

ISSN 0321—4796

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР**

ВЫПУСК 16

Сборник научных трудов

Калининград — 1985

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 16

Сборник научных трудов

Калининград - 1985

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 514.75

Дифференциальная геометрия многообразий фигур.
Сборник научных трудов. - Калининград, изд. Калинингр.
ун-та, 1985, с. 128.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадратик в трехмерных и многомерных пространствах, дифференцируемые отображения, связности, теория гиперплоскостей, теория сетей и распределений, дифференцируемые структуры, римановы метрики.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.
Библиография: 82 названия.

Редакционная коллегия: профессор В.Т.Базылев (Москва), профессор В.И.Близникас (Вильнюс), профессор В.С.Малаховский (отв. редактор, Калининград), доцент Ю.И.Попов (Калининград), профессор А.С.Феденко (Минск).

© Калининградский государственный университет,
1985

С о д е р ж а н и е

Б.А.Кматов (Омский пед.ин-т). О деформации связностей в структурном распределении η (f, F, η, ρ) -структуры в $M_n(F)$	5
Г.П.Бочило (Томский ун-т). Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов p -мерного проективного пространства ($m > n$)	9
С.В.Ведерников (Белорусский ун-т). Пространство комплексных структур.	14
Ю.Е.Гликлых (Воронежский ун-т). О римановых метриках, обладающих римановым равномерным атласом.	17
Л.А.Жарикова (Калининградский ун-т). Конгруэнция парабол с фокальными многообразиями высших порядков.	20
Е.Т.Ивлев (Томский политех.ин-т). Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,m}$	23
О.В.Казнина (МПИ им.В.И.Ленина). Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха.	27
С.В.Киреева (Московский автодор.ин-т). О геометрии пары сетей.	30
М.В.Кретов (Калининградский ун-т). К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве.	34
В.С.Малаховский (Калининградский ун-т). Структуры, порожденные полем гиперквадрик.	37
М.Н.Марюков (МПИ им.В.И.Ленина). О некоторых частичных отображениях евклидовых p -пространств в $4I$	41
Г.М.Атиева (Омский пед.ин-т). Об одном классе плоских сетей.	45
В.В.Махоркин (Калининградский ун-т). Конгруэнция квадратичных элементов в P_n	49
Е.А.Митрофанова (Калининградский ун-т). Инвариантная связность Картана в метрическом пространстве элементов второго порядка.	52
Ю.И.Попов (Калининградский ун-т). Об одномерных нормалях первого рода $N(M/A)$ -распределения.	57

А.Г.Резников (Киевский ун-т). Об одномерных геодезических расслоениях группы Ли. . . . 67

Г.Л.Свешникова (Калининградский ун-т). Конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями. . . . 71

Е.В.Скрядова (Калининградский ун-т). Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных коникой и плоскостью. . . . 75

Е.П.Сопина (Калининградский ун-т). Об одном классе конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве. . . . 81

В.П.Толстопяттов (Свердловский пед. ин-т). К геометрии векторного поля. . . . 84

Т.П.Фунтикова (КТИРПИХ). Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов. . . . 87

В.Н.Худенко (Калининградский ун-т). Связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. . . 91

В.П.Цапенко (КТИРПИХ). Связность в многообразии пар гиперплоскостей, индуцированном гиперконгруэнцией V_{n-1} 97

И.И.Цыганок (МГПИ им. В.И.Ленина). Векторные поля в n -мерном аффинном пространстве. . . . 100

Ю.И.Шевченко (КТИРПИХ). О фундаментально-групповой связности. . . . 104

Н.М.Шейдорова (Калининградский ун-т). Задание двухсоставных распределений $\mathcal{H}_x^m \subset P_n$ 110

С.В.Шмелева (ВИНИТИ АН СССР). Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью, порожденной фокальными точками второго порядка. . . . 113

Се м и н а р 117

УДК 514.75

Б. Акматов
О ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗНОСТЕЙ В СТРУКТУРНОМ
РАСПРЕДЕЛЕНИИ $\eta (f\xi\eta\varphi)$ - СТРУКТУРЫ В $M_n(F)$

На многообразии почти комплексной структуры $M_n (n=2q)$ со структурным аффинором F , оснащенном симметрической связностью Γ , зададим распределение m -мерных линейных элементов Λ , определив его полем объекта Λ_i^j .

Индексы принимают следующие значения:

$J, K, l, \dots = 1, \dots, n$; $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, m$; $\alpha, \beta, \gamma, \dots = m+1, \dots, n$;
 $a, b, c, \dots = 1, \dots, 2m-n$; $\sigma, \tau, \rho, \dots = 2m-n+1, \dots, m$; $\varphi+\tau, \dots = m+1, \dots, n$,
где $p = n-m$.

Известно [1], что фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda_i^j, \Lambda_{i\alpha}^j\}$ распределения и объектом связности $\{\Gamma_{jk}^j\}$ можно охватить объект $\{N_\alpha^j\}$, определяющий на M_n распределение $(n-m)$ -мерных линейных элементов \mathcal{N} -нормально-оснащающее распределение $(\Lambda_x \cap \mathcal{N}_x = T_x(\mathcal{N}_x))$. При этом на распределении Λ возникает $(f\xi\eta\varphi)$ -структура.

В настоящей работе рассматриваются некоторые связности на распределении $\eta (f\xi\eta\varphi)$ -структуры, в частности, φ -связность, полученная с помощью построенного тензора деформации $T_{\epsilon\sigma}^\alpha$. Найдена также связь тензора деформации с тензором Нейенхейса $N_{\epsilon\sigma}^\alpha$ аффинора f_ϵ^α , индуцирующего на η почти комплексную структуру.

Используем следующую канонизацию репера:

$$\Lambda_i^j = \delta_i^j, \quad N_\alpha^j = \delta_\alpha^j; \quad (1)$$

$$\Lambda_{j\alpha}^i = 0, \quad N_{\beta\alpha}^\alpha = 0.$$

Из дифференциальных уравнений компонент $\Lambda_i^j, N_\alpha^j, \Lambda_{i\alpha}^k, N_{\beta\alpha}^\alpha$ с учетом (1), получаем:

$$\omega_x^\alpha = \Lambda_{xL}^\alpha \omega^L, \quad \omega_\alpha^i = N_{\alpha L}^i \omega^L. \quad (2)$$

После такой канонизации репера значительно упрощаются охваты структурных объектов $(\{ \xi \eta \rho \})$ -структуры:

$$\begin{aligned} f_j^i &= F_j^i, & \xi_\alpha^i &= -F_\alpha^i, \\ \eta_i^\alpha &= F_i^\alpha, & \rho_\beta^\alpha &= F_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Объекты δ_{jL}^i и $\delta_{\beta L}^\alpha$, определяющие связность на распределении Λ и N соответственно при осуществленной канонизации становятся подобъектами объекта Γ_{xL}^j :

$$\delta_{jL}^i = \Gamma_{jL}^i, \quad \delta_{\beta L}^\alpha = \Gamma_{\beta L}^\alpha. \quad (4)$$

В работе [2] найдены объекты $\{H_a^i\}$, $\{\xi_{p+\tau}^i\}$, определяющие соответственно Λ -виртуальные распределения η и ξ :

$$dH_a^i - H_a^i v_a^\tau + H_a^\tau \omega_\tau^i = H_{aL}^i \omega^L, \quad (5)$$

$$d\xi_{p+\tau}^i - \xi_{p+\tau}^i \omega_\sigma^\tau + \xi_{p+\tau}^\tau \omega_\sigma^i = \xi_{p+\tau L}^i \omega^L, \quad (6)$$

где

$$v_a^\tau = \omega_a^\tau + H_a^\tau \omega_\tau^i,$$

$$\omega_\sigma^\tau = \omega_{p+\tau}^\tau - \eta_{p+\tau}^\tau \omega_\sigma^i - \eta_{\sigma L}^{p+\tau} \omega^L.$$

Проведем дальнейшую канонизацию репера

$$H_a^\sigma = 0, \quad \xi_{p+\tau}^a = 0. \quad (7)$$

Из дифференциальных уравнений (5), (6) с учетом (7), следует

$$\omega_a^\sigma = H_{aL}^\sigma \omega^L, \quad \omega_\sigma^a = \tilde{\xi}_{\sigma}^{p+\tau} \xi_{p+\tau L}^a \omega^L, \quad (8)$$

где $\tilde{\xi}_{\sigma}^{p+\tau} \xi_{p+\tau}^i = \delta_\sigma^i$.

Такой канонический репер обозначим $R(H, \xi)$. В работе [2] мы нашли охваты объектов $\hat{\gamma}_{eL}^a$ и $\hat{\gamma}_{\alpha L}^\tau$, определяющих связность на распределении η и распределении ξ . Относительно репера $R(H, \xi)$ компоненты f_e^a аффинора f_j^i образуют тензор

$$df_e^a - f_c^a \omega_e^c + f_e^c \omega_c^a = f_{eL}^a \omega^L, \quad (9)$$

который на распределении η действует как аффинор почти комплексной структуры, т.е.

$$f_e^a f_c^e = -\delta_c^a. \quad (10)$$

Пусть $\hat{\gamma}_{eL}^a$ некоторая линейная связность, определенная на распределении η . Тогда компоненты $\hat{\gamma}_{eL}^a$ могут быть определены равенствами

$$\hat{\gamma}_{eL}^a = \overset{\circ}{\gamma}_{eL}^a + T_{eL}^a, \quad (11)$$

где T_{eL}^a - тензор деформации. Заметим, что компоненты T_{eL}^a в построенном каноническом репере также образуют тензор. Введем для них обозначения \hat{T}_{ec}^a :

$$\hat{T}_{ec}^a \stackrel{\text{def}}{=} T_{ec}^a. \quad (12)$$

Продолжив дифференциальные уравнения (9), получим:

$$df_{eL}^a - f_{cL}^a \omega_e^c - f_{eL}^c \omega_c^a + f_{eL}^c \omega_c^a - f_c^a \omega_{eL}^c + f_e^c \omega_{cL}^a = f_{eL}^a \omega^L. \quad (13)$$

Из (13) следует, с учетом проведенной канонизации, что для f_{ec}^a выполняются следующие уравнения:

$$df_{ed}^a - f_{cd}^a \omega_e^c - f_{ed}^c \omega_c^a - f_e^c \omega_{cd}^a + f_e^c \omega_{cd}^a = f_{edL}^a \omega^L. \quad (14)$$

Ковариантная производная $\hat{\gamma}_{eL}^a$ объекта f_e^a в связности $\hat{\gamma}_{eL}^a$ определяется формулой:

$$\hat{\gamma}_{eL}^a = f_{eL}^a + f_c^a \overset{\circ}{\gamma}_{eL}^c - f_e^c \overset{\circ}{\gamma}_{cL}^a. \quad (15)$$

Из (15), с учетом (11), имеем:

$$\hat{\gamma}_{eL}^a = \hat{\gamma}_{eL}^a + f_c^a T_{eL}^c - f_e^c T_{cL}^a. \quad (16)$$

Функции $\hat{\gamma}_{eL}^a$ образуют тензор, причём в построенном каноническом репере компоненты $\hat{\gamma}_{eL}^a$ образуют самостоятельный линейный однородный объект (тензор).

Введем обозначение:

$$\varphi_{ed}^a \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\gamma}_{ed}^a. \quad (17)$$

Найдем такой охват компонент \hat{T}_{ec}^a , чтобы выполнялось условие:

$$\hat{\gamma}_{ec}^a = 0. \quad (18)$$

Т е о р е м а 1. Если компоненты тензора \hat{T}_{ec}^a удовлетворяют уравнениям:

Г. П. Б о ч и л л о

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_m НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ
 ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n -МЕРНОГО
 ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА ($m > n$)

В работе продолжено изучение m -распределений на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства P_n . В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m -мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $\{A, \alpha\}$. Под гиперплоским элементом, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n . В данной работе рассмотрены распределения Δ_m на M_{2n-1} в случае $n < m < 2n-1$, ($m = n + m_0 - 1, 1 < m_0 < n$). Доказана теорема, дающая геометрическую характеристику распределения Δ_m , построено его оснащение. Показано, что с Δ_m при $m > n$ ассоциируется инвариантное подраспределение $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$, причем $2n-m-1 < n$. Отсюда следует, что в случае $n < m < 2n-1$ могут быть использованы результаты из [3], [4]. В работе индексы принимают следующие значения:

$\mathcal{J}, \mathcal{J} = 0, \bar{1}, \bar{n}$; $i, j = \bar{1}, \bar{n}$; $p, q, r = \bar{1}, \bar{n-1}$; $a, b, c = \bar{1}, \bar{m_0-1}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \bar{m_0}, \bar{n-1}$, $1 < m_0 < n$.
 1. Распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n < m < 2n-1$). Присоединим к каждому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R = \{A, \mathcal{J}\}$ и тангенциальные $\tau = \{\alpha^{\mathcal{J}}\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}$, $d\alpha^{\mathcal{J}} = -\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} \alpha^{\mathcal{J}}$, причем 1-формы $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ удовлетворяют условиям $d\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$, $\sum \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = 0$. Положив $A = A_0$, $\alpha = \alpha^n$ перейдем к реперам R_0 (τ_0) нулевого порядка со структурными формами $\omega_0^p, \omega_0^n, \omega_p^n$ многообразия M_{2n-1} . Распределение Δ_m на M_{2n-1} можно определить системой $(2n-m-1)$ линейно независимых уравнений Пфаффа:

$$\hat{T}_{bc}^a = -(\varphi_{bc}^d + \varphi_{cb}^d) f_d^a + (\varphi_{da}^c - \varphi_{ad}^c) f_c^d, \quad (19)$$

то выполняются равенства (18). Справедливо и обратное утверждение.

Тензор \hat{T}_{bc}^a можно использовать для преобразования компонент \hat{y}_{bc}^a объекта связности \hat{y}_{el}^a . Система величин $\hat{y}_{bc}^a - \hat{y}_{bc}^a + \hat{T}_{bc}^a$, $\hat{y}_{bc}^a - \hat{y}_{bc}^a$, $\hat{y}_{p+q}^a - \hat{y}_{p+q}^a$ также будет определять связность в распределении η . Тензор \hat{T}_{bc}^a мы будем называть тензором "слабой" деформации связности \hat{y}_{el}^a . Выясним геометрический смысл осуществленной деформации. Относительно связности \hat{y}_{el}^a поле (9) структурного объекта $f_{\bar{e}}^a$, определяющего почти комплексную структуру в распределении η , записывается следующим образом

$$df_{\bar{e}}^a - f_{\bar{e}}^a \hat{\omega}_{\bar{e}}^c + f_{\bar{e}}^c \hat{\omega}_{\bar{c}}^a = \hat{f}_{bc}^a \omega^c + \hat{f}_{bc}^a \omega^{\bar{c}} + \hat{f}_{p+q}^a \omega^{p+q}. \quad (20)$$

Кривые, принадлежащие распределению η , в построенном каноническом репере, определяются системой:

$$\omega^a = 0, \quad \omega^{\bar{c}} = 0, \quad \omega^a = \lambda^a \theta. \quad (21)$$

Очевидно, что при смещении элемента распределения Λ по кривым, принадлежащим распределению η , объекты $f_{\bar{e}}^a$ ковариантно постоянны в связности \hat{y}_{el}^a .

Т е о р е м а 2. Связность \hat{y}_{el}^a , полученная деформацией связности \hat{y}_{el}^a при помощи тензора "слабой" деформации \hat{T}_{bc}^a , вдоль кривых, принадлежащих распределению η , является φ -связностью.

Тензор Нейенхейса аффинора

$$N_{bc}^a = \varphi_{ed}^a f_c^d - \varphi_{de}^a f_c^d - (\varphi_{cd}^a - \varphi_{dc}^a) f_e^d, \quad (22)$$

и следовательно

$$N_{bc}^a = \hat{T}_{bc}^a - \hat{T}_{cb}^a. \quad (23)$$

Список литературы

1. Акматов Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m -мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n . Рук. деп. ВИНТИ. М., 1983, 35 с. библи. 20 назв. 26 мая 1983. № 2874-83 деп.
2. Акматов Б. О связностях в структурных распределениях индуцированной $(f_{\bar{e}}^a \eta)$ -структуры в M_n почти комплексной структуры. Рук. деп. ВИНТИ. М., 1984.

$$\omega_a^n - \Lambda_{ai}^n \omega_o^i - \Lambda_{a\bar{a}}^{na} \omega_a^n = 0. \quad (1)$$

Система форм в (1), аннулирующихся на Δ_m , инвариантна относительно подгруппы стационарности гиперплоского элемента $\{A, \alpha\}$, что обеспечивается заданием на M_{2n-1} поля геометрического объекта $\Gamma_o = \{\Lambda_{ai}^n, \Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}}\}$,

$$\Delta \Lambda_{ai}^n \equiv \nabla \Lambda_{ai}^n + \Lambda_{ai}^n \omega_o^o + \Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}} \omega_o^{\bar{e}} + \Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}} \delta_i^n \omega_o^o - \delta_i^n \omega_a^o = \bar{\Lambda}_{aj}^n \omega_o^j + \bar{\Lambda}_{ai}^{np} \omega_p^n, \quad (2)$$

$$\Delta \Lambda_{a\bar{a}}^{nc} \equiv \nabla \Lambda_{a\bar{a}}^{nc} - \Lambda_{a\bar{a}}^{nc} \omega_n^n + \Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}} \Lambda_{\bar{a}}^{nc} \omega_o^{\bar{e}} - \omega_a^c = -\Lambda_{a\bar{a}}^{nc} \omega_o^i - \Lambda_{a\bar{a}}^{ncp} \omega_p^n.$$

2. Геометрическая интерпретация распределения Δ_m .

Распределению Δ_m на M_{2n-1} при $n < m < 2n-1$ принадлежат два неинволютивных в общем случае подраспределения, которые определяются, соответственно, системами:

$$\omega_a^n - \Lambda_{ai}^n \omega_o^i - \Lambda_{a\bar{a}}^{na} \omega_a^n = 0, \quad \omega_o^i = 0, \quad (3)$$

$$\omega_a^n - \Lambda_{ai}^n \omega_o^i - \Lambda_{a\bar{a}}^{na} \omega_a^n = 0, \quad \omega_p^n = \omega_o^p = 0. \quad (3')$$

Они представляют собой совокупности всех 1-семейств многообразия M_{2n-1} , вдоль которых неподвижны, соответственно, точка A_o и гиперплоскость α^n . Обозначим указанные подраспределения $\Delta_{m_0-1}^A$ и $\Delta_{m_0-1}^{\alpha^n}$, соответственно.

Геометрическую характеристику объекту Γ_o при условии: $R \|\Lambda_{ai}^n\| = n - m_0$ дает следующая

Т е о р е м а 1. Задание распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n < m < 2n-1$, $m = n + m_0 - 1$) эквивалентно оснащению многообразия M_{2n-1} полями (m_0-1) -плоскостей \bar{l}_{m_0-1} и $(n-m_0)$ -плоскостей l_{n-m_0} , инцидентных A_o и α^n одновременно и не имеющих общих точек, кроме A_o , а также отображением множества m_0 -плоскостей, проходящих через \bar{l}_{m_0-1} , на множество $(n-m_0-1)$ -плоскостей, инцидентных l_{n-m_0} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая $[A_o, dA_o]$, $[\alpha^n, d\alpha^n]$ вдоль интегральных 1-семейств распределений $\Delta_{m_0-1}^{\alpha^n}$ и $\Delta_{m_0-1}^A$ соответственно, получаем, что $[A_o, dA_o] \in \bar{l}_{m_0-1} = [A_o, \Lambda_a + \bar{\Lambda}_{\alpha\bar{a}} \Lambda_{\bar{a}}], [\alpha^n, d\alpha^n] \in l_{n-m_0} = [\alpha^n, \alpha^a + \Lambda_{a\bar{a}}^{na} \alpha^{\bar{a}}]$, где $\Lambda_{a\bar{a}}^n = \Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}} \bar{\Lambda}_{\alpha\bar{a}}^{\bar{e}}$, $\det \|\Lambda_{a\bar{a}}^{n\bar{e}}\| \neq 0$. Для доказательства последней части теоремы перейдем к реперам $R_1(\tau^1)$ так, что $\bar{l}_{m_0-1} = [A_o, \Lambda_a], l_{n-m_0} = [\alpha^n, \Lambda_{aa}^n]$. Тогда определяющая распределение Δ_m система (1) урав-

нений Пфаффа принимает вид $\omega_a^n - \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_o^{\bar{e}} = 0$, а условия (2) превращаются в соотношения

$$\omega_a^n = \Lambda_{ai}^n \omega_o^i + \Lambda_{a\bar{a}}^{np} \omega_p^n; \quad \omega_a^{\bar{e}} = B_{ai}^{\bar{e}} \omega_o^i + B_a^{\bar{e}p} \omega_p^n; \quad \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_a^o + \omega_a^o = C_{ani}^n \omega_o^i + C_{an}^{np} \omega_p^n, \quad (3)$$

$$\nabla \Lambda_{a\bar{a}}^n + \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_o^o = C_{a\bar{a}i}^n \omega_o^i + C_{a\bar{a}}^{np} \omega_p^n, \quad (4)$$

$$\text{где } B_{ai}^{n\bar{c}} = \Lambda_{a\bar{a}}^n \bar{\Lambda}_{ai}^n, \quad B_a^{\bar{c}p} = \Lambda_{a\bar{a}}^n \bar{\Lambda}_{a\bar{a}}^{np}, \quad \Lambda_{a\bar{a}}^n \Lambda_{n\bar{a}}^{\bar{e}} = \Lambda_{a\bar{a}}^n \Lambda_{n\bar{a}}^{\bar{e}} = \delta_a^{\bar{e}}, \quad (5)$$

$$C_{ani}^n = -\bar{\Lambda}_{ani}^n; \quad C_{an}^{np} = -\bar{\Lambda}_{an}^{np}; \quad C_{a\bar{a}i}^n = \bar{\Lambda}_{a\bar{a}i}^n; \quad C_{a\bar{a}}^{np} = \bar{\Lambda}_{a\bar{a}}^{np}.$$

Система величин $\{\Lambda_{a\bar{a}}^n\}$, удовлетворяющая уравнениям (4), образует невырожденный дважды ковариантный в общем случае несимметрический тензор, определяющий отображение множества m_0 -плоскостей, инцидентных \bar{l}_{m_0-1} , на множество $(n-m_0-1)$ -плоскостей, инцидентных l_{n-m_0} , по специальным формулам. Вычисления показывают, что требование инвариантности описанной геометрической конструкции в реперах $R_1(\tau^1)$, приводит к соотношениям (3)-(4).

3. Инвариантное подраспределение $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Система форм Пфаффа

$$\omega_a^n - \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_o^{\bar{e}}, \quad \omega_a^a, \quad \omega_a^n, \quad \omega_o^n \quad (6)$$

относительно инвариантна в силу (4) и первых двух групп соотношений (3), обеспечивающих в реперах $R_1(\tau^1)$ инвариантность системы $(2n-m-1)$ форм Пфаффа $\omega_a^n - \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_o^{\bar{e}}$, аннулирующихся на распределении Δ_m . Из разложений $dA_o = \omega_a^a A_o + \omega_a^i A_i$; $d\alpha^n = -\omega_a^n \alpha^a - \omega_p^n \alpha^p - \omega_n^n \alpha^n$ заключаем, что вдоль интегральных 1-семейств подраспределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$, определяемого уравнениями

$$\omega_a^n - \Lambda_{a\bar{a}}^n \omega_o^{\bar{e}} = 0, \quad \omega_a^a = 0, \quad \omega_a^n = 0, \quad \omega_o^n = 0, \quad (7)$$

имеем $[A_o, dA_o] \in l_{n-m_0}$, $[\alpha^n, d\alpha^n] \in \bar{l}_{m_0-1}$, а также множество прямых в l_{n-m_0} , инцидентных A_o , отображается на множество $(n-2)$ -плоскостей в α^n , инцидентных \bar{l}_{m_0-1} . С другой стороны, в случае выполнения приведенных условий 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным 1-семейством распределения $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным семейством распределения \tilde{A}_{2n-m-1} тогда и только тогда, когда касательная $[A_0 dA_0]$ к линии $A_0(M_1)$ принадлежит ℓ_{n-m_0} , а характеристика $[\alpha^n d\alpha^n]$ гиперплоскости α^n инцидентна L_{m_0-1} , причем прямая $x^{\bar{a}} [A_0 A_{\bar{a}}] \in \ell_{n-m_0}$ соответствует $(n-2)$ -плоскость $x_{\bar{a}} [\alpha^n \alpha^{\bar{a}}] \supset L_{m_0-1}$, где $x_{\bar{a}} = \Lambda_{\bar{a}\bar{e}}^n x^{\bar{e}}$.

4. Оснащение распределения Δ_m . Используя уравнения (4), (5) и их дифференциальные продолжения, находим, что система величин $\gamma_1 = \{ \Lambda_{\bar{a}\bar{e}}^n, \Gamma_{\bar{a}\bar{e}}^{na}, \Gamma_{a\bar{a}\bar{e}}^n, \Gamma_{\bar{c}a\bar{e}}^n \}$, где

$$\Gamma_{\bar{a}\bar{e}}^{na} = A_{\bar{a}\bar{e}}^{na} + A_{\bar{a}\bar{c}}^{nac} \Lambda_{\bar{c}\bar{e}}^n; \Gamma_{a\bar{a}\bar{e}}^n = \Lambda_{\bar{c}\bar{e}}^n (B_{a\bar{a}}^{n\bar{c}} + B_a^{n\bar{c}\bar{d}} \Lambda_{\bar{d}\bar{a}}^n); \Gamma_{\bar{c}a\bar{e}}^n = C_{\bar{c}\bar{a}\bar{e}}^n + C_{\bar{c}\bar{a}}^{n\bar{d}} \Lambda_{\bar{d}\bar{e}}^n$$

и $\Gamma_{a\bar{c}}^{n\bar{e}} = \Lambda_{\bar{a}\bar{c}}^n (\Lambda_{\bar{a}\bar{a}\bar{c}}^n + \Lambda_{\bar{a}\bar{a}}^{n\bar{d}} \Lambda_{\bar{d}\bar{c}}^n) = B_{a\bar{c}}^{n\bar{e}} + B_a^{n\bar{e}\bar{d}} \Lambda_{\bar{d}\bar{c}}^n$, $\Gamma_a^{n\bar{a}\bar{e}} = \Lambda_{\bar{c}\bar{e}}^n \Gamma_{a\bar{c}}^{n\bar{a}}$, $\Gamma_{\bar{a}}^{n\bar{a}\bar{e}} = \Gamma_{\bar{a}\bar{e}}^{na} \Lambda_{\bar{c}\bar{e}}^n$ образует самостоятельный объект, который является под-объектом фундаментального объекта первого порядка распределения Δ_m . Следовательно, γ_1 можно назвать фундаментальным подобъектом распределения \tilde{A}_{2n-m-1} . Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка распределения \tilde{A}_{2n-m-1} . Используя компоненты γ_1 , определим на M_{2n-1} поле $(n-m_0+1)$ -пар $\{ \ell_{n-m_0+1}, L_{m_0-2} \}$, где $\ell_{n-m_0+1} = [\alpha^{\bar{a}} - \frac{1}{n-m_0} \Gamma_{\bar{a}\bar{a}}^{na\bar{a}} \alpha^n]$, $L_{m_0-2} = [A_{\bar{a}} - \frac{1}{n-m_0} \Gamma_{\bar{a}\bar{a}}^{n\bar{a}} A_0]$. Построенное поле вместе с тензором $\{ \Lambda_{\bar{a}\bar{e}}^n \}$ порождает на M_{2n-1} $(n-m_0+1)$ -распределение Δ_{n-m_0+1} , являющееся подраспределением. Из [3], [4] следует, что можно задать аффинную связность на M_{2n-1} с помощью нового поля гиперплоских элементов.

Теорема 3. Если на M_{2n-1} задано распределение Δ_m ($n < m < 2n-1$), то оснащение M_{2n-1} новым полем гиперплоских элементов может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения \tilde{A}_{2m-m-1} (подраспределения Δ_m).

Справедливость утверждения вытекает из теоремы 2 в [3], которую следует применить к построенному с использованием компонент γ_1 подраспределению Δ_{n-m_0+1} . Заметим, что $n-m_0+1 = 2n-m < n$.

5. Геометрическая характеристика пары подпространств $\{ \ell_{n-m_0+1}, L_{m_0-2} \}$. В построенной паре подпространств ℓ_{n-m_0+1} -гармоническая поляра гиперплоскости α^n относительно фокусного конуса $K_{n-1}^{n-m_0}$ с вершиной ℓ_{n-m_0} , причем $K_{n-1}^{n-m_0} = \{ \Gamma_{n-1} / \Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0}, \Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0} + d\ell_{n-m_0} \}$, а L_{m_0-2} -гармоническая поляра точки A_0 относительно фокусной поверхности $F_{m_0-2}^{n-m_0}$ в L_{m_0-1} и $F_{m_0-2}^{n-m_0} = \{ M/M \in L_{m_0-1}, M+dM \in L_{m_0-1} \}$ вдоль интегральных I-семейств распределения \tilde{A}_{2n-m-1} . Поверхности $K_{n-1}^{n-m_0}$, $F_{m_0-2}^{n-m_0}$ определяются следующими уравнениями относительно тангенциальных (точечных) координат $x_0, x_a, x_{\bar{a}}, x_n$ ($x^0, x^a, x^{\bar{a}}, x^n$):

$$K_{n-1}^{n-m_0}: x_0 = x_{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{\bar{a}\bar{e}}^n x_n + \Gamma_{\bar{a}\bar{e}}^{na} x_a \| = 0, \quad (8)$$

$$F_{m_0-2}^{n-m_0}: x^n = x^{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{\bar{e}\bar{a}}^n x^0 + \Gamma_{\bar{e}\bar{a}}^{n\bar{a}\bar{e}} x^a \| = 0, \quad (9)$$

причем $m_0 \leq (n-m_0)^2$. Поскольку компоненты объекта γ_1 , используемые в уравнениях (8) и (9), в общем случае несимметричны и некососимметричны по индексам \bar{a}, \bar{e} , то кроме $K_{n-1}^{n-m_0}$ и $F_{m_0-2}^{n-m_0}$ в случае $m_0 \leq \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и несимметричности компонент γ_1 определяются поверхности

$$x_0 = x_{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{\bar{a}\bar{e}}^n x_n + \Gamma_{\bar{a}\bar{e}}^{na} x_a \| = 0, \quad (8')$$

$$x^n = x^{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{\bar{e}\bar{a}}^{[\bar{e}\bar{a}]} x^0 + \Gamma_{\bar{e}\bar{a}}^{[\bar{e}\bar{a}]} x^a \| = 0, \quad (9')$$

а в случае $m_0 \leq \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и некососимметричности компонент γ_1 поверхности

$$x_0 = x_{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{(\bar{a}\bar{e})}^n x_n + \Gamma_{(\bar{a}\bar{e})}^{na} x_a \| = 0, \quad (8'')$$

$$x^n = x^{\bar{a}} = 0, \quad \det \| \Lambda_{\bar{e}\bar{a}}^{(\bar{e}\bar{a})} x^0 + \Gamma_{\bar{e}\bar{a}}^{(\bar{e}\bar{a})} x^a \| = 0. \quad (9'')$$

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов. -Тр. геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1971, т.3, с.29-48.
2. Онищук Н.М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного центраффинного пространства ($m < n$). -Геометр. сб. вып.18, 1979, с.59-71.
3. Бочилло Г.П. К дифференциальной геометрии m -распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14. Калининград, 1983, с.18-22.
4. Бочилло Г.П. О дифференциальной геометрии m -распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства ($m < n$). Томский ун-т, Томск, 1983, 21с. (Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР, 8 февраля, 1984, №762-84 Дел.).

С. В. В е д е р н и к о в

ПРОСТРАНСТВО КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

Определим в алгебре $M(n)$ (квадратичных матриц порядка n над полем R) структуру G -пространства при помощи отображения $\alpha: G \times M(n) \rightarrow M(n): (a, x) \rightarrow axa^{-1}$, где $G = GL(n, R)$. Выделим орбиту с условием $K = \{x | x \in M(n), x^2 = -E\}$. Так как для любого $x \in K$ найдется такое $a \in G$, что $x = a\epsilon a^{-1}$, где $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, то орбита определяется однозначно

$$K = \{x | x = a\epsilon a^{-1}, a \in G\}. \quad (1)$$

Очевидно, что любой элемент орбиты K есть оператор комплексной структуры, поэтому естественно назвать K пространством комплексных структур. Изучим геометрию этого пространства методом, разработанным в [1].

Как и в случае пространства пар касательное расслоение

$$T(K) = \{(x, \omega) | x \in K, \omega \in M(n), x\omega + \omega x = 0\} \quad (2)$$

или
$$T_\epsilon(K) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in M\left(\frac{n}{2}\right) \right\}.$$

Так как $tz \omega = 0$, то полиномиальные морфизмы $P: T(K) \rightarrow M(n): (x, \omega) \rightarrow P(x, \omega)$ имеют следующий вид

$$P(x, \omega) = x P_1(\omega) + P_2(\omega). \quad (3)$$

Аналогично случаю пространства пар определим билинейные формы на K :

$$P: T(K) \oplus T(K) \rightarrow R: (x, \omega, \theta) \rightarrow tz [P(x, \omega, \theta)] = \langle \omega, \theta \rangle. \quad (4)$$

В силу билинейности P относительно ω и θ и условий (2) следует, что

$$\langle \omega, \theta \rangle = \alpha tz(x \omega \theta) + \beta tz(x \theta \omega) + \gamma tz(\omega \theta); \quad \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Так как $tz(x \omega \theta) = -tz(\omega x \theta) = -tz(x \theta \omega)$, то форма

$$[\omega, \theta] = tz(x \omega \theta) \quad (5)$$

ковосимметрична (внешняя форма). Тогда $\langle \omega, \theta \rangle = \alpha[\omega, \theta] + \beta(\omega, \theta)$, т.е. любая билинейная форма на K является произвольной линейной комбинацией внешней формы и симметрической формы. Легко проверить, что симметрическая форма $(\omega, \theta) = tz(\omega \theta)$ невырождена, и, следовательно, определяет инвариантную псевдориманову метрику на K . Однако в общем случае структура не будет римановой, так как легко подобрать матрицу ω такую, что $(\omega, \omega) = 0$, т.е. выбрать изотропное направление.

Введем невырожденный оператор

$$J_x: T_x(K) \rightarrow T_x(K): \omega \rightarrow x\omega, \quad (6)$$

который определит на K почти комплексную структуру.

Т е о р е м а 1. На многообразии K имеется инвариантная почти комплексная структура, которая вместе с псевдоримановой и симплектической структурой определит на K инвариантную кэлерову метрику эллиптического типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Невырожденная форма $[\omega, \theta]$ определит симплектическую структуру на K , причем $[J_x(\omega), \theta] = [\omega, \theta]$. Замкнутость формы симплектической структуры очевидна, поэтому, следуя [2], нам осталось доказать согласованность введенных структур, т.е. равенство $(J_x(\omega), J_x(\theta)) = (\omega, \theta)$. В самом деле $(J_x(\omega), J_x(\theta)) = tz(x\omega x \theta) = -tz(x^2 \omega \theta) = tz(\omega \theta) = (\omega, \theta)$. По аналогии с [1] вводится средняя связность $\bar{\nabla}_x Y = \frac{1}{2}(\nabla_x Y + J \nabla_x J Y)$. Очевидно, что она будет удовлетворять всем условиям связности, индуцированной кэлеровой структурой эллиптического типа.

Т е о р е м а 2. Кручение почти комплексной структуры многообразия K определяется полиномиальным морфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственными вычислениями показывается, что связность $\bar{\nabla}$ будет почти комплексной связностью [2]. Тогда ее кручение $t(X, Y)$

связано с кручением почти комплексной структуры $T(X, Y)$ формулой [3]:

$$T(X, Y) - JT(X, Y) - J(T(X, Y)) - T(X, Y) = \frac{1}{2}t(X, Y). \quad (7)$$

Но

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y = k(X, Y),$$

где $k(X, Y)$ — 2-я билинейная форма структуры J на многообразии X . Форма $k(X, Y)$ будет определяться полиномиальным морфизмом по формуле (4).

Тогда и (7) будет определяться полиномиальным морфизмом, так как (6) выражается полиномом.

Список литературы

1. Ведерников С. В. Геометрия пространства пар. — Известия АН БССР. Рукопись депонирована в ВИНТИ 15 апреля 1980 г., № 1454-80 Деп.

2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Проблемы геометрии, 1979, т. 9, с. 5-246.

3. Кобаяси С., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, М., 1981, т. 2.

Д. Е. Г л и к л и х

О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ, ОБЛАДАЮЩИХ РИМАНОВЫМ РАВНОМЕРНЫМ АТЛАСОМ

При изучении ряда вопросов теории стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см. [1, 2]) предполагаются выполненными некоторые условия на многообразии, которые можно свести к единственному требованию: нужно, чтобы многообразие допускало риманову метрику, обладающую римановым равномерным атласом. В настоящей работе показано, что на любом многообразии существует риманова метрика, обладающая римановым равномерным атласом. Для доказательства мы модифицируем методы [3, 4] исследования выпуклых окрестностей и полных метрик. В определенном смысле результаты работы являются обобщением [3]: метрика, обладающая римановым равномерным атласом, очевидно, является полной и, так же как в [3], указанная метрика может быть построена как конформная для любой заранее заданной метрики.

Пусть M — связное конечномерное риманово многообразие, ρ — функция риманова расстояния на M (см. [4]).

О п р е д е л е н и е. Атлас на M назовем равномерным римановым, если для любой точки $m \in M$ существует карта (U, φ) , $U \ni m$ из этого атласа, такая, что U содержит метрический шар $B(m, \tau)$ с центром в m фиксированного радиуса $\tau > 0$ относительно риманова расстояния ρ .

Отметим, что метрический шар $B(m, \tau) = \{n \in M \mid \rho(m, n) < \tau\}$, вообще говоря, не гомеоморфен шару модельного пространства и может иметь сложную топологическую структуру.

Т е о р е м а. Для любой римановой метрики на M существует конформная ей риманова метрика, обладающая римановым равномерным атласом.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько технических утверждений.

Зададим на M риманову метрику \langle, \rangle , (т.е. \langle, \rangle_m - скалярное произведение в касательном пространстве $T_m M$) и пусть d - соответствующее \langle, \rangle риманово расстояние на M . Как известно (см. [5]), для любой точки $m \in M$ существует число $a(m) > 0$, такое, что d - метрический шар $B(m, a(m))$ принадлежит нормальной координатной окрестности (карте) любой точки $n \in B(m, a(m))$. Обозначим через $\tau(m)$ точную верхнюю грань множества таких $a(m)$, для которых $B(m, a_1(m)) \neq B(m, a_2(m))$ при любом $a_1(m) < a_2(m)$.

Если $\tau(m^*) = \infty$ для некоторой точки $m^* \in M$, то доказательство теоремы тривиально. Предположим, что $\tau(m) < \infty$ для всех $m \in M$.

Л е м м а 1. Для любых двух точек $m, n \in M$ выполняется неравенство

$$|\tau(m) - \tau(n)| \leq d(m, n). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай $n \in B(m, \tau(m))$. Тогда $B(n, \tau(m) - d(m, n)) \subset B(m, \tau(m))$, и по определению $\tau(n)$ имеем $\tau(n) \geq \tau(m) - d(m, n)$. Если $\tau(m) \geq \tau(n)$, то (1) доказано. Если $\tau(n) > \tau(m)$, то $m \in B(n, \tau(n))$ и, следовательно, $\tau(m) \geq \tau(n) - d(m, n)$, что и доказывает (1). Случай $m \in B(n, \tau(n))$ полностью аналогичен. В оставшемся случае, из того, что $n \notin B(m, \tau(m))$ и одновременно $m \notin B(n, \tau(n))$ вытекает, что $\tau(m) \leq d(m, n)$ и одновременно $\tau(n) \leq d(m, n)$. Следовательно, $|\tau(m) - \tau(n)| < d(m, n)$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать функцию $\tau(m)$ гладкой. Если это не так, то ее можно аппроксимировать гладкой функцией $\tau^*(m)$, $0 < \tau^*(m) < \tau(m)$ для всех $m \in M$, для которой верно неравенство (1).

Введем на M новую риманову метрику \langle, \rangle^* по формуле $\langle, \rangle_m^* = \frac{1}{\tau^2(m)} \langle, \rangle_m$. Риманово расстояние на M , соответствующее \langle, \rangle^* , обозначим через ρ .

Л е м м а 2. Пусть $d(m, n) \geq \tau(m)$. Тогда $\rho(m, n) \geq \frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma(t)$ - произвольная кусочно-гладкая кривая, такая, что $\gamma(a) = m$, $\gamma(b) = n$. Обозначим ее длину в метрике \langle, \rangle через L , т.е. $L = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Тогда ее длина в метрике \langle, \rangle^* находится по формуле $L^* = \int_a^b \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|}{\tau(\gamma(t))} dt$.

Используя классическую теорему о среднем, получаем

$$L^* = \frac{1}{\tau(\gamma(\tau))} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \frac{L}{\tau(\gamma(\tau))},$$

где $\tau \in [a, b]$. Далее, $L^* = \frac{L}{\tau(\gamma(\tau)) - \tau(m) + \tau(m)}$ и по лемме 1 $L^* \geq \frac{L}{\tau(m) + d(m, \gamma(\tau))}$.

По условию $L \geq \tau(m)$. Кроме того, $d(m, \gamma(\tau))$ не превосходит длины γ на промежутке $[a, \tau]$, которая в свою очередь не превосходит L , т.е. $L \geq d(m, \gamma(\tau))$.

Таким образом, $L^* \geq \frac{L}{L+L} = \frac{1}{2}$.

Так как (2) выполняется для произвольной γ , то $\rho(m, n) \geq \frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Метрика \langle, \rangle^* по построению конформна первоначальной метрике \langle, \rangle . По определению, нормальная карта метрики \langle, \rangle в точке m содержит метрический шар $B(m, \tau(m))$ относительно расстояния d . Из леммы 2 следует, что при $\rho(m, n) < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $d(m, n) < \tau(m)$. Таким образом, нормальная карта метрики \langle, \rangle в любой точке $m \in M$ содержит шар с центром в m радиуса $\frac{1}{2}$ относительно риманова расстояния ρ . Следовательно, \langle, \rangle^* - искомая метрика.

Список литературы

1. Белополюская Я.И., Далецкий Ю.Л. Уравнения Ито и дифференциальная геометрия. - Успехи математических наук, 1982, т. 37, вып. 3, с. 95-142.
2. Elworthy K.D. Stochastic differential equations on manifolds (London Math. Soc. Lect. Notes 70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982, 326 p.
3. Nomizu K., Ozeki H. The existence of complete Riemannian metrics. - Proc. Amer. Math. Soc., 1961, v. 12, p. 889-891.
4. Громов Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981, т. 1.

УДК 514.75

Л.А.Жарикова

КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С ФОКАЛЬНЫМИ
МНОГООБРАЗИЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве продолжается изучение класса конгруэнций P парабол, начатое в работе [2]. Исследованы свойства конгруэнций $B^k(A)$ парабол, где k - порядок фокальной точки A конгруэнции. Доказано, что если точка A -фокальная точка второго (третьего) порядка, то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции P , установлены некоторые свойства конгруэнции $B^3(A)$.

Отнесем образующий элемент \mathcal{F} конгруэнции P к реперу $R = \{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Начало A репера поместим в фокус, образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями. Вектор \vec{e}_1 направим по касательной к параболе в точке A , вектор по диаметру параболы, проходящему через точку A , вектор \vec{e}_2 по касательной к линии, сопряженной фокальной линии $\omega^2 = 0$. В этом репере уравнение параболы \mathcal{F} и система уравнений Пфаффа конгруэнции P имеют соответственно вид (1) и (2):

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2px^3 = 0, & p \neq 0, \\ x^2 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{p} &= p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2, \\ \omega_1^1 &= -\frac{1}{8} \{ (3a+c) \omega^1 + (3\ell+e) \omega^2 \}, \\ \omega_1^2 &= f \omega^1 + g \omega^2, \\ \omega_1^3 &= \omega^1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= (f-\ell) \omega^1 + (g-c) \omega^2, \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{8} \{ (a+3c) \omega^1 + (\ell+3c) \omega^2 \}, \\ \omega_2^3 &= -\omega^2, \\ \omega_3^1 &= h \omega^1 + k \omega^2, \\ \omega_3^2 &= \tau \omega^1 + s \omega^2, \quad \omega_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

О п р е д е л е н и е 1. Точка A тогда и только тогда является фокальной точкой k -порядка, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{F} = 0, & x^2 = 0, \\ d\mathcal{F} = 0, & dx^2 = 0, \\ d^2\mathcal{F} = 0, & d^2x^2 = 0, \\ d^k\mathcal{F} = 0, & d^kx^2 = 0 \end{cases}$$

вдоль любого направления $\omega^i = t^i \tau$ ($i=1,2$).

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $B^k(A)$ ($k \geq 2$) называется конгруэнция парабол P , если точка A является фокальной точкой k -порядка.

Из определений 1 и 2 следует, что конгруэнции $B^2(A)$ и $B^3(A)$ характеризуются соотношениями (3) и (4) соответственно

$$p = 1, \quad f = g = s = 0, \quad (3)$$

$$p = 1, \quad a = \ell = f = g = \tau = s = 0. \quad (4)$$

Анализируя систему (2) при условиях (3) и (4), приходим к заключению, что

1/ конгруэнции $B^2(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов;

2/ конгруэнции $B^3(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента;

3/ если фокальная точка A третьего порядка описывает невырождающуюся фокальную поверхность, то она

Е.Т.И в л е в

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕНЗОРА РИЧЧИ РАССЛОЕНИЯ $P_{n,n}$

В статье дается геометрическая интерпретация одного тензора, аналогично тензору Риччи пространства аффинной связности [1] (с. 151).

1. Рассматривается пространство $P_{n,n}$ проективной связности S с точечным образующим элементом A_0 в смысле [2]. Компоненты тензора кручения-кривизны $R_{\mathcal{J}\mathcal{J}}^{\mathcal{X}}$ ($\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, \dots, n$; $i, j, \kappa, \ell = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см. (2) в [2]):

$$\nabla R_{\mathcal{J}\mathcal{J}}^{\mathcal{X}} + 2R_{\mathcal{J}\mathcal{J}}^{\mathcal{X}} \omega_0^{\circ} = R_{\mathcal{J}\mathcal{J}\ell}^{\mathcal{X}} \omega_0^{\ell}, \quad R_{\mathcal{J}(i)j}^{\mathcal{K}} = 0, \quad R_{\mathcal{J}(j)\ell}^{\mathcal{K}} = 0. \quad (1)$$

2. Рассматриваются на секущей n -поверхности M_n расслоения $P_{n,n}$ следующие величины, удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$a_{i_0} = a_{0i} = R_{0i\kappa}^{\mathcal{K}}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} R_{(ij)\kappa}^{\mathcal{K}}, \quad (2)$$

$$\nabla a_{i_0} + a_{i_0} \omega_0^{\circ} = a_{0ij} \omega_0^j, \quad \nabla a_{ij} + 2a_{ij} \omega_0^{\circ} - a_{\alpha(i} \omega_0^{\alpha} = a_{ijk} \omega_0^k, \quad (3)$$

$$a_{0ij} = R_{0i\kappa j}^{\mathcal{K}} + R_{j\kappa i}^{\mathcal{K}} - R_{0ij}^{\circ}, \quad a_{ijk} = \frac{1}{2} R_{(ij)\ell\kappa}^{\mathcal{K}} - \frac{1}{2} R_{(ij)\kappa}^{\circ}.$$

Из (3) следует, что величины a_{0i} образуют один раз ковариантный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3], а величины $a_{i\kappa}$ — дважды ковариантный симметрический тензор.

Рассмотрим в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$ некоторую точку $Y = \mathcal{Y}^j A_j$ и гиперплоскость Γ_{n-1} , определяемую в локальных слоевых координатах уравнением:

$$x_i x^i = 0. \quad (4)$$

Из формул (8) статьи [2] и уравнения (4) следует, что каждой Y и гиперплоскости Γ_{n-1} в слое P_n точки A_0 отвечает линейный гиперкомплекс $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$, опреде-

является фокальной точкой произвольного порядка α ($\alpha \geq 4$);

4/если точка A_0 — фокальная точка второго (третьего порядка), то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции A ;

5/для конгруэнции $B^3(A)$ справедливы следующие утверждения:

а/прямолинейные конгруэнции $\{A, \vec{e}_i\}, i=1, 2$ — цилиндрические; б/у прямолинейной конгруэнции $\{A, \vec{e}_3\}$ сдвоенный фокус совпадает с характеристической точкой плоскости $x^4 = 0$, а фокальная сеть линий — координатная; в/характеристическая точка плоскости параболы совпадает с точкой A , г/существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \vec{e}_2\}$.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции парабол в эквивалентной геометрии. — Тр. Томского ун-та, т. 161, 1962, с. 76–86.

2. Вербицкая Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1980, вып. 11, с. 17–21.

3. Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 60–64.

4. Шмелева С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с двумя фокальными многообразиями второго порядка. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15, Калининград, 1984, с. 115–120.

ляемый уравнением:

$$x_i y^k R_{kj}^i u^j v^k = 0. \quad (5)$$

Геометрически этот гиперкомплекс представляет собой совокупность всех таких пар линейно-независимых направлений $u = (A_o A_i) u^i$ и $v = (A_o A_j) v^j$, что $\bar{R}(u, v) Y \in \Gamma_{n-1}$, где $\bar{R}(u, v)$ — проективитеты слоя P_n в себя в смысле [2] (см. (8)). Из (5) следует, что направлению $A_o Y$ в нуль-системе линейного гиперкомплекса $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$ отвечает гиперплоскость:

$$H_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y) \ni A_o; \quad x_i y^k R_{kj}^i y^j z^k = 0. \quad (6)$$

Итак, каждой точке $Y = y^j A_j$ в слое P_n отвечает проективитет

$$\Pi(Y) = \{ y^k R_{kj}^i y^j \} \quad (7)$$

слоя P_n в себя, который гиперплоскость $\Gamma_{n-1} \ni A_o$ переводит в гиперплоскость $H_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$. Множество всех точек Y в слое P_n точки $A_o \in \mathcal{M}_n$, которым отвечают проективитеты $\Pi(Y)$, являющиеся проективитетами W [4], в силу (7) и (2) образует гиперквадрику $Q_{n-1,2}^o \ni A_o$, определяемую уравнением

$$a_{ik} y^i y^k = 0. \quad (8)$$

Отсюда заключаем, что гиперплоскость Γ_{n-1} в слое P_n точки A_o расслоения $P_{n,n}$, определяемая в слоевых проективных координатах уравнением:

$$a_{oi} x^i = 0, \quad (9)$$

является полярой точки A_o относительно гиперквадрики $Q_{n-1,2}^o$. Такова геометрическая характеристика величин (2).

3. Расслоением $P_{n,n}^o$ называется расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперплоскость Γ_{n-1}^o является неопределенной. Из (2) и (9) следует, что это расслоение характеризуется условиями:

$$a_{oi} = 0, \Leftrightarrow R_{oik}^k = 0, \quad (10)$$

которые с учетом (3) приводятся к соотношениям:

$$R_{oikj}^k = R_{jik}^k + R_{oij}^j. \quad (11)$$

Из (3) в силу (10) следует, что величины a_{ij} , определенные по формулам (2), в случае расслоения $P_{n,n}^o$ образуют дважды ковариантный симметрический тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Из (8) и (10) вытекает следующая

Т е о р е м а 1. Расслоение $P_{n,n}^o$ есть расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперквадрика $Q_{n-1,2}^o \subset P_n$ является гиперконусом с вершиной A_o .

4. Рассмотрим в случае расслоения $P_{n,n}^o$ следующие величины, удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$G_{ij} = R_{ijk}^k, \quad (12)$$

$$\nabla G_{ij} + 2 G_{ij} \omega_o^o = G_{ijk} \omega_o^k, \quad G_{ijk} = R_{ijek}^e - R_{ijk}^o. \quad (13)$$

Отсюда заключаем, что величины (12), не симметричные в общем случае по нижним индексам, образует дважды ковариантный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Этот тензор, следуя [1] (стр. 151), будем называть тензором Риччи расслоения $P_{n,n}^o$. Дадим геометрическую интерпретацию этому тензору.

Из (5) следует, что каждой точке Y и направлению $u = (A_o A_j) u^j$ отвечает проективитет слоя P_n точки A_o в себя:

$$\Pi(y, u) = \{ y^j u^k R_{jkl}^i \}, \quad (14)$$

который гиперплоскость Γ_{n-1} переводит в гиперплоскость в слое P_n точки A_o расслоения $P_{n,n}^o$, отвечающую направлению u в нуль-системе линейного гиперкомплекса $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$. Поэтому в силу (11) и (12) каждому направлению $u = (A_o A_i) u^i$ в слое точки A_o расслоения $P_{n,n}^o$ отвечают две гиперплоскости

$$G_{n-1}^1(u): G_{ij} u^i v^j = 0, \quad G_{n-1}^2(u): G_{ij} u^j v^i = 0. \quad (15)$$

Здесь гиперплоскость $G_{n-1}^1(u) \{G_{n-1}^2(u)\}$, отвечающая направлению u , представляет собой совокупность всех таких направлений $v = (A_o A_i) v^i$ в слое P_n точки A_o , которым отвечают проективитеты $\Pi(v, u) \{ \Pi(u, v) \}$, являющиеся проективитетами W в смысле [4]. В общем случае, гиперплос-

кости $G_{n-1}^1(x)$ и $G_{n-1}^2(x)$, отвечающие любому направлению x , не совпадают друг с другом. Совокупность всех направлений x в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}^0$, которым отвечают гиперплоскости $G_{n-1}^1(x)$ или $G_{n-1}^2(x)$, проходящие через x , в силу (15), (12), (10) и (2) определяется

$$\text{уравнением } Q_{n-1,2}^0: a_{ij} x^i x^j = 0, \quad (16)$$

и образует гиперконус $Q_{n-1,2}^0$. С другой стороны, линейный гиперкомплекс S_{n-1}^0 в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}^0$, определяемый уравнением

$$c_{ij} x^i y^j = 0, \quad (17)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2} G_{[ij]}, \quad (18)$$

геометрически характеризуется тем, что каждому направлению $x = (A_0 A_i) x^i$ в нуль-системе этого линейного гиперкомплекса отвечает гиперплоскость, проходящая через x и $G_{n-1}^1(x) \cap G_{n-1}^2(x)$. Таким образом, симметрическая и кососимметрическая части тензора Риччи G_{ij} расслоения $P_{n,n}^0$ определяют в слое P_n точки A_0 гиперконус $Q_{n-1,2}^0$, определяемый уравнением (16), и линейный гиперкомплекс, определяемый уравнением (17) с учетом (18).

Заметим, что пространство аффинной связности является частным случаем расслоения $P_{m,n}^0$.

Список литературы

1. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., 1976.
2. Ивлев Е. Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с. 32-38.
3. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. об-ва, I, 1953, с. 275-382.
4. Ивлев Е. Т., Исабеков М. Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. - 3-я научная конф. по матем. и мех. Вып. 1. Томск, 1973, с. 50-52.

О. В. К а з н и н а

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ ФУБИНИ-ЧЕХА

В работе рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\bar{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f: (V_p \subset E_n) \rightarrow (\bar{V}_p \subset E_{p+\tau})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$.

1. В евклидовом пространстве E_n к гладкой поверхности V_p присоединим в каждой точке $x \in V_p$ репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, ($i, j = 1, \dots, p$; $\alpha, \beta = p+1, \dots, n$) так, что векторы \vec{e}_i образуют базис касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p , $|\vec{e}_i| = 1$, а \vec{e}_α - базис нормальной плоскости $N_p(x)$ к V_p , причем $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Деривационные формулы репера ${}^n R^x$ имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j + \omega_\alpha^i \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\beta^\alpha \vec{e}_\beta. \quad (1)$$

Рассмотрим отображение $f: (V_p \subset E_p) \rightarrow (\bar{V}_p \subset E_{p+\tau})$, где поверхность \bar{V}_p получена проектированием поверхности V_p в фиксированную плоскость $E_{p+\tau}$ вдоль ортогональной дополнительной к ней плоскости $E_{n-(p+\tau)}$. Плоскость $E_{p+\tau}$ задана точкой O и векторами \vec{e}_α ($\alpha, \beta = p+1, \dots, n$) такими, что $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Присоединим к поверхности \bar{V}_p в каждой точке $x_1 = f(x)$ репер $R^{x_1} = \{x_1, \vec{a}_i, \vec{a}_\tau\}$, ($\tau, \sigma = p+1, \dots, p+\tau$), где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i - h_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau. \quad (*)$$

Деривационные формулы репера R^{x_1} запишутся в виде

$$d\vec{x}_1 = \bar{\omega}^i \vec{a}_i, \quad d\vec{a}_i = \bar{\omega}_j^i \vec{a}_j + \bar{\omega}_\tau^i \vec{e}_\tau, \quad (2)$$

$$d\vec{e}_\tau = \bar{\omega}_\tau^i \vec{a}_i + \bar{\omega}_\sigma^\tau \vec{e}_\sigma.$$

Дифференциальные уравнения отображения f имеют вид:

$$\bar{\omega}^i = \omega^i. \quad (3)$$

Пользуясь соотношениями (*), находим:

$$\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j + \omega_i^{\hat{\alpha}} a_{\hat{\alpha}}^j, \quad (4)$$

где $a_{\hat{\alpha}}^j$ - координаты вектора $\vec{a}_{\hat{\alpha}} = n_{E_{p+r}} \vec{e}_{\hat{\alpha}}$ в репере R^{x_1} . Аналогично, получаем

$$\bar{\omega}_i^{\tau} = \omega_i^{\tau}. \quad (5)$$

Часть компонент второго тензора $\ell_{ij}^{\alpha} = \{\ell_{ij}^{\tau}, \ell_{ij}^{\hat{\alpha}}\}$ поверхности V_p и компоненты $\bar{\ell}_{ij}^{\tau}$ второго тензора поверхности \bar{V}_p связаны следующим образом:

$$\bar{\ell}_{ij}^{\tau} = \ell_{ij}^{\tau}. \quad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3) и разрешая полученное по лемме Картана, находим:

$$\bar{\omega}_j^i - \omega_j^i = h_{jk}^i \omega^k, \quad h_{jk}^i = h_{kj}^i, \quad (7)$$

где функции h_{jk}^i образуют тензор типа (1,2). Сравнивая (4) и (7), получим выражения:

$$h_{jk}^i = \ell_{jk}^{\hat{\alpha}} a_{\hat{\alpha}}^i. \quad (8)$$

2. Пусть на поверхности V_p задана сеть Σ_p , тогда на \bar{V}_p определится ее образ-сеть $\bar{\Sigma}_p$. Векторы \vec{e}_i будем брать на касательных к линиям сети Σ_p в точке x . Пусть сеть Σ_p является сопряженной. Рассмотрим линию ω^{j_0} сети Σ_p , $\omega^{j_0} \neq 0$, $\omega^k = 0$, $k \neq j_0$, индекс j_0 - фиксирован, обозначим касательный к ней вектор в точке x через $\vec{t} = t^{j_0} \vec{e}_{j_0}$, $t^{j_0} \neq 0$. Непосредственно из (8) следует: а/ направление, заданное вектором \vec{t} , ℓ -сопряжено с гиперплоскостью $T_{p-1} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{j_0-1}, \vec{e}_{j_0+1}, \dots, \vec{e}_p]$ касательной плоскости $T_p(x)$; б/ если линия ω^{j_0} асимптотическая, то направление, заданное вектором \vec{t} , является ℓ -главным (обратное в общем случае неверно).

Пусть направление, заданное вектором $\vec{t} = t^{j_0} \vec{e}_{j_0}$, ℓ -сопряжено с любым направлением, определяемым вектором $\vec{\eta} = \eta^k \vec{e}_k$, не лежащим в гиперплоскости $T_{p-1}(x)$, тогда:

$$h_{j_0 k}^i t^{j_0} \eta^k = 0 \quad (i \neq j_0) \Rightarrow h_{j_0 j_0}^i = 0 \quad (i \neq j_0),$$

$$h_{j_0 k}^{j_0} t^{j_0} \eta^k = 0 \Rightarrow h_{j_0 j_0}^{j_0} = 0.$$

Значит, направление, заданное вектором \vec{t} , является ℓ -главным. Верно и обратное. Следовательно: направление, касательное к линии ω^{j_0} сопряженной сети Σ_p является ℓ -главным тогда и только тогда, когда оно ℓ -сопряжено с любым направлением плоскости $T_p(x)$, не лежащим в плоскости $T_{p-1}(x)$.

3. Известно, что в рассматриваемом отображении образом сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p$ является сопряженная сеть $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$. Обозначим компоненты метрических тензоров поверхностей V_p и \bar{V}_p соответственно через $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, $\bar{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$. Используя (*), найдем

$$\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{\hat{\alpha}} h_i^{\hat{\alpha}} h_j^{\hat{\alpha}}. \quad (9)$$

Пусть сеть Σ_p ортогональна, тогда $\gamma_{ij} = 0$ ($i \neq j$). В каком случае сеть линий кривизны $\Sigma_p \subset V_p$ отображается в сеть линий кривизны $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$? Имеем

$$\bar{\gamma}_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \Leftrightarrow \sum_{\hat{\alpha}} h_i^{\hat{\alpha}} h_j^{\hat{\alpha}} = 0 \quad (i \neq j).$$

Рассмотрим проекции векторов \vec{e}_i на $E_{n-(p+r)}$ вдоль E_{p+r} и подсчитаем скалярное произведение:

$$n_{E_{n-(p+r)}} \vec{e}_i \cdot n_{E_{n-(p+r)}} \vec{e}_j = h_i^{\hat{\alpha}} \vec{\ell}_{\hat{\alpha}} \cdot h_j^{\hat{\beta}} \vec{\ell}_{\hat{\beta}} \quad (i \neq j),$$

или

$$n_{E_{n-(p+r)}} \vec{e}_i \cdot n_{E_{n-(p+r)}} \vec{e}_j = \sum_{\hat{\alpha}} h_i^{\hat{\alpha}} h_j^{\hat{\alpha}} \quad (i \neq j)$$

Следовательно, справедливо утверждение:

сеть линий кривизны Σ_p проектируется в сеть линий кривизны $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$ тогда и только тогда, когда ортогональные проекции векторов \vec{e}_i , касательных к линиям сети Σ_p , на пространство $E_{n-(p+r)}$ и в каждой точке $x \in V_p$ векторы $\vec{\ell}_{ij}$ ($i \neq j$) лежат в плоскости $N_{\tau}(x)$.

4. Рассмотрим векторы $\vec{\ell}_{ij} = \ell_{ij}^{\hat{\alpha}} \vec{e}_{\hat{\alpha}}$ ($i \neq j$). Пусть $\vec{\ell}_{ij} \subset N_{(n-p)-\tau}(x)$, тогда $\vec{\ell}_{ij} = \ell_{ij}^{\hat{\alpha}} \vec{e}_{\hat{\alpha}}$, $\ell_{ij}^{\tau} = 0$ ($i \neq j$). Следовательно, в силу (6), получим, что сеть $\bar{\Sigma}_p$ является сопряженной. Верно и обратное. Итак:

сеть $\bar{\Sigma}_p$ является сопряженной тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in V_p$ векторы $\vec{\ell}_{ij}$ ($i \neq j$) лежат в плоскости $N_{(n-p)-\tau}(x)$.

С.В. К и р е е в а

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ СЕТЕЙ

В данной работе рассматривается в проективном пространстве отображение $g: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области $\Omega \subset P_n$ и $\bar{\Omega} \subset P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей.

Пусть задано отображение $g: (\Omega \subset P_n) \rightarrow (\bar{\Omega} \subset P_n) | A \rightarrow B \neq A$, в котором каждая линия двойная [1]. Области Ω и $\bar{\Omega}$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей

$$A \rightarrow \Pi_{n-1}(A), \quad (1)$$

$$B \rightarrow \Pi_{n-1}(B), \quad (2)$$

$\Pi_{n-1}(A) = \Pi_{n-1}(B)$. Мы будем рассматривать только такое отображение g , для которого касательные к соответствующим двойным линиям $\ell, \bar{\ell}$ пересекаются в точке, которая принадлежит нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.

В области Ω задана сеть $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$ - образ сети в отображении g . К областям Ω и $\bar{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{K}^A = \{A, A_i\}$; $\mathcal{K}^B = \{B, B_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$), где A_i, B_i - нормальные точки [3] касательных к линиям $\omega^i, \bar{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$. Для отображения g потребуем, чтобы инвариантные точки N_i^i ($i=1, \dots, n$) [4], лежащие на прямой (AB) , совпадали с точкой $C = (AB) \cap \Pi_{n-1}(A)$ - точкой пересечения прямой (AB) и нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$. Тогда точки B, B_i в репере \mathcal{K}^A имеют следующие представления

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \quad \vec{B}_i = \delta_i^j \vec{A}_j. \quad (3)$$

В работе индексы i, j, k, m, \dots пробегает значения $1, 2, \dots, n$. Связь между формами реперов $\mathcal{K}^A, \mathcal{K}^B$ выражается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^i &= \omega^i, & \bar{\omega}_i^0 &= \omega_i^0, \\ \bar{\omega}_0^0 &= \omega_0^0, & \bar{\omega}_j^i &= \omega_j^i - \gamma^j \omega_i^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы (4) являются частным случаем формул (4), (10), (11), (12), выведенных в работе [4], в предположении, что функции $\gamma_j^i = \delta_j^i$. В той же работе [4] даны разложения дифференциалов $d\gamma_j^i$:

$$d\gamma_j^i - \gamma_k^i \omega_j^k + \gamma_j^k \omega_k^i - (\gamma^k \gamma_j^i + \gamma^i \gamma_j^k) \omega_k^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \quad \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \quad (5)$$

В нашем случае $\gamma_j^i = \delta_j^i$ и формулы (5) примут вид:

$$-\delta_j^i \gamma^k \omega_k^0 - \gamma^i \omega_j^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \quad \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \quad (5a)$$

В данной работе мы будем рассматривать такое отображение g , для которого все функции γ^i в разложении точки B не равны нулю: $\gamma^i \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Так как области $\Omega, \bar{\Omega}$ нормализованы и в них заданы сети $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$, то формы $\omega_i^0, \bar{\omega}_i^0, \omega_i^j, \bar{\omega}_i^j$ ($i \neq j$) - главные:

$$\begin{aligned} \omega_i^0 &= a_{ik}^0 \omega^k, & \omega_i^j &= a_{ik}^j \omega^k, \\ \bar{\omega}_i^0 &= \bar{a}_{ik}^0 \omega^k, & \bar{\omega}_i^j &= \bar{a}_{ik}^j \omega^k. \end{aligned} \quad (i \neq j) \quad (6)$$

Из формул (5a), (6) и (4) следует, что

$$a_{jm}^0 = a_{mj}^0, \quad \bar{a}_{jm}^0 = \bar{a}_{mj}^0, \quad (7)$$

$$\gamma^k \omega_k^0 = 0. \quad (8)$$

Равенства (7) означают, что нормализации (1), (2) эквивалентны.

Формы ω_k^0 связаны одним соотношением (8), поэтому множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей существенно зависит от $(n-1)$ параметра.

Если при вычислении дифференциала dC [4] точки C воспользоваться формулой (8) и учесть, что $\gamma_j^i = \delta_j^i$, то $dC = \varphi \bar{C}$ и, следовательно, множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей образует связку с центром в

точке С. Причем, если точка А смещается в направлении $(AC) = (AB)$, то нормализующая плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ остается неподвижной. Тогда, как известно, направление (AB) называется особым для нормализации (1). Направление (BA) тоже будет особым для нормализации (2).

Т е о р е м а 1. Отображение g обладает следующими свойствами:

1) ранги нормализаций $A \rightarrow \Pi_{n-1}(A); B \rightarrow \Pi_{n-1}(A)$ в общем случае равны $n-1$; 2) семейство нормализующих плоскостей образует связку с центром в точке С; 3) нормализации (1), (2) порождают эквивалентные связности $\nabla, \bar{\nabla}$.

Риманову связность нормализации порождают не могут; 4) тензоры кривизны и Риччи связностей $\nabla, \bar{\nabla}$ совпадают;

5) распределения $\Delta_1, \bar{\Delta}_1$ такие, что $\Delta_1(A) = (AB); \bar{\Delta}_1(B) = (BA)$ являются особыми для нормализаций (1), (2); 6) если соприкасающиеся плоскости линий $\omega^i, \bar{\omega}^i$ ($i=1, 2, \dots, n$) сетей $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$ совпадают, то множество этих плоскостей образует пучок с осью (AB) , линии $\omega^i, \bar{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$ - плоские, лежащие в плоскостях $(AA_i B)$.

Рассмотрим псевдофокусы F_i^j, \bar{F}_i^j на касательных (AA_i) $((BB_j))$ к линиям $\omega^i, \bar{\omega}^i$ сети $\Sigma_n, (\bar{\Sigma}_n)$:

$$\vec{F}_i^j = -a_{ij}^j \vec{A} + \vec{A}_i \quad (\vec{\bar{F}}_i^j = -(a_{ij}^j - \gamma^j a_{ij}^0) \vec{B} + \vec{B}_i).$$

Точка $\mathcal{K}_i^j = (AB) \cap (F_i^j \bar{F}_i^j)$ будет совпадать с точкой С тогда и только тогда, когда направления $(AA_i), (AA_j)$ сопряжены относительно конуса Риччи. При этом прямые $(F_i^j \bar{F}_i^j), (\bar{F}_i^j \bar{F}_i^j)$ пересекаются в точке $S_{ij} : \vec{S}_{ij} = a_{ij}^i \vec{A}_i - a_{ij}^j \vec{A}_j$. Если направления $(AA_i), (AA_j), (AA_k)$ (i, j, k - различные) попарно сопряжены относительно конуса Риччи, то

1) $\Delta S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ перспективен $\Delta A_i A_j A_k$; тогда и только тогда, когда относительный инвариант $a_{ij}^i a_{jk}^k a_{ki}^i + a_{ik}^k a_{kj}^j a_{ji}^i$ равен нулю; 2) точки S_{ij}, S_{jk}, S_{ki} лежат на одной прямой, если относительный инвариант $a_{ij}^i a_{jk}^k a_{ki}^i - a_{ik}^k a_{kj}^j a_{ji}^i$ ра-

вен нулю.

Можно показать, что справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. n -сопряженная система двойных линий при отображении g перейдет в n -сопряженную систему тогда и только тогда, когда касательные к линиям сети Σ_n сопряжены относительно конуса Риччи. При этом фокусы F_i^j, \bar{F}_i^j соответствуют в гомографии, которая определяется парой реперов $\mathcal{K}^A, \mathcal{K}^B$. Прямые, соединяющие соответствующие фокусы F_i^j, \bar{F}_i^j , принадлежат связке с центром в неподвижной точке С.

Т е о р е м а 3. Геодезическая сеть Σ_n двойных линий перейдет при отображении g в геодезическую тогда и только тогда, когда сеть Σ_n - характеристическая. При этом все прямые (AA_i) лежат на конусе Риччи связности ∇ .

Список литературы

1. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1975, вып. 6, с. 19-25.
2. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина, 1970, № 374, т. I, с. 28-40.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976.
4. Киреева С.В. О паре сетей. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983, вып. I 4, с. 26-31.

УДК 514.75

М. В. К р е т о в

К ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ЭЛЛИпсоИДОВ
 В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В данной работе в трехмерном аффинном пространстве исследуются подклассы \bar{K}_3^{oi} -изученных в работе [1] комплексов (трехпараметрических семейств) K_3^{oi} эллипсоидов q , с которыми ассоциируются [2] дифференцируемые отображения, не пересекающиеся с классами $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x \}$, $x = \bar{1}, 6$; [3]. На основе полученных геометрических свойств многообразий \bar{K}_3^{oi} найдено их безынтегральное представление.

В статье используются обозначения, введенные ранее в работе [1]. Отнесем эллипсоид q к каноническому реперу $R = \{A, \bar{e}_j\}$; $j, \bar{j}, \dots = \bar{1}, 3$, который геометрически характеризуется следующим образом: вершина A помещается в центр C квадрики q , векторы \bar{e}_j сопряжены, и концы A_j этих векторов лежат на эллипсоиде q и принадлежат его фокальному многообразию [4]; при этом индикатриса вектора \bar{e}_1 является прямой, параллельной вектору \bar{e}_1 .

О п р е д е л е н и е. Назовем комплекс K_3^{oi} комплексом \bar{K}_3^{oi} , если индикатриса вектора $\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ является прямой, параллельной вектору \bar{e}_1 .

Из определения комплекса \bar{K}_3^{oi} следует, что $\ell = 0$, поэтому его система дифференциальных уравнений Пфаффа будет иметь вид:

$$\omega_j^j = -\omega^j, \quad \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^1 = \beta \omega^3, \quad \omega_3^1 = \beta \omega^2, \\ \omega_2^3 = -\omega^3, \quad \omega_3^2 = -\omega^2, \quad d \ln \beta = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3, \quad (1)$$

где по J нет суммирования.

Анализируя систему (1), убеждаемся в том, что комплексы \bar{K}_3^{oi} существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений с произволом десяти постоянных.

Обозначим асимптотические линии на поверхности (A_1) , ассоциированной с комплексом \bar{K}_3^{oi} , символами γ_1 и γ_2 , которые в репере R задаются соответственно уравнениями:

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0. \quad (2)$$

Уравнения φ -основной и ψ -основной гиперплоскостей [3], ассоциированных с многообразием \bar{K}_3^{oi} , соответственно, имеют вид:

$$4X^1 + 5X^2 + 5X^3 - 4 = 0, \quad (3)$$

$$3(3\beta^4 + 10\beta^2 + 8)X^1 + (5\beta^4 + 24\beta^2 + 32)X^2 + \\ + (5\beta^4 + 24\beta^2 + 32)X^3 = 4(\beta^2 + 2)(\beta^2 + 4). \quad (4)$$

Используя уравнения (1)-(4), можно доказать, что имеет место

т е о р е м а. Комплексы \bar{K}_3^{oi} обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ прямые $\ell = (A_2, \bar{e}_1)$, $m = (A, \bar{e}_2)$ и $\bar{\ell} = (A_3, \bar{e}_1)$ -неподвижны; 2/ при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая $\bar{m} = (A_1, \bar{e}_3)$ и координатная плоскость $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ неподвижны; 3/ поверхность (A_3) вырождается в прямую, параллельную вектору \bar{e}_1 , 4/ точка $P = A + \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ неподвижна при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2 ; 5/ класс отображений, порожденный комплексом \bar{K}_3^{oi} , не пересекается с классами $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_x \}$.

Найденные геометрические свойства комплекса \bar{K}_3^{oi} позволяют построить его безынтегральное представление. Для этого проводим следующие построения: 1/ зададим произвольную прямую ℓ и фиксируем на ней точку P ; 2/ проводим прямую $\bar{\ell}$, параллельную прямой ℓ , и выбираем на ней точку A_3 ; 3/ задаем плоскость π , проходящую через прямую ℓ и не содержащую прямую $\bar{\ell}$; 4/ проводим на плоскости π через точку P прямую m ; 5/ в плоскости π вы-

УДК 514.75

В.С.М а л а х о в с к и й

СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЕМ ГИПЕРКВАДРИК

Рассматривается n -мерное гладкое многообразие M_n , в каждом касательном пространстве D_n^1 которого задана центральная невырожденная гиперквадрика Q .

Исследуются структуры, порождаемые на M_n полем гиперквадрик Q .

Пусть ω^i -базовые 1-формы гладкого многообразия M_n . Имеем [1]:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \omega^k \wedge \omega_{ik}^j, \end{aligned} \quad (1)$$

$$d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^j = \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!(p-s)!} \omega_{(i_1 \dots i_s}^k \wedge \omega_{i_{s+1} \dots i_p)k}^j + \omega^k \wedge \omega_{i_1 \dots i_p k}^j.$$

Обозначим через x^i -координаты вектора $x \in D_n^1$ или, что то же, координаты точки x центраффинного пространства D_n^1 относительно базиса $\{e_i\}$. Имеем:

$$x = x^i \vec{e}_i. \quad (2)$$

Уравнение центральной невырожденной гиперквадрики $Q \in D_n^1$ с центром

$$C = c^i e_i \quad (3)$$

запишется в виде:

$$a_{ij} x^i (x^j - 2c^j) - 1 = 0, \quad (4)$$

причем

$$\det \|a_{ij}\| \neq 0. \quad (5)$$

бираем точку A , неинцидентную прямым ℓ и m , через эту точку проводим прямые, параллельные ℓ и m . В пересечении с прямыми m и ℓ получим точки A_1 и A_2 .

С текущей точкой плоскости π совмещаем подвижной репер $\hat{R} = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ такой, что $0 \equiv A$ и $\vec{e}_j = \overline{AA_j}$. Образующий элемент комплекса - эллипсоид q , соответствующий центру A , однозначно определяется точками A_j , центром A и сопряженными направлениями $\overline{AA_j}$. При движении точки A в плоскости π получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов q , а при перемещении точки A_3 по прямой ℓ получается комплекс квадрик q , который мы назовем комплексом K_{3*}^{01} .

Можно доказать, что построенный таким образом комплекс эллипсоидов q совпадает с комплексом K_3^{01} , т.е. определяется в репере \hat{R} системой дифференциальных уравнений Пфаффа (f).

Список литературы

1. Кретов М.В. О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве. - Калининградский ун-т, Калининград, 1981, 22 с., библиограф. 17 назв. (Рукопись деп. ВНИТИ АН СССР 17 ноября 1981 г., № 5272-81 Деп.)

2. Кретов М.В. Дифференциальная геометрия соответствий, ассоциированных с комплексами эллипсоидов. - Тезисы докладов VI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984, с. 66.

3. Кретов М.В. О специальных подклассах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984, вып. 15, с. 49-54.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n -мерном проективном пространстве. Тр. геометрич. семинара. ВНИТИ АН СССР, 1974, т. 6, с. 113-134.

Формы Пфаффа

$$\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{kj} \omega_i^k - a_{ik} \omega_j^k, \quad \nabla c^i = dc^i + c^k \omega_k^i \quad (6)$$

являются структурными формами гиперквадрики Q . Так как на многообразии M_n задано поле геометрического объекта $\{a_{ij}, c^k\}$, то

$$\nabla a_{ij} = a_{ijk} \omega^k, \quad \nabla c^i = c_j^i \omega^j. \quad (7)$$

Продолжая систему (7), находим

$$\Delta a_{ijk} = a_{ijkh} \omega^h, \quad \Delta c_j^i = c_{jk}^i \omega^k, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a_{ijk} &= \nabla a_{ijk} - a_{hj} \omega_{ik}^h - a_{ik} \omega_{jk}^h, \\ \Delta c_j^i &= \nabla c_j^i - c^k \omega_{kj}^i, \end{aligned} \quad (9)$$

причем

$$a_{ijk} = a_{jik}, \quad a_{ijkh} = a_{ijhk}, \quad c_{jk}^i = c_{kj}^i. \quad (10)$$

Уравнения (7) показывают, что многообразие M_n является римановым многообразием, на котором задано поле контравариантного вектора $\{c^i\}$.

Обозначим через a^{ij} приведенные миноры матрицы

$$\|a_{ij}\|, \text{ т.е. } a^{ij} a_{jk} = \delta_k^i. \quad (11)$$

Объект связности Леви-Чивита $\{\Gamma_{ij}^k\}$ на многообразии задается формулой:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (a_{lij} + a_{lji} - a_{ylk}). \quad (12)$$

Имеем

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (13)$$

$$\nabla \Gamma_{ij}^k + \omega_{ij}^k = \Gamma_{ijl}^k \omega^l, \quad (14)$$

где

$$\Gamma_{ijm}^k = \frac{1}{2} (a^{kl} (a_{hijm} + a_{hjim} - a_{ijhm}) - a^{kp} a^{lq} a_{pjm} (a_{hij} - a_{hji} - a_{ijh})). \quad (15)$$

Формы Пфаффа

$$\tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j - \Gamma_{ik}^j \omega^k \quad (16)$$

являются формами связности, определяемой объектом [2]. Находим:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \tilde{\omega}_k^i, \\ d\tilde{\omega}_i^j &= \tilde{\omega}_i^k \wedge \tilde{\omega}_k^j + \frac{1}{2} R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$R_{ikl}^j = \Gamma_{ikl}^j - \Gamma_{ilk}^j + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{lp}^j - \Gamma_{il}^p \Gamma_{kp}^j \quad (18)$$

— тензор кривизны риманова пространства M_n .

Рассмотрим систему величин

$$F_i^j = c_j^i + c^k \Gamma_{ik}^j. \quad (19)$$

Имеем

$$dF_i^j = F_{ik}^j \omega^k + F_k^j \omega_i^k - F_i^k \omega_k^j, \quad (20)$$

где

$$F_{ik}^j = c_{ik}^j + c_k^h \Gamma_{ih}^j + c^h \Gamma_{hik}^j. \quad (21)$$

Следовательно $\{F_i^j\}$ — аффинор. Он определяет на многообразии M_n аффинную структуру.

Вектор

$$f^i = c^j F_j^i \quad (22)$$

задает в центроаффинном пространстве D_n^1 инвариантную точку. Дважды ковариантный симметрический тензор

$$g_{ij} = a_{ik} F_j^k + a_{jk} F_i^k \quad (23)$$

задает на M_n ассоциированную риманову метрику, отличную в общем случае от метрики, определяемой тензором $\{a_{ij}\}$. Налагая дополнительные требования на аффинор $\{F_i^j\}$, мы получим различные классы гладких многообразий рассматриваемого типа. Например, если

$$F_i^k F_k^j = \varepsilon \delta_i^j, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad (24)$$

то многообразие M_n оказывается наделенным структурой почти произведения (при $\varepsilon = +1$) или почти комплексной структурой (при $\varepsilon = -1$) [2].

При исследовании комплекса K гиперквадрик в аффинном пространстве A_n также возникает риманова связность Γ , не являющаяся в общем случае связностью Леви-Чивита. Выбором репера $R = \{A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ приводим уравнение гиперквадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса K соответственно к виду:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1 = 0, \quad (25)$$

$$\omega_\beta^\alpha + \omega_\alpha^\beta = 2 \theta_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma. \quad (26)$$

Полагая

$$\hat{\omega}_\beta^\alpha = \frac{1}{2} (\omega_\beta^\alpha - \omega_\alpha^\beta), \quad (27)$$

находим

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \hat{\omega}_\beta^\alpha + \frac{1}{2} S_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \quad (28)$$

$$d\hat{\omega}_\alpha^\beta = \hat{\omega}_\alpha^\gamma \wedge \hat{\omega}_\gamma^\beta + \frac{1}{2} R_{\alpha\gamma\eta}^\beta \omega^\gamma \wedge \omega^\eta, \quad (29)$$

где

$$S_{\beta\gamma}^\alpha = \theta_{\beta\gamma}^\alpha - \theta_{\gamma\beta}^\alpha, \quad R_{\alpha\gamma\eta}^\beta = \theta_{\alpha\gamma}^\beta \theta_{\eta\gamma}^\beta - \theta_{\alpha\eta}^\beta \theta_{\gamma\eta}^\beta \quad (30)$$

-тензоры кручения и кривизны Γ .

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. - Тр. геометрич. семинара ВИНТИ АН СССР, 1974, т. 6, с. 113-134.

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - Проблемы геометрии, т. 9. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1979.

М.Н. Марюков

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ П-ПРОСТРАНСТВ

В данной работе рассматриваются некоторые свойства линий кривизны пары ρ -распределений, заданных в областях Ω и $\bar{\Omega}$ пространства E_n , между которыми установлен диффеоморфизм. Находится необходимое и достаточное условие их соответствия в отображении f .

В евклидовом пространстве E_n даны две области Ω и $\bar{\Omega}$ и диффеоморфизм $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$. Предполагается, что в области Ω задано распределение Δ_ρ ($1 \leq \rho < n$), а в области $\bar{\Omega}$ - распределение $\bar{\Delta}_\rho$.

Пусть в главном нормальном пространстве M_ρ распределения Δ_ρ [2] зафиксировано поле одномерной нормали $[x, \vec{n}_0]$, где \vec{n}_0 - орт этой нормали. Для точки F , принадлежащей данной нормали, имеем $\vec{F} = \vec{x} + \rho \vec{n}_0$. Направления кривизны площадки $\Delta_\rho(x)$ относительно нормали $[x, \vec{n}_0]$ ([1], [2]) определяются требованием $d\vec{F} \in \Delta_{n-\rho}(x)$ при $d\vec{x} \in \Delta_\rho(x)$,

$$d\vec{F} \in \Delta_{n-\rho}(x) \quad \text{при} \quad d\vec{x} \in \Delta_\rho(x), \quad (1)$$

где $\Delta_{n-\rho}(x)$ - площадка, ортогонально дополнительная к $\Delta_\rho(x)$. В области Ω выберем подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, где единичные векторы $\vec{e}_i \in \Delta_\rho(x)$, $\vec{e}_\alpha = \Delta_{n-\rho}(x)$, причем $\vec{e}_\alpha = \vec{n}_0$ ($i=1, \dots, \rho$; $\alpha = \rho+1, \dots, n$). Требование (1) приводит к системе $\omega^i + \varphi \omega_{\alpha_0}^i$. Дифференцирование тождеств $\vec{e}_{\alpha_0} \cdot \vec{e}_i = 0$ дает $\gamma_{ij} \omega_{\alpha_0}^j + \omega_{\alpha_0}^i = 0$. Отсюда следует, что формы $\omega_{\alpha_0}^j$ - главные и $\omega_{\alpha_0}^j = -\gamma_{ij} \Lambda_{\alpha_0}^i \omega^j$ ($L=1, 2, \dots, \rho$). Здесь $\Lambda_{\alpha_0}^i$ - подобъект первого фундаментального объекта распределения Δ_ρ . Учитывая, что при $d\vec{x} \in \Delta_\rho(x)$ формы ω^i равны нулю, для определения направлений кривизны площадки $\Delta_\rho(x)$ имеем систему

$$(\delta_j^i + \varphi a_j^i) \omega^j = 0, \quad (2)$$

где

$$\alpha_j^i = -\gamma^{ie} \Lambda_{ej}^\alpha \quad (3)$$

есть аффинор. Интегральные кривые 1-распределений, определяемых собственными векторами поля этого аффинора, — p -ткань Σ_p линий кривизны распределения Δ_p относительно нормали $[x, \vec{e}_{\alpha_0}]$ ([1], [2]). Если в главном нормальном пространстве \tilde{N}_q распределения $\tilde{\Delta}_p$ выбрано поле одномерной нормали $[y, \vec{n}_0]$, то аналогично можно определить p -ткань $\tilde{\Sigma}_p$ линий кривизны этого распределения относительно нормали $[y, \vec{n}_0]$. В отображении f p -ткань Σ_p переходит в p -ткань $\tilde{\Sigma}_p$, принадлежащую распределению $\tilde{\Delta}_p = f_{*x}(\Delta_p)$, а p -ткань $\tilde{\Sigma}_p$ переходит в отображении f^{-1} в p -ткань Σ_p , принадлежащую распределению $\bar{\Delta} = f_x^{-1}(\tilde{\Delta}_p)$. Каждой нормали распределения Δ_p ($\tilde{\Delta}_p$) соответствует определенная нормаль распределения $\bar{\Delta}_p$ ($\tilde{\bar{\Delta}}_p$). Действительно, пусть $n \in \Delta_{p-p}(x)$, а следовательно $\vec{n} = p^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\vec{n} = f_{*x}(\vec{n}) = p^\alpha \vec{e}_\alpha$, где $\vec{e}_\alpha = f_{*x}(\vec{e}_\alpha)$. Рассмотрим вектор

$$\vec{n} = \vec{n} - p^\alpha \gamma^{ij} \gamma_{\alpha j} \vec{e}_i, \quad (4)$$

где $\vec{e}_i = f_{*x}(\vec{e}_i)$, γ^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора распределения $\bar{\Delta}_p$, а $\gamma_{\alpha j} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_j$. Имеем $\vec{n} \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, следовательно, $\vec{n} \in \hat{\Delta}_{n-p}(y)$, где $\hat{\Delta}_{n-p}(y)$ — площадка, ортогонально дополнительная к $\bar{\Delta}_p(y)$. Дифференцирование выражения (4) по вторичным параметрам дает $d\vec{n} = 0$, следовательно, в области Ω имеем поле инвариантной нормали $[y, \vec{n}]$ распределения Δ_p . Как показывает соотношение (4), векторам базиса \vec{e}_α соответствуют векторы $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha - \gamma^{ij} \gamma_{\alpha j} \vec{e}_i$. Они линейно независимы и образуют базис площадки $\hat{\Delta}_p(y)$.

Аналогичным образом каждой нормали распределения $\hat{\Delta}_p$ будет соответствовать некоторая нормаль распределения $\tilde{\hat{\Delta}}_p$.

Выясним, в каком случае p -ткань линий кривизны Σ_p ($\tilde{\Sigma}_p$) распределения Δ_p ($\tilde{\Delta}_p$) относительно нормали $[x, \vec{e}_{\alpha_0}]$ переходит в отображении f (f^{-1}) в p -ткань линий кривизны распределения Δ_p ($\tilde{\Delta}_p$) относительно соответствующей нормали $[y, \vec{e}_{\alpha_0}]$ ($[x, \vec{e}_{\alpha_0}]$).

Рассмотрим решение этой задачи для распределения Δ_p

(для распределения $\tilde{\Delta}_p$ оно аналогично). Поместим векторы \vec{e}_i репера R^x на касательных к линиям p -ткани Σ_p . Тогда, как это следует из (2), $\alpha_j^i = 0$ ($i \neq j$). Пусть $\hat{R}^y = \{y, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{y} &= \hat{\omega}^i \vec{e}_i + \hat{\omega}^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_i &= \hat{\omega}_i^j \vec{e}_j + \hat{\omega}_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \hat{\omega}_\alpha^i \vec{e}_i + \hat{\omega}_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $\vec{e}_i = f_{*x}(\vec{e}_i)$, то $\hat{\omega}^i = \bar{\omega}^i = \omega^i$. Дифференцируя тождества $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_i = 0$ и учитывая выражения для векторов \vec{e}_α и формулы (5), получим

$$\omega_\alpha^j = -\gamma^{ij} \gamma_{\alpha\beta}^\lambda \bar{\Lambda}_{i\lambda}^\beta \omega^1, \quad (6)$$

где $\bar{\Lambda}_{i\lambda}^\beta$ — подобъект первого фундаментального распределения $\bar{\Delta}_p$, причем $\bar{\Lambda}_{i\lambda}^\beta = \Lambda_{i\lambda}^\beta + N_{i\lambda}^\beta$, где $N_{i\lambda}^\beta$ — подтензор $N_{x\lambda}^\beta$ ($\beta, \lambda, \lambda = 1, \dots, n$), для которого $N_{x\lambda}^\beta \omega^\lambda = \bar{\omega}_x^\beta - \omega_x^\beta$, а $\gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$. Для точки Q нормали $[y, \vec{e}_{\alpha_0}]$ имеем $\bar{Q} = \vec{y} + \mu \vec{e}_{\alpha_0}$. Требование $d\bar{Q} \in \hat{\Delta}_{n-p}(y)$ при $d\vec{y} \in \bar{\Delta}_p(y)$ приводит к системе $\hat{\omega}^i + \mu \hat{\omega}_\alpha^i = 0$. Следовательно, учитывая (6) и то, что $\hat{\omega}^i = \bar{\omega}^i = \omega^i$ для определения направлений кривизны площадки $\bar{\Delta}_p(y)$ имеем систему $(\delta_j^i + \mu \bar{a}_j^i) \omega^j = 0$, где

$$\bar{a}_j^i = -\gamma^{it} \gamma_{\alpha\beta}^\lambda \bar{\Lambda}_{tj}^\beta \quad (8)$$

и \bar{a}_j^i , как видно из (8), есть аффинор. Отсюда вытекает следующая

Т е о р е м а. Для того, чтобы p -ткань $\tilde{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ была p -тканью линий кривизны распределения $\tilde{\Delta}_p$ относительно нормали $[y, \vec{e}_0]$ необходимо и достаточно, чтобы векторы \vec{e}_i были собственными векторами аффинора \bar{a}_j^i . Можно показать, что в общем случае p -ткань $\tilde{\Sigma}_p$ не является p -тканью линий кривизны относительно указанной нормали, но в ряде частных случаев это выполняется.

С л е д с т в и е. Если отображение f конформно и а/ p -ткань Σ_p ортогональна, б/ распределение Δ_p вполне интегрируемо, в/ $N_{ij}^\alpha = 0$ (в частности, если линии p -ткани Σ_p являются характеристичес-

Г. М а т и е в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ

В работе рассмотрены ортогонально дополнительные распределения Δ_p и $\bar{\Delta}_{n-p}$ в евклидовом пространстве E_n . С помощью этих распределений построена сеть $\bar{\Sigma}_n$ и изучены некоторые ее свойства.

1. Пусть n -мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\mathcal{K} = (x, \bar{e}_A)$, где $x \in E_n$ и $|\bar{e}_A| = 1$ ($A, B, C = \bar{1}, 2, \dots, n$). Деривационные формулы репера имеют вид $d\bar{x} = \omega^A \bar{e}_A$, $d\bar{e}_A = \omega_A^B \bar{e}_B$. Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики $d g_{AB} = g_{AK} \omega_B^K + g_{KB} \omega_A^K$, где $g_{AB} = \bar{e}_A \cdot \bar{e}_B$ - ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n , и структурным уравнениям $\mathcal{D}\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$, $\mathcal{D}\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B$.

Рассмотрим в E_n распределение Δ_p ($1 < p < n-1$) и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\bar{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p$ репера расположим в подпространстве $\Delta_p(x)$, а векторы $\bar{e}_{p+1}, \dots, \bar{e}_n$ - в подпространстве $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A \quad (i, j, k = 1, \dots, p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, \dots, n), \quad (I)$$

а так как $\bar{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}(x)$, то $\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A$. Система величин $\{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\}$ образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [4]. При этом компоненты Λ_{ij}^α и $\Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Векторы

$$M_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{(ij)}^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad \bar{M}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i \bar{e}_i$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\bar{\Delta}_{n-p}$ соответственно [3]. Если вектор средней кривиз-

кими), то в каждом из этих случаев p -ткань $\bar{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ является p -тканью линий кривизны относительно соответствующей нормали.

Действительно, так как f конформно, то $\bar{y}_{jz} = \lambda y_{jz}$ ($j, z = 1, \dots, n$) и $\bar{\Delta}_{n-p} = \bar{\Delta}_{n-p}$, где $\bar{\Delta}_{n-p} = f_*(\Delta_{n-p})$. Соотношение (4) дает $\bar{h} = h$, в частности $\bar{e}_\alpha = e_\alpha$. Из (3) и (8) вытекает

$$\bar{a}_j^i = a_j^i - \gamma^{it} N_{tj}^{\alpha_0} \quad (9)$$

В случае а), учитывая, что ортогональный репер R^x переходит в отображении f в ортогональный репер R^y , можно показать, что $N_{kz}^j = 0$ ($j = k, j \neq z, z \neq k$), в частности, $N_{ij}^{\alpha_0} = 0$ ($i \neq j$). Формулы (9) дают $\bar{a}_j^i = 0$ ($i \neq j$).

В случае б), так как распределение Δ_p вполне интегрируемо, то p -ткань Σ_p ортогональна, и мы приходим к случаю а).

В случае в) имеет место соотношение $\bar{a}_j^i = a_j^i = 0$ ($i \neq j$).

Список литературы

1. Тихонов В.А. Сети, определяемые распределениями в аффинном пространстве и их обобщения. - В сб.: Проблемы геометрии. Т. 8. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1977, с. 197-223.

2. Шинкунас Ю.И. О распределении m -мерных плоскостей в n -мерном римановом пространстве. - Труды геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1974, т. 5, с. 123-133.

ны распределения тождественно равен нулю, то распределение называется минимальным [3]. Будем считать, что распределения $\Delta_p, \bar{\Delta}_{n-p}$ - не минимальны.

2. Дифференцируя тождества $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_\alpha = 0$, получим

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik} \omega_k^\beta g_{\beta\alpha}.$$

Отсюда имеем

$$\Lambda_{\alpha j}^i = -g^{ik} \Lambda_{kj}^\beta g_{\beta\alpha}.$$

Так как система величин $\{\Lambda_{kj}^\beta\}$ образует тензор, то система величин $\{\Lambda_{\alpha j}^i\}$ тоже образует тензор.

Для вектора $\bar{\xi} = \xi^\alpha \bar{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}(x)$ тензор $\Lambda_{\alpha j}^i$ определяет аффинор $\Lambda_j^i = \Lambda_{\alpha j}^i \xi^\alpha$ в пространстве $\Delta_p(x)$, а для вектора $\bar{a} = a^i \bar{e}_i \in \Delta_p(x)$ тензор $\Lambda_{i\beta}^\alpha$ определяет аффинор $\Lambda_\beta^\alpha = \Lambda_{i\beta}^\alpha a^i$ в пространстве $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. В качестве вектора берем вектор \bar{M}_p , а в качестве \bar{a} - вектор \bar{M}_{n-p} . Тогда

$$\Lambda_j^i = \frac{1}{p} \Lambda_{\alpha j}^i g^{k\beta} \Lambda_{(k\beta)}^\alpha = \Lambda_{\alpha j}^i m^\alpha, \quad \Lambda_\beta^\alpha = \frac{1}{n-p} \Lambda_{i\beta}^\alpha g^{\gamma\sigma} \Lambda_{(\gamma\sigma)}^i = \Lambda_{i\beta}^\alpha \bar{m}^i,$$

где

$$m^\alpha = \frac{1}{p} g^{k\beta} \Lambda_{(k\beta)}^\alpha, \quad \bar{m}^i = \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma} \Lambda_{(\gamma\sigma)}^i.$$

Пусть векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p$ имеют собственные направления относительно аффинора Λ_j^i , а векторы $\bar{e}_{p+1}, \dots, \bar{e}_n$ - относительно аффинора Λ_β^α . Отсюда имеем

$$\Lambda_{\alpha j}^i m^\alpha = 0 \quad (i \neq j), \quad (2)$$

$$\Lambda_{i\beta}^\alpha \bar{m}^i = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (3)$$

Интегральные линии векторных полей $\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha$ определяют сеть в пространстве E_n . Обозначим ее через $\bar{\Sigma}_n$. Координатные векторы $\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha$ репера направлены по касательным к линиям сети $\bar{\Sigma}_n$. Поэтому формы ω_A^B ($A \neq B$) главные [2]: $\omega_A^B = a_{Ak}^B \omega^k$, где $a_{ik}^\alpha = \Lambda_{ik}^\alpha$, $a_{\alpha k}^i = \Lambda_{\alpha k}^i$. Аналитическими условиями, характеризующими сеть $\bar{\Sigma}_n$ в пространстве E_n , являются соотношения (2), (3).

Сеть $\bar{\Sigma}_n$ можно получить и другим путем. Выберем $n-p$ векторных полей $\bar{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}$ так, чтобы выполнялось условие [1]:

$$\nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{M}_{n-p} \in \Delta(\Delta_p, \bar{e}_\alpha), \quad (4)$$

где ∇ - символ ковариантного дифференцирования в E_n .

Интегральные линии этих векторных полей называются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\bar{M}_{n-p}) \subset \Delta_p$ [1]. Так как в евклидовом пространстве абсолютный дифференциал совпадает с обычным дифференциалом, то из формулы (4) имеем:

$$d_\alpha \bar{M}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma} \Lambda_{(\gamma\sigma)\alpha}^i \bar{e}_i + \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma} \Lambda_{(\gamma\sigma)}^i \Lambda_{i\alpha}^\beta \bar{e}_\beta \in \Delta(\Delta_p, \bar{e}_\alpha).$$

Отсюда получим (3).

Аналогично выберем p векторных полей $\bar{e}_j \in \Delta_p$ так, чтобы выполнялось условие $\nabla_{\bar{e}_j} \bar{M}_p \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \bar{e}_j)$

$$\text{или } d_j \bar{M}_p = \frac{1}{p} g^{k\ell} \Lambda_{(k\ell)}^\alpha \Lambda_{\alpha j}^i \bar{e}_i + \frac{1}{p} g^{k\ell} \Lambda_{(k\ell)\alpha}^\beta \bar{e}_\alpha \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \bar{e}_j).$$

Отсюда получим (2). Таким образом, полученная сеть совпадает с сетью $\bar{\Sigma}_n$. Из вышеизложенного следует

Т е о р е м а I. Направления векторов \bar{e}_α (\bar{e}_i) являются собственными для аффинора Λ_β^α (Λ_j^i) тогда и только тогда, когда интегральные линии векторных полей \bar{e}_α (\bar{e}_i) являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\bar{M}_{n-p})$ ($\Delta_1 = \Delta(\bar{M}_p)$).

Рассмотрим операторы T и O , действующие на векторные поля X, Y пространства E_n по правилу [5]:

$$T_x Y = H \nabla_{V_x} (Y) + V \nabla_{V_x} (HY), \quad (5)$$

$$O_x Y = V \nabla_{V_x} (HY) + H \nabla_{V_x} (Y), \quad (6)$$

где H и V - операторы проектирования на $\Delta_p(x)$ и $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$, соответственно ∇ - символ ковариантного дифференцирования в E_n . Тогда, если имеем (2), то из (6) получим, что

$$O_{\bar{e}_j} \bar{M}_p \parallel \bar{e}_j. \quad (7)$$

Обратно, если имеем (7), то из (6) следует (2). Аналогично, если имеем (3), то из (5) следует, что

$$T_{\vec{e}_p} \vec{M}_{n-p} \parallel \vec{e}_p. \quad (8)$$

Обратно, если имеет место (8), то из (5) получим (3).
Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Данная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\tilde{\Sigma}_n$ для некоторого p -мерного распределения, порождаемого этой сетью, тогда и только тогда, когда имеют место (7), (8).

С л е д с т в и е. Ортогональная голономная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\tilde{\Sigma}_n$ для некоторого p -мерного распределения, порождаемого этой сетью.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях. -Тр.геометрич. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1974, т.6, с.189-204.
2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. -Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1965, №243, с.29-37.
3. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n , и их обобщения. -Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР, 1975, т.7, с.215-229.
5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. -Тр.Геометрич.семинара. ВИНТИ АН СССР, М., 1971, т.3, с.49-94.
5. Gray A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. Jour. Math. and Mechanics, 1967, vol. 16, #7, p. 715-737.

УДК 514.75

В.В.Махоркин

КОНГРУЭНЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В P_6

В шестимерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция квадратичных элементов. Выбор такого объекта исследования обуславливается тем, что это семейство квадратичных элементов является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки первого порядка коранга два и, следовательно, возникают фокальные точки первого порядка коранга два, ранее не изучавшиеся.

Всякой конгруэнции квадратичных элементов в P_6 естественным образом соответствует семейство квадратичных элементов. Пусть открытое множество $U \subset R^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда семейство квадратичных элементов будет [1] шестимерным подмногообразием Z в $U \times P_6$ вместе с его проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \rightarrow U. \quad (1)$$

Кроме того, имеем проекцию на второй сомножитель

$$\pi: Z \rightarrow P_6, \quad (2)$$

причем для всякого $t \in U$, $\pi(p^{-1}(t))$ квадрика квадратичного элемента в P_6 , соответствующая параметру $t \in U$.

Будем считать, что отображение (2) является 1-общим отображением [2], тогда множества $S_1(\pi)$ и $S_2(\pi)$ являются подмногообразиями в Z , причем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi) \cup S_2(\pi), \quad (3)$$

здесь $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения π , $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения π ,

$S_2(\pi)$ множество особых точек коранга два отображения π . Из (3) следует

$$\pi(Z) = \pi(S_0(\pi)) \cup \pi(S_1(\pi)) \cup \pi(S_2(\pi)), \quad (4)$$

здесь $\pi(Z)$ конгруэнция квадратичных элементов в \mathbb{P}_6 .

Для всякого $t \in U$ положим

$$Z_t = Z \cap p^{-1}(t), \quad S_0(\pi)_t = S_0(\pi) \cap p^{-1}(t),$$

$$S_1(\pi)_t = S_1(\pi) \cap p^{-1}(t), \quad S_2(\pi)_t = S_2(\pi) \cap p^{-1}(t).$$

Тогда

$$\pi(Z_t) = \pi(S_0(\pi)_t) \cup \pi(S_1(\pi)_t) \cup \pi(S_2(\pi)_t) \quad (5)$$

для всякого $t \in U$.

Здесь $\pi(S_1(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга один квадррики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$; а $\pi(S_2(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга два квадррики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$ [1].

Используя подвижной репер $\{A_\alpha\} (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 6)$ в \mathbb{P}_6 и располагая вершины A_0, \dots, A_5 в плоскости L_t квадррики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, а вершину A_6 вне плоскости L_t , подмножество Z в $U \times \mathbb{P}_6$ можно задать следующей системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad (i, j, \dots = 0, 1, \dots, 5), \quad (6)$$

кроме того

$$\omega_i^6 = \Lambda_{ia} \tau^a, \quad \theta_{ij} = \Lambda_{ija} \tau^a, \quad (7)$$

$a, b, \dots = 1, 2$, τ^a -инвариантные формы параметрической группы. Величины $a_{ij}, \Lambda_{ia}, \Lambda_{ija}$ зависят от параметра $t \in U$. Тогда [3] критические точки отображения (2) определяют системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \det \|A\| = 0, \quad (8)$$

где

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \Lambda_{i1} x^i & \Lambda_{ij1} x^i x^j \\ \Lambda_{i2} x^i & \Lambda_{ij2} x^i x^j \end{vmatrix}.$$

Фиксируя в системе (8) параметр $t \in U$, получим систему уравнений, определяющих фокальное многообразие первого порядка квадррики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, которое в общем случае является трехмерным алгебраическим многообразием шестого порядка. Однако проведенный выше анализ с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений показывает, что фокальное многообразие первого порядка является объединением многообразия $\pi(S_1(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \text{rang } \|A\| = 1, \quad (9)$$

и многообразия $\pi(S_2(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \Lambda_{ia} x^i = 0, \quad \Lambda_{ija} x^i x^j = 0. \quad (10)$$

Причем в уравнениях (8), (10) фиксирован параметр $t \in U$. Из уравнений (8), (10) следует, что многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$ является нульмерным алгебраическим многообразием порядка восемь, а многообразие $\pi(S_1(\pi)_t)$ представляет собой трехмерное алгебраическое многообразие шестого порядка, определяемое системой уравнений (8) при фиксированном $t \in U$, из которого удалено многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$.

В отличие от фокальных точек первого порядка коранга один, которые характеризуются "фокальностью" вдоль некоторых направлений, фокальные точки первого порядка коранга два характеризуются "фокальностью" вдоль всякого направления, что показывает следующая

Т е о р е м а. Касательная плоскость к поверхности, описываемой фокальной точкой первого порядка коранга два, лежит в касательной плоскости в этой точке к квадрике квадратичного элемента.

Список литературы

1. Махоркин В.В. Фокальные точки первого порядка. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 116-119.
2. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М., 1977.
3. Фам Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М., 1972.

УДК 514.75

Е.А.М и т р о ф а н о в а

ИНВАРИАНТНАЯ СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье решается задача построения расслоенного пространства со структурной группой $A_m^2(n)$ преобразований и соответствующей связностью (A -связностью), инвариантно присоединенной к интегралу, распространенному по произвольной поверхности пространства соприкасающихся элементов.

Рассмотрим интеграл типа $s = \int_{S_m} f(x^j, x_\alpha^i, x_{\alpha\beta}^i) dx^1 \dots dx^m$, (1)

где

$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha}, x_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (j = \overline{1, n}; \alpha = \overline{1, m}; i, j = \overline{m+1, n}),$$

распространенный по некоторой области поверхности S_m в пространстве элементов касания второго порядка многообразия V_n . Дифференциальные уравнения поверхности $S_m \subset V_n$ при соответствующей специализации репера имеют вид:

$$\omega^j = 0, \quad \omega_\alpha^i = 0, \quad \omega_{\alpha\beta}^i = P_{\alpha\beta\gamma}^i \omega^\gamma. \quad (2)$$

Запишем интеграл (1) через инвариантные формы ω^α :

$$s = \int_{S_m} F \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m, \quad \text{где поле } F \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$\Delta F = dF - F \omega_\alpha^i = F_x \omega^x + F_i^\alpha \omega_\alpha^i + F_i^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^i. \quad (3)$$

Здесь $\omega_\alpha^i, \omega_x^j, \omega_{x\alpha}^j$ — структурные формы расслоения реперов $H^p(V_n)$ с известными уравнениями структуры.

Наша задача заключается в том, чтобы фундаментальными объектами поля F возможно низшего порядка охва-

тить поле объекта A — связности. Она решается при помощи канонизации объектов поля F , в результате которой формы $\{\omega_\alpha^i, \omega_{\alpha\beta}^i, \omega_{\alpha\beta\gamma}^i, \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^i, \omega_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}^i\}$ выразятся через базисные формы ω^R ($\omega^x, \omega_\alpha^i, \omega_{\alpha\beta}^i$). Этот набор форм содержится в той оставшейся части, на которую отличаются структурные уравнения базисных форм ω^R , а также форм $\omega_\alpha^i, \omega_{\alpha\beta}^i$, которые в будущем станут формами связности, от структурных уравнений группы $A_m^2(n)$. Для нахождения форм (4) дифференцируем внешним образом уравнение (3), получим выражение вида

$$\Delta F_x \wedge \omega^x + \Delta F_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^i + \Delta F_i^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}^i = 0, \quad (5)$$

откуда по лемме Картана имеем

$$a/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \{\alpha\beta\} - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda + F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma + F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega^j, \quad (6)$$

$$b/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \{\alpha\beta\} - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda + F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma + F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega^j, \quad (6)$$

$$c/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega^R,$$

где

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \omega_{\lambda\mu}^\alpha \delta_\beta^\alpha + \delta_\mu^\alpha \omega_{\lambda\mu}^\beta - \delta_\lambda^\alpha \omega_{\lambda\mu}^\beta; \quad \{\alpha\beta\} = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma. \quad (7)$$

Аналогично расписываются все другие фигурные скобки. Второе (частичное продолжение уравнения (5)) даст нам уравнения

$$a/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda + \{\alpha\beta\} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega^R, \quad (8)$$

$$b/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma + \{\alpha\beta\} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma + F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = 0, \quad (8)$$

$$c/\Delta F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda = dF_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda + \{\alpha\beta\} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega^R,$$

где по примеру формулы (7)

$$\{\alpha\beta\} = F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma - F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_{\lambda\mu}^\lambda. \quad (9)$$

Будем рассматривать тензор $F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ как двухиндексный тензор с парой индексов $(\alpha\beta), (\lambda\mu)$. Налагая на поле F первое условие невырожденности

$$\Phi = \det \| F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma \| \neq 0, \quad (10)$$

можно получить обратный тензор

$$F_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma \cdot F_{\tau\sigma}^{\tau\sigma} \omega_\lambda^\lambda = \delta(\alpha\beta)(\lambda\mu). \quad (11)$$

Для величин

$$F_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma = F_{\lambda\mu\alpha\beta}^i{}^\kappa F_{\kappa e}^{\alpha\beta\gamma} \quad (12)$$

дифференциальные уравнения содержат формы $\tilde{\omega}_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma$ в свободном виде

$$\Delta F_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma = dF_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma + \{i\gamma\} F_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma + F_{\lambda\mu e\beta}^i{}^\gamma \omega_\kappa^\beta - \tilde{\omega}_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma = F_{\lambda\mu e\kappa}^i{}^\gamma \omega^{\kappa R} \quad (13)$$

Величины

$$\hat{F}_e^\gamma = F_e^\gamma - F_i^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma \quad (14)$$

имеют дифференциальные уравнения вида

$$\Delta \hat{F}_e^\gamma = d\hat{F}_e^\gamma + \{\gamma\} \hat{F}_e^\gamma - \hat{F}_e^\gamma \omega_\beta^\beta - F_e^{\delta\kappa} \omega_\beta^\delta = F_{e\kappa}^\gamma \omega^{\kappa R} \quad (15)$$

где $F_e^{\delta\kappa} = (F - F_{\lambda\mu}^i F_i^{\lambda\mu}) \delta_\rho^\delta \delta_e^\kappa + 2F_{\lambda\rho}^i F_i^{\lambda\gamma} \delta_e^\kappa + F_{\lambda\mu}^i F_e^{\lambda\mu} \delta_\rho^\delta$ — тензор, который при условии невырожденности $\Phi_i = \det \|\hat{F}_e^{\beta\gamma}\| \neq 0$ имеет обратный тензор $\hat{F}_{\kappa e}^{\beta\gamma}$. Для величин $\Phi_\kappa^\alpha = \hat{F}_{\kappa e}^{\alpha i} \hat{F}_i^{\beta\gamma}$ дифференциальные уравнения

$$\Delta \Phi_\kappa^\alpha = d\Phi_\kappa^\alpha + \{\alpha\} \Phi_\kappa^\alpha - \omega_\kappa^\alpha = \Phi_{\kappa R}^\alpha \omega^{\kappa R} \quad (16)$$

показывают, что канонизация $\Phi_\kappa^\alpha = 0$ делает формы ω_κ^α главными. В дальнейшем мы будем считать, что все главные формы стоят в правых частях.

Геометрическим объектом $F_{\lambda\mu e}^i{}^\gamma$ охватываются объекты

$$\Phi_{\kappa\alpha}^i = F_{\alpha\rho\kappa}^i{}^\beta, \quad \Phi_{\alpha\beta}^\gamma = F_{\alpha\rho\kappa}^{\gamma\beta}, \quad \tilde{\Phi}_\gamma = \Phi_{i\gamma}^i \quad (17)$$

с дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} a/\Delta \Phi_{\kappa\alpha}^i &= d\Phi_{\kappa\alpha}^i + \{i\} \Phi_{\kappa\alpha}^i - (m+1)\omega_{\kappa\alpha}^i + \delta_\kappa^i \omega_{\beta\alpha}^\beta = \Phi_{\kappa\alpha R}^i \omega^{\kappa R}, \\ b/\Delta \Phi_{\alpha\beta}^\gamma &= d\Phi_{\alpha\beta}^\gamma + \{\gamma\} \Phi_{\alpha\beta}^\gamma - (n-m)\omega_{\alpha\beta}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma \omega_{\kappa\beta}^\kappa - \delta_\beta^\gamma \omega_{\kappa\alpha}^\kappa = \Phi_{\alpha\beta R}^\gamma \omega^{\kappa R}, \\ c/\Delta \tilde{\Phi}_\alpha &= d\tilde{\Phi}_\alpha - \tilde{\Phi}_\beta \omega_\alpha^\beta + (n-m)\omega_{\beta\alpha}^\beta - (p+1)\omega_{\kappa\alpha}^\kappa = \tilde{\Phi}_{\alpha R} \omega^{\kappa R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти уравнения позволяют провести канонизацию

$$\Phi_{\kappa\alpha}^i = \Phi_{\alpha\beta}^\gamma = \tilde{\Phi}_\alpha = 0, \quad (19)$$

при которой формы $\omega_{\kappa\alpha}^i$, $\omega_{\beta\gamma}^\alpha$, $\omega_{\kappa\alpha}^i$ выражаются через формы $\omega_{\rho\gamma}^\beta$ и $\omega^{\kappa R}$. Составим новые величины

$$F_{\lambda\mu\gamma}^i = F_{\lambda\mu\alpha\beta}^i{}^\kappa \cdot F_{\kappa\gamma}^{\alpha\beta}; \quad \Phi_{\lambda\mu\gamma}^i = \frac{1}{3}(F_{\lambda\mu\gamma}^i + F_{\mu\gamma\lambda}^i + F_{\gamma\lambda\mu}^i), \quad \tilde{\Phi}_\alpha = F_\alpha^i - F_\ell^{\lambda\mu} \Phi_{\lambda\mu\alpha}^i \quad (20)$$

причем

$$\Delta \Phi_\alpha = d\Phi_\alpha + \Phi_\beta \omega_\alpha^\beta - \Phi_\alpha \omega_\sigma^\sigma + F_\alpha^\beta \omega_{\gamma\beta}^\delta = \Phi_{\alpha R} \omega^{\kappa R} \quad (21)$$

Если наложить на поле F третье условие невырожденности $\Phi_2 = \det \|\hat{F}_\alpha^\beta\| \neq 0$, то найдется тензор \hat{F}_γ^β , обратный к \hat{F}_α^β . Тогда дифференциальные уравнения

$$\Delta \hat{\Phi}_\alpha = d\hat{\Phi}_\alpha - \hat{\Phi}_\beta \omega_\alpha^\beta - \hat{\Phi}_\alpha \omega_\beta^\beta + \omega_{\gamma\alpha}^\gamma = \hat{\Phi}_{\alpha R} \omega^{\kappa R} \quad (22)$$

величин

$$\hat{\Phi}_\alpha = \hat{F}_\alpha^\beta \Phi_\beta \quad (23)$$

позволяют выполнить канонизацию $\hat{\Phi}_\alpha = 0$, в результате которой $\omega_{\gamma\alpha}^\delta$, а следовательно и в силу (19), формы $\omega_{\rho\gamma}^\beta$, $\omega_{\kappa\alpha}^i$ становятся главными. Все построенные до сих пор объекты охватываются фундаментальным объектом второго порядка. Продолжая уравнения (16), мы получим дифференциальные уравнения объектов третьего порядка

$$\Delta \Phi_{\kappa\beta}^\alpha = d\Phi_{\kappa\beta}^\alpha + \{\alpha\} \Phi_{\kappa\beta}^\alpha - \Phi_{\kappa e}^\alpha \omega_{\lambda\mu\beta}^e - \omega_{\kappa\beta}^\alpha = \tilde{\Phi}_{\kappa\beta R}^\alpha \omega^{\kappa R},$$

$$\Delta \Phi_{\kappa e}^{\alpha\lambda\mu} = d\Phi_{\kappa e}^{\alpha\lambda\mu} + \{\alpha\} \Phi_{\kappa e}^{\alpha\lambda\mu} = \Phi_{\kappa e R}^{\alpha\lambda\mu} \omega^{\kappa R}.$$

Для величин $\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^\alpha = \Phi_{\kappa\beta}^\alpha - \Phi_{\kappa e}^{\alpha\lambda\mu} \omega_{\lambda\mu\beta}^e$ дифференциальные уравнения имеют вид: $d\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^\alpha + \{\alpha\} \tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^\alpha - \omega_{\kappa\beta}^\alpha = \tilde{\Phi}_{\kappa\beta R}^\alpha \omega^{\kappa R}$.

Отсюда видно, что, проводя канонизацию $\tilde{\Phi}_{\kappa\beta}^\alpha = 0$, формы $\omega_{\kappa\beta}^\alpha$ становятся главными. Учитывая теперь, что часть форм стали главными, $\Delta F_{\lambda\mu\gamma}^i = dF_{\lambda\mu\gamma}^i + \{i\} F_{\lambda\mu\gamma}^i - \omega_{\lambda\mu\gamma}^i = \tilde{F}_{\lambda\mu\gamma R}^i \omega^{\kappa R}$, $\Delta F_{\lambda\mu\kappa}^i = dF_{\lambda\mu\kappa}^i + \{i\} F_{\lambda\mu\kappa}^i - F_{\lambda\mu\alpha\beta}^i F_{\kappa}^{\alpha\beta} \omega_{e\kappa}^e - \omega_{\lambda\mu\kappa}^i = \tilde{F}_{\lambda\mu\kappa R}^i \omega^{\kappa R}$. При канонизации $F_{\lambda\mu\gamma}^i = 0$, $F_{\lambda\mu\kappa}^i = 0$ формы $\omega_{\lambda\mu\gamma}^i$ обращаются в главные, а

$$\omega_{\lambda\mu\kappa}^i = -F_{\lambda\mu\alpha\beta}^i F_{\kappa}^{\alpha\beta} \omega_{e\kappa}^e - \tilde{F}_{\lambda\mu\kappa R}^i \omega^{\kappa R} \quad (24)$$

Наконец, для получения форм $\omega_{e\kappa}^j$ обратимся к относительно инварианту $\Phi = \det \|\Gamma_{\kappa}^{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda\mu}\|$, дифференциальное уравнение которого имеет вид $\Delta \Phi = d\Phi - \Phi[a\omega_\kappa^{\kappa} + b\omega_\gamma^{\gamma}] = \hat{\Phi}_\kappa^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^\kappa + \hat{\Phi}_\kappa^{\alpha\gamma} \omega_{\alpha\gamma}^\kappa + \hat{\Phi}_\kappa^{\alpha\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma}^\kappa$, где $a = m(m+1)$, $b = \frac{1}{2}(n-m)(m+1)(m-4)$. Введем в рассмотрение тензоры $\hat{F}_{\lambda\mu\gamma}^i = F_{\lambda\mu\gamma}^i - \Phi_{\lambda\mu\gamma}^i$, $\hat{\Phi}_\gamma = \hat{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}^i F_{\alpha\beta\gamma}^i$ и симметрический по κ и ℓ тензор $\Phi_{\kappa\ell} = \hat{\Phi}_\beta \hat{\Phi}_\gamma \hat{\Phi}_\lambda \hat{\Phi}_\mu F_{\kappa}^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu}$ с дифференциальными уравнениями $\Delta \Phi_{\kappa\ell} = d\Phi_{\kappa\ell} + \{\kappa\ell\} \Phi_{\kappa\ell} - \Phi_{\kappa\ell} (4a\omega_\ell^\ell + (4b+1)\omega_\alpha^\alpha) = \Phi_{\kappa\ell i} \omega^i + \Phi_{\kappa\ell\alpha} \omega_\alpha^i + \Phi_{\kappa\ell}^i \omega_\alpha^i + \Phi_{\kappa\ell}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}^i$. (25)

Запишем частичное продолжение уравнений (24)

$$d\Phi_{\kappa\ell} + \{\kappa\ell i\} \Phi_{\kappa\ell} - \Phi_{\kappa\ell i} (4a\omega_\ell^i + (4b+1)\omega_\alpha^\alpha) - \hat{\Phi}_{\kappa\ell j} \omega_{\rho i}^j = \Phi_{\kappa\ell R} \omega^{\kappa R}.$$

Ю. И. Попов

ОБ ОДНОМЕРНЫХ НОРМАЛЯХ ПЕРВОГО РОДА
 $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Настоящая работа является продолжением работ [7], [8] автора, посвященных построению общей теории регулярных трехсоставных распределений, которые мы называли $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределениями [8]. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределение — это тройка распределений проективного пространства P_n , состоящая из базисного распределения 1-го рода τ -мерных линейных элементов $\Pi_\tau \equiv \Lambda$ (Λ -распределение), оснащающего распределения 1-го рода m -мерных линейных элементов $\Pi_m \equiv M$ ($m > \tau$) (M -распределение) и оснащающего распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов $\Pi_{n-1} \equiv H$ ($\tau < m < n-1$) (H -распределение) с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре X следующего вида: $X \in \Lambda \subset M \subset H$.

Исследование ведется относительно специализированного репера $\mathcal{R}_L(N, M)$ [8, §3].

Под одномерными нормальными 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения мы понимаем одномерные нормали 1-го рода оснащающего H -распределения. В дифференциальной окрестности 2-го порядка построены поля нормалей 1-го рода $\mathcal{P}(L_0)$ и $\mathcal{Q}(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, ассоциированные с нормалью Михэйлеску 1-го рода $\mathcal{M}(L_0)$. Построена конструкция, позволяющая с каждой одномерной нормалью ν 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения связать три однопараметрических пучка (ν, \mathcal{P}_ν) , (ν, \mathcal{Q}_ν) , $(\mathcal{P}_\nu, \mathcal{Q}_\nu)$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, где $\mathcal{P}_\nu(L_0)$, $\mathcal{Q}_\nu(L_0)$ — одномерные нормали H -распределения, соответствующие в обобщенном

Аналогично предыдущим рассуждениям, налагая на поле F четвертое условие невырожденности $\Phi_3 = \det \|\check{\Phi}_{\kappa\epsilon j}^p\| \neq 0$, используя обратный тензор $\hat{\Phi}_s^{\kappa\epsilon i}$ для $\check{\Phi}_{\kappa\epsilon j}^p$ с помощью соответствующей канонизации $\hat{\Phi}_{ie}^j = \Phi_{\kappa\epsilon i}$, $\check{\Phi}_{\epsilon}^{\kappa p j} = 0$, сделаем формы ω_{ik}^i , и следовательно, в силу (24) формы $\omega_{\lambda\mu\kappa}^i$ главными. Таким образом, все формы (4) выражены через базисные формы ω^R , что позволяет заключить, что пространство S_m^n является пространством с A -связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1); в результате чего возникают следующие структурные уравнения форм A -связности

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Omega^\alpha,$$

$$d\omega^i = \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^i + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i,$$

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\beta^j \wedge (\delta_\alpha^\beta \omega_j^i - \delta_j^\alpha \omega_\alpha^i) + \omega^\beta \wedge \omega_{\alpha\beta}^i + \Omega_{\alpha\beta}^i,$$

$$d\omega_{\alpha\beta}^i = \omega_{\lambda\mu}^j \wedge (\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu \omega_j^i - \delta_\alpha^\lambda \delta_j^\mu \omega_\beta^i - \delta_\beta^\mu \delta_j^\alpha \omega_\alpha^i) + \Omega_{\alpha\beta}^i,$$

$$d\omega_\beta^\alpha = \omega_\gamma^\lambda \wedge \omega_\lambda^\alpha + \Omega_\beta^\alpha,$$

$$d\omega_\kappa^i = \omega_\epsilon^l \wedge \omega_\epsilon^i + \Omega_\kappa^i.$$

Таким образом, в силу теоремы Лаптева-Картана с пространством S_m^n ассоциируется расслоение, наделенное A -связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1). В случае равенства нулю форм кривизны-кручения $\Omega = 0$ интеграл в подходящей системе координат выражается только через вторые производные.

Список литературы

1. Митрофанова Е. А. Однородное пространство представления группы $A_m^p(n)$. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 62-63.

проективитете Бомпьяни-Пантази [3] соответственно плоскостям $\mathcal{P}(L_0)$ и $\mathcal{Q}(L_0)$ [8, § 5] Нордена-Тимофеева [4][2].

Во всей работе мы придерживаемся обозначений работ [7], [8], а также следующей схемы использования индексов: $\overline{J}, \overline{j}, \overline{K} = \overline{0, n}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $\sigma, \tau, \rho, \varepsilon = \overline{1, n-1}$; $i, j, k = \overline{1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}$; $u, v = \overline{1, n-1}$; $p, q = \overline{1, \tau}$; $J, j, K = \overline{1, n}$.

1. Нормаль O_f . Сущность соответствия Бомпьяни-Пантази для распределения гиперплоскостных элементов [6], [3] состоит в том, что нормаль 2-го рода, соответствующая в проективитете Бомпьяни-Пантази некоторой нормали $\hat{1}$ -го рода, является характеристикой элемента при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению этих нормалей $\hat{1}$ -го рода.

Пусть плоскость Нордена-Тимофеева $\mathcal{Q}(L_0)$, определенная объектом $\{Q_{\sigma}\}$ [8, § 5], является характеристикой гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей $\hat{1}$ -го рода $O_f(L_0)$, определяемых некоторым геометрическим объектом $\{Q_n^{\sigma}\}$. Построим охват объекта $\{Q_n^{\sigma}\}$. Предварительно найдем уравнения, определяющие характеристику гиперплоскости $H(L_0)$ [8, § 4] в репере $\mathcal{R}_L(H, M)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta_0^{\sigma} = Q_n^{\sigma} \theta_0^n, \quad \theta_0^n = \mu^n \theta, \quad (\mu^n \neq 0, \mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1), \quad (1)$$

принадлежащим распределению нормалей $O_f(L_0)$. В результате получим

$$y^{\circ} + (A_{\sigma n}^n + A_{\sigma p}^n Q_n^{\rho}) y^{\sigma} = 0, \quad y^n = 0. \quad (2)$$

Введенные здесь функции [8, см. § 3, § 4]

$$A_{\sigma n}^n \equiv \{F_{\alpha n}^n; H_{\alpha n}^n\} \equiv \{L_{pn}^n, H_{in}^n; H_{\alpha n}^n\} \equiv \{L_{pn}^n; H_{un}^n\}, \quad (3)$$

$$A_{\sigma p}^n \equiv \{F_{\alpha \varepsilon}^n, H_{\alpha \varepsilon}^n; F_{\alpha \beta}^n, H_{\alpha \beta}^n\} \equiv \{B_{pq}^n, B_{uq}^n; L_{pv}^n, H_{uv}^n\} \equiv \{A_{\sigma q}^n, A_{\sigma v}^n\},$$

в силу формул (3.62), (3.64), (4.17), (4.18), (4.79) работы [8] в репере $\mathcal{R}_L(H, M)$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla^{\theta} A_{\sigma n}^n = A_{\sigma \tau}^n \theta_n^{\tau} + \theta_{\sigma}^{\circ} + A_{\sigma n k}^n \omega_0^k, \quad (4)$$

$$\nabla^{\theta} A_{\sigma p}^n = A_{\sigma p k}^n \omega_0^k. \quad (5)$$

Плоскость (2) совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева $\mathcal{Q}(L_0)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$Q_{\sigma} = -(A_{\sigma n}^n + A_{\sigma p}^n Q_n^{\rho}). \quad (6)$$

В общем случае

$$A = \det \|A_{\sigma p}^n\| \neq 0, \quad (7)$$

что позволяет ввести в рассмотрение обращенный тензор $A_n^{\sigma \rho}$, удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla^{\theta} A_n^{\sigma \rho} = A_{n k}^{\sigma \rho} \omega_0^k \quad (8)$$

и конечным соотношениям

$$A_{\sigma \tau}^n A_n^{\tau \rho} = \delta_{\sigma}^{\rho}, \quad A_{\sigma p}^n A_n^{\tau \sigma} = \delta_p^{\tau}. \quad (9)$$

Свернув уравнения (6) с тензором $A_n^{\sigma \tau}$, представим их в виде

$$Q_n^{\tau} = -A_n^{\tau \sigma} (Q_{\sigma} + A_{\sigma n}^n). \quad (10)$$

Таким образом, (п-2)-мерные плоскости (6) и $\mathcal{Q}(L_0)$ [8, § 5] совпадают тогда и только тогда, когда имеет место формула (10) охвата объекта $\{Q_n^{\tau}\}$, компоненты которого в репере $\mathcal{R}_L(H, M)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla^{\theta} Q_n^{\sigma} + \theta_n^{\sigma} = Q_n^{\sigma k} \omega_0^k. \quad (11)$$

Отсюда следует, что поле геометрического объекта $\{Q_n^{\sigma}\}$ определяет поле нормалей $\hat{1}$ -го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения.

2. Нормаль Михэйлеску. Нормаль Михэйлеску $\hat{1}$ -го рода $\{M_n^{\sigma}\}$ H -распределения (или, что то же, $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -рас-

пределения) определяется во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента и имеет следующее строение (находится аналогично построениям Балазюк Т.Н. [1]):

$$M_n^\sigma = -\frac{1}{2(n+1)} (W_{\xi\tau\rho}^n + W_{\xi\tau n}^n H_\rho^n + W_{\rho\tau}^n H_{\xi n}^n + W_{\xi\rho}^n H_{\tau n}^n + W_{\xi\tau}^n H_{\rho n}^n) W_n^{\sigma\xi} W_n^{\tau\rho}, \quad (12)$$

где совокупность функций $\{W_n^{\sigma\xi}\}$ образует обращенный тензор 1-го порядка (вообще говоря, несимметрический) для тензора $\{W_{\xi\rho}^n\}$ [8, § 2]:

$$W_n^{\sigma\xi} W_{\xi\rho}^n = \delta_\rho^\sigma, \quad W_n^{\sigma\xi} W_{\rho\sigma}^n = \delta_\rho^\xi, \quad \nabla W_n^{\sigma\xi} = W_{n\alpha\kappa}^{\sigma\xi} \omega_\sigma^\alpha, \quad (13)$$

а совокупность функций $\{W_n^{\tau\rho}\}$ является обращенным симметрическим тензором $\hat{1}$ -го порядка относительно симметрического тензора $\hat{1}$ -го порядка

$$W_{\xi\rho}^n = \frac{1}{2} (W_{\xi\rho}^n + W_{\rho\xi}^n). \quad (14)$$

Оператор $\nabla^{(9)}$ записан относительно форм $\mathcal{V}_{\overline{\tau}}^{\overline{\sigma}}$, являющихся компонентами инфинитезимального перемещения репера нулевого порядка $\mathcal{R}_\tau(H)$, определенного точками:

$$A_\sigma, \quad T_\sigma = A_\sigma + H_\sigma^n A_n, \quad T_n = A_n. \quad (15)$$

Величины M_n^σ в репере $\mathcal{R}_\tau(H)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla M_n^\sigma + \mathcal{V}_n^\sigma = M_{n\alpha\kappa}^\sigma \omega_\sigma^\alpha, \quad (16)$$

а относительно репера $\mathcal{R}(H)$ [8, § 3] формулы охвата объекта $\{M_n^\sigma\}$ совпадают с формулами, введенными в работе [6], и удовлетворяют уравнениям вида

$$\nabla M_n^\sigma + \omega_n^\sigma = M_{n\alpha\kappa}^\sigma \omega_\sigma^\alpha. \quad (17)$$

В репере $\mathcal{R}_L(H, M)$ нормаль Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$ определяется системой уравнений:

$$y^\sigma = \mathcal{M}_n^\sigma y^n, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{M}_n^i = M_n^i - \Lambda_q^i M_n^q; \quad \mathcal{M}_n^p = M_n^p; \quad \mathcal{M}_n^\alpha = M_n^\alpha, \quad (19)$$

причем величины M_n^σ удовлетворяют уравнениям (17). В силу этого относительно репера $\mathcal{R}_L(H, M)$ компоненты объекта $\{\mathcal{M}_n^\sigma\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \mathcal{M}_n^\alpha + \mathcal{M}_n^\alpha \theta_\alpha^\alpha + \theta_n^\alpha = \mathcal{M}_{n\alpha\kappa}^\alpha \omega_\sigma^\alpha, \quad (20)$$

$$\nabla \mathcal{M}_n^\alpha + \theta_n^\alpha = \mathcal{M}_{n\alpha\kappa}^\alpha \omega_\sigma^\alpha. \quad (21)$$

3. Нормаль \mathcal{P} . Построим еще одну нормаль 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, используя построенную нами ранее нормаль 2-го рода H -распределения - плоскость Нордена-Тимофеева $\mathcal{P}(L_0)$ [8, § 5]. Пусть в проективите Бомпьяни-Пантази плоскость Нордена-Тимофеева, определенная объектом $\{\rho_\sigma\}$ [8, § 5], является характеристикой гиперплоскости при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей 1-го рода $\mathcal{P}(L_0)$, определяемых некоторым геометрическим объектом $\{\rho_n^\sigma\}$. Построим охват искомого объекта $\{\rho_n^\sigma\}$ нормали $\mathcal{P}(L_0)$, следуя работам [1], [6].

Характеристика гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta_\sigma^\sigma = \rho_n^\sigma \theta_\sigma^n, \quad \theta_\sigma^n = \mu^n \theta, \quad (\mu^n \neq 0, \mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1), \quad (22)$$

принадлежащим распределению нормали $\mathcal{P}(L_0)$, определяется системой уравнений

$$y^\sigma + (A_{\sigma n}^n + A_{\sigma\tau}^n \rho_n^\tau) y^\sigma = 0, \quad y^n = 0. \quad (23)$$

($n-2$)-мерная плоскость, определяемая в текущем элементе

$H(L_0)$ системой уравнений (23), совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева $\mathcal{P}(L_0)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\mathcal{P}_\sigma = - (A_{\sigma n}^n + A_{\sigma \tau}^n \mathcal{P}_n^\tau). \quad (24)$$

Свернув уравнения (24) с тензором $A_n^{\tau\sigma}$, удовлетворяющим условиям (9), приведем эти уравнения к виду

$$\mathcal{P}_n^\tau = - A_n^{\tau\sigma} (\mathcal{P}_\sigma + A_{\sigma n}^n). \quad (25)$$

Значит, $(n-2)$ -мерные плоскости (23) и $\mathcal{P}(L_0)$ [8, § 5] совпадают тогда и только тогда, когда охват объекта $\{\mathcal{P}_n^\tau\}$ имеет вид (25). Компоненты объекта $\{\mathcal{P}_n^\tau\}$ в репере $\mathcal{X}_L(H, M)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \mathcal{P}_n^\tau + \theta_n^\tau = \mathcal{P}_{n\alpha}^\tau \omega_\alpha^x. \quad (26)$$

Отсюда следует, что поле геометрического объекта $\{\mathcal{P}_n^\tau\}$ определяет поле нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения. Так как охваты объектов $\{\mathcal{P}_n^\tau\}$ и $\{O_n^\tau\}$, определяющих соответственно одномерные нормали $\mathcal{P}(L_0)$ и $O_f(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, существенно зависят от выбранной нами одномерной нормали $\nu(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, то будем говорить, что нормали $\mathcal{P}(L_0)$ и $O_f(L_0)$ ассоциированы с одномерной нормалью $\nu(L_0)$. В общем случае такие нормали будем обозначать \mathcal{P}_ν и $O_{f\nu}$. Отметим, что нормали 1-го рода $\mathcal{P}(L_0)$ и $O_f(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения ассоциированы с нормалью Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$, так как соответствующие им при построении плоскости Нордена-Тимофеева $\mathcal{P}(L_0)$ и $O_f(L_0)$ построены [8] с существенным использованием нормали Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$.

Можно показать, что среди объектов $\{O_n^\tau\}$ (10), $\{\mathcal{M}_n^\tau\}$ (19), $\{\mathcal{P}_n^\tau\}$ (25) нет ни одной пары совпадающих и что ни один из них не является комбинацией двух других.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Поля объектов $\{\mathcal{P}_n^\tau\}, \{O_n^\tau\}, \{\mathcal{M}_n^\tau\}$ определяют внутренним инвариантным образом во второй дифференциальной окрестности три однопараметрических пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M}), (O, \mathcal{M}), (\mathcal{P}, O)$ одномерных нормалей $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, ассоциированных с нормалью Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$.

З а м е ч а н и е. При $\tau = m$, т.е. в случае гиперполосного распределения плоскости $\mathcal{P}(L_0)$ и $O_f(L_0)$ Нордена-Тимофеева оснащающего H -распределения совпадают [8] и, следовательно, $\mathcal{P}(L_0) \equiv O_f(L_0)$. Значит, в этом случае мы имеем только один пучок (из трех) нормалей $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ 1-го рода H -распределения, ассоциированный с нормалью Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$.

Имеет место более общее утверждение:

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ (t - порядок внутренней инвариантной нормали ν) внутренним инвариантным образом присоединяются три однопараметрических пучка $(\nu, \mathcal{P}_\nu), (\nu, O_{f\nu}), (\mathcal{P}_\nu, O_{f\nu})$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения, ассоциированных с нормалью ν , где $\mathcal{P}_\nu, O_{f\nu}$ - одномерные нормали H -распределения, соответствующие в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази соответственно плоскостям \mathcal{P} и O_f Нордена-Тимофеева.

Любая нормаль, принадлежащая одному из пучков $(\nu, \mathcal{P}_\nu), (\nu, O_{f\nu}), (\mathcal{P}_\nu, O_{f\nu})$ вместе с $H\Lambda$ - виртуальной нормалью 1-го рода $\chi(L_0)$ [8, (4.8)] порождает двойственную нормализацию базисного Λ -распределения в смысле Нордена-Чакмазяна [5], [9]. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ (t - порядок внутренней инвариантной нормали $\nu(L_0)$ 1-го рода H -распределения) внутренним инвариантным образом присоединяются к Λ -распределению три однопараметрических пучка двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна [5], [9] с общей осью плоскостью $\chi(L_0)$.

Аналогично, любая нормаль $\mathbb{1}$ -го рода \mathbb{H} -распределения, принадлежащая одному из пучков $(\nu, \mathcal{P}_\nu), (\nu, \mathcal{Q}_\nu), (\mathcal{P}_\nu, \mathcal{Q}_\nu)$, где ν - внутренняя инвариантная нормаль порядка $t \geq 2$, вместе с $\mathbb{H}\mathbb{M}$ - виртуальной нормалью $\mathbb{1}$ -го рода $\Phi(L_0)$ [8, (4.22)] порождает двойственную нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна.

В результате приходим к следующему предложению.

Т е о р е м а 4. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ внутренним инвариантным образом присоединяются к оснащающему \mathbb{M} -распределению три однопараметрических пучка двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна с общей осью - плоскостью $\Phi(L_0)$.

4. Канонические касательные пучков $(\mathcal{P}, \mathcal{M}), (\mathcal{Q}, \mathcal{M}), (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Рассмотрим три пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M}), (\mathcal{Q}, \mathcal{M}), (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ инвариантных нормалей $\mathbb{1}$ -го рода $\mathcal{H}(M(\lambda))$ -распределения, ассоциированных с нормалью Михайлеску $\mathcal{M}(L_0)$, которые зададим соответственно в виде:

$$\mathcal{X}_n^\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_n^\sigma + \nu(\mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma) \equiv \mathcal{P}_n^\sigma + \nu \mathcal{X}_n^\sigma, \quad (27)$$

$$\mathcal{Y}_n^\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}_n^\sigma + \eta(\mathcal{Q}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma) \equiv \mathcal{Q}_n^\sigma + \eta \mathcal{Y}_n^\sigma, \quad (28)$$

$$\mathcal{Z}_n^\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P}_n^\sigma + \chi(\mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{Q}_n^\sigma) \equiv \mathcal{P}_n^\sigma + \chi \mathcal{Z}_n^\sigma, \quad (29)$$

где ν, η, χ - абсолютные инварианты. Так как $\{\mathcal{M}_n^\sigma\}, \{\mathcal{P}_n^\sigma\}$, и $\{\mathcal{Q}_n^\sigma\}$ - тензоры второго порядка, то каждая из совокупностей функций

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{X}_n^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma, & \mathcal{Y}_n^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma, \\ \mathcal{Z}_n^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{Q}_n^\sigma \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

образует тензор второго порядка:

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{X}_n^\sigma = \mathcal{X}_{\text{нк}}^\sigma \omega_o^\kappa, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{Y}_n^\sigma = \mathcal{Y}_{\text{нк}}^\sigma \omega_o^\kappa, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{Z}_n^\sigma = \mathcal{Z}_{\text{нк}}^\sigma \omega_o^\kappa. \quad (31)$$

Условно будем считать, что значению $\nu = \infty$ соответствует в плоскости текущего элемента \mathbb{H} -распреде-

ления прямая $\mathcal{X}(L_0)$, по которой плоскость $[\mathcal{P}, \mathcal{M}]$ пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ сечет соответствующий элемент \mathbb{H} -распределения, т.е. плоскость $\mathbb{H}(L_0)$. Прямая

$$\mathcal{X} = [L_0, \mathcal{X}_n = \mathcal{X}_n^\sigma L_\sigma], \quad (32)$$

натянутая на точки $L_0, \mathcal{X}_n = \mathcal{X}_n^\sigma L_\sigma$, называется канонической касательной пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$.

Аналогичным образом находим, что прямые

$$\mathcal{Y} = [L_0, \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_n^\sigma L_\sigma], \quad (33)$$

$$\mathcal{Z} = [L_0, \mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_n^\sigma L_\sigma]$$

являются каноническими касательными соответственно пучков (28) и (29). Резюмируя результаты этого пункта, приходим к выводу:

Т е о р е м а 5. В дифференциальной окрестности второго порядка к оснащающему \mathbb{H} -распределению в каждом центре L_0 внутренним инвариантным образом присоединяются три однопараметрических пучка $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), (\mathcal{X}, \mathcal{Z}), (\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ канонических касательных, порожденных пучками (27)-(29).

Геометрические объекты

$$\left\{ \begin{aligned} \{\mathcal{X}_n^u\}, \{\mathcal{X}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{X}}_n^p &\equiv \mathcal{X}_n^p - \chi_i^p \mathcal{X}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{X}_n^\alpha\}, \\ \{\mathcal{Y}_n^u\}, \{\mathcal{Y}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{Y}}_n^p &\equiv \mathcal{Y}_n^p - \chi_i^p \mathcal{Y}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{Y}_n^\alpha\}, \\ \{\mathcal{Z}_n^u\}, \{\mathcal{Z}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{Z}}_n^p &\equiv \mathcal{Z}_n^p - \chi_i^p \mathcal{Z}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{Z}_n^\alpha\} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

являются тензорами второго порядка, равенство нулю которых характеризует взаимное расположение соответственно канонических касательных $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ (в каждом центре L_0) с инвариантными плоскостями $\Lambda(L_0), M(L_0), \chi(L_0)$ [8, §4], лежащими в гиперплоскости $\mathbb{H}(L_0)$.

Действительно, имеют место следующие предложения [1]:

1/ каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)$ (соответственно $\mathcal{Y}(L_0), \mathcal{Z}(L_0)$) тогда и только тогда принадлежит плоскости $\Lambda(L_0)$, когда тензор \mathcal{X}_n^u (соответственно $\mathcal{Y}_n^u, \mathcal{Z}_n^u$) равен нулю;

УДК 514.75

А. Г. Резников

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ ГРУПП ЛИ

В работе [1] была выяснена связь между расслоениями трехмерной сферы S^3 со стандартной метрикой на геодезические окружности и сжимающими отображениями сферы S^2 , также снабженной стандартной метрикой и расстоянием. Такой подход позволяет распространить указанную связь на случай расслоений групп. Пусть $H \subset G$ — компактные группы Ли, причем G связана, $M = G/H$ — соответствующее однородное пространство. Назовем подгруппу H обширной, если выполнены следующие условия: 1/ нормализатор $N(H)$ подгруппы H совпадает с H ; 2/ действие H на проектификации факторпространства G/H транзитивное (\mathcal{O} и \mathcal{I} — алгебры Ли групп G, H).

В силу компактности H пространство M можно снабдить G — инвариантной римановой метрикой, а сами группы G, H — би-инвариантными метриками. Легко видеть, что условие 2' эквивалентно следующему:

2'/ группа G транзитивно действует на эквидистантных парах, т.е. если $\rho(x, y) = \rho(x_1, y_1)$, то существует $g \in G$ такой, что $gx = x_1, gy = y_1$ (ρ — риманово расстояние на M). В качестве примера обширной подгруппы $H \subset G$ можно

поэтому взять вложения $SO(n) \subset SO(n+1)$ или $SU(n) \subset SU(n+1)$. Обширна и подгруппа $S^1 \approx SO(2) \subset SU(2) \approx S^3$. Мы получим полное описание расслоений группы G на вполне геодезические слои вида $\{Hg\}$, где $f, g \in G$.

Прежде всего выясним, до какой степени элементы f, g определены множеством $F = \{Hg\}$. Пусть f' и g' — другие элементы, такие, что $\{Hg\} = F = \{f'Hg'\}$. Имеем $f'^{-1}\{Hg\}g'^{-1} = H$;

2/ каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0), \mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $M(L_0)$, когда тензор $\mathcal{X}_n^\alpha(\mathcal{Y}_n^\alpha, \mathcal{Z}_n^\alpha)$ равен нулю;

3/ каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0), \mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $\mathcal{X}(L_0)$ ([8, §4]), когда тензор $\mathcal{X}_n^p(\mathcal{Y}_n^p, \mathcal{Z}_n^p)$ равен нулю.

Список литературы

1. Балазюк Т. Н. Дифференциальная геометрия m -мерных линейных элементов, оснащенных конусом. II. ВИНТИ АН СССР, М., 1978, 23 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 24 января 1978 г., № 268-78 Деп.)

2. Домбровский Р. Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m, r}$ в R_n . Всесоюз. конф. по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского". Казань, Тезисы докл., 1976, с. 69.

3. Лаптев Г. Ф., Н. М. Остиану. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. — Тр. Геометрич. семинара. ВИНТИ АН СССР, т. 3, с. 49-94.

4. Норден А. П., Тимофеев Г. Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств. — Известия высших учебн. заведений. Математика, 1972, № 8 (123); с. 81-89.

5. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976.

6. Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. — Тр. Геометрич. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1973, т. 4, с. 71-120.

7. Попов Ю. И. О голономности $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределения. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с. 71-78.

8. Попов Ю. И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства. I. Калининград, 1984, 93 с., библиогр. 21 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР 2 июля 1984 г., № 4481-84 Деп.)

9. Чакмазян А. В. Двойственная нормализация. — Докл. АН Арм. ССР, 1959, 28, № 4, с. 151-157.

пусть $f^{-1}f = \alpha$, $g g^{-1} = \beta$, так что $\alpha H \beta = H$. В частности, $\alpha \beta = h \in H$, откуда $\beta = \alpha^{-1} h$, и поэтому $\alpha H \alpha^{-1} = H$. Значит, в силу свойства 1/ элементы α, β лежат в H , так что $f \in f'H$, $g \in Hg'$.

Л е м м а 1. Множество F вида fHg однозначно определяет два элемента $f \in G/H$ и $g \in G/H$, где $\bar{d} = dH$. Очевидно, что и обратно, два элемента $f, g \in M = G/H$ определяют корректно многообразие $F = fHg^{-1}$. В дальнейшем такую пару $(f, g) \in M \times M$ будем называть ассоциированной с множеством F .

Л е м м а 2. Пусть $H \subset G$ — обширная группа, F_1, F_2 — два многообразия вида fHg , $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — ассоциированные с ними пары. Пересечение $F_1 \cap F_2$ непусто тогда и только тогда, когда $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i = f_i H, y_i = g_i H, i=1, 2$. Непустота $F_1 \cap F_2$ означает, что существуют такие $\alpha, \beta \in H$, что $f_1 \alpha g_1^{-1} = f_2 \beta g_2^{-1}$, или, иначе, $f_1^{-1} f_2^{-1} f_1 \alpha = g_2^{-1} g_1$. С другой стороны, в силу G -инвариантности метрики и расстояния на M , $f(x_1, x_2) = f(f_1, f_2) = f(f_2^{-1} f_1, \bar{e})$; и аналогично $f(y_1, y_2) = f(g_2^{-1} g_1, \bar{e})$. В силу условия 2/ равенство $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$ эквивалентно существованию такого элемента $\gamma \in G$, что $\gamma \bar{e} = \bar{e}$ и $\gamma f_2^{-1} f_1 = g_2^{-1} g_1$, т.е. $\gamma \in H$ и существует такое $\delta \in H$, что $\gamma f_2^{-1} f_1 = g_2^{-1} g_1 \delta$. Лемма доказана.

Нам понадобится понятие сжимающего отображения, несколько отличное от обычного. Пусть M — компактное метрическое пространство с функцией расстояния ρ . Отображение $\psi: M \rightarrow M$ будем называть сжимающим, если $\rho(\psi x, \psi y) < \rho(x, y)$ для всех $x, y \in M, x \neq y$. Любое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.

Пусть теперь E — локально-тривиальное расслоение группы G на слои вида fHg , где H — обширная подгруппа. Рассмотрим подмножество $A \subset M \times M$, состоящее из пар, ассоциированных со слоями E . Через A^{-1} будем обозначать обратное отношение.

Т е о р е м а 1. Либо A , либо A^{-1} является графиком

сжимающего отображения из M в M . Обратно, если $\varphi: M \rightarrow M$ — сжимающее отображение, A — его график, то множество многообразий F , ассоциированных с парами из A (или A^{-1}), определяет расслоение группы G на вполне геодезические слои вида fHg .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B — база расслоения E ; очевидно, $\dim B = \dim M$. Отображение $\tau: B \rightarrow M \times M$, сопоставляющее точке $\rho \in B$ пару из $M \times M$, ассоциированную с соответствующим слоем E , очевидно, непрерывно. Очевидно, что $A = \bigcup_m \tau$. Пусть τ_1, τ_2 — суперпозиции τ с проекциями на первый и второй сомножители $M \times M$, ρ и ρ' — две различные точки B . Слои над ρ и ρ' не пересекаются, поэтому по лемме 2, $\rho(\tau_1 \rho, \tau_1 \rho') \neq \rho(\tau_2 \rho, \tau_2 \rho')$. Так как обе части последнего неравенства непрерывно зависят от ρ, ρ' , а B связно вместе с G , то либо всегда $\rho(\tau_1 \rho; \tau_1 \rho') > \rho(\tau_2 \rho, \tau_2 \rho')$, либо наоборот. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично). Имеем $\rho(\tau_1 \rho, \tau_1 \rho') > 0$ т.е. τ_1 инъективно. Из теоремы об инвариантности области, совпадения размерностей B и M и компактности B и M следует, что τ_1 — гомеоморфизм. Значит $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ — корректно определенное сжимающее отображение.

Обратно, пусть $\varphi: M \rightarrow M$ — сжимающее отображение, $F(\rho)$ ($\rho \in M$) — многообразие вида fHg , ассоциированное с парой $(\rho, \varphi(\rho))$. Мы хотим показать, что набор слоев $F(\rho)$ определяет расслоение G над M . Рассмотрим ситуацию локально, в некоторой окрестности 0 точки a . Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$ (общий случай сводится к этому при помощи суперпозиции со сдвигом). Пусть $s: 0 \rightarrow G$, $s(\bar{a}) = a$ — локальное сечение канонического расслоения $G \rightarrow M$, тогда, очевидно $F(\rho) = s(\rho) H s(\varphi(\rho))^{-1}$. Слои $F(\rho)$ не пересекаются в силу леммы 2. Рассмотрим отображение $\varkappa: 0 \times H \rightarrow G$, $\varkappa(\rho, h) = s(\rho) h s(\varphi(\rho))^{-1}$. Оно, следовательно, инъективно и, как выше, является локальным гомеоморфизмом из-за совпадений размерностей. Пусть $M = \bigcup F(\rho)$. Мы видим, что M открыто в G и расслоено над M со слоем, гомеоморфным H . Следовательно, M

УДК 514.75

Г.Л.С в е ш н и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С
 ТРЕХКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФО-
 КАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции K^3 кривых второго порядка C [1], [2] с двумя трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Отнесем конгруэнцию K^3 к реперу $R = \{A_\alpha\}, \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 4}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0$. Вершины A_1 и A_2 репера R совместим с трехкратными фокальными точками коники C , описываемыми невырождающимися поверхностями, вершину A_3 поместим в полюс прямой $A_1 A_2$ относительно коники C , вершину A_4 - в произвольную точку пространства вне плоскости коники.

Уравнения коники C в этом репере, с учетом соответствующей нормировки вершин, примут вид

$$(x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \quad (1)$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^j, \omega_i^3, \omega_i^4, \omega_3^i, \omega_3^j, \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 \quad (i, j, k = 1, 2; i \neq j)$$

являются главными формами конгруэнции K^3 . Будем считать линейно независимые формы $\omega_i^4 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i$ базисными формами конгруэнции K^3 .

Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i, B_i - точка

компактно, т.е. $M = G$. Теорема доказана.

Замечательно, что существует конструкция, позволяющая по сжимающему отображению однородного пространства $M = G/H$ строить расслоения G на слои вида fHg без предположения обширности и даже компактности и связности G и H . А именно, пусть M снабжено инвариантной метрикой (автоматически полной), $\varphi: M \rightarrow M$ сжимающее отображение (если M некомпактно, то потребуем, как обычно, липшицевости с константой, меньшей единицы). Рассмотрим следующее отображение $\chi: G \rightarrow M, \chi(g)$ суть единственная неподвижная точка суперпозиции $\pi(g) \circ \varphi$, где $\pi(g): M \rightarrow M$ - действие g . Легко проверяется, что оно непрерывно. Изучим его слои. Пусть $p_0 = f_0 H \in M, \chi(d_0) = p_0$, т.е. $d_0 \varphi(p_0) = p_0$. Если d лежит в том же слое, что и d_0 , то имеем $d\varphi(p_0) = p_0$, или $dd_0^{-1} p_0 = p_0$, т.е. $dd_0^{-1} f_0 H = f_0 H$, значит, для некоторого $k \in H, dd_0^{-1} f_0 = f_0 k$, откуда $d = f_0 k f_0^{-1} d_0$. Ясно, что и обратно, если $d \in f_0 H f_0^{-1} d_0$, то $\chi(d) = p_0$. Итак, слои имеют вид fHg . Более того, элементы f и g могут быть выбраны непрерывно зависящими от p_0 , поэтому χ - локально-тривиальное расслоение.

Отметим аналог нашей конструкции для конечных групп. Пусть M - конечное метрическое пространство с расстоянием ρ , инвариантным относительно транзитивно действующей на эквидистантных парах группы G, H - группа изотропии. Тогда разбиения G на слои вида fHg также отвечают графикам таких отношений A , которые "вполне неизометричны" в том смысле, что если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, то $\rho(x_1, x_2) \neq \rho(y_1, y_2)$. Любое множество вида fHg состоит из поворота и отражения. Следовательно, имеется ровно $n!$ "вполне неизометричных" отношений.

Список литературы

1. Gluck H., Warner F.W. Great circle fibrations of the three-sphere. - Duke Math. J. 1983, vol. 50, N^o. 1.

пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j = 0$ на поверхности (A_i) . Вершину A_4 зафиксируем на прямой ℓ так, чтобы она являлась четвертой гармонической точкой к точке A_3 относительно точек B_1 и B_2 .

Конгруэнция K^3 относительно построенного геометрически фиксированного репера определяется системой уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= 0, \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k} \omega_k, \quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{31} \omega_1 - \Gamma_1^{31} \omega_2, \quad \omega_3^1 = \Gamma_2^{31} \omega_1 + \Gamma_3^{12} \omega_2, \\ \omega_3^2 &= \Gamma_3^{21} \omega_1 + \Gamma_1^{32} \omega_2, \quad \omega_4^1 = \Gamma_2^{31} (\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31}) \omega_1 + \Gamma_4^{12} \omega_2, \\ \omega_3^4 &= \Gamma_3^{4k} \omega_k, \quad \omega_4^2 = \Gamma_4^{21} \omega_1 + \Gamma_1^{32} (\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}) \omega_2, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k} \omega_k, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 &= 2\Gamma_3^{41} (\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31}) \omega_1 + 2\Gamma_3^{42} (\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}) \omega_2 \end{aligned} \quad (2)$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (2). Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции K^3 существуют с произволом двух функций двух аргумен-

тов. Назовем конгруэнцией K_1^3 конгруэнцию K^3 , у которой поверхность (A_3) является огибающей поверхностью семейства плоскостей коник C , а также существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$.

Конгруэнции K_1^3 выделяются из конгруэнций K^3 конечными соотношениями

$$\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = 0, \quad \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = \Gamma_1^{32} \Gamma_2^{31}. \quad (3)$$

Учитывая равенства (3) в системе (2) и осуществляя соответствующие нормировки вершин репера, получаем систему уравнений Пфаффа конгруэнции K_1^3 в виде:

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= \omega_3^4 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \omega_4^1 = \Gamma_1^{31} \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_2^3 &= \omega_4^2 = \omega_1 - \Gamma_1^{31} \omega_2, \quad \omega_3^i = \omega_i, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k} \omega_k, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 &= -\Gamma_4^{32} \omega_1 + \Gamma_4^{31} \omega_2, \quad \omega_3^3 - \omega_4^4 = -(\Gamma_4^{32} \omega_1 + \Gamma_4^{31} \omega_2), \\ d\Gamma_1^{31} &= -\Gamma_1^{31} (\omega_3^3 - \omega_4^4) + \Gamma_4^{31} \omega_1 - \Gamma_4^{32} \omega_2, \quad (\Gamma_1^{31} \neq 0), \\ d\Gamma_4^{31} &= \Gamma_4^{31} (\omega_4^4 - \omega_2^2), \quad d\Gamma_4^{32} = \Gamma_4^{32} (\omega_4^4 - \omega_1^1). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказано, что система уравнений (4) является вполне интегрируемой и определяет конгруэнции K_1^3 с точностью до постоянных.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции K_1^3 обладают следующими свойствами: 1/фокусы луча $A_3 A_4$ прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ гармонически делят точки A_3 и A_4 ; 2/торсы прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$, $(A_3 A_4)$ и $(A_i A_3)$ соответствуют; 3/асимптотические линии на поверхностях (A_i) и (A_3) соответствуют; 4/двойные точки Ермолаева фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) гармонически делят точки A_3 и A_4 .

Назовем конгруэнцией K_2^3 такую конгруэнцию K^3 , для которой асимптотические линии на фокальных поверхностях (A_i) гармонически делят координатные линии $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, а точка A_3 является характеристической точкой грани $(A_1 A_2 A_3)$.

Из условий определения конгруэнции K_2^3 получаем следующие конечные соотношения:

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = 0, \quad \Gamma_4^{21} = -(\Gamma_1^{32})^2, \\ \Gamma_4^{12} = -(\Gamma_2^{31})^2, \quad \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}, \quad (\Gamma_1^{32})^2 - (\Gamma_2^{31})^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $(\Gamma_1^{32})^2 - (\Gamma_2^{31})^2 = 0$, то возможны два случая. Случай $\Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{31} = 0$ приводит к противоречию, поэтому существует только один класс конгруэнций K_2^3 , для которого имеет место соотношение $\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{31} = 0$.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K_2^3 принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \\ \omega_3^3 - \omega_4^4 = 0, \quad \omega_1^3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2^3 = -\omega_1 - \omega_2, \\ \omega_3^1 = -\omega_1, \quad \omega_2^2 = \omega_2, \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 = -\omega_1 - \omega_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (6) является вполне интегрируемой.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции K_2^3 обладают следующими свойствами: 1/ прямолинейные конгруэнции $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ являются параболическими; 2/ фокусами лучей $A_i A_3$ прямолинейных конгруэнций $(A_i A_3)$ являются точки

A_i и A_3 ; 3/ фокусами лучей $A_i B_i$ и $A_i B_j$ прямолинейных конгруэнций $(A_i B_i)$ и $(A_i B_j)$ являются соответственно точки A_i, B_i и A_i, B_j ; 4/ торсы прямолинейных конгруэнций $(A_i A_3)$ и $(A_i B_i)$ соответствуют; 5/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$; 6/ поверхность (A_4) вырождается в прямую $E_{12} A_4$, где $E_{12} = A_1 + A_2$; 7/ асимптотические линии на поверхностях (A_3) , (E_{12}^*) , (B_i) и (F_i) , где E_{12}^* — четвертая гармоническая к точке E_{12} относительно вершин A_1 и A_2 , а F_1 и F_2 — точки пересечения прямой $E_{12} A_3$ с коникой C , соответствуют.

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции K_2^3 являются инвариантными квадраками, уравнения которых имеют соответственно вид:

$$2(x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^3x^4 - 2x^1x^2 = 0, \quad (7)$$

$$2(x^1)^2 + (x^3)^2 + 2x^3x^4 - 2x^1x^2 = 0. \quad (8)$$

Список литературы

1. Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. — Тр. Томского ун-та, 1968, Геометрич. сб., вып. 3, 1963, с. 43–53.

2. Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двукратными невырождающимися фокальными поверхностями. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с. 87–91.

Е. В. С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 изучается один из специальных классов вырожденных [I] конгруэнций $(C\rho)_{1,2}$, порожденных коникой C , описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью ρ , описывающей конгруэнцию с невырождающейся огибающей поверхностью.

Вырожденные конгруэнции такого типа характеризуются отображением, ставящим в соответствие каждой плоскости ρ единственную конику C , полным прообразом которой является одномерное подмногообразие $(\rho)_C$ плоскостей ρ . При этом каждое семейство $(\rho)_C$ отсекает на огибающей поверхности плоскостей ρ некоторую линию Γ_C .

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4),$$

а линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0.$$

Специализируем репер R таким образом, чтобы вершина A_4 совпадала с характеристической точкой плоскости ρ , вершины A_1 и A_2 совпадали с точками пересечения коники C и плоскости ρ , а вершина A_3 являлась полюсом прямой

$A_1 A_2$ относительно коники C . Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений вырожденных конгруэнций $(C_p)_{1,2}$ теперь приводятся, соответственно к виду

$$(x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0;$$

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^4, \quad \omega_i^4 = \Gamma_i^4 \omega_3^4, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k} \omega_{\kappa}, \quad (1)$$

$$\omega_4^1 = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad \omega_4^2 = \beta \omega_1 + \gamma \omega_2, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^i \omega_3^4 + \omega_j,$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^4 - \omega_2^4 = \Gamma \omega_3^4, \quad \omega_4^3 = 0, \quad (\omega_3^4 \neq 0),$$

где формы $\omega_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i$ приняты в качестве базисных, индексы i, j, k принимают значения $1, 2$, причем здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и суммирование по i и j не производится.

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка $E_{1,2} = A_1 + A_2$ прямой $A_1 A_2$ была инцидентна касательной к линии Γ_C . В этом случае будет выполнено условие

$$\alpha \Gamma_3^{42} + \gamma \Gamma_3^{41} = 0 \quad (2)$$

и форма $\omega_1^1 - \omega_2^2$ становится главной.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнциями K назовем конгруэнции $(C_p)_{1,2}$, для которых выполняются следующие условия: 1/ прямолинейные конгруэнции $(A_i A_3)$ односторонне расслоены к конгруэнции касательных к линиям Γ_C ; 2/ асимптотические линии на огибающей поверхности семейства плоскостей P гармонически разделяют сеть, огибаемую прямыми $(A_i A_3)$.

Аналитически условия определения записываются в виде

$$\omega_i^j \wedge (\omega_i + \omega_j) = 0, \quad (3)$$

$$(\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_i^j + \omega_j^i) \wedge \omega_3^j = 0, \quad (4)$$

$$(\omega_i + \omega_j) \wedge \omega_3^j + (\omega_j^j - \omega_i^i) \wedge \omega_i^j = 0 \quad (5)$$

а также $\beta = 0$.

Равенства (3) приводят к соотношениям

$$\Gamma_i^j (\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42}) = 0, \quad (6)$$

причем при $\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} \stackrel{\text{def}}{=} k \neq 0$ из условий (5) будем иметь $(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^1)(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega_3^4 = 0$. Если $\Gamma_1^2 \neq \Gamma_2^1$, то последнее соотношение приводится к виду

$$(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_1 + \omega_2) = 0. \quad (7)$$

Учитывая (7) в (5), мы получаем противоречивое равенство $\omega_i \wedge \omega_j = 0$.

Если $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^1$, то из условий (4) находим

$$(1 + k(\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2))(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_1 + \omega_2) = 0.$$

Так как равенство (7) приводит к противоречию, то из последнего соотношения будем иметь $1 + k(\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2) = 0$, откуда $\omega_3^1 + \omega_3^2 = 0$. Замыкая полученное уравнение и учитывая условие (2), получим $\alpha = \gamma = 0$. В этом случае характеристическая поверхность семейства плоскостей P вырождается в точку, что противоречит постановке задачи.

Таким образом, анализируя систему (3), (4), (5), убеждаемся, что $\Gamma_3^{41} \neq \Gamma_3^{42}$ и следовательно из соотношений (6) получим

$$\omega_i^j = 0. \quad (8)$$

В этом случае условия (4), (5) приводятся к виду

$$(\omega_i^i - \omega_j^j) \wedge \omega_3^j = 0, \quad (4')$$

$$(\omega_i + \omega_j) \wedge \omega_3^j = 0. \quad (5')$$

Складывая равенства (5'), получим $\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2 = 0$, откуда $\Gamma_3^1 = -\Gamma_3^2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell$. Из (5') тогда будем иметь $\ell(\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42}) - 1 = 0$. Складывая равенства (4'), находим

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = \varphi(\omega_1 + \omega_2).$$

Перепишем соотношение (2) в виде $\frac{\Gamma_3^{41}}{\alpha} = -\frac{\Gamma_3^{42}}{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda$. Тогда $\Gamma_3^{41} = \alpha \lambda$, $\Gamma_3^{42} = -\gamma \lambda$, а также $\ell \lambda (\alpha + \gamma) = 1$. Замыкая уравнения (8), получим $\Gamma_1^4 = -\frac{\ell}{\alpha}$; $\Gamma_2^4 = \frac{\ell}{\gamma}$. С учетом предыдущих соотношений будем иметь

$$\omega_1^4 = -\frac{1}{\alpha(\alpha+\gamma)} (\omega_4^1 - \omega_4^2), \quad \omega_2^4 = \frac{1}{\gamma(\alpha+\gamma)} (\omega_4^1 - \omega_4^2), \quad (9)$$

$$\omega_3^1 = -\alpha\omega_1^4 + \omega_2, \quad \omega_3^2 = -\gamma\omega_2^4 + \omega_1.$$

Осуществляя частичное продолжение системы (9) совместно с уравнениями $\omega_4^1 = \alpha\omega_1$, $\omega_4^2 = \gamma\omega_2$, находим

$$d\alpha + \alpha(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = -\frac{\Gamma\lambda\alpha^2(\alpha+\gamma)}{\gamma} \omega_1, \quad (10)$$

$$d\gamma + \gamma(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = \frac{\Gamma\lambda\gamma^2(\alpha+\gamma)}{\alpha} \omega_2,$$

а также

$$(\alpha-\gamma)(3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma) + \varphi) = 0, \quad (11)$$

$$\Gamma\lambda(\alpha+\gamma) + 2\lambda\alpha\gamma + \varphi = 0.$$

При условии $\alpha \neq \gamma$ получим $\varphi = -3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)$ и следовательно $\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$. Дифференцируя уравнение $2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\omega_3^4$, получим $3\lambda^2\alpha^2\gamma^2 + 4 = 0$, откуда $\omega_1^1 - \omega_2^2 = -2\sqrt{-3}(\omega_1 + \omega_2)$. Замыкание последнего уравнения имеет вид $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, т.е. противоречиво. Таким образом, из (11) имеем $\alpha = \gamma$, $\varphi = -2\lambda\alpha(\Gamma + \alpha)$. Подставляя полученные соотношения в (10), будем иметь $d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0$, а также $\Gamma + 2\alpha = 0$, $\varphi = 2\lambda\alpha^2$. Переобозначая $\lambda\alpha \stackrel{\text{def}}{=} t$, систему уравнений Пфаффа конгруэнций K окончательно запишем в виде

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^4 = \frac{1}{2\alpha}(\omega_j - \omega_i), \quad \omega_3^i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j),$$

$$\omega_3^4 = t(\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_4^i = \alpha\omega_i, \quad \omega_4^3 = 0, \quad d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0, \quad (12)$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = -2\alpha\omega_3^4, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = 2\alpha t(\omega_1 + \omega_2).$$

Продолжая систему (12), находим

$$dt + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) = 0, \quad (13)$$

причем замыкание последнего уравнения удовлетворяется тождественно.

Таким образом, конгруэнции K определяются вполне интегрируемой системой уравнений (12), (13).

Укажем некоторые свойства конгруэнций K .

1. Поверхности (A_i) огибаются семействами плоскостей $(A_i A_3 A_4)$, что непосредственно следует из равенств

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i A_3 + \omega_i^4 A_4.$$

2. Фокальные точки луча $A_1 A_2$ прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ гармонически разделяют вершины репера A_1 и A_2 , причем одна из них совпадает с точкой $E_{1,2}$.

Свойство справедливо, т.к. фокальные точки $sA_1 + tA_2$ определяются уравнением $s^2 - t^2 = 0$.

3. Фокальные точки луча $A_3 A_4$ прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ являются двойными точками гомографии пары поверхностей (A_1) и (A_2) .

Фокусы $sA_3 + tA_4$ луча $A_3 A_4$ определяются уравнением $st + \alpha t^2 = 0$ и совпадают с точками A_3 и $A_4 - \alpha A_3$. Торсы прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ задаются уравнением $(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2) = 0$. Имеем

$$dA_i \Big|_{\omega_i - \omega_j = 0} = \omega_i^i A_i + \omega_i A_3,$$

$$dA_i \Big|_{\omega_i + \omega_j = 0} = \omega_i^i A_i + \frac{1}{\alpha} \omega_i (A_4 - \alpha A_3),$$

откуда и следует утверждение 3.

4. Прямолинейные конгруэнции $(A_i A_4)$ являются конгруэнциями W .

Фокальными поверхностями конгруэнций $(A_i A_4)$ являются поверхности (A_i) и (A_4) . Асимптотические линии этих поверхностей задаются одним и тем же уравнением $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = 0$, что и доказывает утверждение 4.

5. Плоскости коник C образуют пучок.

Характеристика плоскости коники C задается уравнением $x^4 - x^2 - 2\alpha t x^3 = 0$ и может быть определена точками $E_{1,2}$ и $M = 2\alpha t A_1 + A_3$. Имеем $d[E_{1,2} M] = (\dots)[E_{1,2} M]$, т.е. характеристика неподвижна.

6. Конгруэнция касательных к линиям Γ_C односторонне расслояема к прямолинейным конгруэнциям $(A_i A_3)$.

Свойство справедливо, так как условия расслоения в

силу системы (I2) удовлетворяются тождественно.

Получено каноническое представление поверхности (A_4) , ассоциированной с конгруэнциями K :

$$z = \frac{2}{3} \lambda (y^3 - x^3) + \frac{1}{2\alpha} (x^2 + y^2) + [4].$$

Найдем трехпараметрический пучок соприкасающихся квадратик к поверхности (A_4) :

$$2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{34}(2x^3x^4 - \frac{1}{\alpha}(x^1)^2 - \frac{1}{\alpha}(x^2)^2) + a_{33}(x^3)^2 = 0,$$

из которого выделен пучок квадратик Дарбу:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1 x^3 + 2\alpha t x^2 x^3 - 2\alpha x^3 x^4 + 6_{33} (x^3)^2 = 0,$$

а также квадратика Ли поверхности (A_4) :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1 x^3 + 2\alpha t x^2 x^3 - 2\alpha x^3 x^4 + (\alpha^2 t^2 - 1)(x^3)^2 = 0.$$

Доказано, что линия Γ_c является линией Дарбу поверхности (A_4) .

Найдены директриса Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (A_4) . Эти три замечательные прямые совпадают друг с другом и определяются точками A_4 и $\alpha t A_1 - \alpha t A_2 + 2 A_3$. Таким образом, канонический пучок поверхности (A_4) вырождается в прямую.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 41-49.

УДК 514.75

Е.П. С о п и н а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЭЛЛИпсоИДОВ
В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции V_2^3 эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию квадратик Q к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = \bar{1}, 2, 3)$, где A - центр эллипсоида Q , вектор \bar{e}_3 направлен в фокальную точку M_3 эллипсоида Q , векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 лежат в плоскости, сопряженной направлению вектора \bar{e}_3 относительно Q , причем вектор \bar{e}_1 сопряжен вектору \bar{e}_2 и направлен по прямой AM , где M - характеристическая точка плоскости. Концы векторов \bar{e}_α расположены на эллипсоиде Q . Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с плоскостью $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Уравнение квадратика Q относительно данного репера принимает вид:

$$\mathcal{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Конгруэнция V_2^3 определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{ik} \omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk} \omega_k \quad (i+j), \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik} \omega_k, \quad (2)$$

$$\omega^i = \Gamma^{ik} \omega_k, \quad \omega^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^3 + \rho \omega_1 = 0,$$

формы

$$\omega_i^3 = \omega_i \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм.

Назовем конгруэнцией V_2^{31} такую конгруэнцию V_2^3 , у которой поверхность (M_3) вырождается в линию.

Конгруэнция V_2^{31} выделяется из конгруэнции V_2^3 конечными соотношениями:

$$\Gamma^{i1} + \Gamma_3^{i1} = \lambda (\Gamma^{i2} + \Gamma_3^{i2}). \quad (4)$$

Учитывая равенства (4) в системе (2), получаем систему уравнений Пфаффа для конгруэнции V_2^{31} в виде

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{ik} \omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk} \omega_k \quad (i \neq j), \quad \omega^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^i = \Gamma^{ik} \omega_k, \\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik} \omega_k, \quad \omega^3 = \rho \omega_1 = 0, \quad \omega_3^1 + \omega^1 = \lambda (\omega^2 + \omega_3^2). \quad (5)$$

Замыкая $\omega^3 + \omega_3^3 = 0$, находим

$$\Gamma^{12} + \Gamma_3^{12} - \Gamma^{21} + \Gamma_3^{21}. \quad (6)$$

Анализируя систему (5), убеждаемся, что конгруэнции V_2^{31} существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Обозначим через M_α конец вектора \bar{e}_α , M_α^* -конец вектора $-\bar{e}_\alpha$, l_α -прямую, проходящую через центр эллипсоида Q и конец вектора \bar{e}_α .

Т е о р е м а. Конгруэнции V_2^{31} обладают следующими свойствами: 1/касательная к линии (M_3) параллельна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$; 2/точки M_3 и M_3^* не могут одновременно являться фокальными точками эллипсоида Q ; 3/если касательная плоскость к поверхности (A) параллельна координатной плоскости $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, то точка A является фокальной точкой прямолинейной конгруэнции (l_3) ; 4/если точка M_i является фокальной точкой эллипсоида Q , то касательная плоскость к поверхности (M_i) параллельна плоскости $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$; 5/ если точки M_i и M_i^* являются фокальными точками эллипсоида Q , то центры всех эллипсоидов конгруэнции располагаются на одной прямой (линии центров).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/В силу (5) имеем: $dM_3 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$. 2/Если точка M_3^* является фокальной точкой эллипсоида Q , то получаем, что точка A является характеристической точкой плоскости, а этот случай исключается из рассмотрения. 3/Уравнение для определения фокусов прямолинейной конгруэнции (l_3) запишется в виде:

$$\mu^2 (\Gamma_3^{11} \Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21} \Gamma_3^{12}) + \mu (\Gamma_3^{11} \Gamma^{22} + \Gamma^{11} \Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21} \Gamma^{12} - \\ - \Gamma^{21} \Gamma_3^{12}) + \Gamma^{11} \Gamma^{22} - \Gamma^{21} \Gamma^{12} = 0. \quad (7)$$

Из условия коллинеарности касательной плоскости к поверхности (A) и плоскости $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ имеем:

$$\Gamma^{21} = \Gamma^{12} = 0. \quad (8)$$

Учитывая (8) в (7), получаем $\mu = 0$, т.е. A -фокальная точка прямолинейной конгруэнции (l_3) . 4/Запишем уравнения для определения фокальных точек и фокальных семейств конгруэнции V_2^{31} :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \\ (\Gamma_1^{11} - \rho)(x^1)^2 + (\Gamma_2^{21} - \rho)(x^2)^2 + (\Gamma_2^{11} - \Gamma_1^{21})x^1 x^2 + (1 + \Gamma_3^{11})x^1 x^3 + \\ + (1 + \Gamma_3^{21})x^2 x^3 + x^1 \Gamma^{11} + x^2 \Gamma^{21} - \rho x^3 + \rho = 0, \\ \Gamma_1^{12}(x^1)^2 + \Gamma_2^{22}(x^2)^2 + (\Gamma_2^{12} - \Gamma_1^{22})x^1 x^2 + \Gamma_3^{12}x^1 x^3 + (\Gamma_3^{22} + 1)x^2 x^3 + \\ + \Gamma^{12}x^1 + x^2 \Gamma^{22} = 0.$$

Пусть M_i -фокальная точка эллипсоида Q , то из уравнений (9) получим

$$\Gamma_i^{i1} + \Gamma^{i1} = 0, \quad \Gamma_i^{i2} + \Gamma^{i2} = 0. \quad (10)$$

Из равенств (10) следует, что касательные плоскости к поверхности (M_i) определяются соответственно точками

$$M_i, \bar{E}_{i1}, \bar{E}_{i2}, \quad \text{где} \\ \bar{E}_{11} = (\Gamma^{21} + \Gamma_1^{21})\bar{e}_2 + (1 - \rho)\bar{e}_3, \quad \bar{E}_{12} = (\Gamma^{22} + \Gamma_1^{22})\bar{e}_2, \\ \bar{E}_{21} = (\Gamma^{11} + \Gamma_2^{11})\bar{e}_1 - \rho\bar{e}_3, \quad \bar{E}_{22} = (\Gamma^{12} + \Gamma_2^{12})\bar{e}_1 + \bar{e}_3.$$

5/ Пусть точки M_i и M_i^* являются одновременно фокальными точками эллипсоида Q , тогда из уравнений (9) получим:

$$\omega^i = 0, \quad \omega_i^i = 0, \quad \omega_3^i = 0. \quad (11)$$

Имеем $d\bar{A} = \omega^3 \bar{e}_3$, $d\bar{e}_3 = \omega_3^3 \bar{e}_3$. Следовательно, центры всех эллипсоидов располагаются на одной прямой.

Список литературы

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрат в n -мерном проективном пространстве. -Тр.геометр.семинара ВИНТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-136.

В.П.Толстопяттов

К ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1. Присоединим к гладкой p -мерной поверхности $V_p \subset E_n$ подвижной репер $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$, где \vec{e}_i образуют базис касательного пространства $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x , а \vec{e}_α - базис нормального дополнения $N_x(V_p)$. Векторному полю $\vec{\xi} = \xi^i \vec{e}_i$ на поверхности V_p соответствует секущая поверхность $\bar{V}(\vec{\xi})$ I-распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{\xi})$, уравнение которой $\bar{x} = \vec{x} + \vec{\xi}$. Обозначим $c_i^k = \mu_i^k + \delta_i^k$, где $\mu_i^k = V_{\vec{e}_i} \xi^k$ - ковариантные производные координат векторного поля. Пусть выполняется условие: $\text{rang} \|c_i^k, \theta_{ie}^\alpha \xi^e\| = p$. Тогда векторы

$$\vec{a}_i = c_i^k \vec{e}_k + \theta_{ie}^\alpha \xi^e \vec{e}_\alpha \quad (I)$$

образуют базис касательного пространства к секущей поверхности в точке \bar{x} . Секущая поверхность при этом является p -мерной, будем обозначать ее \bar{V}_p . Присоединим к секущей поверхности \bar{V}_p подвижной репер $R^{\bar{x}} = (\bar{x}, \vec{a}_i, \vec{a}_\alpha)$, где \vec{a}_α определяют базис нормального дополнения $N_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$ к касательному пространству к секущей поверхности в точке \bar{x} . В общем случае для векторного поля $\vec{\xi}$ имеем

$$\vec{\xi} = t^i \vec{a}_i + t^\alpha \vec{a}_\alpha$$

II. Рассмотрим случай, когда $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности \bar{V}_p , т.е. $\vec{\xi} \in N_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$. Имеем

$$\vec{\xi} \cdot \vec{a}_i = 0 \quad (2)$$

или

$$\mu_i^k \xi^e \gamma_{ke} + \xi^k \gamma_{ki} = 0, \quad (3)$$

то есть $\vec{\xi} \in \Phi$ - конусу второго порядка ($\Phi = c_{ij} \omega^i \omega^j = 0$, $c_{ij} = c_i^k \gamma_{kj}$), лежащему в касательной плоскости к поверх-

ности V_p , образованному направлениями, при смещении по которым $d\vec{x}$ и соответствующее $d\vec{x}$ ортогональны. Из (3) имеем

С л е д с т в и е 1. Ненулевое векторное поле $\vec{\xi}$ постоянной длины не может быть ортогонально секущей поверхности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\vec{\xi}$ векторное поле постоянной длины, то имеем

$$\vec{\xi} \cdot d\vec{\xi} = 0. \quad (4)$$

Так как $d\vec{\xi} = \mu_i^k \omega^i \vec{e}_k + \theta_{ie}^\alpha \xi^e \omega^i \vec{e}_\alpha$, то из (4) следует:

$$\mu_i^k \xi^e \gamma_{ke} = 0. \quad (5)$$

Если предположить, что векторное поле постоянной длины ортогонально секущей поверхности, то из (3) и (5) следует, что $\vec{\xi}$ нулевое векторное поле.

С л е д с т в и е 2. Если векторное поле $\vec{\xi}$, интегральные линии которого геодезические, ортогонально секущей поверхности, то $V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\vec{\xi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (3) можно записать иначе:

$$\vec{\xi} \cdot (V_{\vec{e}_i} \vec{\xi} + \vec{e}_i) = 0. \quad (6)$$

Свернем (6) с ξ^i , получим:

$$\vec{\xi} \cdot (V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} + \vec{\xi}) = 0. \quad (7)$$

Если интегральные линии поля $\vec{\xi}$ геодезические, то $V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\lambda \vec{\xi}$. Из (7) следует $(\lambda + 1) \cdot \vec{\xi}^2 = 0$. Так как нулевое векторное поле не входит в наше рассмотрение, то имеем $\lambda = -1$, т.е. $V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\vec{\xi}$. Таким образом, если для векторного поля $\vec{\xi}$ имеем $V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = \lambda \vec{\xi}$, $\lambda \neq -1$, то это векторное поле не может быть ортогонально секущей поверхности \bar{V}_p .

С л е д с т в и е 3. Градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности тогда и только тогда, когда $V_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\vec{\xi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть градиентное векторное поле $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности \bar{V}_p . Из условия градиентности

$$\mu_i^k \gamma_{kj} = \mu_j^k \gamma_{ki} \quad (8)$$

и соотношения (3) имеем:

$$\mu_e^k \xi^e \gamma_{ki} + \xi^k \gamma_{ki} = 0 \quad (9)$$

или

$$\mu_e^k \xi^e + \xi^k = 0. \quad (10)$$

Таким образом, получаем:

$$\nabla_{\xi}^{\xi} \xi = -\xi. \quad (11)$$

Достаточность. Пусть для градиентного векторного поля имеет место условие (11), которое равносильно (10) или (9). Так как ξ — градиентное векторное поле, то имеет место условие (8). Тогда из (9) следует $\mu_i^k \xi^e \gamma_{ke} + \xi^k \gamma_{ki} = 0$, т.е. ξ ортогонально секущей поверхности \bar{V}_p .

III. Рассмотрим другой возможный случай, когда векторное поле ξ касается секущей поверхности \bar{V}_p , т.е. секущая поверхность \bar{V}_p является фокальной для направления $[x, \xi]$. В этом случае естественно векторное поле назвать фокальным. Итак, поле ξ является фокальным тогда и только тогда, когда

$$\xi = \xi^i \bar{e}_i, \quad \xi = t^k \bar{a}_k. \quad (12)$$

Приходим к системе

$$\nabla_{\xi} \xi = \xi - \bar{t}; \quad t_{ki}^k t^k \xi^i = 0. \quad (13)$$

Условия (12) и (13) эквивалентны, поэтому имеет место

Т е о р е м а. Векторное поле ξ является фокальным тогда и только тогда, когда на V_p существует векторное поле \bar{t} , сопряженное с направлением поля ξ , для которого $\nabla_{\xi} \xi = \xi - \bar{t}$.

Т. П. Ф у н т и к о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ,
ПОРОЖДЕННЫХ ПАРой ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные $[1]$ конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов C_1 и C_2 , причем эллипсы C_1 и C_2 имеют общую касательную, но не лежат в одной плоскости.

Многообразие (C_1) эллипсов C_1 — одномерное, а многообразие (C_2) эллипсов C_2 — двумерное, таким образом, каждому эллипсу C_1 соответствует однопараметрическое семейство $(C_2)_{C_1}$ эллипсов C_2 .

Отнесем конгруэнцию $(C_1, C_2)_{1,2}$ к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, вершина A которого помещена в точку касания эллипсов C_1 и C_2 , концы векторов \bar{e}_3 и \bar{e}_1 совмещены соответственно с центрами O_1 и O_2 эллипсов C_1 и C_2 , вектор \bar{e}_2 направлен по общей касательной эллипсов и нормирован.

Уравнения эллипсов C_1 и C_2 относительно выбранного репера записываются в виде:

$$C_1: (x^3)^2 - 2x^3 + (x^2)^2 = 0, \quad x^1 = 0;$$

$$C_2: (x^1)^2 - 2x^1 + a^2(x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= b\omega^1, \quad \omega_3^3 = k\omega^1; \quad \omega_2^3 = c\omega^1 + \omega^2; \quad \omega_3^2 = l\omega^1 - \omega^2; \\ \omega_2^2 &= p\omega^1, \quad \omega_2^1 = m\omega^1, \quad \omega_3^1 = n\omega^1, \quad \omega_1^1 = \Gamma_{ii}^1 \omega^i; \end{aligned} \quad (1)$$

$$da = A_i \omega^i, \quad i = 1, 2; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \lambda = 2, 3,$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (1). Здесь формы

ω^1, ω^2 приняты в качестве базисных.

Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$ существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$ характеризуются следующими свойствами: 1/ прямолинейные конгруэнции (A, \vec{e}_α) имеют по одному семейству соответствующих торсов, общая фокальная поверхность прямолинейных конгруэнций (A, \vec{e}_α) является огибающей плоскостей эллипсов C_1 ; 2/многообразие $(C_2)_{C_1}$ является фокальным [3]; 3/точка A является фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1 = 0$.

Т е о р е м а 1. Если точка A является двоянной фокальной точкой эллипса C_2 , то линия (O_2) центров эллипсов C_2 многообразия $(C_2)_{C_1}$ - плоская; если же при этом характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой $A O_2$, то линия (O_2) является эллипсом, а точка $\vec{P} = \vec{A} + 2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 + a^2(x^2)^2 - 2x^1 = 0, & x^3 = 0, \\ x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

следует, что точка A является двоянной фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1 = 0$ при

$$\Gamma_{12}^1 = 0. \quad (3)$$

В этом случае для линии (O_2) имеем:

$$d\vec{O}_2 \Big|_{\omega^1=0} = (\Gamma_{12}^2 \vec{e}_2 + \Gamma_{12}^3 \vec{e}_3) \omega^2, \quad d\vec{e}_2 \Big|_{\omega^1=0} = \omega^2 \vec{e}_3, \quad d\vec{e}_3 \Big|_{\omega^1=0} = -\omega^2 \vec{e}_2,$$

т.е. линия (O_2) - плоская.

Характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой $A O_2$, когда

$$\Gamma_{12}^3 = 0. \quad (4)$$

В этом случае направление касательной к линии (O_2) опре-

деляется вектором \vec{e}_2 , т.е. линия (O_2) соответствует линии $\omega^1 = 0$ на поверхности (A) , т.е. эллипсу C_1 . Кроме того, из системы (2) и условий (3), (4) следует, что точка $\vec{P} = \vec{A} + 2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2 . Теорема доказана.

Рассмотрим конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$, для которых плоскости эллипсов C_2 являются касательными к поверхности (A) , касательные к линии центров эллипсов C_1 параллельны соответствующим плоскостям эллипсов C_2 и линейчатая поверхность $(A)_{\omega^1=0}$ прямолинейной конгруэнции $(A O_2)$, соответствующая эллипсу C_1 , является торсом. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K .

Аналитически конгруэнции K определяются условиями

$$\Gamma_{12}^3 = 0, \quad \kappa = 0, \quad \varphi = 0. \quad (5)$$

Учитывая условия (5) в системе (1), получаем

$$\varrho = 0, \quad c = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad p = 0. \quad (6)$$

В силу условий (5) и (6) конгруэнции K существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Для конгруэнций K справедливы следующие свойства: 1/ торсы прямолинейных конгруэнций (A, \vec{e}_α) соответствуют; 2/ координатные линии на поверхности (A) сопряжены; 3/ координатные линии $\omega^1 = 0$ (эллипсы C_1) на поверхности (A) являются линиями тени; 4/ все эллипсы многообразия (C_1) образуют каналовую поверхность; 5/ существуют аффинные расслоения [2] от прямолинейных конгруэнций (A, \vec{e}_α) к семействам плоскостей Π_α ($x^\alpha = 0$), $\alpha = 1, 2, 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Торсы прямолинейных конгруэнций (A, \vec{e}_α) определяются одним и тем же уравнением

$$\omega^1 \cdot \omega^2 = 0,$$

значит они соответствуют.

2/ Асимптотические линии на поверхности (A) определяются уравнением

$$\Gamma_{11}^3 (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0, \quad (7)$$

из которого следует справедливость свойства 2.

3/ Из формулы (7) и равенств

$$d\vec{A} \Big|_{\omega^2=0} = \omega^1 \vec{e}_1, \quad d\vec{e}_1 \Big|_{\omega^1=0} = \Gamma_{12}^1 \vec{e}_1 \omega^2$$

получаем свойство 3.

4/ Так как

$$d\vec{A} \Big|_{\omega^2=0} = \omega^1 \vec{e}_1, \quad d\vec{e}_2 \Big|_{\omega^2=0} = m \vec{e}_1 \omega^1,$$

$$d\vec{e}_3 \Big|_{\omega^2=0} = n \vec{e}_1 \omega^1, \quad d\vec{e}_1 \Big|_{\omega^1=0} = \Gamma_{12}^1 \vec{e}_1 \omega^2,$$

то инфинитезимальные перемещения всех точек эллипса C_1 при $\omega^2=0$ происходят в одном и том же направлении, определяемом вектором \vec{e}_1 . Линия центров эллипсов не является прямой, следовательно, все эллипсы C_1 принадлежат каналовой поверхности.

5/ В силу равенств (5), (6) условия

$$\begin{cases} \omega^\beta \wedge \omega^\alpha = 0, & \alpha, \beta = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta, \\ \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0, \end{cases}$$

указанных аффинных расслоений тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 41–49.

2. Ткач Г.П. О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 143–152.

3. Фунтикова Т.П. Одномерные многообразия эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10. Калининград, 1979, с. 131–135.

В.Н. Худенко

СВЯЗНОСТЬ В ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

В n -мерном проективном пространстве рассматривается связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия. Получена геометрическая характеристика подобъектов и объекта связности.

В n -мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное k -параметрическое многообразие $(k, k, n)_p^2$ — квадратик Q_p . С этим многообразием ассоциируется многообразие B_n^k обобщенных пространственных элементов. Обобщенным пространственным элементом (L_ℓ, L_{p+1}) согласно [3] будем называть проективную плоскость L_{p+1} (p -мерной квадратки Q_p) вместе с инцидентной ей подплоскостью L_ℓ , которая возникает внутренним образом, например, как плоскость, натянутая на соответствующее количество характеристических точек квадратки.

Поместим вершины A_μ репера $R = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ в плоскость L_ℓ , вершины A_a вне плоскости L_ℓ , но в плоскости L_{p+1} и вершины A_α вне плоскости L_{p+1} .

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, \ell+1;$$

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \ell+2, \ell+3, \dots, p+2;$$

$$i = 1, 2, \dots, k; \quad \alpha = p+3, \dots, n+1.$$

Тогда уравнения плоскостей L_{p+1} и L_ℓ запишутся соответственно в виде:

$$x^a = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^a = 0, \\ x^{\bar{a}} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений многообразия B_k^* обобщенных пространственных элементов примет вид

$$\omega_{\mu}^{\bar{a}} = M_{\mu i}^{\bar{a}} \tau^i, \quad (3)$$

$$\omega_{\mu}^a = \Lambda_{\mu i}^a \tau^i; \quad \omega_{\bar{e}}^a = \Lambda_{\bar{e} i}^a \tau^i. \quad (4)$$

Здесь τ^i инвариантные формы аналитической группы преобразований k -мерного пространства параметров, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} d\tau^i &= \tau^k \wedge \tau^i_k, \\ d\tau^i_k &= \tau^j \wedge \tau^i_{jk} + \tau^k \wedge \tau^i_{ik}. \end{aligned}$$

Замкнем (3) и (4), получим

$$\nabla M_{\mu i}^{\bar{a}} + \Lambda_{\mu i}^a \omega_a^{\bar{a}} \equiv 0 \pmod{\tau^i}, \quad (5)$$

$$\nabla \Lambda_{\mu i}^a \equiv 0 \pmod{\tau^i},$$

$$\nabla M_{\bar{a} i}^a - \Lambda_{\mu i}^a \omega_{\bar{a}}^{\mu} \equiv 0 \pmod{\tau^i}.$$

Дифференциальный оператор ∇ здесь действует по закону

$$\nabla \Lambda_{\mu i}^a = d\Lambda_{\mu i}^a - \Lambda_{\nu i}^a \omega_{\mu}^{\nu} + \Lambda_{\mu i}^{\bar{e}} \omega_{\bar{e}}^a - \Lambda_{\mu j}^a \tau^j_i.$$

С многообразием B_k^* , ассоциируется главное расслоение $G(B_k^*)$ со структурными уравнениями

$$d\tau^i = \tau^j \wedge \tau^i_j,$$

$$d\omega_{\mu}^{\nu} = \omega_{\mu}^{\nu_1} \wedge \omega_{\nu_1}^{\nu} + \tau^i \wedge \omega_{\mu i}^{\nu}, \quad d\omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} = \omega_{\bar{e}}^{\bar{a}_1} \wedge \omega_{\bar{a}_1}^{\bar{a}} + \tau^i \wedge \omega_{\bar{e} i}^{\bar{a}} \quad (6)$$

$$d\omega_{\bar{e}}^{\nu} = \omega_{\bar{e}}^{\mu} \wedge \omega_{\mu}^{\nu} + \omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} \wedge \omega_{\bar{a}}^{\nu} + \tau^i \wedge \omega_{\bar{e} i}^{\nu},$$

$$d\omega_{\bar{e}}^a = \omega_{\bar{e}}^{\mu} \wedge \omega_{\mu}^a + \omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} \wedge \omega_{\bar{a}}^a + \omega_{\bar{e}}^c \wedge \omega_c^a,$$

$$d\omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} = \omega_{\bar{e}}^{\bar{e}} \wedge \omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} + \omega_{\bar{e}}^a \wedge \omega_a^{\bar{a}} + \tau^i \wedge \omega_{\bar{e} i}^{\bar{a}},$$

$$d\omega_a^{\bar{e}} = \omega_a^c \wedge \omega_c^{\bar{e}} + \tau^i \wedge \omega_{i a}^{\bar{e}},$$

где $\omega_{\mu i}^{\nu} = M_{\mu i}^{\bar{a}} \omega_{\bar{a}}^{\nu} + \Lambda_{\mu i}^a \omega_a^{\nu}$, $\omega_{\bar{e} i}^{\nu} = \Lambda_{\bar{e} i}^a \omega_a^{\nu}$,

$$\omega_{i \bar{e}}^{\bar{a}} = -M_{\mu i}^{\bar{a}} \omega_{\bar{e}}^{\mu}, \quad \omega_{\bar{e} i}^{\bar{a}} = \Lambda_{\bar{e} i}^a \omega_a^{\bar{a}} - M_{\nu i}^{\bar{a}} \omega_{\bar{e}}^{\nu},$$

$$\omega_{i \bar{e}}^a = -\Lambda_{\bar{e} i}^a \omega_{\bar{e}}^{\bar{e}} - \Lambda_{\nu i}^a \omega_{\bar{e}}^{\nu}.$$

Базой главного расслоения $G(B_k^*)$ является многообразие B_k^* (или область пространства параметров), а типовым слоем подгруппа стационарности обобщенного пространственного элемента (L_{p+1}, L_e) .

В главном расслоении $G(B_k^*)$ введем связность по Г.Ф. Лаптеву с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma_{\mu i}^{\nu}, \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{e}}, \Gamma_{\bar{a} i}^{\bar{a}}, \Gamma_{\bar{e} i}^{\nu}, \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}}, \Gamma_{\bar{e} i}^a)$ на базе B_k^*

$$\nabla \Gamma_{\mu i}^{\nu} + \omega_{\mu i}^{\nu} = \Gamma_{\mu i j}^{\nu} \tau^j, \quad \nabla \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}} + \omega_{\bar{e} i}^{\bar{a}} = \Gamma_{\bar{e} i j}^{\bar{a}} \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\bar{e} i}^{\nu} + \omega_{\bar{e} i}^{\nu} + \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}} \omega_a^{\nu} - \Gamma_{\mu i}^{\nu} \omega_{\bar{e}}^{\mu} = \Gamma_{\bar{e} i j}^{\nu} \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}} - \Gamma_{\mu i}^{\nu} \omega_{\bar{e}}^{\mu} + \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}} \omega_a^{\nu} - \Gamma_{\bar{a} i}^{\bar{a}} \omega_{\bar{e}}^{\bar{a}} + \Gamma_{\bar{e} i}^a \omega_a^{\bar{a}} = \Gamma_{\bar{e} i j}^{\bar{a}} \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\bar{e} i}^a + \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{a}} \omega_a^{\bar{a}} - \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{e}} \omega_{\bar{e}}^{\bar{e}} + \omega_{i \bar{e}}^{\bar{a}} = \Gamma_{\bar{e} i j}^a \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\bar{e} i}^{\bar{e}} + \omega_{i \bar{e}}^{\bar{e}} = \Gamma_{\bar{e} i j}^{\bar{e}} \tau^j.$$

Рассмотрим композиционное [1] оснащение многообразия B_k^* , которое состоит в присоединении к каждому обобщенному пространственному элементу (L_e, L_{p+1}) плоскостей B, C , причем плоскость B -дополнительная к плоскости L_{p+1} , а плоскость C -дополнительная к плоскости L_e внутри плоскости L_{p+1} . Зададим композиционное оснащение многообразия B_k^* с помощью систем точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^{\mu} A_{\mu} + \lambda_a^{\bar{e}} A_{\bar{e}} \quad (8)$$

и

$$C_{\bar{a}} = A_{\bar{a}} + \gamma_{\bar{a}}^{\mu} A_{\mu}. \quad (9)$$

Условия инвариантности оснащающих плоскостей запишутся в виде

$$\begin{cases} \nabla \lambda_a^\mu + \lambda_a^{\bar{\epsilon}} \omega_{\bar{\epsilon}}^\mu + \omega_a^\mu = \lambda_{ai}^\mu \tau^i, \\ \nabla \lambda_a^{\bar{\epsilon}} + \omega_a^{\bar{\epsilon}} = \lambda_{ai}^{\bar{\epsilon}} \tau^i, \end{cases} \quad (10)$$

$$\nabla \nu_a^\mu + \omega_a^\mu = \nu_{ai}^\mu \tau^i. \quad (11)$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Композиционное оснащение многообразия B_k^* позволяет задать связность в главном расслоении $G(B_k^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda = (\Lambda_{\mu i}^a, \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a, M_{\mu i}^a)$ многообразия B_k^* , оснащающие квазитензоры $\lambda = (\lambda_a^\mu, \lambda_a^{\bar{\epsilon}})$, $\nu = (\nu_a^\mu)$ позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma_{\mu i}^\nu = M_{\mu i}^a \nu_a^\nu + \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^\nu - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\epsilon}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\nu,$$

$$\Gamma_{\bar{\epsilon} i}^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} - M_{\mu i}^a \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu + \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu,$$

$$\Gamma_{\bar{\epsilon} i}^\nu = \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_a^\nu - M_{\mu i}^a \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu \nu_{\bar{\alpha}}^\nu - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\nu \nu_{\bar{\alpha}}^\mu,$$

$$\Gamma_{\bar{\epsilon} i}^a = -\Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu, \quad (12)$$

$$\Gamma_{\bar{\epsilon} i}^{\bar{\alpha}} = M_{\mu i}^a \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} - \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu - M_{\mu i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu,$$

$$\Gamma_{\bar{\epsilon} i}^\nu = -M_{\mu i}^a \nu_{\bar{\alpha}}^\nu \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^\nu \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu + M_{\mu i}^a \nu_{\bar{\epsilon}}^\nu \nu_{\bar{\alpha}}^\nu \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} +$$

$$+ \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\nu \nu_{\bar{\alpha}}^\mu \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} - \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} \lambda_a^\nu + M_{\mu i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu \nu_{\bar{\alpha}}^\nu +$$

$$+ \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\alpha}}^\nu + \Lambda_{\mu i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\epsilon}}^\nu \nu_{\bar{\alpha}}^\mu - \Lambda_{\bar{\epsilon} i}^a \lambda_a^{\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\alpha}}^\nu - \Lambda_{\mu i}^a \lambda_{\bar{\epsilon}}^\mu \lambda_a^{\bar{\alpha}} \nu_{\bar{\alpha}}^\nu.$$

Из соотношений (12) и следует утверждение теоремы.

Используя соотношения (8), (9), (12), получим

$$dC_{\bar{\alpha}} = \tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} C_{\bar{\epsilon}} + (\dots)_{\bar{\alpha}}^\nu A_\nu + (\dots)_{\bar{\alpha}}^a B_a, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} = \omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} - \Gamma_{\bar{\alpha} i}^{\bar{\epsilon}} \tau^i. \quad (14)$$

Из равенств (13), (14) следует

Т е о р е м а 2. Подобъект $\Gamma_1 = \{\Gamma_{\bar{\alpha} i}^{\bar{\epsilon}}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на оснащающую плоскость C смежной с ней плоскости $C+dC$ из центра $L_e + B$.

Аналогично доказываются утверждения:

Т е о р е м а 3. Подобъект $\Gamma_2 = \{\Gamma_{\mu i}^\nu\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость L_e смежной с ней плоскости L_e+dL_e из центра $C+B$.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma_3 = \{\Gamma_{\bar{\alpha} i}^{\bar{\epsilon}}\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость B смежной с ней плоскости $B+dB$ из центра $L_e + C$.

Будем говорить, что плоскость переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом Γ^1 объекта связности Γ , если ковариантный дифференциал [2] квазитензора (задающего эту плоскость) относительно связности Γ^1 равен нулю.

Преобразуем соотношения (13) к виду

$$dC_{\bar{\alpha}} = D\nu_{\bar{\alpha}}^\mu A_\mu + (\dots)_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} C_{\bar{\epsilon}} + (\dots)_{\bar{\alpha}}^a B_a. \quad (14)$$

Здесь

$$D\nu_{\bar{\alpha}}^\mu = d\nu_{\bar{\alpha}}^\mu + \nu_{\bar{\alpha}}^\nu \tilde{\omega}_\nu^\mu - \nu_{\bar{\epsilon}}^\mu \tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} + \tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^\mu$$

ковариантный дифференциал квазитензора $\nu = (\nu_a^\mu)$, определяющего оснащающую плоскость C , а волной обозначены следующие формы связности

$$\tilde{\omega}_\nu^\mu = \omega_\nu^\mu - \Gamma_{\nu i}^\mu \tau^i; \quad \tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} = \omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\epsilon}} - \Gamma_{\bar{\alpha} i}^{\bar{\epsilon}} \tau^i; \quad \tilde{\omega}_{\bar{\alpha}}^\mu = \omega_{\bar{\alpha}}^\mu - \Gamma_{\bar{\alpha} i}^\mu \tau^i.$$

Из соотношений (14) следует утверждение

Т е о р е м а 5. Оснащающая плоскость C переносится параллельно в связности $\Gamma^1 = \{\Gamma_{\mu i}^\nu, \Gamma_{\bar{\epsilon} i}^{\bar{\alpha}}, \Gamma_{\bar{\alpha} i}^{\bar{\epsilon}}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и оснащающую плоскость B .

Аналогично можно доказать утверждения

Т е о р е м а 6. Оснащающая плоскость B переносится параллельно в связности $\Gamma'' = \{\Gamma_{\bar{z}i}, \Gamma_{\bar{e}i}, \Gamma_{\bar{e}i}^a\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и плоскость L_e .

Т е о р е м а 7. Оснащающую плоскость B нельзя перенести параллельно в связности

$$\Gamma''' = \{\Gamma_{\mu i}^j, \Gamma_{\bar{e}i}^a, \Gamma_{\bar{e}i}^\mu, \Gamma_{\bar{z}i}, \Gamma_{\bar{e}i}^a\}.$$

Список литературы

1. Норден А.П. Теория композиций. - 3 кн.: Проблемы геометрии. М., 1976, 10, с. 117-145.
2. Шевченко Ю.М. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности. - 3 кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12, Калининград, 1981, с. 126-130.
3. Buzau W. Проективная классификация грассмановых соотношений и определение минимальных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов. *Ann. math. pura ed appl.*, 1953, op. 434, 1с. 133-160.

В. П. Ц А П Е Н К О

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ПАР ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n -мерном проективном пространстве продолжается [1] изучение гиперконгруэнций V_{n-1} $(n-1)$ -параметрических невырожденных многообразий пар фигур (P, Q) , где Q - гиперквадрик, а P - неинцидентная ей точка. Обозначим L_{n-1} - гиперплоскость, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q , T_{n-1} - гиперплоскость, касательную к гиперповерхности S_{n-1} , описанной точкой P , а M - многообразие, порожденное парой гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1} , ассоциированное с гиперконгруэнцией V_{n-1} .

Подвижной репер $R = \{A, A_\alpha, A_n\}$ специализируем следующим образом: вершину $A \equiv A_0$ совместим с точкой P , вершины A_α ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n-1$) поместим в $(n-2)$ -мерное пересечение M_{n-2} гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1} , а вершину A_n - в гиперплоскость L_{n-1} так, чтобы $A_n \notin M_{n-2}$. Относительно репера R гиперквадрика Q задается уравнением:

$a_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$. Система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции V_{n-1} в репере R запишется в виде:

$$\begin{aligned} \omega_i^0 &= \mu_{i\beta} \omega_\beta^0, & \omega_\alpha^n &= \Lambda_{\alpha\beta} \omega_\beta^0 \quad (\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}), \\ \omega_0^n &= 0, & \nabla a_{ij} &= a_{ij\beta} \omega_\beta^0. \end{aligned}$$

Продолжая эту систему, получим

$$\begin{aligned} \nabla \mu_{\alpha\beta} &= \mu_{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma^0, \\ \nabla \mu_{n\beta} &= \mu_{n\beta} (\omega_n^n - \omega_0^n) + \mu_{\gamma\beta} \omega_n^\delta + \mu_{n\beta\gamma} \omega_0^\delta, \\ \nabla \Lambda_{\alpha\beta} &= \Lambda_{\alpha\beta} (\omega_0^n - \omega_n^n) + \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega_0^\delta, \end{aligned}$$

$$\nabla a_{\gamma\beta} = a_{\gamma\beta\delta} \omega_0^\delta,$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом: $\nabla E_{a_1 \dots a_r} = dE_{a_1 \dots a_r} - E_{\delta a_2 \dots a_r} \omega_{a_1}^\delta - \dots - E_{a_1 \dots a_{r-1} \delta} \omega_{a_r}^\delta + \tau E_{a_1 \dots a_r} \omega_0^\delta$.

С многообразием V_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$ со структурными уравнениями

$$\begin{aligned} d\omega_0^\alpha &= \omega_0^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_0^\delta), \\ d\omega_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \mu_{\beta\gamma} \omega_0^\delta \wedge \omega_0^\alpha + \Lambda_{\beta\gamma} \omega_0^\delta \wedge \omega_n^\alpha, \\ d\omega_n^\alpha &= \omega_n^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega_n^\beta \wedge \omega_n^\alpha + \mu_{n\beta} \omega_0^\beta \wedge \omega_0^\alpha, \\ d\omega_n^\beta &= \Lambda_{\alpha\beta} \omega_n^\alpha \wedge \omega_0^\beta. \end{aligned}$$

Базой главного расслоения $G_\tau(S_{n-1})$ является гиперповерхность S_{n-1} , а типовым слоем — подгруппа стационарности G_τ пары гиперплоскостей (L_{n-1}, T_{n-1}) .

Фундаментально-групповую связность в $G_\tau(S_{n-1})$ зададим по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \Gamma_\gamma^\alpha, \Gamma_\gamma)$ на базе S_{n-1} , удовлетворяющего условиям:

$$\begin{aligned} \nabla \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Lambda_{\beta\gamma} \omega_n^\alpha &\equiv 0, \\ \nabla \Gamma_\gamma^\alpha + \Gamma_\gamma^\alpha (\omega_0^\delta - \omega_n^\delta) + \Gamma_\gamma \omega_n^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega_n^\beta &\equiv 0, \\ \nabla \Gamma_\gamma - \Lambda_{\alpha\gamma} \omega_n^\alpha &\equiv 0, \end{aligned}$$

где символом \equiv обозначено сравнение по модулю базисных форм ω_0^α .

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P, Q) точки, лежащей в гиперплоскости L_{n-1} и не принадлежащей гиперплоскости T_{n-1} , позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанную в теореме точку B зададим разложением $B = \lambda^\alpha A_\alpha + A_n$, причем из условия ее относительной инвариантности имеем

$$\nabla \lambda^\alpha = \lambda^\alpha (\omega_n^\delta - \omega_0^\delta) - \omega_n^\alpha + \lambda^\beta \omega_0^\beta. \quad (1)$$

Фундаментальный тензор $\Lambda_{\alpha\beta}$ и оснащающий квазитензор λ^α позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda^\alpha \Lambda_{\beta\gamma}; \quad \Gamma_\beta^\alpha = -\lambda^\alpha \lambda^\gamma \Lambda_{\beta\gamma}, \quad \Gamma_\alpha = -\lambda^\beta \Lambda_{\beta\alpha}.$$

Т е о р е м а 2. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает внутренним образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве точки B достаточно взять точку $\Lambda_n - \mu_{n\beta} \mu_{n\alpha} A_\beta$, определяемую самим многообразием V_{n-1} .

Т е о р е м а 3. Точка B переносится параллельно в связности Γ в том и только том случае, когда она смещается вдоль прямой AB .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (I), найдем ковариантный дифференциал квазитензора λ^α — $D\lambda^\alpha = \tilde{\lambda}_\beta^\alpha \omega_0^\beta$, где $\tilde{\lambda}_\beta^\alpha$ — ковариантные производные

$$\tilde{\lambda}_\beta^\alpha = \lambda_\beta^\alpha - \lambda^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \lambda^\alpha \Gamma_\beta^\gamma - \Gamma_\beta^\alpha.$$

Для точки B справедливо соотношение

$$dB = \tilde{\omega}_n^\beta B + (\lambda^\alpha \mu_{\alpha\beta} + \mu_{n\beta}) \omega_0^\beta A + D\lambda^\alpha A_\alpha,$$

откуда получаем, что условия $D\lambda^\alpha = 0$ параллельного переноса точки B в связности Γ определяют смещение точки B вдоль прямой AB .

З а м е ч а н и е. Гиперповерхность S_{n-1} нормализована в смысле А.П.Нордена, а именно: ее нормалью первого рода служит прямая AB , нормалью второго рода — плоскость M_{n-2} .

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ объекта связности характеризуется проекцией на нормаль M_{n-2} смежной с ней нормали $M_{n-2} + dM_{n-2}$ из центра AB .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы получим, рассмотрев имеющие место равенства

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\delta \bar{A} + \omega_\alpha^n \bar{B} + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \bar{A}_\beta.$$

Список литературы

1. Папенко В.П. Семейство плоскостей, ассоциированных с гиперконгруэнцией V_{n-1} . — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 103.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Проблемы геометрии, т. 9, М., 1979, с. 7–246.

И.И.Цыганок

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В n -МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теория векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве является классическим разделом дифференциальной геометрии. Аффинная же теория векторных полей является менее изученной. Исследованию векторных полей в трехмерном аффинном пространстве посвящены статьи [1] и [2]. В настоящей работе ставится задача изучения аффинной геометрии векторных полей многомерного пространства. При ее решении существенную роль будет играть тензор типа $(1, 1)$, порождаемый векторным полем.

1. Рассмотрим аффинное пространство A_n , отнесенное к подвижному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, инфинитезимальные перемещения которого описываются уравнениями вида:

$$dx = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^k \vec{e}_k \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, n),$$

где формы ω^i, ω_j^k удовлетворяют следующим уравнениям структуры: $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_j^i = \omega_k^j \wedge \omega_k^i$.

Пусть в некоторой области пространства A_n задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x) = a^i \vec{e}_i$. Тогда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$da^i + a^\ell \omega_\ell^i = a_j^i \omega^j. \quad (1)$$

При их продолжении получаем

$$da_j^i - a_k^i \omega_j^k + a_j^k \omega_k^i = a_{jk}^i \omega^k \quad (a_{jk}^i = a_{kj}^i). \quad (2)$$

Система величин $A = (a_j^i)$ образует тензор типа $(1, 1)$, с его помощью вычисляется дифференциал векторного поля \vec{a} в направлении, определенном вектором $\vec{\xi}$: $d_{\vec{\xi}} \vec{a} = (a_j^i \xi^j \vec{e}_i) \theta$, где $\omega^i = \xi^i \theta$ и $D\theta = \theta \wedge \omega_j^i$. Учитывая, что тензор A задает линейное преобразование векторного пространства $T_x(A_n)$, равенству можно придать вид:

$$\nabla_{\vec{\xi}} \vec{a} = A(\vec{\xi}). \quad (3)$$

Различные векторные поля могут порождать один и тот же тензор A . Пусть $\vec{\xi}$ является одним из таких векторных полей, т.е.

$$\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = A(\vec{\xi}); \quad (3^1)$$

Вычитая равенство (3) из (3¹), получим

$$\nabla_{\vec{\xi}} (\vec{\xi} - \vec{a}) = \vec{0},$$

следовательно, $(\vec{\xi} - \vec{a})$ - постоянный вектор.

2. Найдем такие направления в точке x , вдоль которой дифференциал вектора $\vec{a}(x)$ коллинеарен направлению смещения точки, т.е. $d\vec{a} = \lambda d\vec{x}$.

Это равенство назовем уравнением Родрига векторного поля \vec{a} . В силу (3) оно приводит к алгебраическому уравнению степени n : $\det \|A - \lambda E\| = 0$,

корни которого назовем главными кривизнами, а направления, им соответствующие, - главными направлениями векторного поля \vec{a} . Таким образом, главные кривизны векторного поля \vec{a} - это собственные значения тензора A , а главные направления - его собственные направления. Величины $H = \text{tr} A$, $K = \det A$ назовем соответственно средней и полной кривизной векторного поля. При этом $\text{tr} A = \text{div} \vec{a} = \sum a_i^i$, а потому обращение в нуль выделяет соленоидальные векторные поля \vec{a} [2].

Если же в некоторой области пространства $K = 0$, то $\text{rang} A = r < n$, и существует ядро линейного преобразования, определяемого тензором A , причем $\dim(\ker A) = n - r$. Если $\vec{\xi} \in \ker A$, то $\nabla_{\vec{\xi}} \vec{a} = A(\vec{\xi}) = \vec{0}$ и векторное поле \vec{a} будет постоянным вдоль ядра линейного преобразования, образующего $(n - r)$ -мерное подпространство векторного пространства $T_x(A_n)$. Таким образом, в области пространства A_n определяется распределение $\Delta(\Delta_{n-r}(x) = (\ker A)_x)$ с постоянным вдоль каждого своего плоского элемента $\Delta_{n-r}(x)$ векторным полем \vec{a} . Можно доказать, что это распределение будет голономным.

3. Предположим, что векторное поле \vec{a} имеет n различных главных кривизн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Если при этом векторы подвижного репера совместить с главными направ-

лениями тензора A , этот тензор приведет к виду $a_j^i = \lambda_j \delta_j^i$. Линии, касающиеся в каждой своей точке главных направлений тензора A , образуют сеть Σ_n в области задания векторного поля \vec{a} . Назовем ее сетью линий кривизны векторного поля. Из уравнений (2) при этом следует, что

$$d\lambda_i = a_{ik}^i \omega^k, \quad \omega_j^i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} a_{jk}^i \omega^k \quad (i \neq j). \quad (4)$$

Вторая группа уравнений и задает сеть Σ_n . Условие голономности сети Σ_n записывается в виде $(\lambda_i - \lambda_k) a_{jk}^i = (\lambda_i - \lambda_j) a_{jk}^i$ ($i \neq j \neq k \neq i$). Отсюда в силу (2) следуют соотношения $a_{jk}^i = 0$ ($i \neq j \neq k \neq i$), которые показывают, что эта сеть является n -сопряженной системой [3].

Поскольку теперь $d\vec{a} = \sum \lambda_i \omega^i \vec{e}_i$, то вдоль каждой своей линии кривизны векторное поле описывает развертывающуюся поверхность, и через каждую точку x пространства A_n проходит n таких поверхностей.

В случае, если все $\lambda_i = \text{const}$, то из первой группы уравнений (4) последуют равенства $a_{ik}^i = 0$ при $i \neq k$ и сеть Σ_n линий кривизны векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x)$ является сетью Чебышева II рода [4].

Потребуем теперь, чтобы τ первых кривизн векторного поля совпадали: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\tau = \lambda$, а остальные $(n - \tau)$ были различны между собой. В этом случае $a_t^s = \lambda \delta_t^s$ ($s, t = 1, 2, \dots, \tau$), поэтому из уравнений (4) последуют равенства: $a_{t\alpha}^s = \delta_t^s a_\alpha^\alpha$ ($\alpha, \beta = \tau + 1, \tau + 2, \dots, n$).

Сами же уравнения (4) примут вид

$$\omega_t^\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda} a_{t\alpha}^\alpha \omega^\alpha, \quad (5)$$

$$\omega_\alpha^s = \frac{1}{\lambda - \lambda_\alpha} (a_\alpha^s \omega^s + a_{\alpha\beta}^s \omega^\beta), \quad \omega_\beta^\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} a_{\beta\alpha}^\alpha \omega^\alpha.$$

Уравнения (5) задают голономное распределение Δ_τ , каждый плоский элемент $\Delta_\tau(x) = [x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_\tau]$ которого является τ -мерным подпространством в $T_x(A_n)$, а любое его одномерное направление является главным направлением векторного поля \vec{a} .

Вдоль любой интегральной поверхности $\omega^\alpha = 0$ распределения Δ_τ имеем теперь

$$d\vec{e}_\alpha = a_\alpha d\vec{x} + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta.$$

Поэтому плоскости $[x, \vec{e}_{\tau+1}, \dots, \vec{e}_n]$ проходят через $(n - \tau - 1)$ -мерную фиксированную плоскость пространства A_n и образуют осевое оснащение [5] интегральной поверхности распределения Δ_τ .

В частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$, $d\vec{a} = \lambda d\vec{x}$, $\lambda = \text{const}$ и, следовательно, $\vec{a} = \lambda(\vec{x} - \vec{x}_0)$.

4. Если потребовать для векторного поля \vec{a} , чтобы в каждой точке x вектор $\vec{a}(x)$ был собственным вектором тензора A , то согласно формуле (3) интегральные кривые векторного поля \vec{a} будут прямыми и образуют прямолинейную конгруэнцию в A_n . Верно и обратное.

Список литературы

1. Geothiev G. Observatia ossupza geometzia affine differentiable a simpurilor de vectori. - Lu. v. conf. de geom. si topolog. Jasi, 1958, 127-128.
2. Слухаев В.В. Некоторые вопросы эквивалентной геометрии векторного поля. - Тр. Томского ун-та, т. 181, 1965, с. 68-75.
3. Базылев В.Т. К теории плоских многомерных сетей. - Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1965, с. 29-37.
4. Либер А.Е. О чебышевских сетях и чебышевских пространствах. - Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1974, вып. 17, с. 177-183.
5. Атанасян Л.С. Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. - Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып. 9, с. 351-410.

Ю.И.Шевченко

О ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Исходя из точки зрения двухъярусных расслоений, дан интерпретация двум частным случаям структурных уравнений Лаптева пространства с фундаментально-групповой связностью.

1. Структурные уравнения пространства элементов Лаптева ([1], с. 317) запишем в подробном виде ([2] с. 441)

$$d\omega^{s_0} = \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \quad (1)$$

$$d\omega^{s_1} = \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + C_{p_1 q_2}^{s_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_1}, \quad (2)$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + C_{p_1 q_2}^{s_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_2}, \quad (3)$$

где $s_0, p_0, q_0 = -R+1, 0$; $s_1, p_1, q_1 = 1, r$; $s_2, p_2, q_2 = r+1, z$, а $C_{p_1 q_1}^{s_1}, C_{p_2 q_2}^{s_2}$ — структурные постоянные z -членной группы Ли G , содержащей $(z-n)$ -членную подгруппу H , причем, например, индекс q_{12} принимает значения индексов q_1 и q_2 . Из уравнений (1)–(3) следует, что пространство элементов является частным случаем главного двухъярусного ступенчато-расслоенного пространства ([3], с. 286–287). Уравнения (1) — это структурные уравнения базы B — области R -мерного дифференцируемого многообразия.

Представим пространство элементов Лаптева, с одной стороны, в виде главного расслоения $G(B)$, типовым слоем которого является группа G . Слой G , в свою очередь, есть главное расслоение $H(G/H)$ с базой — множеством левых смежных классов G/H и типовым слоем —

подгруппой H . Уравнения (1), (2) — это структурные уравнения расширенной базы M . Пространство элементов представим, с другой стороны, в виде главного расслоения $H(M)$, типовым слоем которого служит подгруппа H . Расширенная база M есть расслоение $G/H(B)$ с базой B , типовым слоем G/H и структурной группой G .

Таким образом, пространство элементов Лаптева представлено в виде двух главных расслоений $G(B)$ и $H(M)$ где $G = H(G/H)$, $M = G/H(B)$. Это пространство естественно обозначить символом $H(G/H(B))$, отражающим его двухъярусную структуру.

2. Рассмотрим расслоение $G(B)$, структурные уравнения (2), (3) слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_{12}} = \frac{1}{2} C_{p_{12} q_{12}}^{s_{12}} \omega^{p_{12}} \wedge \omega^{q_{12}} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_{12}} \quad (C_{p_2 q_2}^{s_1} = 0).$$

Связность в главном расслоении $G(B)$ задается по Лаптеву [4] с помощью форм $\tilde{\omega}^{s_{12}} = \omega^{s_{12}} - \Gamma_{p_0}^{s_{12}} \omega^{p_0}$, где компоненты объекта связности $\Gamma_{p_0}^{s_{12}}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\Gamma_{p_0}^{s_{12}} - \Gamma_{q_0}^{s_{12}} \omega^{q_0} + \Gamma_{p_0}^{q_{12}} \omega^{s_{12}} + \omega_{p_0}^{s_{12}} = \Gamma_{p_0 q_0}^{s_{12}} \omega^{q_0}, \quad (4)$$

причем $\omega_{q_{12}}^{s_{12}} = C_{q_{12} p_{12}}^{s_{12}} \omega^{p_{12}}$. Внешние дифференциалы форм связности $\tilde{\omega}^{s_{12}}$ приводятся к виду

$$d\tilde{\omega}^{s_{12}} = \frac{1}{2} C_{p_{12} q_{12}}^{s_{12}} \tilde{\omega}^{p_{12}} \wedge \tilde{\omega}^{q_{12}} + R_{p_0 q_0}^{s_{12}} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \quad (5)$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R_{p_0 q_0}^{s_{12}} = \Gamma_{[p_0 q_0]}^{s_{12}} - \frac{1}{2} C_{p_{12} q_{12}}^{s_{12}} \Gamma_{p_0}^{p_{12}} \Gamma_{q_0}^{q_{12}}.$$

Полагая, что в уравнениях (1) формы $\omega_{p_0}^{s_0}$ имеют вид

$$\omega_{p_0}^{s_0} = R_{p_0 q_0}^{s_0} \omega^{q_0} + 2R_{p_0 q_1}^{s_0} \tilde{\omega}^{q_1},$$

получим, что уравнения (1), (5) дают нам частный случай структурных уравнений пространства с фундаментально-групповой связностью ([1], с. 311), выделяемый условиями

$$R_{p_1 q_1}^{s_0} = 0, \quad R_{p_{01} q_1}^{s_{12}} = 0.$$

3. Возьмем расслоение $H(M)$ со структурными уравнениями, записанными в виде

$$d\omega^{s_{01}} = \omega^{p_{01}} \wedge \Omega_{p_{01}}^{s_{01}},$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + \omega^{p_{01}} \wedge \Omega_{p_{01}}^{s_2},$$

где

$$\Omega_{p_1}^{s_0} = 0, \quad \Omega_{p_0}^{s_{012}} = \omega^{s_{012}}, \quad \Omega_{p_1}^{s_{12}} = \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_{12}} \omega^{q_1} + C_{p_1 q_2}^{s_{12}} \omega^{q_2}.$$

Рассмотрим формы

$$\bar{\omega}^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi_{p_0}^{s_2} \omega^{p_0} - \Pi_{p_1}^{s_2} \omega^{p_1},$$

внешние дифференциалы которых имеют вид:

$$d\bar{\omega}^{s_2} = \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + \omega^{p_0} \wedge \Delta \Pi_{p_0}^{s_2} +$$

$$+ \omega^{p_1} \wedge \Delta \Pi_{p_1}^{s_2} - \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \Pi_{p_0}^{p_2} \Pi_{q_{01}}^{q_2} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}},$$

где

$$\Delta \Pi_{p_0}^{s_2} = d\Pi_{p_0}^{s_2} - \Pi_{q_0}^{s_2} \omega_{p_0}^{q_0} + \Pi_{p_0}^{q_2} \Omega_{q_2}^{s_2} - \Pi_{q_1}^{s_2} \omega_{p_0}^{q_1} + \omega_{p_0}^{s_2},$$

$$\Delta \Pi_{p_1}^{s_2} = d\Pi_{p_1}^{s_2} - \Pi_{q_1}^{s_2} \Omega_{p_1}^{q_1} + \Pi_{p_1}^{q_2} \Omega_{q_2}^{s_2} + C_{p_1 q_2}^{s_2} \omega^{q_2},$$

причем $\Omega_{q_2}^{s_2} = C_{q_2 p_2}^{s_2} \omega^{p_2}$. В соответствии с теоремой Картана-Лаптева [5] для задания связности в главном расслоении $H(M)$ необходимо и достаточно задать поле объекта связности $\Pi_{p_{01}}^{s_2}$ на расширенной базе M : $\Delta \Pi_{p_{01}}^{s_2} = \Pi_{p_{01} q_{01}}^{s_2} \omega^{q_{01}}$. Тогда формы связности $\bar{\omega}^{s_2}$ будут удовлетворять уравнениям

$$d\bar{\omega}^{s_2} = \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} +$$

$$+ \bar{R}_{p_{01} q_{01}}^{s_2} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}}, \quad (6)$$

где объект $\bar{R}_{p_{01} q_{01}}^{s_2}$, совпадающий с объектом кривизны лишь с точностью до постоянных слагаемых, имеет вид

$$\bar{R}_{p_{01} q_{01}}^{s_2} = \Pi_{[p_{01} q_{01}]}^{s_2} - \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \Pi_{[p_{01} q_{01}]}^{p_2} \Pi_{[p_{01} q_{01}]}^{q_2}.$$

З а м е ч а н и е 1. При менее детальном подходе, когда формы $\bar{\omega}^{s_2}$ записываются в компактной форме $\bar{\omega}^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi_{p_{01}}^{s_2} \omega^{p_{01}}$, для компонент объекта связности получаются уравнения

$$d\Pi_{p_{01}}^{s_2} - \Pi_{q_{01}}^{s_2} \Omega_{p_{01}}^{q_{01}} + \Pi_{p_{01}}^{q_2} \Omega_{q_2}^{s_2} + \Omega_{p_{01}}^{s_2} = \Pi_{p_{01} q_{01}}^{s_2} \omega^{q_{01}}.$$

В этом случае формы связности $\bar{\omega}^{s_2}$ удовлетворяют обычным уравнениям, из которых следуют уравнения (6).

4. Изучим расслоение $G/H(B)$, структурные уравнения слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1} \wedge \Omega_{p_1}^{s_1} + \omega^{p_0} \wedge \omega_{p_0}^{s_1}.$$

Линейная дифференциально-геометрическая связность в расслоении $G/H(B)$ задается по В.И.Близникасу [6] с помощью форм $\bar{\omega}^{s_1} = \omega^{s_1} - L_{p_0}^{s_1} \omega^{p_0}$, причем компоненты объекта связности $L_{p_0}^{s_1}$ удовлетворяют уравнениям

$$dL_{p_0}^{s_1} - L_{q_0}^{s_1} \omega_{p_0}^{q_0} + L_{p_0}^{q_1} \Omega_{q_1}^{s_1} + \omega_{p_0}^{s_1} = L_{p_0 q_{01}}^{s_1} \omega^{q_{01}}. \quad (7)$$

Внешние дифференциалы форм связности $\bar{\omega}^{s_1}$ имеют вид

$$d\bar{\omega}^{s_1} = \bar{\omega}^{p_1} \wedge (\Omega_{p_1}^{s_1} - L_{q_0 p_1}^{s_1} \omega_{p_0}^{q_0}) + R_{p_0 q_0}^{s_1} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \quad (8)$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R_{p_0 q_0}^{s_1} = L_{[p_0 q_0]}^{s_1} + L_{[p_0 | q_0]}^{s_1} L_{q_0]}^{q_1}.$$

Уравнения (6), (8) приведем к виду

$$\left\{ \begin{aligned} d\bar{\omega}^{s_1} &= \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + C_{p_2 q_2}^{s_1} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \\ &+ R_{p_0 q_0}^{s_1} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2R_{p_0 q_1}^{s_1} \omega^{p_0} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + R_{p_1 q_1}^{s_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1}, \\ d\bar{\omega}^{s_2} &= \frac{1}{2} C_{p_2 q_2}^{s_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + \\ &+ R_{p_0 q_0}^{s_2} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2R_{p_0 q_1}^{s_2} \omega^{p_0} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + R_{p_1 q_1}^{s_2} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где

$$2 R_{p_0 q_1}^{s_1} = L_{p_0 q_1}^{s_1} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_1} L_{p_0}^{p_1} + C_{p_2 q_1}^{s_1} (\Pi_{p_0}^{p_2} + \Pi_{p_1}^{p_2} L_{p_0}^{p_1}),$$

$$R_{p_1 q_1}^{s_1} = C_{[p_1 | q_2] p_1}^{s_1} \Pi_{q_1}^{q_2}, \quad R_{p_1 q_1}^{s_2} = \bar{R}_{p_1 q_1}^{s_2},$$

$$R_{p_0 q_0}^{s_2} = \bar{R}_{p_0 q_0}^{s_2} + 2 \bar{R}_{[p_0 | q_1] p_0}^{s_2} L_{q_0}^{q_1} + (\bar{R}_{p_1 q_1}^{s_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2}) L_{[p_0}^{p_1} L_{q_0}^{q_1},$$

$$R_{p_0 q_1}^{s_2} = \bar{R}_{p_0 q_1}^{s_2} + (\bar{R}_{p_1 q_1}^{s_2} + \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_2}) L_{p_0}^{p_1}.$$

Выберем в уравнениях (1) формы $\omega_{p_0}^{s_0}$ в виде

$$\omega_{p_0}^{s_0} = R_{p_0 q_0}^{s_0} \omega_{q_0}^{q_0} + 2 R_{p_0 q_1}^{s_0} \bar{\omega}_{q_1}^{q_1},$$

тогда уравнения (1), (9) дают другой случай пространства с фундаментально-групповой связностью, выделяемый условиями $C_{p_1 q_1}^{s_2} = 0, R_{p_1 q_1}^{s_0} = 0$. Этот случай соответствует редуктивности однородного пространства G/H .

З а м е ч а н и е 2. Исходя из уравнений (4) и (7), запишем уравнения для компонент $\Gamma_{p_0}^{s_1}$ объекта связности $\Gamma_{p_0}^{s_1}$ и объекта связности $L_{p_0}^{s_1}$ следующим образом:

$$d\Gamma_{p_0}^{s_1} - \Gamma_{q_0}^{s_1} \omega_{p_0}^{q_0} + \Gamma_{p_0}^{q_1} C_{q_1 p_2}^{s_1} \omega_{p_0}^{p_2} + \Gamma_{p_0}^{p_2} C_{p_2 q_1}^{s_1} \omega_{p_0}^{q_1} + \omega_{p_0}^{s_1} = \Gamma_{p_0 q_0}^{s_1} \omega_{q_0}^{q_0},$$

$$dL_{p_0}^{s_1} - L_{q_0}^{s_1} \omega_{p_0}^{q_0} + L_{p_0}^{q_1} C_{q_1 p_2}^{s_1} \omega_{p_0}^{p_2} + \omega_{p_0}^{s_1} = \bar{L}_{p_0 q_0}^{s_1} \omega_{q_0}^{q_0},$$

где

$$\bar{L}_{p_0 q_0}^{s_1} = L_{p_0 q_0}^{s_1}, \quad \bar{L}_{p_0 q_1}^{s_1} = L_{p_0 q_1}^{s_1} - \frac{1}{2} C_{p_1 q_1}^{s_1} L_{p_0}^{p_1}.$$

Отождествляя объекты $\Gamma_{p_0}^{s_1}$ и $L_{p_0}^{s_1}$, из записанных уравнений получим соотношения $\bar{L}_{p_0 q_1}^{s_1} = C_{q_1 p_2}^{s_1} \Gamma_{p_0}^{p_2}$, являющиеся условиями горизонтальности 1-го порядка ([2], с. 454). Теперь объект $L_{p_0}^{s_1}$ будет задавать связность Ю.Г. Лумисте в однородном расслоении $G/H(B)$. В этом случае в системе (9) вместо форм $\bar{\omega}^{s_1}$ можно писать формы $\hat{\omega}^{s_1}$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим интересный момент, проявившийся во 2-й интерпретации. Мы использовали расслоение $G/H(B)$, типовой слой которого является общим однородным пространством, однако получили интерпретацию,

соответствующую редуктивному случаю.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. об-ва, т. 2, М., 1953, с. 275-382.
2. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях. - Матем. сб., 1966, т. 69, с. 434-469.
3. Остиану Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства. - Тр. геометр. семинара, т. 5, М., 1974, с. 259-309.
4. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. - Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда (1961), т. 2, Л., 1964, с. 226-233.
5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - Проблемы геометрии, т. 9, М., 1979.
6. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. - Литовский математич. сб., 1966, №2, с. 141-209.

Н.М. Шейдорова

ЗАДАНИЕ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}_m^z \subset P_n$

В работе приведены дифференциальные уравнения двухсоставного распределения \mathcal{H}_m^z [4] в репере нулевого порядка \mathcal{R}^0 . Доказано, что распределения \mathcal{H}_m^z существуют с произволом $z(n-z) + (n-m)(m-z)$ функций n аргументов.

При $m=n-1$ двухсоставное распределение $\mathcal{H}_m^z \subset P_n$ является гиперполосным распределением $\mathcal{H}_z \subset P_n$, которое рассмотрено в работе А.В.Столярова [3].

Индексы принимают следующие значения:

$$\bar{j}, \bar{j}, \bar{x} = \overline{0, n}; \quad p, q = \overline{1, z}; \quad \alpha, \beta = \overline{m+1, n}; \quad a, b = \overline{1, m};$$

$$j, j, x = \overline{1, n}; \quad i, j = \overline{z+1, m}; \quad u, v = \overline{z+1, n}.$$

При внешнем дифференцировании принимается оператор ∇ , введенный в работе [1].

1. Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_j\}$, инфинитезимальные перемещения которого:

$$dA_{\bar{j}} = \omega_{\bar{j}}^{\bar{x}} A_{\bar{x}}, \quad \text{где } \mathcal{D}\omega_{\bar{j}}^{\bar{x}} = \omega_{\bar{j}}^{\bar{p}} \wedge \omega_{\bar{p}}^{\bar{x}}, \quad \sum_{\bar{j}} \omega_{\bar{j}}^{\bar{j}} = 0.$$

Совместим вершину A_0 репера $\{A_{\bar{j}}\}$ с текущей точкой X пространства P_n , тогда структурные формы точки приводятся к каноническому виду $\omega_{\bar{j}}^{\bar{j}}$. Такой репер обозначим \mathcal{R}^0 .

О п р е д е л е н и е. Пару распределений

$$\Delta \Lambda_p^u \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \Lambda_p^u - \Lambda_q^u \Lambda_p^v \omega_v^q + \omega_p^u = \Lambda_{px}^u \omega_x^u, \quad (1)$$

$$\Delta M_a^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \nabla M_a^\alpha - M_b^\alpha M_a^\beta \omega_b^\beta + \omega_a^\alpha = M_{ax}^\alpha \omega_x^\alpha \quad (2)$$

соответственно z -мерных плоскостей Λ (Λ -распределение) и m -мерных плоскостей M (M -распределение) пространства P_n с отношением инцидентности

$$X \equiv A_0 \in \Lambda \subset M \quad (z < m \leq n-1) \quad (3)$$

их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем двухсоставным распределением \mathcal{H}_m^z [4], [5] или $M(\Lambda)$ -

распределением проективного пространства P_n , в котором Λ -распределение назовем базисным, M -распределение — оснащающим.

Плоскости $\Lambda(A_0)$, $M(A_0)$ натянуты соответственно на точки

$$A_0, L_p = A_p + \Lambda_p^u A_u; \quad A_0, M_a = A_a + M_a^\alpha A_\alpha. \quad (4)$$

Относительно репера \mathcal{R}^0 дифференциальные уравнения

$M(\Lambda)$ -распределения в P_n имеют вид ([2]; при $m=n-1$

см. [3]):

$$\nabla \Lambda_p^u - \Lambda_q^u \Lambda_p^v \omega_v^q + \omega_p^u = \Lambda_{px}^u \omega_x^u, \\ \nabla M_i^\alpha - M_j^\beta M_i^\gamma \omega_j^\beta - M_i^\alpha (\omega_i^\beta + M_i^\beta \omega_\beta^\beta) + \omega_i^\alpha = M_{ix}^\alpha \omega_x^\alpha, \quad (5)$$

где

$$M_p^\alpha = \Lambda_p^\alpha - \Lambda_p^i M_i^\alpha. \quad (6)$$

Соотношения (6) характеризуют условия (3) инцидентности образующих элементов распределения (1) — (2). Система величин $\{\Lambda_p^u, \Lambda_{px}^u, M_i^\alpha, M_{ix}^\alpha\}$ образует геометрический объект — фундаментальный объект 1-го порядка $M(\Lambda)$ -распределения. Последующие продолжения полученных систем приведут к дифференциальным уравнениям для компонент фундаментальных объектов высших порядков $M(\Lambda)$ -распределения. Последовательность фундаментальных объектов $M(\Lambda)$ -распределения содержит на каждом этапе продолжения в качестве подобъекта фундаментальный объект соответствующего порядка базисного распределения (Λ -распределения).

2. Все уравнения, входящие в чистое замыкание системы (5), можно записать в виде

$$\Delta \Lambda_{px}^u \wedge \omega_x^u = 0, \quad \Delta M_{ix}^\alpha \wedge \omega_x^\alpha = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta \Lambda_{px}^u \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \Lambda_{px}^u - \Lambda_{qx}^v \Lambda_p^u \omega_v^q - \Lambda_{qx}^u \Lambda_p^v \omega_v^q + (\Lambda_{qx}^u \delta_x^q - \delta_x^u) (\omega_p^q + \Lambda_p^u \omega_u^q) = \Lambda_{pxj}^u \omega_j^j, \quad (8)$$

$$\Delta M_{ix}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \nabla M_{ix}^\alpha - M_{px}^\alpha \omega_i^p - M_a^\alpha M_{ix}^\beta \omega_b^\beta - M_i^\beta (M_{jx}^\alpha \omega_j^\alpha + M_{px}^\alpha \omega_p^p) + (M_a^\alpha \delta_x^a - \delta_x^\alpha) (\omega_i^\beta + M_i^\beta \omega_\beta^\beta) = M_{ixj}^\alpha \omega_j^j. \quad (9)$$

Определяя характеры системы (7), получим

С. В. Ш м е л е в а

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ
ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОРОЖДЕННОЙ ФОКАЛЬНЫМИ
ТОЧКАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции \mathcal{D} невырожденных линейчатых квадрик Q , имеющие одну невырождающуюся фокальную поверхность (A_0) и одну вырождающуюся поверхность (A_3) , описанную фокальными точками второго порядка. Доказано, что если (A_3) — линия, то существует пять и только пять попарно пересекающихся классов конгруэнций \mathcal{D} . Точка A_3 для таких конгруэнций является двукратной фокальной точкой квадрики

Отнесем конгруэнцию \mathcal{D} к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где $A_0 A_i, A_3 A_i$ — прямолинейные образующие квадрики $Q \in \mathcal{D}$ ($i, j, k = 1, 2$). Квадрика Q задается уравнением:

$$\mathcal{F} \equiv X^1 X^2 - X^0 X^3 = 0, \quad (1)$$

причем конгруэнции \mathcal{D} удовлетворяют следующей системе уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik} \omega^k, \\ \omega_0^i - \omega_3^j = \lambda_{ik} \omega^k, \quad \omega_3^i = \beta_k^i \omega^k, \quad \Omega \equiv \omega_0^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = \eta_k \omega^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_{12} = c_{21}, \quad \lambda_{12} \beta_1^1 - \lambda_{11} \beta_2^1 + \lambda_{22} \beta_1^2 - \lambda_{21} \beta_2^2 = 0, \quad (3)$$

$\omega^i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^i, \quad \omega_\alpha^i \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3)$ — компоненты инфинитезимальных перемещений репера R .

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = \tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m), \quad (10)$$

откуда число Картана $Q = \frac{1}{2} n(n+1) [\tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m)]$. Так как функции $\Lambda_{pxj}^u, M_{ikj}^\alpha$ симметричны по индексам x, j , их число $\mathcal{N} = \frac{1}{2} (n+1)n [\tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m)]$. Таким образом, $Q = \mathcal{N}$, и следовательно, система уравнений (5), определяющая $M(\Lambda)$ -распределение в репере \mathcal{K}^0 , находится в инволюции.

Т е о р е м а . Двухсоставные распределения $\mathcal{H}_m^z \subset P_n$ существуют с произволом в $\tau(n-\tau) + (n-m)(m-\tau)$ функций n аргументов.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I. — Тр. геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1971, 3, с. 49–94.
2. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства. I. Калининградский ун-т, Калининград, 1984, 93с. (Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР, 2, 07.1984, № 4481–84 Деп.)
3. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m -мерных линейных элементов. — Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР, 7, 1975, с. 117–151.
4. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}_m^z \subset P_n$. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 111–115.
5. Шейдорова Н.М. О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с. 111–114.

суммирование не производится.

Так как поверхность (A_3) вырождается в линию, то

$$\omega_3^i = t^i \psi, \quad (4)$$

где ψ - некоторая ненулевая форма Пфаффа. Обозначим:

$$F_i = h_i X^1 X^2 - a_{ii}^j (X^i)^2 - a_{ji}^i (X^j)^2 + \lambda_{ki} X^k X^3 + c_{ki} X^k X^0, \quad (5)$$

тогда

$$dF = (2\theta - \omega_0^0 - \omega_3^3)F + F_{\kappa} \omega^{\kappa}, \quad d\theta = 0. \quad (6)$$

Т е о р е м а 1. Если поверхность (A_3) вырождается в точку, то она является фокальной точкой любого порядка $m \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ в разложении

$$F + dF + \frac{1}{2} d^2 F + \dots + \frac{1}{k!} d^k F \quad (7)$$

не может возникнуть член с $(X^3)^2$. Следовательно, координаты точки A_3 обращают в нуль (7) при любом натуральном k .

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией \mathcal{D}_0 называется конгруэнция \mathcal{D} , у которой A_3 - неподвижная точка, A_0 - фокальная точка второго порядка, A_i - фокальные точки.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции \mathcal{D}_0 существуют и определяются вполне интегрируемой системой Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система пфаффовых уравнений конгруэнции \mathcal{D}_0 приводится к виду:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_2^1 = 0, \\ \omega_i^0 = \lambda \omega^i, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad d \ln \lambda + 2\omega_0^0 = 0. \quad (8)$$

Чистое замыкание этой системы тождественно обращается в нуль. Следовательно, система (8) вполне интегрируема. Анализируя систему (8), убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Т е о р е м а 3. Конгруэнция \mathcal{D}_0 обладает следующими свойствами: 1/ поверхность (A_0) является квад-

рикой с прямолинейными образующими $A_0 A_i$; 2/ фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_0, A_3 и пары пересекающихся фокальных прямых $A_0 A_i$; 3/ поверхности вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются в точке $M = A_0 A_3$; 4/ касательные к любым соответствующим друг другу линиям на поверхностях (A_0) и (M) пересекаются в точке, лежащей на прямой $A_1 A_2$.

Исключим в дальнейшем из рассмотрения случай вырождения поверхности (A_3) в точку, т.е. будем считать, что t^1 и t^2 в формулах (4) не обращаются в нуль одновременно. Выделяются три подкласса таких конгруэнций: конгруэнции $\mathcal{D}_i (t^i \neq 0, t^j = 0)$ и конгруэнции $\mathcal{D}_3 (t^1 t^2 \neq 0)$.

Так как A_3 - фокальная точка второго порядка, то

$$t^1 \lambda_{11} + t^2 \lambda_{21} = 0, \quad t^1 \lambda_{12} + t^2 \lambda_{22} = 0. \quad (9)$$

Т е о р е м а 4. Существуют два и только два непесекающихся класса конгруэнций \mathcal{D}_i : конгруэнции \mathcal{D}_i^1 , определенные с произволом трех функций двух аргументов и конгруэнции \mathcal{D}_i^2 , определенные с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равноправия точек A_1 и A_2 достаточно ограничиться рассмотрением конгруэнций $\mathcal{D}_1 (t^1 \neq 0, t^2 = 0)$. Из (9) находим:

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = 0.$$

Тогда

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^0 = 0. \quad (10)$$

Замыкая уравнения (10), получим

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^2 \wedge \omega_2^0 = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим сначала общий случай, когда

$$\omega_1^2 \neq 0. \quad (12)$$

Тогда получим:

$$\omega_3^1 = \omega_1^2, \quad \omega_2^0 = p \omega_3^1, \quad \omega_3^3 + \omega_2^3 - 2\omega_1^3 = q \omega_3^1. \quad (13)$$

Система (2), (10), (13) — в инволюции и определяет конгруэнции \mathcal{D}'_1 с произволом трех функций двух аргументов.

Если
$$\omega_1^2 = 0, \quad (14)$$

то уравнения (11) тождественно удовлетворяются. Замыкая (14), также получим тождество. Система (2), (10), (14) — в инволюции и определяет конгруэнцию \mathcal{D}''_1 с произволом пяти функций двух аргументов. Теорема доказана.

Теорема 5. Касательная плоскость к поверхности (A_i) конгруэнции \mathcal{D}'_i содержит прямую $A_j A_3$; поверхность (A_i) конгруэнции \mathcal{D}''_i вырождается в прямую линию.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы

$$dA_i = \omega_i^1 A_1 + \omega_i^j A_j + \omega_i^3 A_3 \quad (15)$$

и уравнений, характеризующих конгруэнции \mathcal{D}'_i и \mathcal{D}''_i .

Теорема 6. Конгруэнции \mathcal{D}_3 существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Доказательство. Система уравнений Пфаффа конгруэнции \mathcal{D}_3 приводится к виду:

$$\begin{aligned} \omega_3^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_3^2 - \omega_3^1 = 0, \quad \omega_1^0 + \omega_2^0 - 2\omega_3^1 = 0, \\ \omega_3^1 = \beta_\kappa \omega^\kappa, \quad \Omega = h_\kappa \omega^\kappa, \quad \omega_i^3 - \omega_i^j = c_{ik} \omega^\kappa, \quad (16) \\ \omega_1^0 - \omega_3^2 = \lambda_1 \omega^1 - \lambda_2 \omega^2, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^\kappa, \quad \omega_2^2 - \omega_1^1 + \omega_1^2 - \omega_2^1 = 2\omega_3^1 \end{aligned}$$

причем

$$\beta_2 (2a_{11}^2 + 2a_{21}^4 + \tau \lambda_1 - 2h_1) - \beta_1 (2a_{12}^2 + 2a_{22}^4 + \tau \lambda_2 - 2h_2) = 0. \quad (17)$$

Система (16), (17) — в инволюции и определяет конгруэнции \mathcal{D}_3 с произволом пяти функций двух аргументов.

Теорема 7. Точка A_3 является двукратной фокальной точкой квадрики

$$Q \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$$

и трехкратной фокальной точкой квадрики $Q \in \mathcal{D}''_i$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из условий кратности фокальной точки A_3 .

Семинар
по дифференциальной геометрии многообразий
фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 31 мая 1983 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 12 октября 1983 года по 30 мая 1984 года.

12.10.1983г. Ю.И. Попов. Дифференциально-геометрические структуры $H(M(\Lambda))$ -распределения.

19.10.1983г. В.С. Микучки и Й. (г. Минск). Геометрический смысл \mathcal{C} -сопряженных связностей.

26.10.1983г. М.В. Кротов. О свойствах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.

2.11.1983г. Е.В. Крыдлова. Вырожденные конгруэнции, порожденные кривой и плоскостью.

9.11.1983г. Е.П. Сопина. Конгруэнции гиперквадрик в A_n с фокальной конгруэнцией m -мерных квадрик.

16.11.1983г. Л.А. Жарикова. Связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в аффинном пространстве.

23.11.1983г. Т.П. Фунтикова. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов.

30.11.1983г. В.П. Цапенко. Аффинные связности, инвариантно присоединенные к специальному гиперкомплексу.

7.12.1983г. Ю.И. Шевченко. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадратичных элементов.

14.12.1983г. Н.М.Шейдорова. О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства.

21.12.1983г. М.Ф.Гребенюк. Проективные связности, ассоциированные со специальной гиперполосой.

28.12.1983г. В.С.Малаховский. О многообразии фигур в p -мерном однородном пространстве.

4.01.1984г. С.В.Шмелева (г.Москва). Об автоматизации поиска научной информации по геометрии.

11.01.1984г. В.В.Махоркин. Фокальные точки второго порядка как вторичные особенности.

18.01.1984г. М.О.Рахула (г.Одесса). Теория кастраф и дифференциальная геометрия.

25.01.1984г. Ю.И.Шевченко. О фундаментально-групповой связности.

1.02.1984г. Г.Л.Свешников. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными фокальными поверхностями.

8.02.1984г. В.В.Махоркин. Особые точки дифференцируемых отображений.

15.02.1984г. Л.Г.Корсакова. Об одном классе расслояемых пар многообразий.

22.02.1984г. Е.А.Щербаков. Некоторые классы конгруэнций оснащенных коник в аффинном пространстве.

29.02.1984г. Б.А.Андреев. Об одном классе сечений главных расслоений.

7.03.1984г. М.В.Кретов. Комплексы эллипсоидов с вырождающимися в линию многообразиями центров.

14.03.1984г. Д.И.Попов. Об одномерных нормалях первого рода $\mathcal{H}(M(N))$ -распределения.

21.03.1984г. Е.А.Митрофанова. Последовательность G -структур реперов высших порядков,

ассоциированных с главным расслоением группы $A_m^p(n)$ над базой R^n .

28.03.1984г. Н.Коровина. Вырожденные конгруэнции, порожденные коникой и инцидентной ей точкой.

4.04.1984г. В.Н.Худенко. О связностях, ассоциированных с многообразиями многомерных квадрик.

11.04.1984г. В.Б.Аранова. Конгруэнции квадрик с распадающимися на плоскости ассоциированными квадриками в проективном пространстве.

18.04.1984г. В.И.Ведерников (г.Минск). \mathcal{C} -структуры в главных G -расслоениях.

25.04.1984г. В.И.Ведерников (г.Минск). Симметрические пространства и сопряженные связности.

16.05.1984г. Э.А.Нисенко. Конгруэнции орициклов в пространстве Н.И.Лобачевского.

23.05.1984г. В.С.Малаховский. Конгруэнции квадрик со специальными свойствами фокальных поверхностей.

30.05.1984г. И.Компаниец. Конгруэнции пар фигур, образованных квадрикой и точкой в проективном пространстве.

УДК 514.75

О деформации связностей в структурном распределении ζ $(\xi \xi \rho)$ -структуры в $M_n(F)$.
А к м а т о в Б. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 5-8.

Найдена геометрическая интерпретация деформированной связности в структурном распределении ζ индуцированной $(\xi \xi \rho)$ -структуры в $M_n(F)$.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства $(m > n)$. Б о ч и л л о Г. П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 9-13.

Дана геометрическая характеристика, построено оснащение, найдено инвариантное подраспределение распределения Δ_m на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства в случае $n < m < 2n-1$.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Пространство комплексных структур. В е д е р н и к о в С. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 14-16.

На основе метода полиномиальных морфизмов изучаются метрики и связности на однородном пространстве, состоящем из операторов комплексной структуры.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75.

О римановых метриках, обладающих римановым равномерным атласом. Г л и к л и х Ю. Е. Дифференциальная

геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 17-19.

Доказано, что для любой римановой метрики на произвольном многообразии существует конформная риманова метрика, обладающая римановым равномерным атласом, т.е. атласом, карты которого содержат метрические шары фиксированного радиуса относительно риманова расстояния на многообразии.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнции парабол с фокальными многообразиями высших порядков. Ж а р и к о в а Л. А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16, Калининград, 1985, с. 20-22.

В трехмерном эквивариантном пространстве продолжаете изучение класса P парабол. Исследованы свойства конгруэнций $B^k(A)$ парабол, где k - порядок фокальной точки A параболы из конгруэнции P . Доказано, что если точка A -фокальная точка 2-го (3-го) порядка, то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции P . Установлены некоторые свойства конгруэнции $B^3(A)$.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,l}$. И в л е в Е. Т. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 23-26.

Рассматривается классическое пространство проективной связности. На секущей поверхности вводятся геометрические объекты, построенные из компонент тензора кручения - кривизны и определяющие гиперквадрику в типовом слое. Наиболее подробно изучен случай, когда поляра точки касания относительно гиперквадрики является неопределенной. Дается геометрическая интерпретация тензора, аналогичного тензору Риччи пространств-

ва аффинной связности.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха.

К а з н и н а О.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 27-29.

В p -мерном евклидовом пространстве исследуется отображение некоторых классов сетей в задаче Фубини-Чеха.

УДК 514.75

О геометрии пары сетей. К и р е е в а С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 30-33.

В проективном пространстве P_p рассматривается отображение, в котором каждая линия - двойная.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве. К р е т о в М.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 34-36.

На основе свойств дифференцируемых отображений, ассоциированных с трехпараметрическими семействами эллипсоидов в аффинном пространстве, выделяются и исследуются подклассы указанных многообразий. Найдено безынтегральное представление исследованных подклассов.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Структуры, порожденные полем гиперквадрик. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многооб-

разий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 37-40.

Исследуется гладкое многообразие, в каждом касательном пространстве которого задана центральная невырожденная гиперквадрика.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

О некоторых частных отображениях евклидовых n -пространств. М а р ю к о в М.Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 41-44.

Исследуются свойства линий кривизны пары распределений Δ_r и $\bar{\Delta}_r$, заданных в областях Ω и $\bar{\Omega}$ евклидова пространства E_n , между которыми установлен диффеоморфизм.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Об одном классе плоских сетей. М а т и е в а Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1975, с. 45-48.

Найдены геометрические свойства сети, инвариантно-связанной с p -распределением в p -мерном евклидовом пространстве.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнция квадратичных элементов в P_6 . М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 49-51.

В шестимерном проективном пространстве исследуется конгруэнция квадратичных пар элементов.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Инвариантная связность Картана в метрическом пространстве элементов второго порядка. М и т р о ф а н о в а Е.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 52-56.

Методом продолжений и охватов в сочетании с инвариантной операцией редуцирования расслоений реперов высших порядков строится редуцирующая связность Картана.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Об одномерных нормалях первого рода $H(M(\Lambda))$ -распределения. П о п о в Ю.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 57-66.

Методом Г.Ф. Лаптева исследуются $H(M(\Lambda))$ -распределения проективного пространства. В окрестности 2-го порядка построена нормаль Михэйлеску 1-го рода.

Библиография: 6 названий.

УДК 514.75

Вполне геодезические расслоения группы Ли. Р е з - н и к о в А.Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 67-70.

Доказывается, что расслоения группы G на слои вида $\mathbb{R}G$ однозначно соответствуют сжимающим отображениям однородного пространства G/H (при некоторых ограничениях на вложение компактных групп Ли H). Изучается аналог для конечных групп.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Конгруэнции кривых 2-го порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями. С в е ш н и к о в а Г.Л. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 71-74.

В трехмерном проективном пространстве исследуются невырожденные конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Библиография: 2 названия.

УДК. 514.75

Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных коникой и плоскостью. С к р ы д л о в а Е.В.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 75-80.

В работе в трехмерном проективном пространстве рассматривается класс вырожденных конгруэнций, порожденных коникой и плоскостью. Выделение класса осуществлено с помощью специальных свойств.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Об одном классе конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве. С о п и н а Е.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 81-83.

В трехмерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

К геометрии векторного поля. Т о л с т о п я т о в В.Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 84-86.

Изучается векторное поле, заданное в некоторой области на p -поверхности m -мерного евклидова пространства. Найден критерий фокальности этого поля, а также его ортогональности секущей поверхности.

УДК 514.75

Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов. Ф у н т и к о в а Т. П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 87-90.

В трехмерном эквивариантном пространстве исследуются вырожденные конгруэнции, порожденные парой эллипсов. Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Х у д е н к о В. Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 91-96.

В p -мерном проективном пространстве исследуется связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия, получена геометрическая характеристика объекта связности.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Связность в многообразии пар гиперплоскостей, индуцированном гиперконгруэнцией V_{p-1} . Ц а п е н к о В. П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 97-99.

Исследуется связность в многообразии пар гиперплоскостей, индуцированном конгруэнцией пар фигур (P, Q) , где Q — гиперквадрика, а P — неинцидентная ей точка. Дана геометрическая характеристика некоторым подобъектам объекта связности.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Векторные поля в p -мерном аффинном пространстве. Ц ы г а н о в И. И. Дифференциальная геометрия многооб-

126

разий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 100-103.

Рассматривается основа аффинной геометрии векторного поля с использованием структуры соответствующего аффинора.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75.

О фундаментально-групповой связности. Ш е в ч е н к о Ю. И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 104-109.

Исходя из точки зрения двухъярусных расслоений, дается интерпретация двум частным случаям структурных уравнений Г. Ф. Лаптева пространства с фундаментально-групповой связностью.

Библиография: 6 названий.

УДК 514.75

Задание двухсоставных распределений $N_{m}^2 \subset F_n$. Ш е й д о р о в а Н. М. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 110-112.

Приведены дифференциальные уравнения двухсоставного распределения N_{m}^2 в репере нулевого порядка. Найден произвол существования многообразий N_{m}^2 .

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью, порожденной фокальными точками второго порядка. Ш м е л е в а С. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 113-116.

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции невырожденных линейчатых квадрик, имеющих одну невырождающуюся поверхность, описанную фокальными точками второго порядка.

127

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 16

Сборник научных трудов

Сводный план 1985 года, проз. 1682

Редактор А. М. Соколова

Техн. редактор Н. Д. Шишкова. Корректор Д. Н. Гамзатова.

Подписано к печати 14.02.85. КУ 01133. Формат 60×90¹/₁₆.

Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,75.

Тираж 500 экз. Заказ 1401. Цена 80 коп.

Калининградский государственный университет,
236040, г. Калининград (обл.), ул. Университетская, 2.
Типография издательства «Калининградская правда»,
236000, г. Калининград (обл.), ул. К. Маркса, 18.

80 коп.