

## Elliptische Kurven

### Arbeitsblatt 10

#### Aufgaben

AUFGABE 10.1. Formuliere und beweise für Untergitter in  $\mathbb{R}$  die analogen Resultate zu Lemma 10.2, Lemma 10.3 und Lemma 10.4.

AUFGABE 10.2. Es sei  $\Gamma = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter und sei  $\Gamma' = \mathbb{Z}(mu) + \mathbb{Z}(nv) \subseteq \Gamma$  mit  $m, n \in \mathbb{N}_+$ . Bestimme den Kern (mit Anzahl) der Isogenie  $\mathbb{C}/\Gamma' \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ .

AUFGABE 10.3. Es sei  $\Gamma = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter und sei  $\Gamma' = \langle au + bv, cu + dv \rangle \subseteq \Gamma$  ein Untergitter. Zeige, dass die Anzahl von  $\Gamma/\Gamma'$  gleich dem Betrag der Determinante von  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist.

AUFGABE 10.4. Bestimme die topologische Gestalt der Überlagerungen

$$\mathbb{C}/\Gamma_1 \cong S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2 \cong S^1 \times S^1$$

zu einem Untergitter  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \mathbb{C}$ .

AUFGABE 10.5. Skizziere auf einem Torus die Punkte, die unter der zum Untergitter  $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}i \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  gehörenden Abbildung

$$\mathbb{C}/(3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}i) \longrightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$$

auf den Nullpunkt abgebildet werden.

AUFGABE 10.6. Zeige, dass durch die Isogenie eine Äquivalenzrelation auf den komplexen Tori über  $\mathbb{C}$  gegeben ist.

## AUFGABE 10.7.\*

Es sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter,  $s \in \mathbb{C}$ ,  $s \neq 0$ , mit  $s\Gamma \subseteq \Gamma$ . Es sei  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$  eine Identifizierung und  $M$  die beschreibende Matrix der Abbildung

$$s: \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

unter dieser Identifizierung. Es sei

$$\varphi: \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma, [z] \longmapsto [sz]$$

die zugehörige Isogenie. Zeige, dass die Anzahl des Kernes von  $\varphi$  mit der Determinante von  $M$  übereinstimmt.

AUFGABE 10.8. Es sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter. Zeige direkt, dass

$$\{s \in \mathbb{C} \mid s\Gamma \subseteq \Gamma\}$$

ein Unterring von  $\mathbb{C}$  ist.

AUFGABE 10.9. Bestimme die Automorphismengruppe von  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ .

AUFGABE 10.10. Bestimme die Automorphismengruppe von

$$\mathbb{C}/\left(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right).$$

AUFGABE 10.11. Zeige, dass innerhalb der Menge aller komplexen Tori die Teilmenge derjenigen Tori, deren Endomorphismenring größer als  $\mathbb{Z}$  ist, „dünn“ ist.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3