Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück sS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 32

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 32.1. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x+6y &= 0 \\ 5x+8y &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0,0)$ besitzt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 32.2. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot x+\frac{6}{5}\cdot y+\frac{9}{10}\cdot z+\frac{3}{5}\cdot w &= 10, \\ 3\cdot x+5\cdot y+2\cdot z+4\cdot w &= 30 \end{aligned}$$

aus Beispiel 31.4.

Aufgabe 32.3. Gibt es eine Lösung $(a,b,c)\in\mathbb{Q}$ für das lineare Gleichungssystem

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 31.6?

Aufgabe 32.4. In der großen Pause fährt das Süßwarenmobil von Raul Zucchero auf den Schulhof. Gabi kauft einen Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und drei saure Zungen und zahlt dafür $1,30$ €. Lucy kauft zwei Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür $1,60$ €. Mustafa kauft einen Schokoriegel, eine Packung Brausepulver und zwei saure Zungen und zahlt dafür einen €. Heinz kauft zwei Schokoriegel, zwei Packungen Brausepulver und eine saure Zunge und zahlt dafür $1,70$ €. Wie viel kostet ein Schokoriegel, eine Packung Brausepulver, eine saure Zunge?

Benötigt man die volle Information, um dies herauszufinden?

Es sei der Einkauf von Gabi und von Lucy bekannt, ferner sei bekannt, dass Lucys kleine Schwester Veronika für drei Packungen Brausepulver und vier saure Zungen einen Euro zahlt. Kann man daraus die Preise rekonstruieren?

Aufgabe 32.5. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 32.6.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 32.7. Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 32.8. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 32.9. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass darin der Betrag aller Koeffizienten kleiner als 1 ist.

Aufgabe 32.10. Zeige, dass die lineare Gleichung

$$2x + 2y = 1$$

über $\mathbb{Q}$ unendlich viele Lösungen besitzt, aber keine ganzzahlige Lösung.

Aufgabe 32.11. Bestimme sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$3x + 7y = 0.$$

Aufgabe 32.12. Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ gegeben, das eine nichttriviale Lösung besitze. Zeige, dass es auch eine ganzzahlige nichttriviale Lösung besitzt.

Aufgabe 32.13.*

Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - 7y - 4z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ 7x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt.

Aufgabe 32.14. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4 + 5y &= 8z + 7x, \\ 2 - 4x + z &= 2y + 3x + 6, \\ 4z - 3x + 2x + 3 &= 5x - 11y + 2z - 8 \end{aligned}$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 32.15. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + 7y + 3z &= 4 \\ 11x + 9y + 13z &= 9 \\ 6x + 8y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.16. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - y + 7z &= 6 \\ 3x + 6y + 3z &= -2 \\ 8x + 8y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.17. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 6y + 2z &= 6 \\ 4x + 8y + 9z &= 5 \\ 11x + 5y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.18.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x - 5y + 7z = -3,$$

$$-2x + 4y + 3z = 9,$$

$$x = -2.$$

Aufgabe 32.19. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgabe 32.20. Es sei K der in Beispiel 11.4 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 32.21.*

Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$2x \geq 7$$

und

$$5x \leq 12$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 32.22. Bestimme die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$4x \geq 3$$

und

$$6x \leq 11$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.23. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -z & -w & = & 1 \\ 2x & +5y & -7z & -5w & = & -2 \\ 2x & -y & +z & +3w & = & 4 \\ 5x & +2y & -4z & +2w & = & 6\,. \end{array}$$

Aufgabe 32.24. (3 Punkte)

Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcr} 8x+7y+6z & = & 0 \\ 12x-9y-5z & = & 0 \\ 7x+6y-11z & = & 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung $(0,0,0)$ besitzt.

Aufgabe 32.25. (4 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcr} 5x-y+7z & = & 6 \\ 3x+6y+3z & = & -2 \\ 8x+8y+7z & = & 3 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 32.26. (4 Punkte)

Zeige, dass ein lineares Gleichungssystem

$$ax+by = 0$$

$$cx+dy = 0$$

genau dann nur die triviale Lösung $(0,0)$ besitzt, wenn $ad-bc \neq 0$ ist.