則原級數之各項，皆大於 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$之對應項，即

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

而右邊爲發級數，故原級數亦爲發級數。

【問 題】

判定$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\cdots\cdots$爲歛級數或發級數。

【解 答】

此級數小於$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$. 若$x>1$，則$\frac{1}{x}<1$，故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$爲歛級數，而原級數亦爲歛級數。

若$x=1$，則原級數爲$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$故爲發級數。若 $x<1$，則原級數大於$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$故爲發級數。

〔例〕設交錯級數各項之絕對值皆小於前項，而可小至無限者，試證此級數爲斂級數.

設原級數如

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots\pm u_n\mp u_{n+1}\pm\cdots\cdots$$

書爲下之二種形狀:

$$U=u_1-u_2+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots$$

$$U=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)-\cdots\cdots$$

因　$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots$

故 (u_2-u_3)，(u_3-u_4)，(u_4-u_5) 俱爲正.

故由第一式，$U>u_1-u_2$，由第二式 $U<u_1$.

卽知U之值在 u_1 與 u_1-u_2 之間，故爲有限.

又以 U_n 表原級數 n 項之和，則同樣可得

$$U-U_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2})\pm(u_{n+3}-u_{n+4})\pm\cdots$$

$$U-U_n=\pm u_{n+1}\mp(u_{n+2}-u_{n+3})$$
$$\mp(u_{n+4}-u_{n+5})\mp\cdots\cdots$$

卽知 $U-U_n$ 之絕對值在 u_{n+1} 與 $u_{n+1}-u_{n+2}$ 之間. 如 n 無限大，則 $U-U_n$ 之絕對值爲無限小，故此級數爲斂級數.

【問　題】

審定下列各級數爲收斂抑爲發散?

1. $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$

2. $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots\cdots$

3. $1-\frac{x}{1+a}+\frac{x^2}{1+2a}-\frac{x^3}{1+3a}$
$$+(-1)^n\frac{x^n}{1+na}+\cdots\cdots$$

【解　答】

1.　設$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$之和爲U，書爲二種形狀．

$$U=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

$$U=\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots$$

故U之值在$\frac{1}{2}$與1之間爲有限．

又　$$U-U_n=\pm\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-2}\right)\pm\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\pm\cdots\cdots$$

$$U-U_n=\pm\frac{1}{n+1}\mp\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\mp\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)\mp\cdots\cdots$$

故 $U-U_n$ 之絕對值在 $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ 與 $\frac{1}{n+1}$之間．如n無限大，則此值無限小，故此級數爲歛級數．

2.　如前法，此級數之和在2與$2-\frac{3}{2}$之間，雖爲有限，但其第n項$\frac{n+1}{n}$，如n無限大，其值非無限小，故此級數非歛級數．

3.　此級數如設$x<1$及$x=1$，則各項依次減小，且正負相間，故爲歛級數．

如設$x>1$，則各項依次增大，故非歛級數．而n無限大時，此級數之值亦無限大，故爲發級數．

〔注意〕如2問級數之和非無限大而又無接近之定限者，稱爲中性級數．

2. 二項連級數

〔例〕二項式定理 $(1+x)^n$

$$=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots\cdots+x^n$$

可書爲 $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots$$

此式無論 n 爲正負整數或分數皆合，惟 n 爲負數或分數時，則 $n-1$，$n-2$，$\cdots$ 之諸因式中，無一爲 0，故其右邊之展開式爲無盡連級數，特稱爲二項連級數。試依此定理將下列二式展開至第五項。

(i) $(a+x)^{\frac{2}{3}}$.　　(ii) $(1-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$.

$\because$ (i) $(a+x)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\{1+a^{-1}x\}^{\frac{2}{3}}$.

$$(1+a^{-1}x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}a^{-1}x+\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{1\cdot 2}a^{-2}x^2$$

$$+\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-1\frac{1}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-3}x^3$$

$$+\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-1\frac{1}{3}\right)\left(-2\frac{1}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-4}x^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{3}a^{-1}x-\frac{1}{9}a^{-2}x^2+\frac{4}{81}a^{-3}x^3$$

$$-\frac{7}{243}a^{-4}x^4+\cdots\cdots$$

故 $(a+x)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}x-\dfrac{1}{9}a^{-\frac{4}{3}}x^2$

$$+\frac{4}{81}a^{-\frac{7}{3}}x^3-\frac{7}{243}a^{-\frac{10}{3}}x^4+\cdots\cdots$$

(ii) $(1-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}=\{1+(-2x^{-\frac{1}{2}})\}^{-2}$

$$=1+(-2)(-2x^{-\frac{1}{2}})+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}(-2x^{-\frac{1}{2}})^{2}+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}(-2x^{-\frac{1}{2}})^{3}+\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2x^{-\frac{1}{2}})^{4}+\cdots\cdots$$

$$=1+4x^{-\frac{1}{2}}+12x^{-1}+32x^{-\frac{3}{2}}+80x^{-2}+\cdots\cdots$$

【問　題】

1. 展開 $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$ 至第四項　　(廣州)

2. 展開 $\dfrac{1}{(1+2x)^{2}}$ 至第五項

【解　答】

1. $(1-3x)^{\frac{1}{3}}=\{1+(-3x)\}^{\frac{1}{3}}$

$$=1+\frac{1}{3}(-3x)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2}(-3x)^{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-3x)^{3}+\cdots\cdots$$

$$=1-x-x^{2}-\frac{5}{3}x^{3}+\cdots\cdots$$

2. $\dfrac{1}{(1+2x)^{2}}=(1+2x)^{-2}$

$$=1+(-2)(2x)+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}(2x)^{2}+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^{3}+\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2x)^{4}+\cdots$$

$$=1-4x+12x^{2}-32x^{3}+80x^{4}-\cdots\cdots$$

〔例〕設 n 非正整數；而 $x<1$，試證二項連級數 $1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots$ 為斂級數。

設第 r 項為 u_r，第 $r+1$ 項為 u_{r+1}，則

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r : \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{\underline{|r-1}}x^{r-1}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}x=-x\left(1-\frac{n+1}{r}\right).$$

設 $r>n+1$，則 $1-\frac{n+1}{r}$ 為正數，故如 x 為正，則 u_{r+1} 與 u_r 之符號相異，卽各項為正負相間。如 x 為負，則 u_{r+1} 與 u_r 之符號相同，卽各項之符號相同。

但 r 漸增大，則 $1-\frac{n+1}{r}$ 漸接近於 1，故 r 無限大，則 $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ 之絕對值殆等於 x。

今 x 小於 1，則 $\frac{u_{r+1}}{u}$ 自初項至若干項後可小於 1，而此連次各項之絕對値相加所成之級數為斂級數，故此級數之各項，無論其符號如何異同，必為斂級數。

【問　題】

1. 應用二項式定理，求 $\sqrt[3]{1025}$ 之値至三位小數。　（江蘇）

2. 求 $\sqrt[5]{30}$ 至小數五位。

【解 答】

1. $\sqrt[3]{1025}=(1000+25)^{\frac{1}{3}}=10(1+0.025)^{\frac{1}{3}}$

因 0.025 小於 1，故 $(1+0.025)^{\frac{1}{3}}$ 爲歛級數只須依法展開至所需之小數位而止。

$$10(1+0.025)^{\frac{1}{3}}=10\Big[1+\frac{1}{3}(0.025)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2}(0.025)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(0.025)^3+\cdots\cdots\Big]$$

$$=10[1+0.00833-0.000069+\cdots\cdots]$$

$$=10[1.0083]=10.083\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

2. $\sqrt[5]{30}=(32-2)^{\frac{1}{5}}=2\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$=2\left(1+\left(-\frac{1}{16}\right)\right)^{\frac{1}{5}}=2\Big[1+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{16}\right)+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{1\cdot 2}\times\left(-\frac{1}{16}\right)^2+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(-\frac{1}{16}\right)^3+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(-\frac{1}{16}\right)^4+\cdots$$

$$=2\Big[1-\frac{1}{80}-\frac{1}{3200}-\frac{3}{256000}-\frac{21}{40960000}-\cdots\cdots\Big]=2[1-0.0125-0.0003125-0.0000117-\cdots\cdots]$$

$$=2\times(1-0.012824)=2\times 0.987176$$

$$=1.97435\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

3. 指數級數

〔例〕 求證指數級數

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

爲歛級數. （江蘇）

此級數後項與前項之比爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{\lfloor n}\div\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}=\frac{x}{n}.$$

此比至若干項以後，n 大於 x，即 $\frac{x}{n}$ 小於 1. 故此級數對於 x 之任何值，皆爲歛級數.

【問 題】

1. 設以 1 代指數級數中之 x，此式常以 e 表之，如 $e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$ 試定 e 之值之界限.

2. 上題之 e，稱爲訥白爾 (*Napier*) 對數或自然對數之底，試求其近似值至小數十二位

【解 答】

1. e 之值顯然大於 2. 又因

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

$$>1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

而左邊自第二項起爲等比級數，公比爲 $\frac{1}{2}$，其和爲 3. 故知 e 之值小於 3，即在 2 與 3 之間.

2. 逐項實行計算如下：

解 $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}=2.5,$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\underline{|3}} &= 0.166666666666,\\
\frac{1}{\underline{|4}} &= 0.041666666666,\\
\frac{1}{\underline{|5}} &= 0.008333333333,\\
\frac{1}{\underline{|6}} &= 0.001388888888,\\
\frac{1}{\underline{|7}} &= 0.000198412698,\\
\frac{1}{\underline{|8}} &= 0.000024801587,\\
\frac{1}{\underline{|9}} &= 0.000002755731,\\
\frac{1}{\underline{|10}} &= 0.000000275573,\\
\frac{1}{\underline{|11}} &= 0.000000025052,\\
\frac{1}{\underline{|12}} &= 0.000000002087,\\
\frac{1}{\underline{|13}} &= 0.000000000160,\\
\cdots\frac{1}{\underline{|14}} &= 0.000000000011.\\
\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

相加得 $e=2.718281828452.$

〔注意〕 此 e 之值，因計算時有捨去，可牽動至第十一位，故必有小數十位準確無誤。

4. 對數級數

〔例〕試證明下之對數級數在 $+1>y>-1$ 時爲收斂，在 $y=-1$ 時爲發散：

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots$$

此級數後項與前項之比爲

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=(-1)^r\frac{y^{r+1}}{r+1}\div(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}$$

$$=-\frac{ry}{r+1}=-y\left(1-\frac{1}{r+1}\right).$$

此式如 $y<1$，則 $\frac{u_{r+1}}{u}$ 之值小於 1，故 y 在 1 與 -1 之間，此級數爲斂級數.

如 $y=1$，則級數爲 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$

由 580 頁 1 問，知爲斂級數.

如 $y=-1$，則級數爲 $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$

$$=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)$$

由 572 頁 1 問知爲發級數.

【問　題】

1. 試證 $\log_e\frac{1+y}{1-y}=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)$.

2. 求 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots$ 之和.

3. 求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$ 之和.

【解 答】

1. 因 $\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots$

以 $-y$ 代上式之 y，則

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots$$

故 $\log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)$

$$=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right).$$

2. 以 $y=\frac{1}{3}$ 代入對數級數

$$\log_e(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4,$$

得 $\log_e\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$

卽右邊與原式相合，故所求之和爲

$$\log_e\left(1+\frac{1}{3}\right) \quad 卽 \quad \log_e\frac{4}{3}.$$

3. 以 $y=\frac{1}{2}$ 代入

$$\log_e\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

得 $\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots\right)$

右邊爲原式之二倍，故所求之和爲

$$\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_e3=\log_e\sqrt{3}.$$

5. 求對數法

〔例〕試由

$$\log_e\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left(y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+\cdots\right)$$

證 $$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}.$$

再由此式求 $\log_e 2$.

設 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{m}{n}$，則 $y=\frac{m-n}{m+n}$，代入第一式，卽得

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}.$$

以 $m=2$，$n=1$ 代入此式，得

$$\log_e\frac{2}{1}=\log 2-\log 1$$
$$=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots\right\}$$
$$=0.693147\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log_e 2=0.693147.$$

【注意】此爲求自然對數之公式。

【問　題】

1. 求 $\log_e 3$.

2. 試證 $log_{10}n=\frac{1}{log_e10}log_en$.

〔注意〕 此爲求常用對數之公式；$\frac{1}{log_e10}$稱爲對數率，其值 0.434294482 爲一定之數，常以μ表之.

3. 已知 $log_e2=0.693147$，求 $log_{10}2$.

【解 答】

1. 以 $m=3$，$n=2$ 代入本例之公式，

$$log_e\frac{3}{2}=log_e3-log_e2$$

$$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.405465\cdots\cdots$$

故 $log_e3=log_e2+0.405465\cdots\cdots$

$$=0.693147+0.405465=1.09861.$$

2. 設 $log_{10}n=x$，$log_en=y$，

則 $n=10^x$，$n=e^y$.

$\therefore$ $10^x=e^y$，$10=e^{\frac{y}{x}}$

故 $log_e10=\frac{y}{x}$，$xlog_e10=y$.

卽 $log_{10}nlog_e10=log_en$，

故 $log_{10}n=\frac{1}{log_e10}log_en$.

3. 以 $\frac{1}{log_e10}=0.434294482$，

$log_e2=0.693147$， 代入上問公式：

$log_{10}2=0.43429\cdots\cdots\times0.693147\cdots\cdots$

$=0.30103.$

第十七編 方程論

1. 方程之根

> 〔例〕凡 n 次之有理整方程，必有 n 個根，試證之。

設方程

$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$，

以 $f(x)$ 表之爲

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n.$$

r_1 爲此方程 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 必可以 $x-r_1$ 整除（325頁注意）。

令　$f(x)\div(x-r_1)=f_1(x)$，

則　$f(x)=(x-r_1)f_1(x)$。

此 $f_1(x)$ 爲 $(n-1)$ 次之有理整方程，故必有一根，設其根爲 r_2，則與前同樣得

$$f_1(x)=(x-r_2)f_2(x),$$

此 $f_2(x)$ 爲 x 之 $(n-2)$ 次式。故

$$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)f_2(x).$$

如此繼續行之，可分析爲 n 個因式如 $(x-r_1)$，$(x-r_2)$，$\cdots\cdots(x-r_n)$。即

$$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n).$$

故方程 $f(x)$ 有 n 個根，而以 r_1，r_2，r_3，……r_n 之任一值代 x，無不適合。

〔注意〕　設 $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，即易知爲

$$F(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n).$$

【問　題】

解下之方程：

1. $x^3+6x^2+10x+8=0$，有一根爲 -4。
2. $x^3+x^2-x-10=0$，有一根爲 -2。
3. $x^4-2x^2-3x-2=0$，有一根爲 $-1,2$。

【解　答】

1. $(x^3+6x^2+10x+8)\div(x+4)=x^2+2x+2$.

解　$x^2+2x+2=0$，　得 $x=-1\pm\sqrt{-1}$.

(答)　三根爲 -4，$-1+i$，$-1-i$。

2. $(x^3+x^2-x-10)\div(x-2)=x^2+3x+5$.

解　$x^2+3x+5=0$，　得　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}$.

(答) 三根爲 2，$\dfrac{-3+\sqrt{11}\,i}{2}$，$\dfrac{-3-\sqrt{11}\,i}{2}$.

3. $(x^4-2x^2-3x-2)\div(x+1)$

$$=x^3-x^2-x-2,$$

$(x^3-x^2-x-2)\div(x-2)=x^2+x+1$,

解　$x^2+x+1=0$，　得　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

(答)　四根爲 -1，2，

$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$.

〔例〕設有理整方程之係數爲整數，試證其整數根必爲絕對項之因數.

設方程　$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 之整數根爲 r，以 r 代入而除之並移項，得　$a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}+a_2r^{n-3}+\cdots\cdots$

$$+a_{n-1}=-\frac{a_n}{r}.$$

此式左邊爲整數，故右邊亦必爲整數，即必爲 a_n 之因數.

【問　題】

下列方程有整數根，試由觀察法解之:

1. $x^5+4x^4-3x^3-32x^2-54x-36=0$.

2. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

【解　答】

1. 因有整數根，故根必爲36之因數即 ±1，±2，±3 等.

以 $+1$ 代 x，$1+4-3-32-54-36\neq0$.

以 -1 代 x，$-1+4+3-32+54-36\neq0$.

故 $+1$ 與 -1 非其根.

依綜合除法以 $x-2$ 除之，

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1+4- & 3- & 32- & 54- & 36 & & \underline{2} \\ +2+ & 12+ & 18- & 28- & 164 & & \\ \hline 1+6+ & 9- & 14- & 82- & 200 & & \end{array}$$

故 2 非其根．又以 $x+2$ 除之，

$$\begin{array}{l|l} 1+4-3-32-54-36 & -2 \\ \quad -2-4+14+36+36 & \\ \hline 1+2-7-18-18;\quad 0 & \end{array}$$

故 -2 爲其根，而方程降低爲

$$x^4+2x^3-7x^2-18x-18=0.$$

因 -2 可爲重根，今再以 $x+2$ 除之，而有餘式，故必再無 -2 之根．次以 $x-3$ 除之，

$$\begin{array}{l|l} 1+2-\ \ 7-18-18 & 3 \\ \quad +3+15+24+18 & \\ \hline 1+5+\ \ 8+\ \ 6;\quad 0 & \end{array}$$

故 3 又爲其一根，而方程降低爲

$$x^3+5x^2+8x+6=0.$$

又以 $x+3$ 除之，

$$\begin{array}{l|l} 1+5+8+6 & -3 \\ \quad -3-6-6 & \\ \hline 1+2+2;\ 0. & \end{array}$$

故 -3 爲其第三根，而方程降低爲

$$x^2+2x+2=0,$$

不能析因數，依法求之，得

$$x=-1\pm\sqrt{-1}.$$

（答）　五根爲 -2，$+3$，-3，
$-1+i$，$-1-i$．

2.　根必爲24之因數 ±1，±2，±3 等．先以 $+1$ 代 x 而方程爲 0，故 $+1$ 爲其根，而方程降低爲 $x^3-9x^2+26x-24=0$．再以 $x-2$ 除之而無餘，故 $+2$ 又爲其一根，而方程降低爲 $x^2-7x+12=0$．再析因式得

$$(x-3)(x-4)=0.$$

（答）　四根爲 $+1$，$+2$，$+3$，$+4$．

〔例〕已知三根為 -2，$+2$，$+3$，求作方程。

根為 -2，$+2$，$+3$，則其因式為 $(x+2)$，$(x-2)$，$(x-3)$，故方程為

$$(x+2)(x-2)(x-3)=0,$$

$$\therefore\ x^3-3x^2-4x+12=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

【問　題】

1. 已知方程之根為 2，3，5，試作此方程。（青島）

2. 試作方程，使其根為 1，-2，3，-4。

用以下之根，作方程：

3. 1，2，3，0。

4. -2，-3，-4，9。

5. 1，-6，$\frac{1}{2}$，$-\frac{5}{4}$。

6. -2，-2，$1\frac{2}{3}$，$1\frac{2}{3}$。

7. $\pm\sqrt{5}$，$\pm\sqrt{6}$。

8. $2\pm\sqrt{3}$，$-2\pm\sqrt{3}$。

【解　答】

1. 所求之方程為

$$(x-2)(x-3)(x-5)=0,$$

$$\therefore\ x^3-10x^2+31x-30=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

2. 所求之方程為

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=0.$$

$$\therefore\ x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0\ \cdots\cdots(\text{答})$$

3. $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$,

$\therefore\ x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ ……………(答)

4. $(x+2)(x+3)(x+4)(x-9)=0$.

$x^4-55x^2-21x-216=0$ ……………(答)

5. $(x-1)(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)=0$.

$(x-1)(x+6)(2x-1)(4x+5)=0$.

$\therefore\ 8x^4+46x^3-23x^2-61x+30=0$ …(答)

6. $(x+2)(x+2)\left(x-1\frac{2}{3}\right)\left(x-1\frac{2}{3}\right)=0$,

$(x+2)(x+2)(3x-5)(3x-5)=0$.

$9x^4+6x^3-59x^2-20x+100=0$ …(答)

7. 此有四根卽 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$.

故所求之方程爲 $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$,

$\therefore\ (x^2-5)(x^2-6)=0$.

$\therefore\ x^4-11x^2+30=0$ ……………………(答)

8. 此有四根卽 $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$,

$-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$.

故所求之方程爲

$\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$

$\{x+(2-\sqrt{3})\}\{x+(2+\sqrt{3})\}=0$,

$\therefore\ \{x^2-(2+\sqrt{3})^2\}\{x^2-(2-\sqrt{3})^2\}=0$.

$\therefore\ \{x^2-7-4\sqrt{3}\}\{x^2-7+4\sqrt{3}\}=0$.

$\therefore\ (x^2-7)^2-(4\sqrt{3})^2=0$,

$(x^2-7)^2-48=0$,

$x^4-14x^2+1=0$ ……………………(答)

2. 根與係數之關係

〔例〕試求n次方程中各項係數與其n個根之關係。

n個根所作之方程為

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n)=0$$

展開之為

$$\begin{aligned}&x^n-(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_n)x^{n-1}\\&\quad+(r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+\cdots\cdots)x^{n-2}\\&\quad-(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+\cdots\cdots)x^{n-3}\\&\quad+\cdots\cdots+(-1)^n r_1r_2r_3\cdots\cdots r_n=0.\end{aligned}$$

n次方程之一般書法為

$$\begin{aligned}&x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots\\&\quad+p_{n-1}x+p_n=0.\end{aligned}$$

取其係數比較之，則

$$\begin{aligned}&r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_n=-p_1,\\&r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+\cdots\cdots=p_2,\\&r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+\cdots\cdots=-p_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&r_1r_2r_3\cdots\cdots r_n=(-1)^n p_n.\end{aligned}$$

故根與係數之關係如下:

(1) 諸根之和等於第二項之係數變號.

(2) 諸根中每取其二以為積之和，等於第三項之係數.

(3) 諸根中每取其三以為積之和，等於第四項之係數變號. 以下類推.

(4) 諸根之積等於末項，其為正或負，依方程之次數為偶數或奇數而定.

【問　題】

1. 設 $4x^3-12x^2+11x-3=0$ 之三根為等差級數，試解此方程。

2. 設 $x^3-7x^2+nx-8=0$ 之一根為他根之2倍，試定 n 之值，並解此方程。

【解　答】

1. 設三根為 $r-s$，r，$r+s$。而將原方程化簡，得 $x^3-3x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$.

故 $3r=3$ ……………………………(1)

$3r^2-s^2=\frac{11}{4}$ ……………………(2)

$r^2(r^2-s^2)=\frac{3}{4}$ ………………(3)

由 (1) (2) 得 $r=1$,　　$s=\frac{1}{2}$.

此值亦能滿足(3)，故所求之根為 $\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$

2. 設三根為 r_1，r_2，$2r_1$，則

$3r_1+r_2=7$ ……………………………(1)

$3r_1r_2+2r_1^2=n$ ………………………(2)

$2r_1^2r_2=8$ ……………………………(3)

從(1)得 $r_2=7-3r_1$，代入(3)，並簡之，

$3r_1^3-7r_1^2+4=0$,

由觀察知 $r_1=1$，2 或 $-\frac{2}{3}$.

故　$r_2=4$，1，或 9，　$2r_1=2$，4 或 $-\frac{4}{3}$，

$n=14$，14 或 $-17\frac{1}{9}$.

3. 方程之變易

〔例〕 試作一方程，使其根爲 $2x^4+3x^3+4x^2+5x+6=0$ 之根之倒數.

設 $y=\frac{1}{x}$; 則 $x=\frac{1}{y}$, 代入原方程，

$$\frac{2}{y^4}+\frac{3}{y^3}+\frac{4}{y^2}+\frac{5}{y}+6=0.$$

以y^4乘之，得

$$2+3y+4y^2+5y^3+6y^4=0.$$

$$\therefore\ 6y^4+5y^3+4y^2+3y+2=0 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【問 題】

1. 試將方程 $x^5-4x^4+3x^3+2x-5=0$ 變爲別一方程，而使其根爲原方程之根反號.

2. 試將方程 $x^3-4x^2+2x-7=0$ 變爲別一方程，而使其根爲原方程之根10倍.

3. 試作一方程，使其根爲 $x^3+7x^2-6=0$ 之根四倍.

【解 答】

1. 設 $y=-x$，則 $x=-y$，以此代入原方程 $x^5-4x^4+3x^3+2x-5=0$,

得 $(-y)^5-4(-y)^4+3(-y)^3+2(-y)-5=0$。

$\therefore\quad -y^5-4y^4-3y^3-2y-5=0$。……(1)

以 -1 除之，得

$$y^5+4y^4+3y^3+2y+5=0 \quad\text{…………(答)}$$

〔注意〕 將新方程(1)式與原方程比較，可見係數相同，惟奇次項之符號相反（所缺二次項仍須算入）。

2. 設 $y=10x$，則 $x=\dfrac{y}{10}$，以此代入原方程

$$x^3-4x^2+2x-7=0,$$

得 $\left(\dfrac{y}{10}\right)^3-4\left(\dfrac{y}{10}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{10}\right)-7=0$。

以 10^3 乘之，得

$$y^3-40y^2+200y-7000=0 \quad\text{………(答)}$$

〔注意〕 將新方程與原方程比較，可見各項之符號不變，惟第二項之係數大10倍，第三項之係數大 10^2 倍，餘依次類推.

3. 設 $y=4x$，則 $x=\dfrac{y}{4}$，代入原方程

$$x^3+7x^2-6=0;$$

得 $\left(\dfrac{y}{4}\right)^3+7\left(\dfrac{y}{4}\right)^2-6=0$.

以 4^3 乘之，得

$$y^3+28y^2-384=0 \quad\text{…………………(答)}$$

〔例〕試將 $x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{36}x-\frac{5}{72}=0$

變爲新方程，使其係數爲整數。

設 $x=\frac{y}{m}$，以此代入原方程，再以 m^3 乘之，

得 $y^3-\frac{5}{2}my^2+\frac{7}{36}m^2y-\frac{5}{72}m^3=0$.

設 $m=6$，代入此式，得

$y^3-15y^2+7y-15=0$ ……………(答)

【問　題】

1. 試將方程 $x^4-3x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{16}=0$ 變易，使其係數爲整數。

2. 變易方程 $16x^3-4x^2+2x+3=0$，使有整數係數，而首項之係數爲 1。

3. 變易方程 $x^3-\frac{7}{2}x^2+4x-\frac{3}{2}=0$，使有整數係數，再由觀察法解之。

【解　答】

1. 設 $x=\frac{y}{m}$，以此代入原方程，再以 m^4 乘之，

得 $y^4-3my^3-\frac{5}{2}m^2y^2+\frac{5}{4}m^3y+\frac{1}{16}m^4=0$.

設 $m=2$，代入此式，得

$$y^4-6y^3-10y^2+10y+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots(答)$$

2. 以16除原方程，得

$$x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}=0.$$

以 $x=\frac{y}{m}$代此式，而以 m^3 除之，得

$$y^3-\frac{1}{4}my^2+\frac{1}{8}m^2y+\frac{3}{16}m^3=0.$$

設 $m=4$，代入此式，得

$$y^3-y^2+2y+12=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

3. 以 $x=\frac{y}{2}$代入原方程而去分母，得

$$y^3-7y^2+16y-12=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設此式有整數根，則其根必爲 12 之因數如 ±1，±2，±3 等．但 ±1 非 (1) 式之根甚明，以 $y=2$ 試之，得

$$(y^3-7y^2+16y-12)\div(y-2)=y^2-5y+6,$$

故 $(y-2)(y^2-5y+6)=0.$

析因式，

$$(y-2)(y-2)(y-3)=0.$$

故　$y=2$，2 或 3.

由是得

$$x=1，1 \text{ 或 } \frac{3}{2}.$$

（答）三根爲 1，1，$\frac{3}{2}$.

〔例〕求作一方程，使其根較 $2x^3-5x^2+3x+2=0$ 之根小 3。

設 $y=x-3$，則 $x=y+3$，代入原方程，得

$$2(y+3)^3-5(y+3)^2+3(y+3)+2=0,$$

$$2(y^3+9y^2+27y+27)-5(y^2+6y+9)$$
$$+3(y+3)+2=0.$$

化簡爲　$2y^3+13y^2+27y+20=0$　……(答)

〔別法〕以 $x-3$ 除原方程之左邊，得商 $2x^2+x+6$ 餘20.

再以 $x-3$ 除前次之商 $2x^2+x+6$，得商 $2x+7$ 餘27。

又以 $x-3$ 除前次之商 $2x+7$，得商 2 餘13。

此末次之商及各次之餘，卽爲新方程各項之係數，故新方程爲

$$2y^3+13y^2+27y+20=0.$$

此算法以用綜合除法爲便，卽如下：

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & \underline{+3} \\
 & +6 & +3 & +18 & \\
\hline
2 & +1 & +6; & +20 & \\
 & +6 & +21 & & \\
\hline
2 & +7; & +27 & & \\
 & +6 & & & \\
\hline
2; & +13 & & &
\end{array}$$

(答)　$2y^3+13y^2+27y+20=0$.

【問　題】

1. 求作一方程，使其根較下方程之根小 5:

$x^3+2x^2-23x-70=0$.

2. 有方程 $x^3-7x+6=0$，試另作一方程，使其根比前方程之根大 2.

【解　答】

1. 依別法用綜合除法以 $x-5$ 除之:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +2 & -23 & -70 & \underline{+5} \\
 & +5 & +35 & +60 & \\
\hline
1 & +7 & +12; & -10 & \\
 & +5 & +60 & & \\
\hline
1 & +12; & +72 & & \\
 & +5 & & & \\
\hline
1; & +17 & & &
\end{array}
$$

（答）　$y^3+17y^2+72y-10=0$.

2. 用綜合除法以 $x+2$ 除之:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & -7 & +6 & \underline{-2} \\
 & -2 & 4 & +6 & \\
\hline
1 & -2 & -3; & +12 & \\
 & -2 & +8 & & \\
\hline
1 & -4; & +5 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
1; & -6 & & &
\end{array}
$$

（答）　$y^3-6y^2+5y+12=0$.

4. 笛卡氏(*Descartes*)符號律

〔例〕 方程 $f(x)=0$ 所有正根之數，不能超過其符號變化之數；又所有負根之數，不能超過於變爲 $f(-x)=0$ 中符號變化之數，是謂笛卡氏符號律。試由此定下列方程至多有正負根各幾個?

$$4x^5-2x^4-6x^3+7x^2+2x-1=0.$$

$f(x)=0$ (卽原方程)之符號爲 $+--++-$，其變化之數有三，故正根不能多於三個。

$f(-x)=0$ (卽以 $-x$ 代原方程之 x 所得之新方程)之符號爲 $--++--$ (參看601頁1問注意)，其變化之數有二，故負根不能多於二個。

【問 題】

1. 試求下方程正根及負根數目之最大限度:

$$x^5-2x^4-3x^3+4x^2+x+1=0.\quad(\text{山西})$$

2. 證明下列方程有三個有理根，並求此三個有理根之值:

$$x^3-9x^2+23x-15=0.\quad(\text{上海})$$

3. 證明 $x^8+3x^2-5x+1=0$ 至少有四個虛數根。

4. 試定 $x^6+5x^5+2x^3+3x^2-x+1=0$ 之根之性質。

【解答】

1. $f(x)=0$ 之符數爲＋－－＋＋＋，其變化之數有二，故正根之最大限度爲二.

$f(-x)=0$ 之符號爲－－＋＋－＋，其變化之數有三，故負根之最大限度爲三.

2. $f(x)=0$ 之符號爲＋－＋－，其變化之數有三.

$f(-x)=0$ 之符號爲－－－－，並無變化.

故此方程至多有三個正根而無負根.

既有三個正根，由視察而知其一根爲 $x=1$.

$$(x^3-9x^2+23x-15)\div(x-1)$$
$$=x^2-8x+15.$$

故 $(x-1)(x^2-8x+15)=0$.

$\therefore$ $(x-1)(x-3)(x-5)=0$.

（答） 三根爲 1，3，5.

3. $x^6+3x^2-5x+1=0$ 中符號變化之數有二，故至多有二個正根.

又以 $-x$ 代 x 所得之方程爲 $x^6+3x^2+5x+1=0$，其符號並無變化，故無負根.

故原方程至多有二個實數根. 但原方程爲六次，應有六根，故必至少尙有四根爲虛數.

4. $f(x)=x^6+5x^5+2x^3+3x^2-x+1=0$,

$f(-x)=x^6-5x^5-2x^3+3x+x+1=0$.

故正根不能多於二個，負根不能多於 2 個，卽可決定至少尙有二個虛數根.

5. 求根之近似值

〔例〕求下列方程正根之近似值:

$$f(x)=x^3-3x-4=0.$$

依笛卡氏符號律，知此方程至多有一正根。

設 $x=0$，則 $f(x)=-4$;

$x=1$，則 $f(x)=-6$;

$x=2$，則 $f(x)=-2$;

$x=3$，則 $f(x)=14$.

故其根在 2 與 3 之間，即 $x=2^+$

用綜合除法求比原根小 2 之方程:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & -3 & -4 & \underline{2} \\
 & +2 & +4 & +2 & \\
\hline
1 & +2 & +1; & -2 & \\
 & +2 & +8 & & \\
\hline
1 & +4; & +9 & & \\
 & +2 & & & \\
\hline
1; & +6 & & &
\end{array}$$

$\therefore\quad f(y)=y^3+6y^2+9y-2=0$，其 $y=x-2$

因 x 在 2 與 3 之間，故 y 必在 0 與 1 之間，因 y^3 與 y^2 必小於 y，故可將 $f(y)$ 之首二項不計，而求 y 之近似值，得

$$9y-2=0，即\ y=0.2^+.$$

設 $y=0.2$，則 $f(y)=+0.048$;

$y=0.1$，則 $f(y)=-1.039$.

故 y 在 0.1 與 0.2 之間，即 $y=0.1^+$。

次求比 y 之根小 0.1 之方程：

1	+6	+9	−2	0.1
	0.1	+0.61	+0.961	
1	+6.1	+9.61;	−1.039	
	0.1	0.62		
1	6.2;	+10.23		
	+0.1			
1	+6.3			

$$f(z)=z^3+6.3z^2+10.23z-1.039=0.$$

其　$z=y-0.1$，　$z<0.1$.

將 $f(z)$ 之首二項 z^3，z^2 不計，而求 z 之近似值，得 $10.23z-1.039=0$，卽 $z=0.1$.

但 z 之值太大，故定 $z=0.09^+$.

再求比 z 之根小 0.09 之方程：

1	+6.3	+10.23	−1.039	0.09
	+0.09	+ 0.5751	+ .972459	
1	+6.39	+10.8051;	− .066541	
	+0.09	+ 0.5832		
1	+6.48;	+11.3883		
	+0.09			
1;	+6.57			

$$\therefore\quad f(u)=u^3+6.57u^2+11.3883u-0.066541=0.$$

其　$u=z-0.09$，　$u<0.01$.

由　$11.3883u-0.066541=0$，得 $u=0.005^+$.

如是繼續求之，可得任何位之多。

故　$x=2.195^+$.

〔注意〕　此種算法，稱爲霍納(*Horner*)氏法。

【問　題】

應用忽拿氏法，求 $x^3+2x-28=0$ 之實根之近似值至小數三位。（江蘇）

【解　答】

依笛卡氏符號律，知有一正根．以 $x=1$，2，3 代入，知 x 之根在 2 與 3 之間．用綜合除法求之：

$f(x)$	1	+0	+2	−28	2
		+2	+4	+12	
	1	+2	+6;	−16	
		+2	+8		
	1	+4;	+14	$y=16\div14=1^+$ 過大。	
		+2		$y=0.9$ 亦過大，	
	1	+6		$y=0.8^+$.	
$f(y)$	1	+6	+14	−16	0.8
		+0.8	5.44	+15.552	
	1	+6.8	+19.44;	−0.448	
		+0.8	6.08		
	1	+7.6;	25.52		
		+0.8		$z=\dfrac{0.448}{25.52}=0.01^+$.	
	1	+8.4			
$f(z)$	1	+8.4	+25.52	− 0.448	0.01
		+0.01	+ 0.841	+ 0.256041	
	1	+8.41	+25.6041;	− 0.191959	
		+0.01	0.0842		
	1	+8.42;	+25.6883		
		+0.01		$\dfrac{0.190359}{25.6833}=0.007$.	
	1;	+8.43			

（答）　$x=2.817\cdots\cdots$

袖珍

代數學參考書

154·00

外埠酌加運費匯費

編譯者　駱師曾

發行人　陸高誼

出版者　世界書局

印刷者　世界書局

發行所　世界書局

中華民國二十四年九月初版
中華民國廿一　七　[illegible]一版

借書日期	還[illegible]日期

世界