

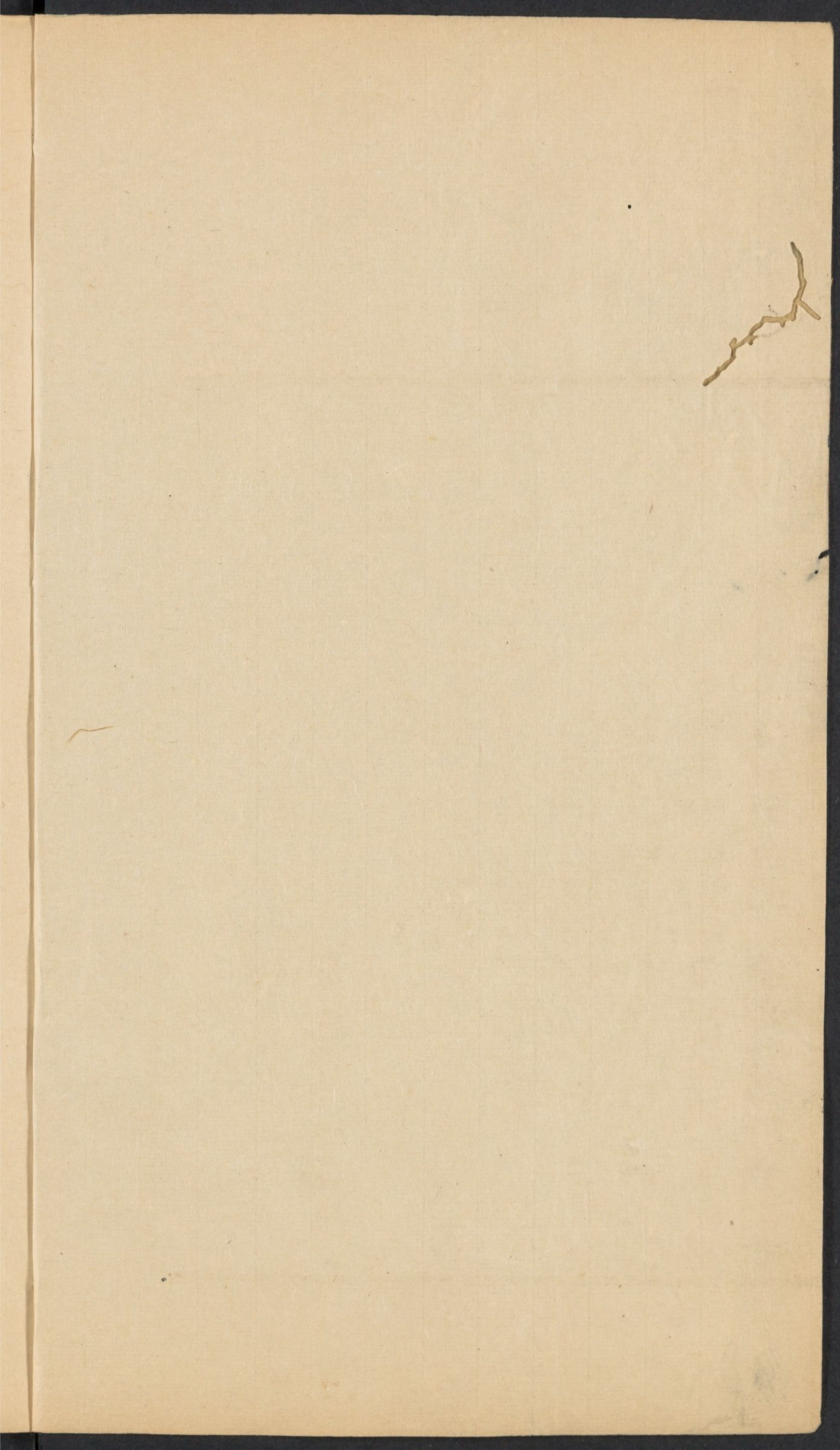
TA 7220/4250(4)

4

THE CHINESE-JAPANESE LIBRARY
OF THE HARVARD-YENCHING INSTITUTE
AT HARVARD UNIVERSITY

DEC 28 1956

自
至
十
四



重學卷十一



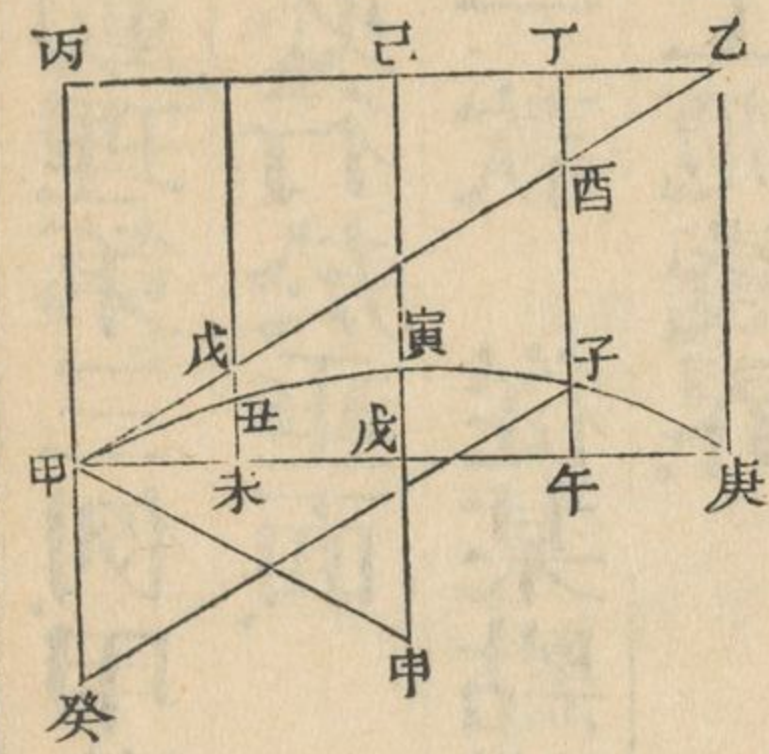
英國艾約瑟口譯

海甯李善蘭筆述



論拋物之理

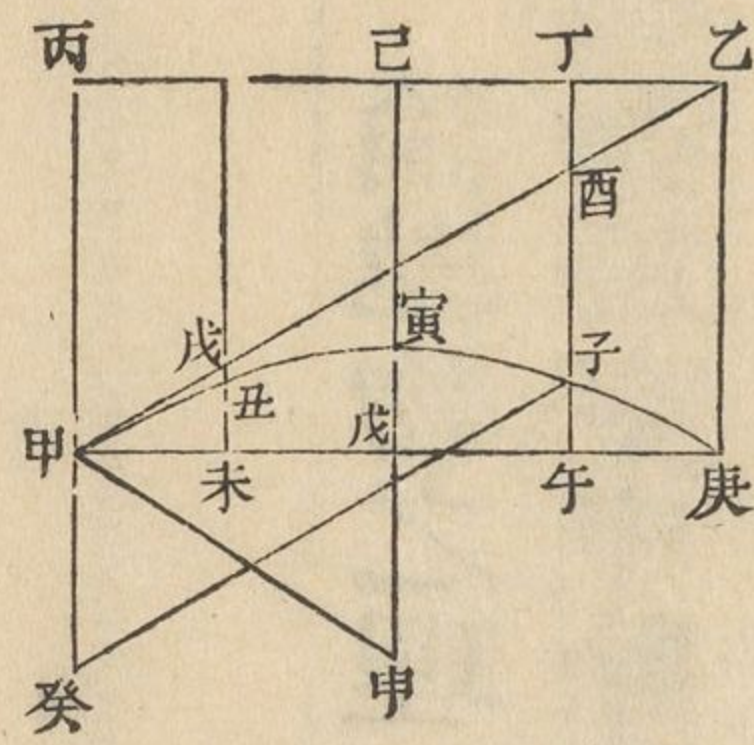
凡物拋於空中，除垂綫外，任何方向為地心力所加，必令物行於曲綫。此曲綫可以前八卷中之理論之。



如圖甲乙為拋物方向綫，不論何速，設若干秒中依平速當行至酉，又設物在甲時為地力攝引，同時刻中當行至癸，合此二速，必令物行至子，準

動理第三例甲癸必等於酉子且平行由此可見拋物必行於垂面。

第一款 從某點將物拋出以某速行於某綫求地平面上拋綫界。



如圖甲為某點甲乙為拋物方向甲子庚為拋物綫甲庚為地平面上拋綫界。若干秒中準拋力平速當過甲乙路準地力漸加速當過乙庚路故有等數。

設時刻略小令物在曲綫上過甲子路則用酉子午垂

綫有等數

甲酉 ——— 時速

酉子 ——— $\frac{\text{地力時}}{2}$

子午 ——— 酉午丁酉子

子午 ——— $\frac{\text{時速甲正弦}}{2}$ $\frac{\text{地力時}}{2}$

甲午 ——— 時速甲餘弦

甲乙 ——— 時速

乙庚 ——— $\frac{\text{地力時}}{2}$

乙庚 ——— 甲乙甲正弦

$\frac{\text{地力時}}{2}$ ——— 時速甲正弦

時 ——— $\frac{2 \times \text{速甲正弦}}{\text{地力}}$

甲乙 ——— $\frac{2 \times \text{速甲正弦}}{\text{地力}}$

甲庚 ——— 甲乙甲餘弦

甲庚 ——— $\frac{2 \times \text{速甲正弦甲餘弦}}{\text{地力}}$

甲庚 ——— $\frac{\text{速}}{\text{地力}} (2 \times \text{甲}) \text{正弦}$

設時等於甲子庚時之半，寅為物所在，則有等數。

$$\text{時} = \frac{\text{速甲正弦}}{\text{地力}}$$

$$\text{寅戌} = \frac{\text{速甲正弦}}{\text{地力}} \times \frac{\text{速甲正弦}}{\text{二地力}}$$

$$\text{寅戌} = \frac{\text{速甲正弦}}{\text{二地力}}$$

設時刻小於半原時，或大於半原時。原時即甲子庚時則以時刻與半原時相較，餘以半原時除之，得數命為亢，有等數。

$$\text{時} = \frac{\text{原時} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)}{2}$$

$$\text{時} = \frac{\text{速甲正弦} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)}{\text{地力}}$$

$$\text{子午} = \frac{\text{速甲正弦} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)}{\text{地力}} - \frac{\text{速甲正弦} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)}{2 \text{地力}}$$

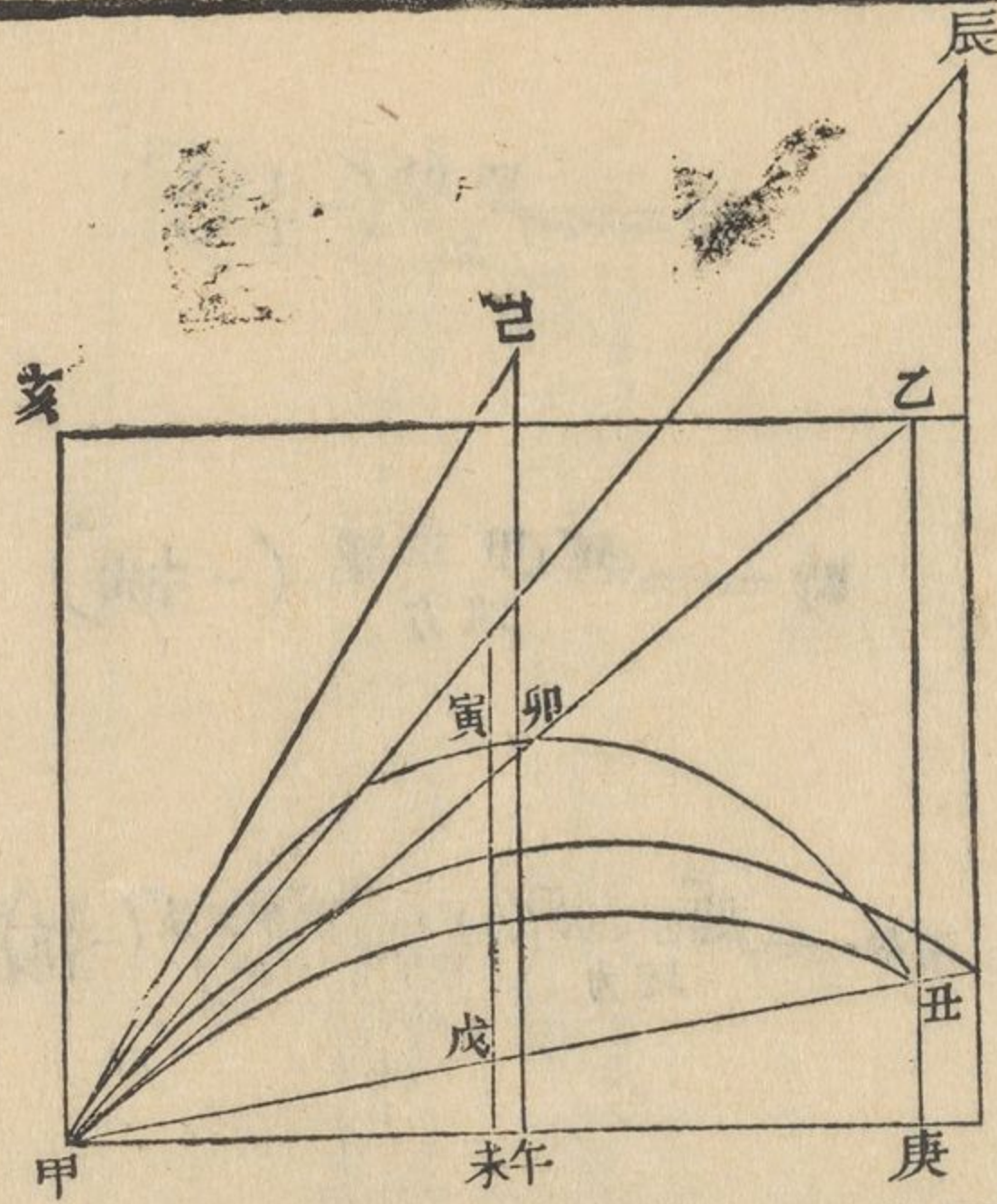
$$\text{子午} = \frac{\text{速甲正弦} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)}{2 \text{地力}}$$

以前等數證之。亢若爲○。則時等於過甲子庚路之半。由此見拋物綫上寅點離地平最遠。恰當全時之半。亢若同。不論或正或負。子午恆同。故子丑二點在最高寅點兩邊。離寅點等。自寅至二點。時刻亦等。二點離地

平綫亦等戊午戊未路亦等所以甲寅寅庚為等長且

等勢綫

第二款 從某點將物拋出求斜面上拋綫界



如圖甲為某點甲乙為拋物方向甲丑為斜面乙庚為經過界點之垂綫甲庚為地平面先求若干秒中拋物至甲丑面命乙甲丑角為角甲乙丑角為亢甲丑乙角為氏丑甲庚角為房甲丑庚角為心乙甲庚角為尾則

有等數

甲乙 $\frac{\text{二速(尾丁房)正弦}}{\text{地力 房餘弦}}$

亢正弦甲乙 $\frac{\text{氏正弦}}{\text{甲丑}}$

亢正弦 $\frac{\text{尾餘弦}}$

氏正弦 $\frac{\text{房餘弦}}$

甲丑 $\frac{\text{甲乙 亢正弦}}{\text{氏正弦}}$

甲丑 $\frac{\text{甲乙 尾餘弦}}{\text{房餘弦}}$

拋界 $\frac{\text{二速(尾丁房)正弦 尾餘弦}}{\text{地力 房餘弦 房餘弦}}$

$\frac{\text{二速(尾丁房)正弦 尾餘弦}}{\text{地力 房餘弦}}$

角 $\frac{\text{尾丁房}}$

甲乙 $\frac{\text{時速}}$

乙丑 $\frac{\text{地力 時}}{\text{二}}$

角正弦甲乙 $\frac{\text{氏正弦}}{\text{丑乙}}$

氏正弦 $\frac{\text{心正弦}}$

丑乙 $\frac{\text{甲乙 角正弦}}{\text{氏正弦}}$

丑乙 $\frac{\text{甲乙 角正弦}}{\text{房餘弦}}$

地力 $\frac{\text{時}}{\text{二}} = \text{時速} \frac{\text{(尾丁房)正弦}}{\text{房餘弦}}$

時 $\frac{\text{二速(尾丁房)正弦}}{\text{地力 房餘弦}}$

第三款 用某速拋物當用何方向令拋綫界最大

設在地平

面上有等

數

$$\text{拋界} = \frac{\text{速}}{\text{地力}} (\text{乙甲庚}) \text{正弦}$$

倍乙甲庚角最大拋界亦最大

令倍乙甲庚為直角乙甲庚為

半直角即得

設在斜面

上亦有等

數

$$\text{拋界} = \frac{\text{速}}{\text{地力}} (\text{尾丁房}) \text{正弦} \frac{\text{尾餘弦}}{\text{房餘弦}}$$

此實數愈大拋界亦愈大因房

為定角故也而此實有等數如

左

$$2 \sin(\text{尾} \angle \text{房}) \sin(\text{尾餘})$$

$$= \sin(\text{尾} \perp \text{房}) \sin(\text{尾} \angle \text{房}) + \sin(\text{尾} \angle \text{房}) \sin(\text{尾} \perp \text{房})$$

$$= 2 \sin(\text{尾} \angle \text{房}) \sin(\text{房})$$

因房為定

角倍尾少

房角之正

弦愈大則

等數亦愈

大故有式

$$\text{尾} = \frac{2}{3} (\text{直角} \perp \text{房})$$

$$\text{尾} \angle \text{房} = \frac{2}{3} (\text{直角} \angle \text{房})$$

然則二尾少一房為直角等數最大

作亥甲垂綫則辰甲丑角為亥甲丑角二分之一故拋

物方向綫平分亥甲丑角

斜面上最大拋界之等數如左

第四款

拋綫界用拋高求等數

拋高者拋速上行當至之高即物以地力下墜得速與拋速相等時所過之路也

$$\text{拋界} = \frac{\text{速}^2 (\text{尾丁房}) \text{正絃尾餘絃}}{\text{地力} \text{房餘絃}^2}$$

$$\text{拋界} = \frac{\text{速}^2 (\text{二尾丁房}) \text{正絃丁房正絃}}{\text{地力} \text{房餘絃}^2}$$

$$\frac{\text{速}}{\text{地力} \text{房餘絃}} (\text{直角正絃丁房正絃})$$

$$\frac{\text{速}}{\text{地力}} \left(\frac{\text{一丁房正絃}}{\text{一丁房正絃}} \right)$$

$$\frac{\text{速}}{\text{地力}} (\text{一丁房正絃})$$

$$\frac{\text{速}^2}{\text{地力}} = \text{二拋高}$$

$$\text{拋高} = \frac{\text{速}^2}{\text{地力}}$$

$$\frac{\text{速}}{\text{地力}} = \text{二拋高}$$

地平面上拋物等數

拋界 = $\frac{二拋高}{(二)甲} 正弦$

拋時 = $\sqrt{\frac{二拋高}{地力}} \frac{二}{甲} 正弦$

最高 = $甲 正弦 拋高$

最大拋界 = $二拋高$

斜面上拋物等數

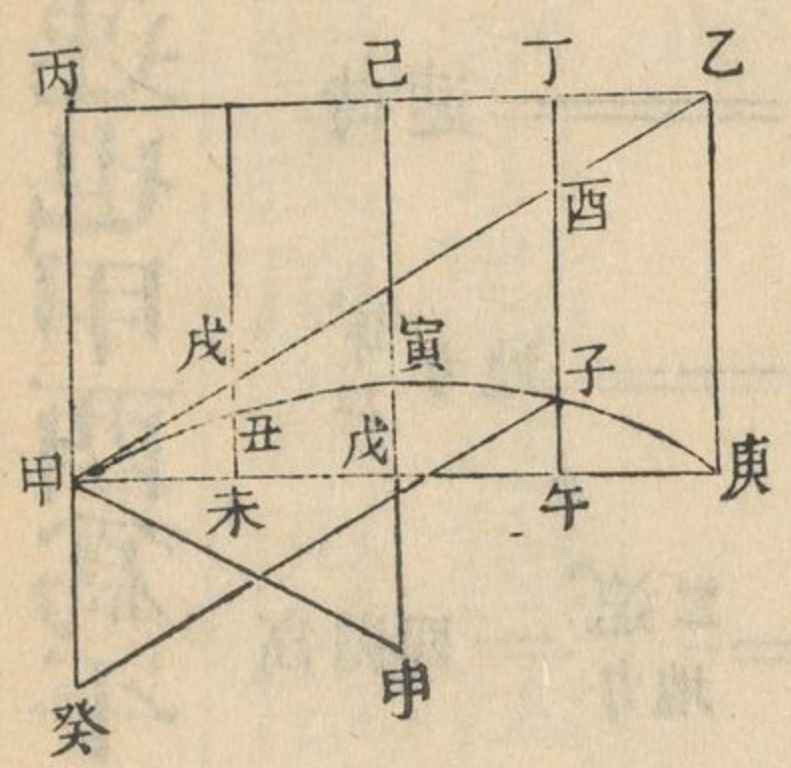
拋界 = $\frac{四拋高}{(尾丁房) 正弦 尾餘弦} 房餘弦$

拋時 = $\sqrt{\frac{二拋高}{地力}} \frac{二}{(尾丁房) 正弦 丁房 正弦} 房餘弦$

最大拋界 = $\frac{二拋高}{丁房 正弦}$

第五款 拋物綫即圓錐上之單曲綫綫上任取何點欲

知其拋速若干



如圖丙乙為準綫，作單曲綫法，用一
 動一端着矩尺，矩尺行于丙乙，設取
 故丙乙名準綫，詳代微積拾級，設取
 曲綫上子點，欲知其拋速，從準綫丁
 點下行至子點時，所當得之速，即拋

速也甲酉為平速

速即拋

路西子為長加力路有等數

作甲癸垂綫

又作癸子平

行於甲酉則

有等數

甲酉———速時

酉子———地力^{時二}

甲酉^二———^二速^二———^四拋高

甲酉^三———^四拋高酉子

癸子———^四拋高甲癸

所以甲子為圓錐上單曲綫甲乙為甲點切綫四拋高
 為甲點通徑甲癸為甲點正矢癸子為正弦己申為頂
 點通徑之半取甲丙為甲點通徑四分之一即等於甲
 點拋速所生拋高己丙為準綫直交甲丙則甲點拋速
 等於準綫上下墜至甲點時當得之速設行至子所得

拋速與子點作拋點同。故子點拋速等於準綫上下墜
至子點時當得之速。

甲酉爲甲點之切綫。準曲綫例。切綫與帶徑申即甲所成

角。等於切綫與距準綫甲即丙所成角。所以取酉甲申角。

等於酉甲丙角。則曲綫心必在甲申綫上。又甲點離丙
點與離曲綫心等。故取甲申等於甲丙。則申點即曲綫
心。

求頂點通徑法。作申己綫。直交準綫。平分於寅。寅必爲
曲綫頂點。四倍己寅綫。即頂點通徑。

設已知拋高則有等數

甲午——甲酉甲餘弦

——速時甲餘弦

時—— $\frac{\text{甲午}}{\text{速甲餘弦}}$

酉子——地力 $\frac{\text{時}}{2}$

—— $\frac{\text{地力甲午}}{2}$ 速甲餘弦

午酉——甲午甲正切

午子——午酉丁酉子

—— $\frac{\text{甲午}}{2}$ 速甲餘弦
 $\frac{\text{甲午甲正切丁地力}}{2}$

第六款

拋物綫用垂綫及地平綫求等數

款用前圖

申己——戊己 $\frac{1}{2}$ 戊申

——甲丙 $\frac{1}{2}$ 甲申申甲癸餘弦

——甲丙丁甲申申甲丙餘弦

——甲丙丁甲申 $\frac{1}{2}$ 乙甲丙餘弦

——甲丙 $(\frac{1}{2}丁\frac{1}{2}乙)$ 甲丙餘弦

——甲丙 $\frac{1}{2}$ 乙甲丙正弦

頂通經—— $\frac{1}{2}$ 申己

——四甲丙 $\frac{1}{2}$ 甲丙正弦

——四拋高 $\frac{1}{2}$ 甲庚餘弦

速^二 拋高^二
二地力

甲午^二
子午^二 甲午^二 甲正切^二
四拋高^二 餘弦^二

欲求地平面上拋綫界必令經綫等於○。寅戊子午等
為經綫至甲

庚二點而無○此有二數
故曰等於○

其一

緯綫^二 ○

此拋點
界點同
在甲點

其二

甲午^二
甲正切^二 四拋高^二 甲餘弦^二 ○

故緯
綫有
等數

甲午^二 四拋高^二 甲正切^二 甲餘弦^二

四拋高^二 甲正弦^二 甲餘弦^二

二拋高^二 (二甲) 正弦

第七款 求拋物地平二綫在某處成角角度若干。

子午二點行時地平速恆等故等數恆同。

$$\begin{array}{c}
 \text{地平速} = \text{速甲餘弦} \\
 \text{數} \quad \text{速有等} \quad \text{子漸加} \quad \text{速即午} \quad \text{子點垂} \\
 \text{垂速} = \text{午酉漸加速} \quad \text{丁酉子漸加速} \\
 \text{速甲正弦} \quad \text{丁地力時} \\
 \text{數} \quad \text{有等} \quad \text{平角} \quad \text{求地} \quad \text{故所} \\
 \text{地平正切} = \frac{\text{垂速}}{\text{平速}} \\
 \frac{\text{速甲正弦} \quad \text{丁地力時}}{\text{速甲餘弦}} \\
 \frac{\text{甲正切} \quad \text{丁地力時}}{\text{速甲餘弦}} \\
 \frac{\text{甲正切} \quad \text{丁地力甲午}}{\text{速甲餘弦}} \\
 \frac{\text{甲正切} \quad \text{丁甲午}}{\text{二拋高甲餘弦}}
 \end{array}$$

物至拋綫離斜面最高寅點時求寅點垂綫遇斜面於何點 甲丑為斜面過寅點時拋物方向必平行於甲丑命地平角為房甲角為尾有等數 款用二圖

地平正切 = 房正切

房正切 = 尾正切 $\frac{\text{甲午}}{\text{二拋高尾餘弦}}$

$\frac{\text{甲午}}{\text{二拋高尾餘弦}} = \text{尾正切} \frac{\text{房正切}}{\text{房正切}}$

$\frac{\text{尾正弦}}{\text{尾餘弦}} = \frac{\text{房正弦}}{\text{房餘弦}}$

$\frac{\text{(尾房)正弦}}{\text{尾餘弦房餘弦}}$

甲午 = 甲未 = $\frac{\text{二拋高(尾房)正弦尾餘弦}}{\text{房餘弦}}$

甲戊 = $\frac{\text{甲未}}{\text{房餘弦}} = \frac{\text{二拋高(尾房)正弦尾餘弦}}{\text{房餘弦}}$

與第四款斜面拋綫界相較即知甲戊為甲丑之半

假如從此點用某速拋物欲令至彼點當用何方向綫

甲為此點丑為彼點已知丑甲庚角 房即 求乙甲庚角 尾即

○用二款圖

$$\text{甲丑} = \frac{\text{二速(尾丁房)正弦尾餘弦}}{\text{地力房餘弦}}$$

$$= \frac{\text{二拋高(二尾丁房)正弦丁房正弦}}{\text{房餘弦}}$$

$$(\text{二尾丁房)正弦} = \frac{\text{甲丑房餘弦}}{\text{二拋高}} \text{丁房正弦}$$

二尾角與房角之較小於二直角則此題可推否則不可推命較角之外角為癸有等數

$$(\text{半周丁癸})\text{正弦} = \text{癸正弦}$$

$$\text{半周丁癸} = \text{二尾丁房}$$

如此則可推乃以辛壬為尾角二數其等數如下

$$\text{二辛丁房} = \text{癸}$$

$$\text{二壬丁房} = \text{半周丁癸}$$

$$\text{辛} = \frac{\text{癸丁房}}{\text{二}}$$

$$\text{壬} = \frac{\text{半周丁癸丁房}}{\text{二}}$$

此二數俱在

$\frac{2}{3}$ (直上房) $\frac{1}{3}$ (直上癸)

之中如此拋綫有二方向得拋界同

如圖中甲辰平分丑甲亥角則等數如左

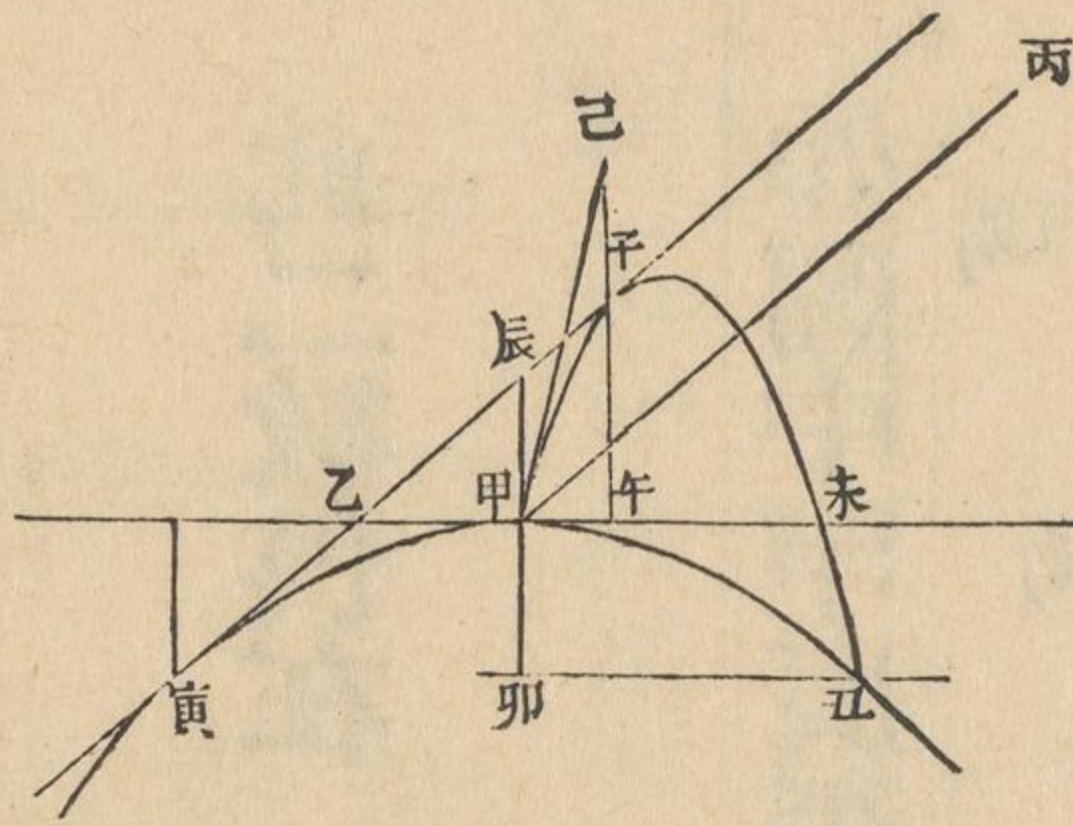
辰甲庚 = 房 $\frac{2}{3}$ (直上房)

— $\frac{1}{3}$ (直上房)

乙甲庚卽辛角己甲庚卽壬角甲乙甲己與甲辰成角
相等卽角限亦可推 設較角正弦大於一卽甲丑乘

房餘弦方為實。二拋高為法。加房正弦大於一。若甲丑
 太大。或拋高太小。則有此理。而題不可推。拋高太小
 即速太小

假如於山頂用某速拋物於某方向。山坡為直向上之單
 曲綫。即拋物綫。求物遇於何點。

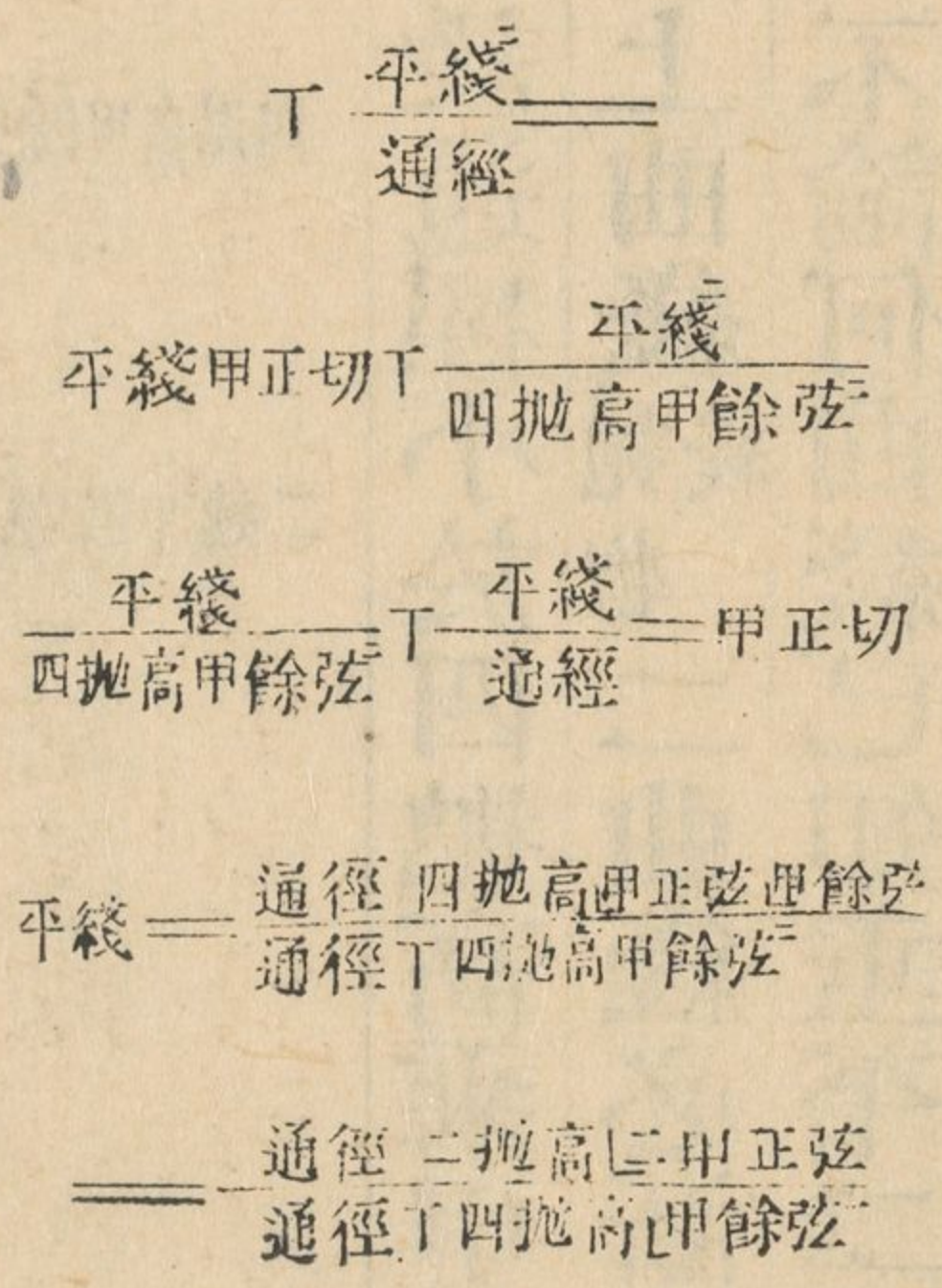


如圖甲丑為拋
 面與山曲面之
 交綫。即單曲綫
 之一段。其平綫
 丑卯。垂綫甲卯。
 有等數如下。

平綫 通徑
 垂綫 丁

垂綫負者。
 因曲綫例。
 橫軸甲乙為橫
 軸之上為
 正。下為負
 也。

丑爲拋物綫與單曲綫相遇之點而此二綫在丑點上
 並以甲卯爲垂綫卯丑爲平綫故其等數並同拋物綫
 垂綫之同數等於單曲綫正矢之同數等數如左



設其等數如後則平綫爲無窮大拋物綫與山坡之曲
 綫面永不相遇蓋兩單曲綫必平行其通徑必相等也

四拋高甲餘弦——通徑

二速甲餘弦——通徑地力

設通徑小於四拋高乘甲角餘弦方則下曲綫山坡小於

上曲綫

拋物綫

二曲綫必漸遠亦永不相遇

不論何曲綫已知垂平二綫之等數任於何點拋物即
可推何點遇何綫也

假如於某點用某速拋物求用何方向令物切某面取

乙子為某面與拋垂面之交綫等數如左

用前圖

子午——(甲午上.甲乙)乙正切

子午——甲午^甲正切_下 ^{甲午}四拋高甲餘弦_三

乙子甲己皆
拋線之切線
準曲線例己
子必等于辰
甲故有等數

(甲午上.甲乙)乙正切——甲午^甲乙正切_上 ^{甲午}四拋高甲餘弦_三

子點上拋物綫及面二方向與地平成角等故正切必
等以乙子綫言之此正切即乙角正切故有等數

然則此題有二方向綫作甲丙綫平行於乙子二方向
 綫與甲丙成角必相等依此二方向拋物俱能令拋物
 曲綫切乙子面而過不論何面理同

$$\frac{\text{乙正切}}{\text{甲正切}} = \frac{\text{甲午}}{\text{二拋高甲餘弦}}$$

$$\text{甲午} = \text{二拋高甲餘弦} (\text{甲正切} \div \text{乙正切})$$

$$= \text{二拋高甲餘弦} \frac{(\text{甲乙}) \text{正絃}}{\text{乙餘弦}}$$

$$\text{甲乙} \frac{\text{乙正切}}{\text{甲正切}} = \text{甲午} (\text{甲正切} \div \text{乙正切}) \frac{\text{甲午}}{\text{四拋高甲餘弦}}$$

$$\frac{\text{甲午} (\text{甲} \div \text{乙}) \text{正絃}}{\text{甲餘弦} \text{乙餘弦}} = \frac{\text{甲午}}{\text{四拋高甲餘弦}}$$

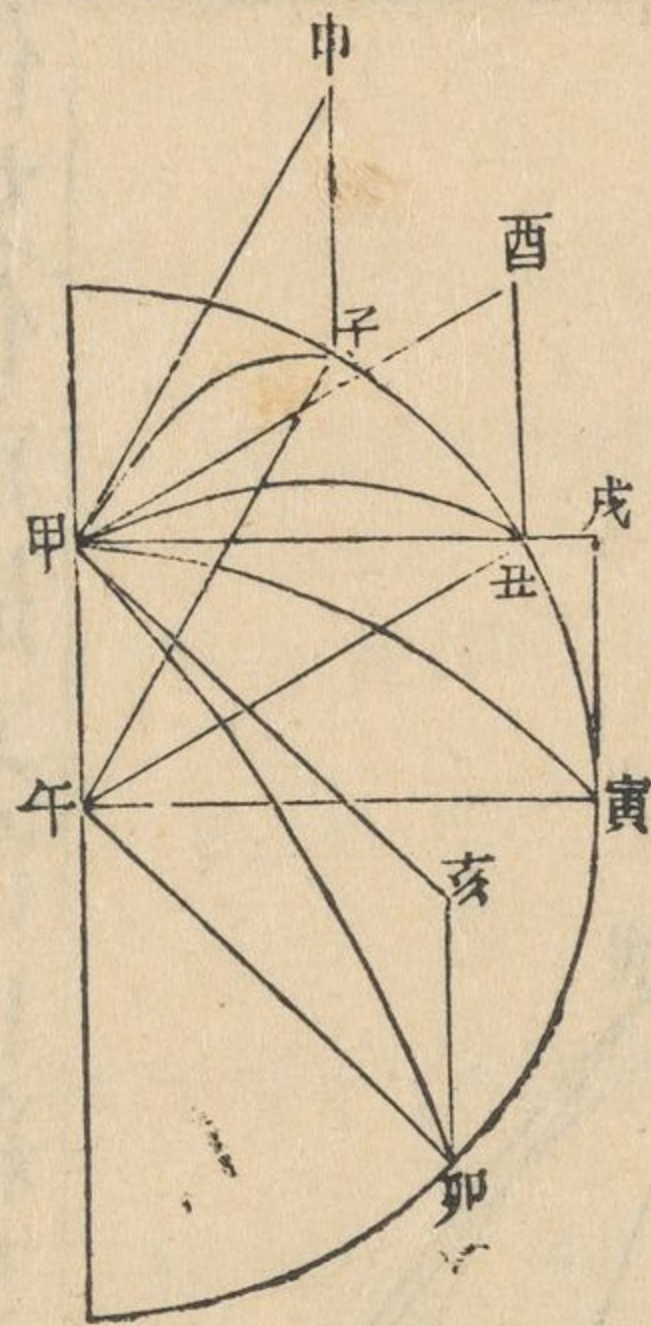
用甲午之數代甲午得下式

$$\text{甲乙} \frac{\text{乙正切}}{\text{甲正切}} = \frac{\text{二拋高} (\text{甲} \div \text{乙}) \text{正絃}}{\text{乙餘弦}} \frac{\text{拋高} (\text{甲} \div \text{乙}) \text{正絃}}{\text{乙餘弦}}$$

$$= \frac{\text{拋高} (\text{甲} \div \text{乙}) \text{正絃}}{\text{乙餘弦}}$$

$$(\text{甲} \div \text{乙}) \text{正絃} = \frac{\frac{\text{甲乙} \text{乙正絃} \text{乙餘弦}}{\text{拋高}}}{\frac{\text{甲乙} \text{乙正絃}}{\text{二拋高}}}$$

假如於甲點將多物用同速拋出行於一箇面上之各方向綫。歷若干秒。物行各至何處。

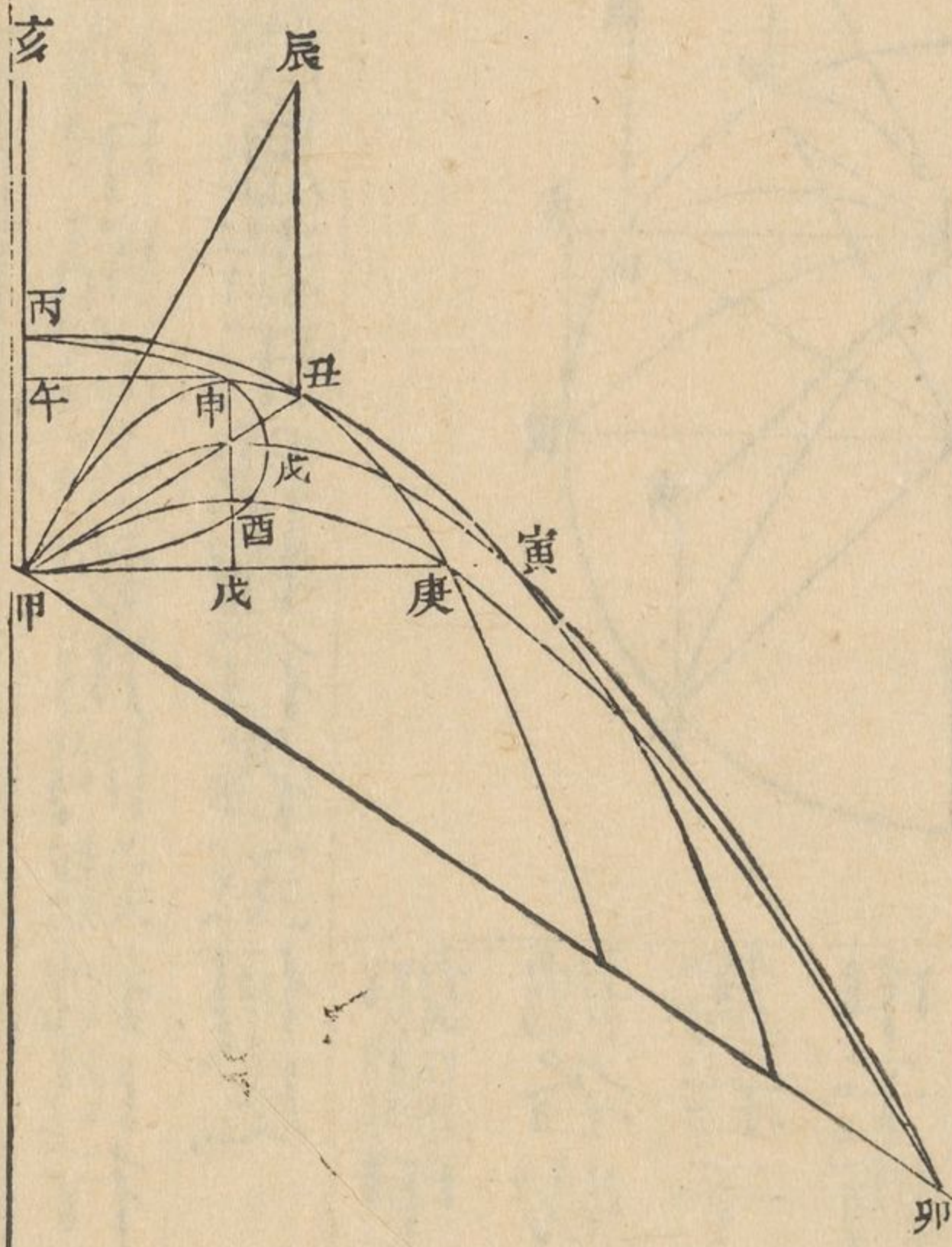


如圖甲申甲酉甲戌甲亥爲拋各物之方向綫。各綫俱等爲若干秒中平速當過之路。申子酉丑戌寅亥卯各綫亦等。爲若干秒中地心速當過之路。則歷若干秒各物必至子丑寅卯各點。取甲午垂綫。等於申子諸綫。作午子午丑午寅午卯等。於甲申諸綫。則各物俱在平圓周。午爲圓心。午子諸綫爲半徑。圓

心以地心速下行與各物下行同半徑以平速漸長
 設拋物方向不在一個面上則歷若干秒各物俱在立
 圓周

假如依前題求諸曲綫頂在何點

此求公頂點



如圖甲為拋點甲
 庚為拋綫界申為
 曲綫頂即物至最
 高界午甲為垂綫
 午申為平綫午申
 等於甲戌亦等於

左 甲庚之半戊申等於甲午申戊甲午爲長方形等數如

$$\begin{aligned} \text{申午} &= \text{拋高} \cdot \text{甲正弦} \\ &= \text{二拋高} \cdot \text{甲正弦} \cdot \text{甲餘弦} \\ \text{甲午} &= \text{拋高} \cdot \text{甲正弦} \\ \text{甲正弦} &= \frac{\text{甲午}}{\text{拋高}} \\ \text{申午} &= \text{四拋高} \cdot \text{甲正弦} \cdot \text{甲餘弦} \end{aligned}$$

準前 題得 下式

$$\begin{aligned} \text{申午} &= \text{四拋高} \cdot \text{甲正弦} \cdot \left(\frac{\text{甲正弦}}{\text{甲正弦}} \right) \\ &= \text{四拋高} \cdot \text{甲正弦} \cdot \left(\frac{\text{甲午}}{\text{拋高}} \right) \\ &= \text{四} \cdot \left(\frac{\text{拋高}}{\text{三拋高}} \right) \cdot \text{甲午} \cdot \text{丁申午} \\ \text{申午} &= \frac{\text{拋高}}{\left(\frac{\text{三拋高}}{\text{三拋高}} \right)} \cdot \left(\frac{\text{二} \cdot \left(\frac{\text{三拋高}}{\text{三拋高}} \right) \cdot \text{甲午} \cdot \text{丁申午}}{\text{三拋高}} \right) \end{aligned}$$

此卽橢圓等數。橢圓小軸等於甲丙拋高大軸爲倍拋高卽倍小軸。則拋物綫頂卽橢圓頂。假如從甲點作甲丑甲寅甲卯爲諸面上之最大拋綫界。

將各物用同速在甲點拋出求丑寅卯諸點聯之成何綫

命庚甲丑角為亢丙甲丑角為氏有等數

$$\text{甲丑} = \frac{\text{二拋高}}{\text{一上亢正弦}}$$

$$= \frac{\text{二拋高}}{\text{一J氏餘弦}}$$

單曲綫以四拋高為通徑則亦有此等數故知丑寅卯諸點聯之成單曲綫甲為曲線心

$$\text{速} = \sqrt{\text{二地力拋高}}$$

設諸物方向綫上之速等數如上則從甲點拋出諸物所成諸單曲綫必切此單曲綫而過不能出此綫之外試以各切點與甲點作聯綫其理自明

作甲辰綫平分亥甲丑角

即二款圖

則曲線心甲必在甲丑

綫上所以甲申丑及丙丑二曲綫之切綫同在丑點試
作辰丑平行於丙甲切綫必平分甲丑辰角故丙丑寅
卯曲綫必切諸拋物曲綫。

重學卷十一終

重學

三

重學卷十二

英國艾約瑟口譯

海甯李善蘭筆述

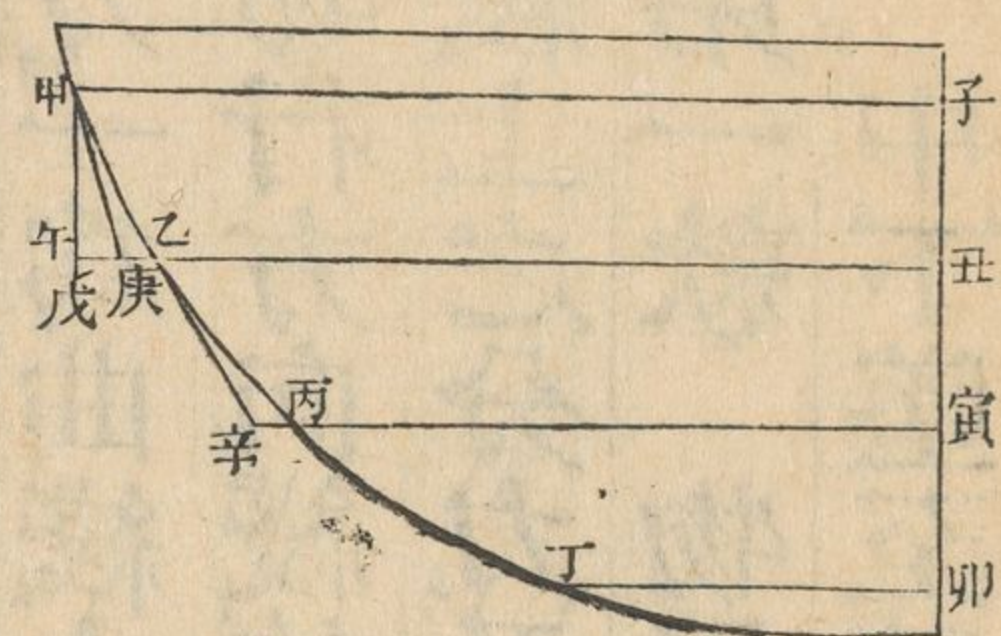
論物行於曲綫之理

凡物強之使行於曲綫則本力分爲二力一爲逐點之對力一爲曲綫上之力逐點之對力直交於曲綫亦直交於物行方向綫故物速大小與此力無涉欲求物速必用曲綫上之分力及分力所生之速乃可推物速之大小

第一款 物用地力行於曲綫任至某點所得之速與空

中下墜至某點地平綫時所得之速同

不論何曲線理同



如圖物在甲用某速行至丁甲子丁卯俱
 為地平綫直交於子卯垂綫則物在空中
 自子至卯與曲綫上自甲至丁所得之速
 同試將甲丁分為甲乙乙丙丙丁諸分作
 乙丑丙寅地平綫分子卯為子丑丑寅寅
 卯諸分物用長加力過曲綫甲乙路以平速論之乙丙
 丙丁俱為平速各等於甲乙速如甲乙乙丙諸分愈多
 愈小則卯點所得之速漸近於丁點所得之速 甲庚
 為甲點切綫遇丑乙綫於庚作甲戊垂綫又作庚戊直
 交於甲庚以甲戊為甲點地力率分為甲庚庚戊二力

庚戌爲曲綫對力所消物行自甲點後以甲庚爲率故
甲庚爲實甲戌爲法實如法而一卽甲點之能力引長
丑庚遇甲戌於午卽有比例

一率 甲戌

二率 甲庚

三率 甲庚

四率 甲午

故在曲綫方向上甲點之能力有等數

地力甲午
甲庚

地力子丑
甲庚

設能力平加於甲乙乙丙丙丁諸分準前有等數

$$\text{乙速} \times \text{甲速} = \text{二長加力甲乙} = \text{二地力} \frac{\text{甲乙} \times \text{子丑}}{\text{甲庚}}$$

$$\text{丙速} \times \text{乙速} = \text{二長加力乙丙} = \text{二地力} \frac{\text{乙丙} \times \text{丑寅}}{\text{乙辛}}$$

諸分皆同將諸等數并之得下式

$$\text{未速} \times \text{甲速} = \text{二地力} \times (\text{子丑} \frac{\text{甲乙}}{\text{甲庚}} \uparrow \text{丑寅} \frac{\text{乙丙}}{\text{乙辛}} \uparrow \dots)$$

設甲乙乙丙愈小所生之速愈近於曲綫之實速則甲乙為實甲庚為法乙丙為實乙辛為法所得諸數愈近於一以界數言之有等數

$$\text{未速} \times \text{甲速} = \text{二地力} \times (\text{子丑} \uparrow \text{丑寅} \uparrow \text{寅卯})$$

$$= \text{二地力} \times \text{子卯}$$

$$\text{未速} = \text{甲速} \uparrow \text{二地力} \text{子卯}$$

準前卷言物自空中以甲速下行至卯在卯所得之速

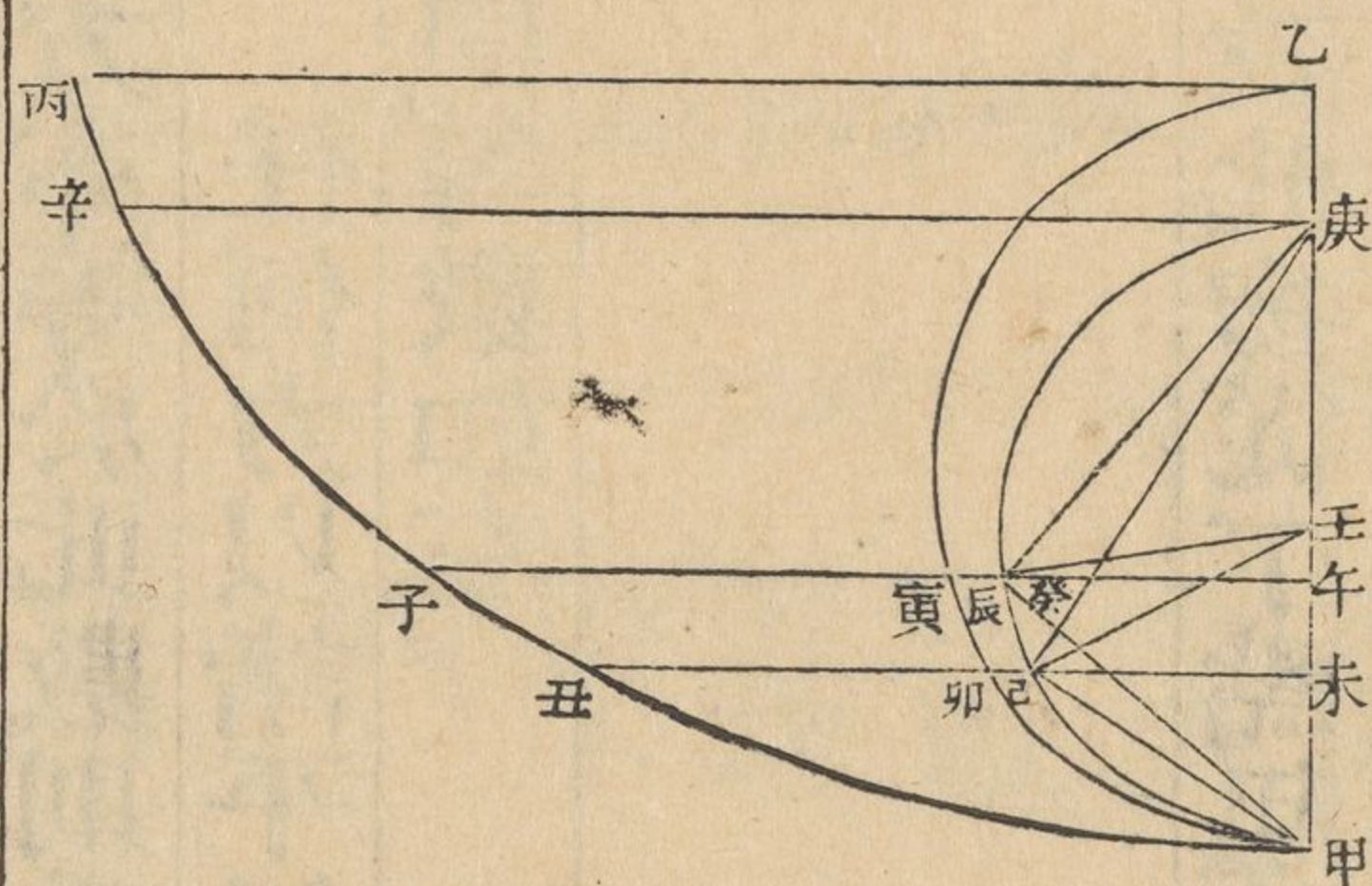
方亦等於此數則垂綫所得之速與曲綫所得之速等
任何力以諸平行方向加於行曲綫之物上動理總
同等數如左

末速 = 初速 + 倍力路

設此物從丁點起彼物從卯點起用同速上行至甲子
二點得速必等因上行丁甲所減之速與下行甲丁所
加之速必相等也故等於子卯之速即等於卯子之速
設有各物用同速上行於各曲綫從所至點作垂綫

至底點之地平綫俱相等則各曲綫上所得之速亦俱相等因上行於曲綫與上行其垂綫得速必等故也

第二款 求擺綫上物下行時刻大小



如圖甲為擺綫底點辛為物下行之初點乙甲為垂綫庚辛為地平綫交垂綫於庚子午亦為地平綫交甲庚半圓周於辰交垂綫於午則辛子路所得之速與庚午路所得之速等觀前款自明故有等數

$\frac{\text{辛子速}}{\text{二}} = \frac{\text{地力庚午}}{\text{二}} = \frac{\text{地力庚辰}}{\text{二}} = \frac{\text{庚辰}}{\text{二}} = \frac{\text{地力甲庚}}{\text{二}}$

又取甲乙
 二點為界
 作甲寅乙
 半圓令甲
 寅通弦為
 甲子之半
 詳附
 款則有
 等數

甲子 = 二甲寅

甲子 = 二甲乙甲午

$\frac{\text{甲乙甲庚甲午}}{\text{二}} = \frac{\text{甲乙甲庚甲辰}}{\text{二}} = \frac{\text{甲辰}}{\text{二}} = \frac{\text{甲乙甲庚}}{\text{二}}$

近午點
 取未點
 作丑未
 綫平行
 於子午
 有等數

$\frac{\text{子丑}}{\text{二}} = \frac{\text{甲辰甲巳}}{\text{二}} = \frac{\text{甲乙甲庚}}{\text{二}}$

甲丑 = 二甲巳 $\frac{\text{甲乙甲庚}}{\text{二}}$

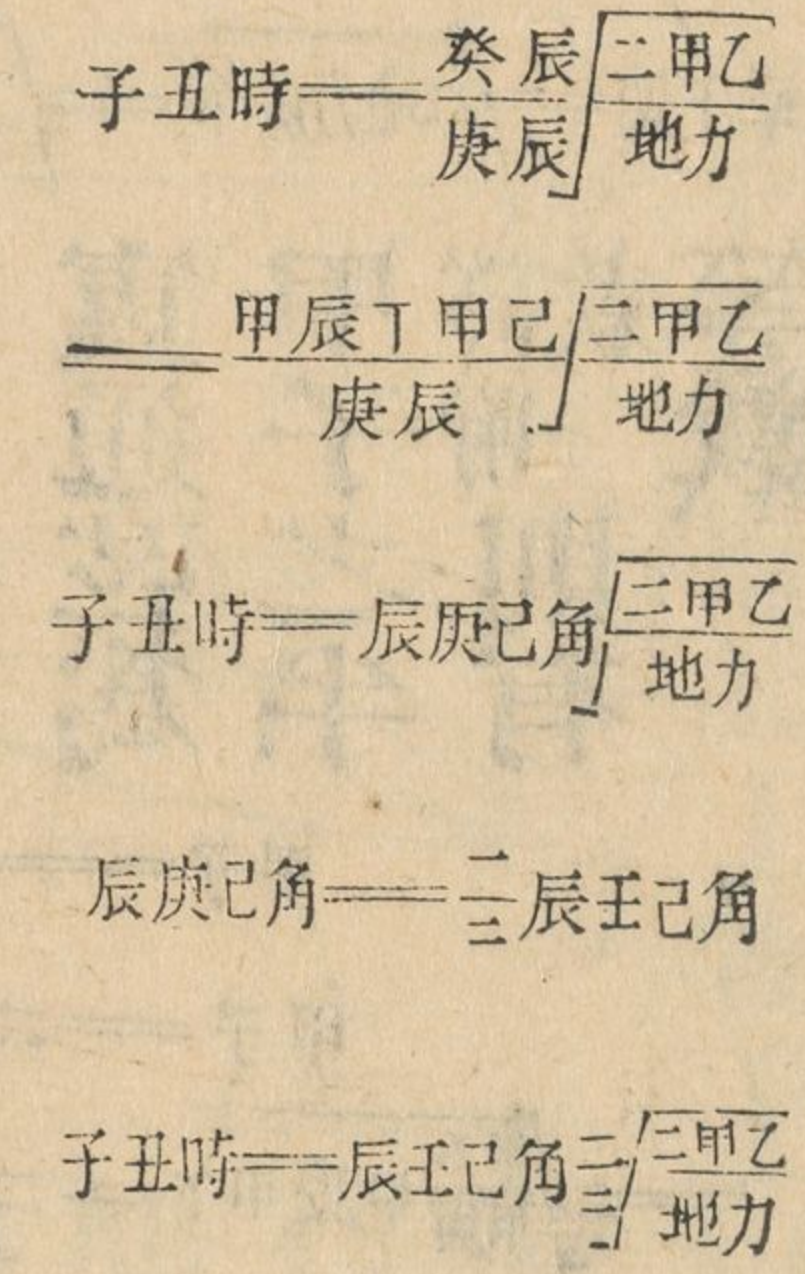
設物以
 子速平
 動過子
 丑路則
 子丑時
 刻有等
 數

$\frac{\text{子丑時}}{\text{二}} = \frac{\text{甲辰甲巳}}{\text{二}} = \frac{\text{甲乙甲庚}}{\text{二}}$

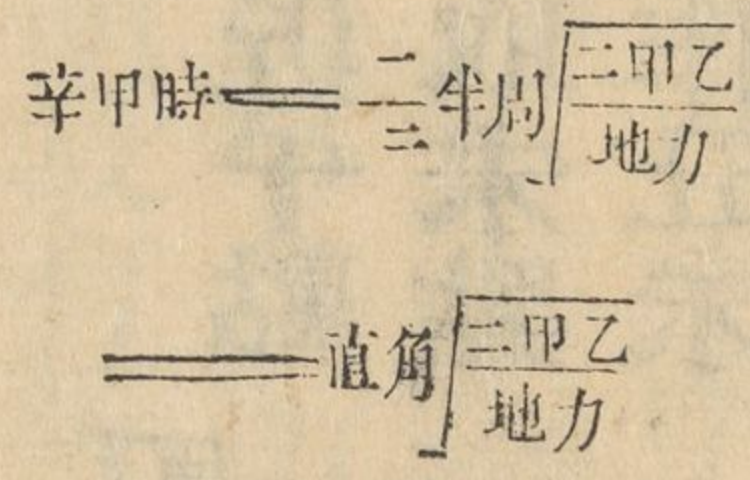
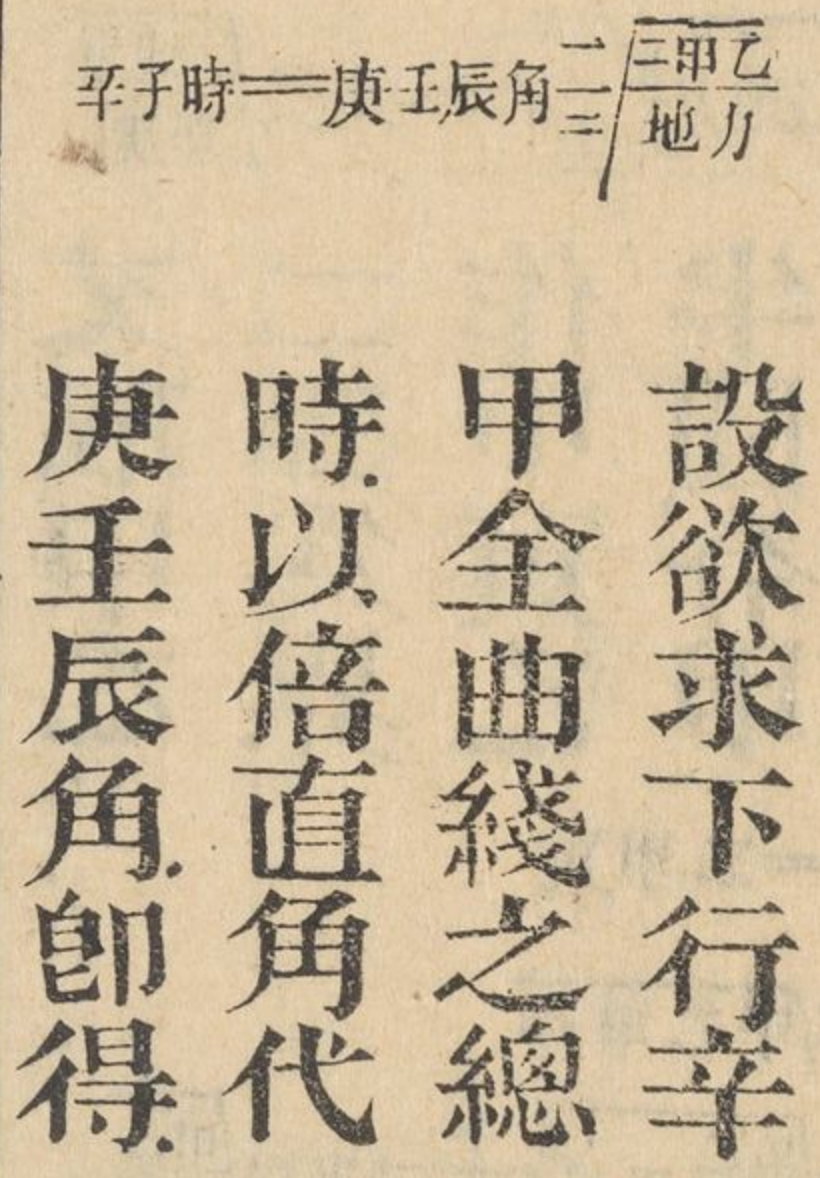
子丑時 = 子丑速

分全時為無數子丑時且令子丑時小至無窮則辛子
 中有無數小時其和幾近於辛子路所歷之時作庚己

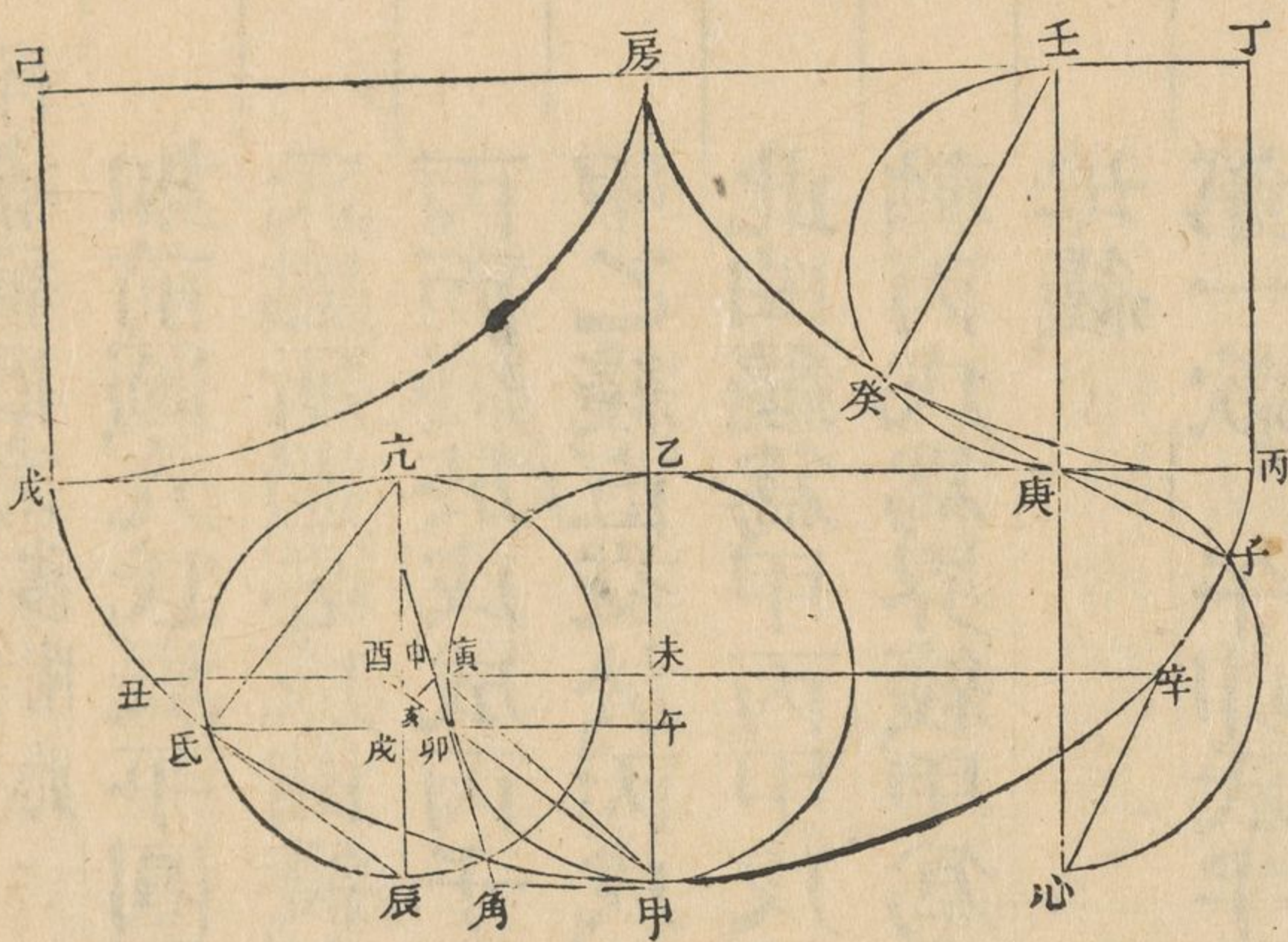
聯綫交甲辰於癸因甲癸庚角幾近於甲辰庚直角癸
 辰亦幾近於甲辰少甲己則無窮界數之等數如左



設欲求辛子總時將各
 小時并之即得如無數
 辰壬己角并之即得庚
 壬辰角也故有等數



設物下行過底點甲復上行於甲之又一邊求其時刻



如圖物自辛下行至甲復
自甲上行至丑甲丑等於
辛甲則甲丑時必等於辛
甲時有等數

下行時刻與辛點
無涉無論從曲綫
何點下行時刻皆
等故丙甲為等時
刻綫

$$\text{辛甲丑時} = \text{二直角} \sqrt{\frac{\text{甲乙}}{\text{地力}}}$$

附擺綫四款

從別書移附此

如前圖亢氏辰平圓周旋行於丙乙戊直綫則圓周
氏點所過必成曲綫名曰擺綫平圓一周氏點始於
丙而終於戊成丙子甲戊曲綫將丙戊平分於乙作
甲乙綫直交於丙戊甲爲氏點經過半路之點則分
此曲綫爲甲丙甲戊等勢等長二曲綫甲乙爲擺綫
軸丙戊爲界綫甲爲底點平圓周爲擺綫母卽命爲
母綫

第一款 午卯氏半弦直交甲乙軸卯氏等於卯甲
弧綫 氏點行至氏母綫行至辰氏亢弧綫與戊亢

直綫逐點相合則二綫必等亦等於乙卯而甲卯乙
半圓周與戊乙直綫逐點相合則亦必等戊亢既等
於乙卯則所餘亢乙必等於所餘卯甲氏戌等於卯
午故卯氏等於戌午則亦等於亢乙所以卯氏等卯
甲弧綫

第二款 擺綫上氏點之切綫必平行於甲卯通弦
設以亢為定點令母綫不行於乙戌綫而環行於
亢點則一周畢氏點之方向仍同然則氏點方向必
直交於氏亢與氏辰方向同故戊氏擺綫在氏點之
方向亦與氏辰同所以氏辰為切綫而氏辰平行於

卯甲故氏點切綫必與卯甲通弦平行

第三款 氏甲擺綫等於兩個甲卯直綫 試近午

卯氏作未寅丑平行綫次引長甲卯遇寅丑於酉次
作卯點之切綫角申遇寅丑於申遇甲點切綫於角
次作申亥綫直交於卯酉因角甲等於角卯故角甲
卯角等於角卯甲角亦等於酉卯申角亦等於甲酉
寅角所以卯酉申角等於酉卯申角而申卯等於申
酉卯亥等於酉亥則卯酉等於倍卯亥設寅點漸近
卯點申點必漸近寅點亥申至極小時必與甲爲心
寅爲界所作之弧綫合而爲一而卯亥爲甲寅甲卯

之較卽甲卯弦引長之數。又卯酉平行於辰則卯酉至極小時必等於辰丑卽甲氏擺綫引長之數。然則甲卯直綫與甲氏曲綫點點相對甲氏引長之數倍於甲卯引長之數而甲氏甲卯一道同生故甲氏恆倍於甲卯。

第四款 以法令鐘擺行于此綫上。甲子丙爲半擺綫甲乙爲軸引長之至房令房乙等於乙甲作房乙丙丁直角四邊形以丙丁爲軸丁房爲界作丙癸房半擺綫次作壬心綫等於房甲且平行於房甲於此綫兩邊作壬癸庚庚子心二半圓周爲甲丙丙房

二擺綫之母綫次取癸庚庚子之度作二直綫因庚
子心弧等於乙庚丙故庚子弧等於庚丙而子心弧
等於乙庚又乙庚等於房壬亦令壬癸弧等於房壬
則子心與癸壬二弧等而心庚子壬庚癸二角亦等
故癸庚子爲一直綫而癸庚等於庚子癸子等於倍
癸庚卽亦等於癸丙擺綫詳三款所以癸子爲擺綫上
癸點之切綫詳二款然則以房爲房癸丙索之定點合
於房癸丙半擺綫之上此綫卸時綫端丙點所經過
必成丙子甲半擺綫再以戊爲底點己房爲界作房
戊擺綫與房丙一一相等此綫卸時綫端戊點所經

過亦必成戊甲半擺綫合之即成丙甲戊全擺綫乃
以物繫於房癸丙索上之丙端令往來擺動於房丙
房戊二半硬擺綫或鐵或木爲之中間垂面上物必行於丙
甲戊擺綫上

第三款 物行於擺綫上求每次時刻

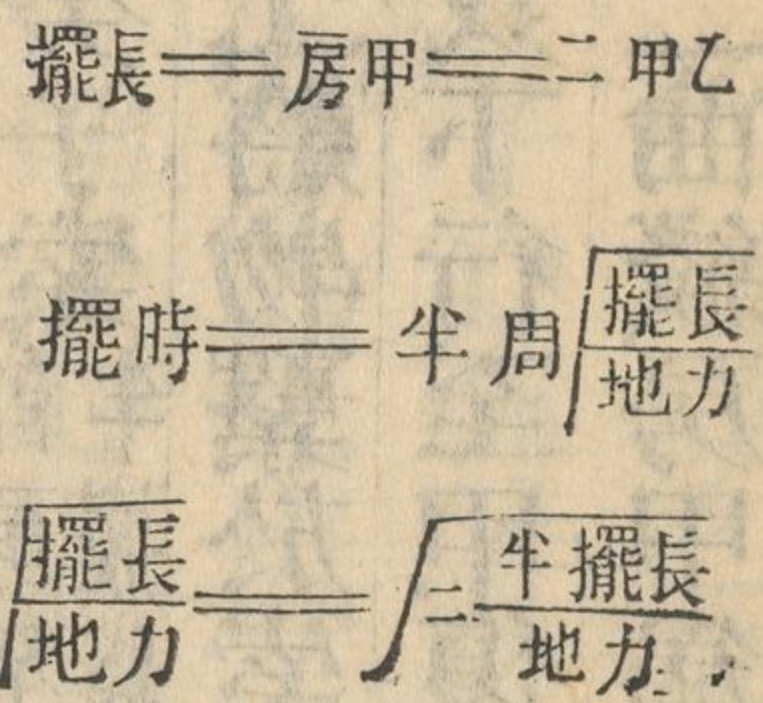
房丙房戊二半硬擺綫相切於房在一箇垂面上取房

癸子索

即房癸丙半擺綫

着於房點索端子必行於丙甲戊綫

上將物繫於索端自丙下行至甲復自甲上行至戊自
戊下行至甲復自甲上行至丙甲丙甲戊爲等勢等長
二曲綫房甲爲擺長等於二甲乙則有等數



此卽直下墜過半擺長路之時
 刻所以擺動一次時刻謂自丙至戊或
自戊至丙等於半周乘下墜過半擺
 路時刻

極近甲點處擺綫幾與以房爲心甲爲界所作之圓綫
 同然則房癸子擺及子端之物若垂於房甲端一無阻
 力往來行於小弧綫與擺綫時刻略相等於此亦可推
 得擺之時速各事以本款等數爲證卽知擺行於小弧
 綫時刻 若地力爲定數則時刻與擺長之平方根比
 例恆同若擺長爲定數則時刻與地力之平方根恆有

反比例若時刻為定數則地力與擺長比例恆同 設
 歷時一秒擺動一次名為秒擺有等數

倫頓北極出地五十一度半於無

風氣空中用秒擺二十七寸九五

六一此可測地力有等數如下

$$\frac{\text{長擺}}{\text{秒}} = \frac{\text{長擺}}{\text{地力}} \times \frac{1}{2} \text{周}$$

$$\frac{\text{地力}}{\text{長擺}} = \frac{1}{2} \text{周} \times \frac{\text{長擺}}{\text{秒}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{275}{2}$$

假如擺長一十七尺四寸七二五六二五求擺動一次歷

時幾何

$$\frac{\text{時}}{\text{秒}} = \frac{174725625}{279561}$$

二五

求得二秒半即所歷之時也

假如擺動一次，歷時三十秒，求擺長若干。

求得二千五百一十六尺

又百分寸之四十九，即擺

長也。

$$\text{擺長} = \text{秒擺長} \times 30$$

$$= 279561 \times 900$$

$$= 2516049$$

第四款

擺略大略小，求一晝夜加減次數。

如某地北極出地若干度分，一晝夜空中擺動若干次

歷時八萬六千四百秒，有等數。

設一晝夜擺動次數與一晝夜

秒數甚相近，則擺長與秒擺長

亦甚相近，其相近之較數可推

$$\text{擺時} = \frac{\text{總秒}}{\text{總次}}$$

$$= \frac{\text{擺長}}{\text{秒擺長}}$$

$$\text{擺長} = \frac{\text{總秒擺長}}{\text{總次}}$$

假如秒擺略加長其加長之數為甲求一晝夜擺動少若干次所少之次為乙有等數

因乙甚微

法實中皆

可簡之等

數如下

$$\text{秒擺} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \end{matrix} = \frac{\text{總秒}}{\text{總秒}} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \end{matrix}$$

$$\text{甲} = \frac{\text{秒擺}}{\text{總秒}} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \end{matrix} \begin{matrix} \text{乙} \\ \text{甲} \end{matrix}$$

$$\text{甲} = \frac{\text{乙秒擺}}{\text{總秒}}$$

$$\text{乙} = \frac{\text{甲總秒}}{\text{二秒擺}}$$

假如秒擺加長百分之一求一晝夜擺動少若干次

求得一十五又二分之一即

所少次數設秒擺略減短

求一晝夜多若干次法同

$$\text{甲} = \frac{100}{100}$$

$$\text{乙} = \frac{100 - 86400}{2 \times 279561}$$

$$\frac{432}{279561} = 15.5$$

第五款 地力略大略小求一晝夜秒擺加減次數

準前論擺長為定數時刻與地力之平方根恆有反比例故有等數

$$\frac{\text{時}^2}{\text{地力}} = \frac{\text{原地力}}{\text{地力}}$$

$$\frac{\text{地力}}{\text{原地力}} = \frac{\text{原地力}}{\text{時}^2}$$

$$\frac{\text{原地力}}{\text{原地力}} = \frac{\text{原地力}}{\text{原地力}}$$

設將倫頓秒擺移置地力略大處一晝夜擺動次數必多於一晝夜秒數擺疾故也若移置地力略小處一晝夜擺動次數必少於一晝夜秒數擺遲故也 地力所變甚微命為甲可用相近數推之

$$\text{地力} = \text{原地力} \frac{(\text{甲})}{1}$$

設一晝夜

擺動所多

次數為丙

則有下式

$$\text{原地力} \frac{(\text{甲})}{1} = \frac{\text{原地力} \frac{(\text{總秒})}{1} \frac{(\text{丙})}{1}}{\text{總秒}}$$

$$= \frac{\text{原地力} \frac{(\text{總秒})}{1} \frac{(\text{二})}{1} \frac{(\text{丙})}{1} \frac{(\text{總秒})}{1}}{\text{總秒}}$$

去丙方

者因丙

甚小故

可去也

$$\text{甲} = \frac{\text{二} \frac{(\text{丙})}{1}}{\text{總秒}}$$

假如赤道地之秒擺移置南北極地一晝夜擺動加多三

百次求赤道地力與二極地力比例率

求得赤道地力與二

極地力若一百四十

四與一百四十五

$$\text{甲} = \frac{2 \times 300}{86400} = \frac{1}{144}$$

假如將秒擺移置山巔求一晝夜擺動減少若干次。距

地心綫自乘方與地力有反比例地半徑加山高為山
 巔距地心綫有等數。

$$\frac{\text{地力} \times \text{地半徑}}{(\text{地半徑} + \text{山高})^2}$$

因山高比
 地半徑為
 甚小故等
 數改如下

$$\frac{\text{地力}(\text{地半徑} + \text{山高})}{\text{地半徑}}$$

等數中
 與
 相等不論地力加減
 恆同緣地力或加或
 減與此同變也有等
 數

$$\frac{\text{總秒山高}}{\text{地半徑}}$$

設地半徑為一萬二千里山高為三里求一晝夜少若干次

$$\text{少次} = \frac{86400 \times 3}{21000}$$

——二一六

求得二十一次又十分次之六卽所少次數

鐘擺所行有各種曲綫平圓綫亦其一也將索一端着於一點一端繫物行於空中必成平圓綫若將索傳於某曲綫面物往來時令索與曲綫面乍離乍合則物所行必成某曲綫而諸曲綫中以擺綫爲最妙蓋擺綫乃等時之曲綫物行於此綫無論用其全用其半用其幾分乃至用其極微之一分往來一次時刻俱等也擺動一次時刻與擺長平方根恆有比例與地力平方根

恆有反比例。風氣阻力及他阻力因綫之長短而異。而時刻不變。此綫之理雖妙而作之甚難。故今鐘擺仍行平圓綫。擺綫之妙在時刻不變。平圓綫則弧必愈小愈準。愈大乃愈不準。故擺行於平圓綫。若弧度極小。亦與擺綫之理同。設有三擺。其長一爲一。一爲四。一爲九。則各動一次。其時刻之比例必爲一二三。已上所推擺理。不論擺之體質。若論體質。須求擺心。擺心點之離懸點。一如無重擺之下端離懸點。車輪行時。其周之各點必行擺綫。大鳥巢於高山。自上飛下。或自下飛上。無可測量。嘗有明算者。細觀其飛。以爲亦行於此。

綫。凡羽族用本重本力行於此綫。一若有他力加之。不論路遠近必同時至底點。近有人造行於擺綫之擺雖不甚確。然已略相近。亦能令擺動同時同次。設有物自一點下行至他點。不用垂綫。則擺綫爲最速直綫。及各種曲綫皆不及也。

重學卷十二終

重學卷十三

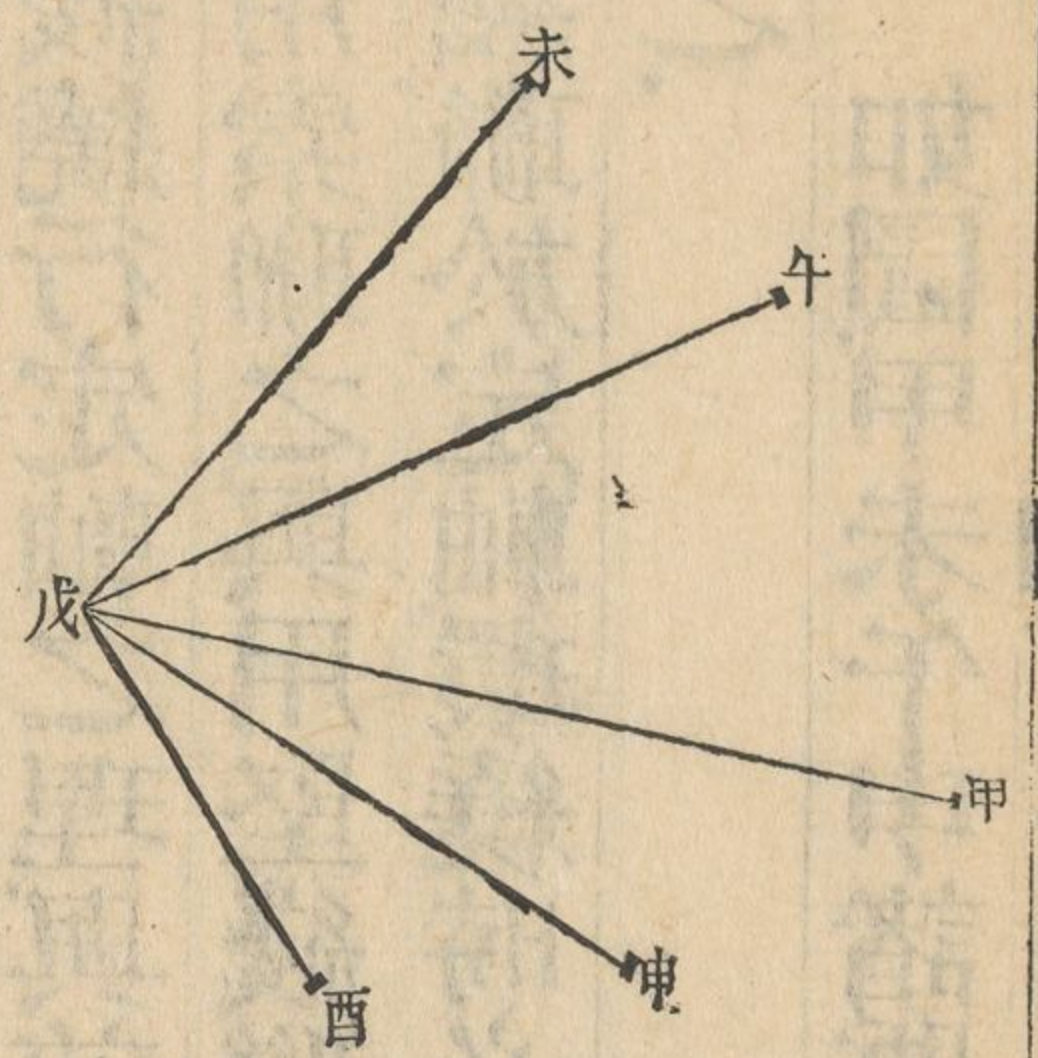
英國艾約瑟口譯

海甯李善蘭筆述

論動體繞定軸之理

前數卷中但論能力直加於諸點之理今論質點加於堅綫繞行定軸之理與前質體加於懸綫諸款義亦相通蓋用索聯之與用堅綫聯之其理一也設有多質點各用堅綫聯於定軸環繞時必互相引動此可以動理第三例明之。

如圖甲未午申諸質點以戊甲戊未戊午戊申諸堅綫

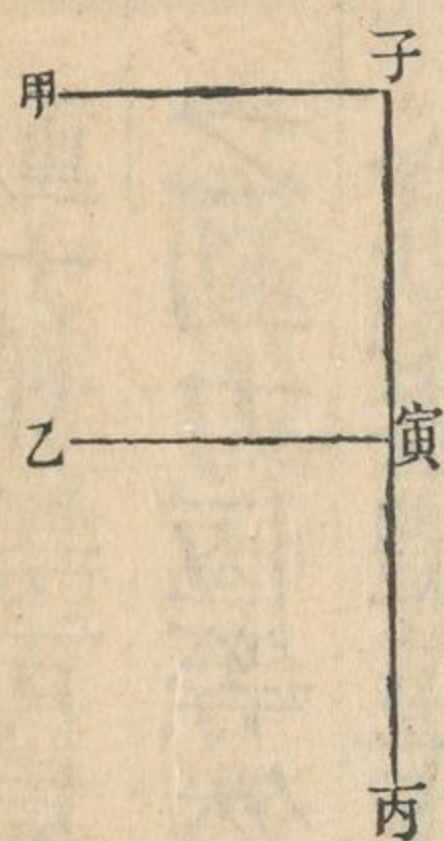


聯於戊軸若甲點動諸點亦動各
 點速與甲速有定比例欲明甲動
 之理必先求各點互相引動故甲
 點之動不得僅以動理第三例直
 加能力論之必兼論諸點相引時
 或生動或阻動凡一切堅體俱可以此理通之蓋大質
 體可分爲無數細質點故理同也 大體旋轉時無數
 細質點各用所加能力互相引動 大質體如輪軸諸
 器有能力加於一點必令無數點俱動而無數點又各
 自有抵力與他點成桿理以相引動此卷專明諸點互

相引動之理。動理第三例論能力非直加而為轉加。動力與抵力恆有比例。故力分為二。有動力。有抵力。各點上所加而生之動力。名為實力。別抵力加於體上。名為加力。此加力在加點生動。不能滿率。因連於各處處。處引動故也。每點上實生之動力。必異於應生之動力。為各點相引動而異也。

合質體動時。以靜重學之理言之。抵力動力必等。

如圖丙為軸。丙子為加於軸之堅綫。令物環繞丙軸。寅丙為子丙之半。能力或加於子。如甲或倍加於寅。如乙所生



動力相等。可見抵力加於合質體，與相等質距積所生之動力恆等。然則力加於物，令物繞軸行，必生實力於各點。蓋體通能力，與桿理同也。所謂實力，卽各點一秒中所生之動力。不論實力加力，皆以動力爲率。動力者，合體乘長加力，或質積乘所生速。上已明實力加力，方向直加，必相等之理。若爲轉加，亦無不等。蓋用法測之，而知其然也。

第一款 凡諸力生動於合質體，在各處所減動力，必相抵定。

如午爲質點，子爲午點，空中當生之速，設癸爲時率，子

乘癸爲午點歷時率中當生之速寅乘秒爲午點在體
中歷一秒實生之速。分子癸爲丑癸寅癸二速能生
癸速於時率中之長加力卽爲子故生子速之動力卽
午乘子能生丑乘癸寅乘癸二速在時率中之動力卽
午乘丑午乘寅故午乘子動力可分爲午乘丑午乘寅
二動力午乘寅爲有用之力午乘丑爲午點所減之力
再取未卯辰巳配午子丑寅爲屬於別點之質速申酉
戌亥又屬於一點各點所減之力爲未乘辰申乘戌以
靜重學言之午乘子未乘卯申乘酉各抵力與午乘丑
未乘辰申乘戌各通力同能卽午乘丑午乘寅未乘辰

未乘巳申乘戌申乘亥各力同能

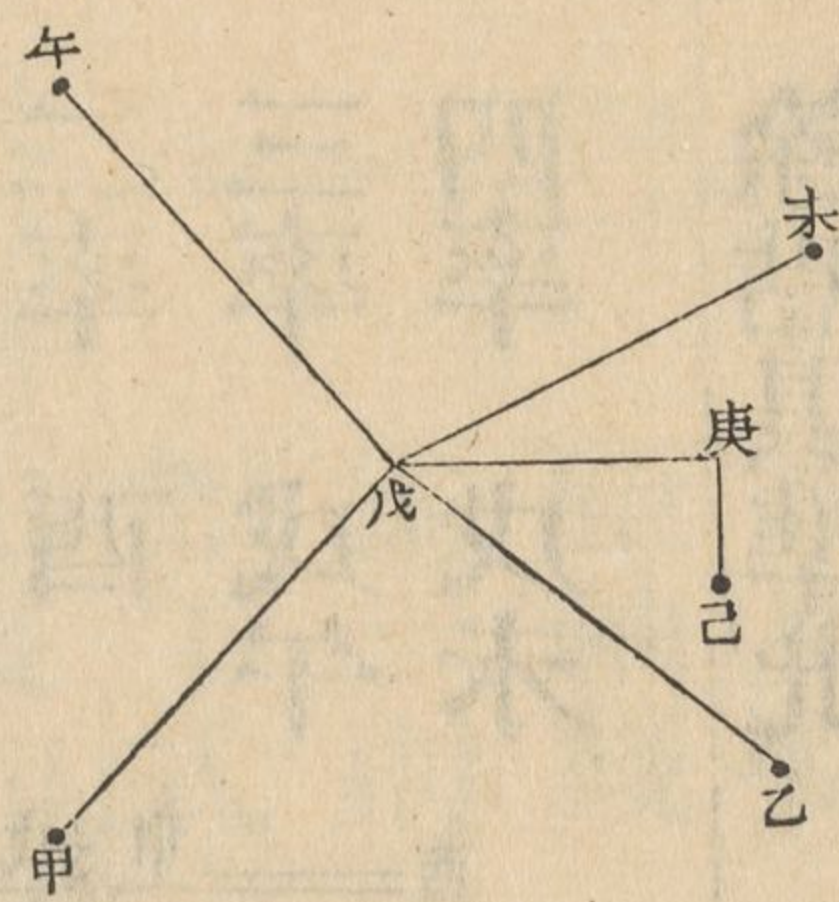
○一和力減點各

如此所減動力有正有負負者為所減力正者
即為所加力如未點不加能力則未乘寅為力
未乘辰必等於負未乘巳蓋所減之力為負未乘巳則
所加之力亦必為未乘巳也然則不論何質體他處加
減之能力必相抵定如前論質體繞定軸以本力對力
相等之理言之是也

設有諸力加於環繞定軸之質體成若干角動

繞軸以角
度論故名

角先論所生之動不計外來抵力與軸之動但明合質體
動之理



如圖合質體中有午未甲乙諸點同
 在一面繞戊軸而動戊軸與諸點所
 在之面成直角有己力令質體動求
 各點上所生之實長加力設己力直
 加於戊庚取申酉丙丁爲午未甲乙
 之實長加力申乘午酉乘未丙乘甲丁乘乙爲實動力
 各動力必直交於戊午戊未戊甲戊乙因動之方向直
 加故也所以有加力己直加於戊庚則有實力申乘午
 酉乘未丙乘甲丁乘乙直加於戊午戊未戊甲戊乙證
 以前條且證以桿理有等數如左

己X戊庚丁申午X戊午丁酉未X戊未

丁丙甲X戊甲丁

午未甲乙各以相等角速繞戊點各點方向
速與戊午戊未戊甲戊乙必恆有比例故凡
速改變必依此比例而生改變之長加力在
同時中亦必有此比例

一率

申

前等數

二率

酉

中易以

三率

戊午

此二數

四率

戊未

得下式

$$\text{酉} \frac{\text{申} \times \text{戊未}}{\text{戊午}}$$

$$\text{丙} \frac{\text{申} \times \text{戊甲}}{\text{戊午}}$$

$$\text{己} \times \text{戊庚} \text{丁} \text{申} \text{午} \times \text{戊午} \text{丁} \frac{\text{申未} \times \text{戊未}}{\text{戊午}}$$

$$\text{丁} \frac{\text{申甲} \times \text{戊申}}{\text{戊午}} \text{丁} \text{丙} \text{甲} \times \text{戊甲} \text{丁}$$

$$\text{申} \frac{\text{己} \times \text{戊庚} \times \text{戊午}}{\text{午} \times \text{戊午} \text{丁} \text{未} \times \text{戊未} \text{丁} \text{甲} \times \text{戊甲} \text{丙}}$$

$$\text{酉} \frac{\text{己} \times \text{戊庚} \times \text{戊未}}{\text{午} \times \text{戊午} \text{丁} \text{未} \times \text{戊未} \text{丁} \text{甲} \times \text{戊甲} \text{丙}}$$

餘點俱準此

$$\text{庚實生力} = \frac{\text{己戊庚}}{\text{午戊午} \perp \text{未戊未} \perp \text{}} \quad \text{己戊庚}$$

設庚點
距軸綫
為一則
如下式

$$\text{實生力} = \frac{\text{己} \times \text{戊庚}}{\text{午} \times \text{戊午} \perp \text{未} \times \text{戊未} \perp \text{}}$$

設有多能
力加於質
體則如下
式

$$\text{實生力} = \frac{(\text{各力} \times \text{各距綫}) \text{和}}{\text{午戊午} \perp \text{未戊未} \perp \text{}}$$

多能力中如
有方向與餘
力對面者則
記負號

庚點實生長加力有等數

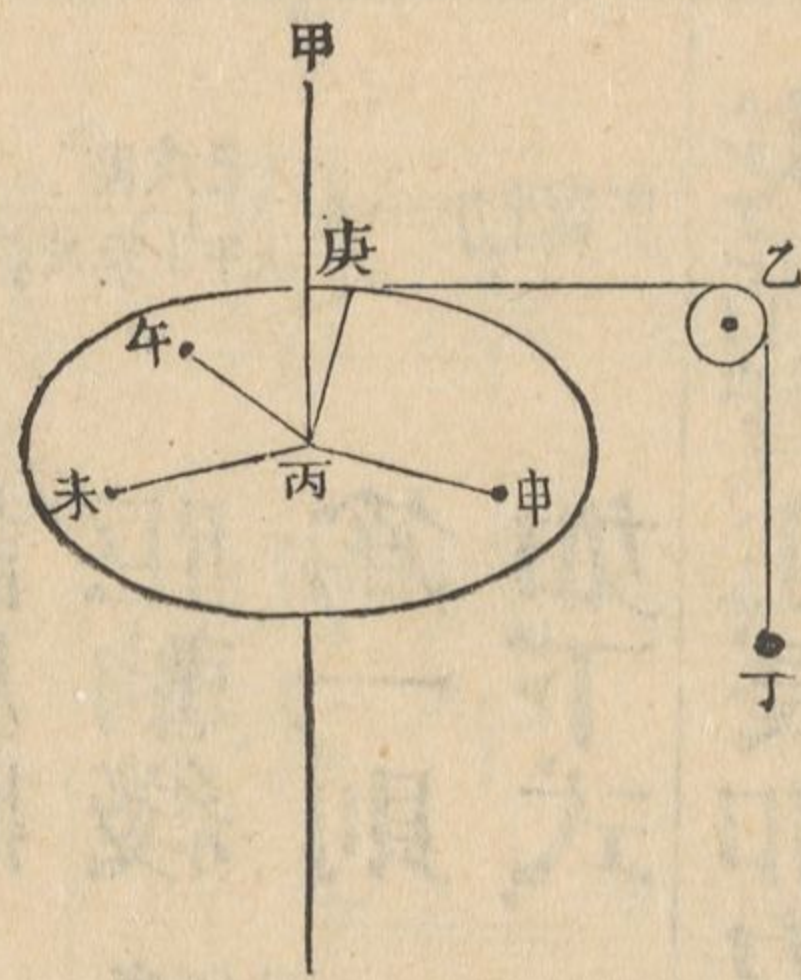
由此觀之動不能傳因午

$$\text{庚長加力} = \frac{\text{己}}{\text{午戊午} \perp \text{未戊未} \perp \text{甲戊甲} \perp \text{戊庚} \perp \text{戊庚} \perp \text{戊庚} \perp \text{}} \quad \text{己}$$

未諸力阻之庚點上午之
阻力等於午乘戊午方為
實如戊庚方而一各點之
阻力皆可類推

準前款理推之各點實力與各點距軸綫恆有比例
 設己力與戊庚爲定數則各點實力亦爲定數而諸動
 必爲平加速設己力非定數則當用變動之等數

設所加能力爲他質體之重則他質體亦在午未甲諸
 點中



如圖午未申等質點在一地平面環
 繞甲丙垂軸丁重以索過乙滑車直
 加於丙庚半徑丁速與某力加於丙
 庚面速同所以令質體動之能力或
 在丁體或在庚點並同

庚實生力 $\frac{\text{丁重丙庚}}{\text{丁丙庚午丙午未丙未}} \frac{\text{丁重丙庚}}{\text{丁丙庚午丙午未丙未}}$

故在丁之實生力等於在庚

之實生力 圖中午未動力

之比同於諸物質體積 即體乘質

之比故等數實中之丁重數

亦係動力 即丁乘地力

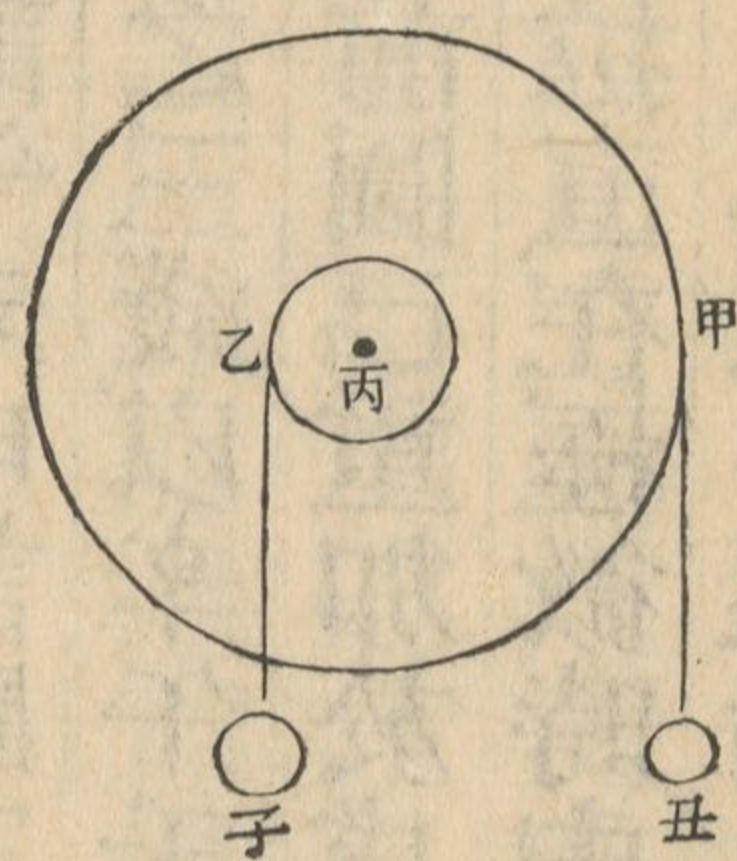
設午未申諸點不同在直交軸之一箇面內則等數中

之三綫以辛午壬未癸申諸距軸綫易之理亦同

前圖已重加於戊庚半徑乃用索直加於庚索為己重

拉直在極微時中與己重加庚無異因索上在己之拉

力與在半徑端之對力相等故加己之實生力等於加



半徑端之抵力而本力與實生力仍相平設有子丑二重以索纏於輪軸丙為軸心用前等數子丑之力或加於本體或加於軸乙點及輪甲點理俱同因索恆直交於半

徑之端故也

質點當靜時有不肯動之性當動時有不肯靜之性此力名質阻力質阻力大小之比同於質大小之比以質體繞軸言之各點之質阻力以離軸遠近而異與力加於桿之理同但桿之實生動力等於力乘距定點綫而

質體旋動之質阻力。以質體乘距軸綫方為率。此數名質阻率。各點質阻率并之為合體質阻率。設質體諸點非分離各處。乃并為一體。則其質阻率為諸質阻率之和。假如諸點為午一午二午三等距軸綫為戊午一戊午二戊午三等。有能力已直加於距軸綫之庚點。則庚點上之長加力有等數。

庚午 戊午 己午
和

凡有和號者。乃諸微分之和。

此即合體質阻率。設有數

為乾令等數如下。則乾即環

軸半徑詳下卷。

庚午 加力 長

庚午 戊午 己午
和

此諸點各乘距

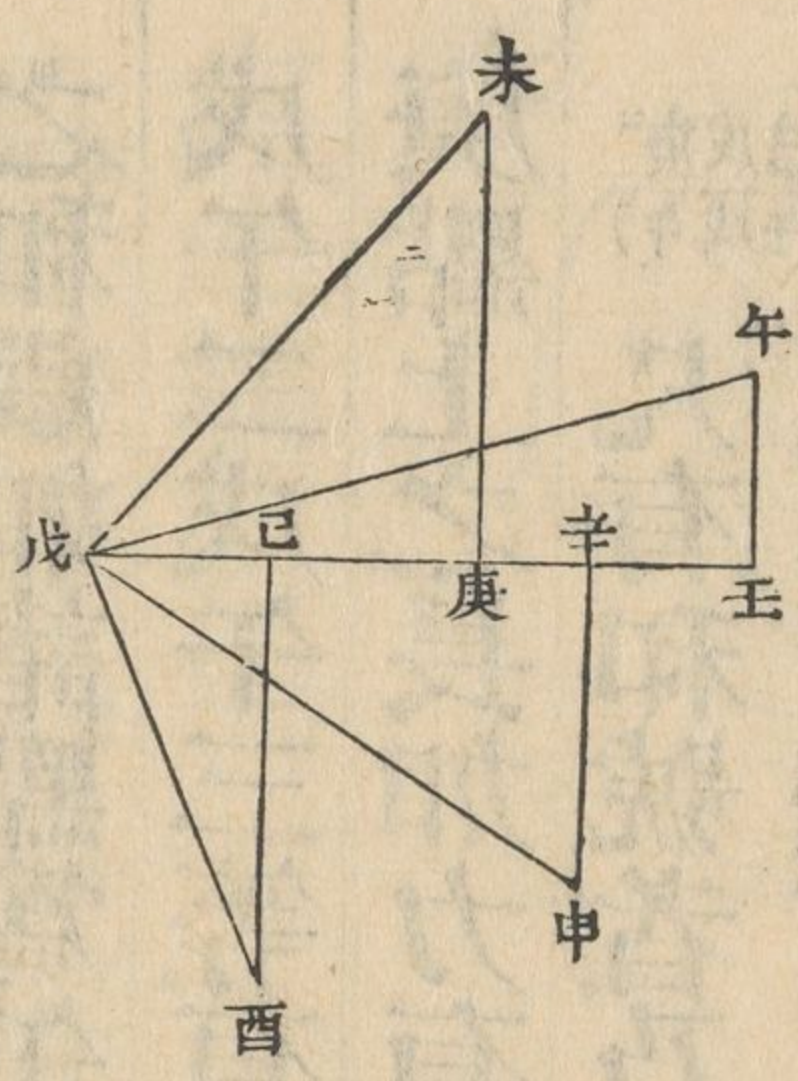
軸綫方之和。

此諸點之和。

乾午 和

第二款 諸質點合體加於地平軸求地力加於各點之

長加力



如圖戊為動軸午未申酉為諸質
 點作地平綫從戊點直交於午壬
 未庚申辛酉己諸垂綫所加動力
 為午未申酉諸點之重午點實生
 長加力為辰即有等數

未實長加力 = 辰戌未 / 戊午

申實長加力 = 辰戌申 / 戊午

諸實動力有等
 數如午點之實
 動力為辰乘午

未實動力 = 辰未戌未 / 戊午

申實動力 = 辰申戌申 / 戊午

戊壬戌庚戌辛戌己直交於前諸力方向戊午午戌未戌
 申戌酉直交於後諸力方向午點動力乃午點質乘地
 力各點動力即各點質乘地力加力實力相平與桿理
 同有等數。

午地力戌壬 上 未地力戌庚 上 申地力戌辛 上 卯

辰午戌午 上 辰未戌未 上 辰申戌申 上 卯
戊午 戊午 戊午

辰 上 (午戌壬 上 未戌庚 上 申戌辛 上 卯) 戊午地力
午戌午 上 未戌未 上 申戌申 上 卯)

質點愈多等數中法實之各項
 亦愈多。設實中諸項有在戊
 點上垂綫之又一邊則等數中
 正易為負而法中之項仍俱為
 正。因諸點環行戊軸故諸實長
 加力恆在一個方向也。

再求未

點實生

長加力

命此力

為已有

等數

巳——(午戊壬上未戊庚上申戊辛上)戊未地力
午戊午上未戊未上申戊申上

取癸點

為合體

重心作

癸子綫

直交於

地平有

等數

(午戊壬上未戊庚上申戊辛上)——(午上未上申)戊子

戊子——戊癸, 癸正弦

辰——(午上未上申)戊癸癸正弦戊午地力
午戊午上未戊未上申戊申上

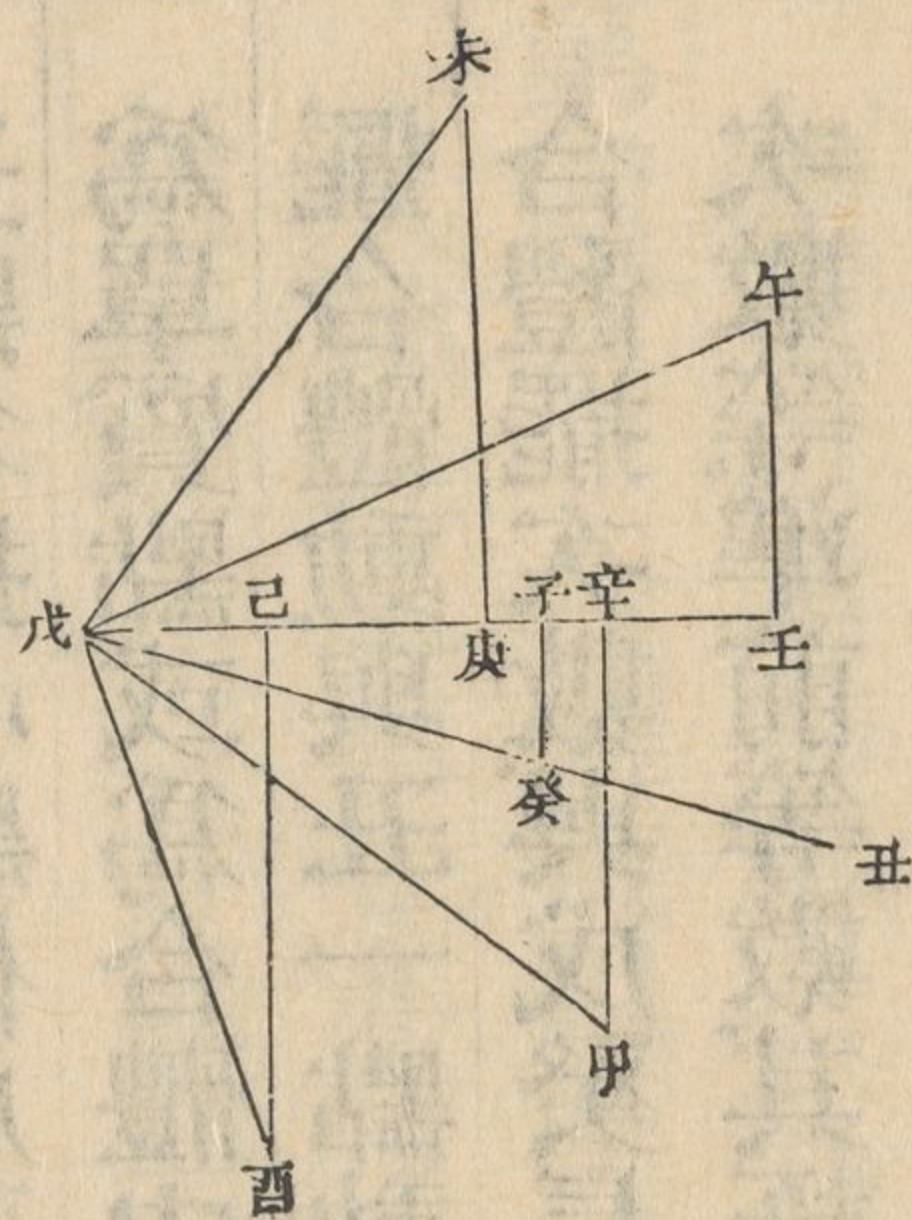
——戊午戊癸地力癸正弦(和午)
和(午戊午)



第三款 有堅合體環繞於地平軸體中各點漸加速不

同求何處一點與地力攝引同

如圖丑點在戊癸綫上其長加力有等數



$$\text{丑長加力} = \frac{\text{戊丑戊癸地力癸正弦}(\text{和午})}{\text{和}(\text{午戊午})}$$

設去合體僅
置一點於丑
則有等數。

$$\text{丑長加力} = \text{地力癸正弦}$$

因此一點一如行於戊丑半徑之弧綫故也此弧綫在丑點之方向與地平所成角必等於戊丑綫與垂綫所成角。

以地力在

今欲求丑點

斜面上證

二長加力若

股力 地力 弦

之見十有

力—地力癸正弦

何而等必令

等數

等數如下

戊丑 戊癸 和 — 和(午戊午)

戊丑 — 和(午戊午) 戊癸 和

丑點名擺心點任戊癸綫在何方向此綫上之丑點或為單質點或為合體中之一點其長加力同所以戊丑擺合體動與丑一點動其次數無異

合體擺次數與戊癸長擺

擺長 地力

次數等準前等數其極微

次中時刻有式如下

微次時 = 擺

已知質阻率及重心求離軸之擺心擺之合體或以諸點聯之或以諸質體作之理俱同

和(午戊午)
戊癸和午

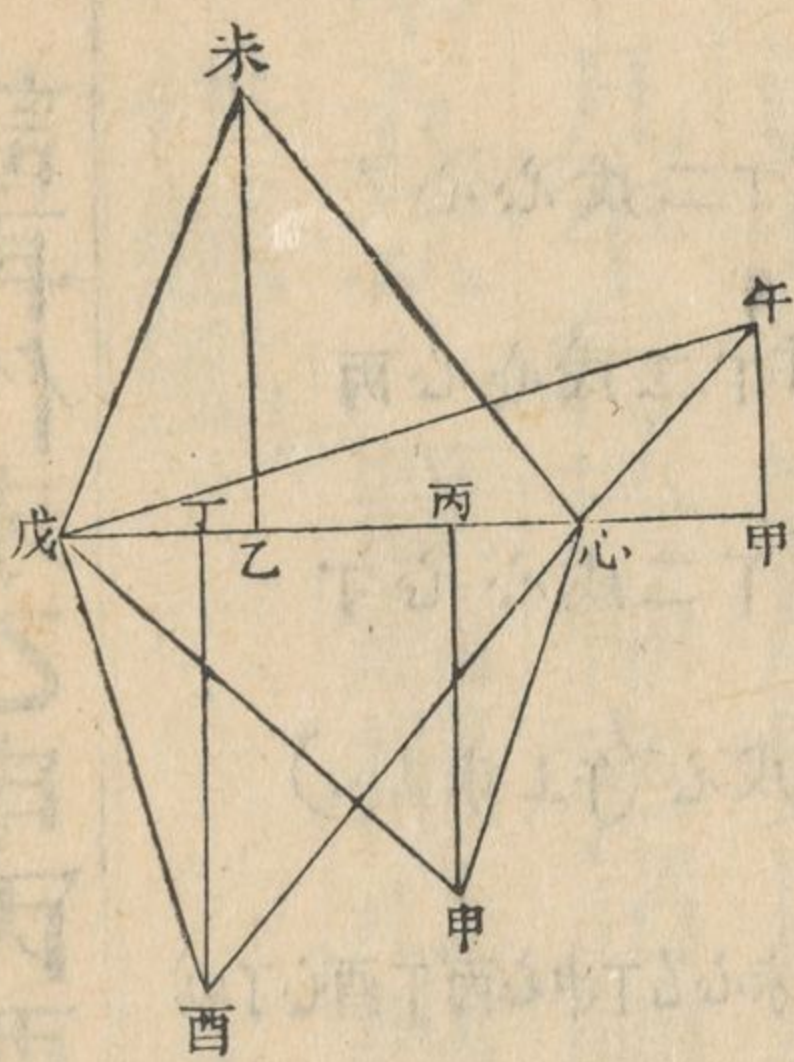
戊丑=

第四款 合體質阻率準戊軸言之設別有一軸平行於

戊軸經過重心亦有質阻率又合體收於重心亦有質

阻率亦以戊軸言之并後二質阻率與原質阻率等

如圖合體繞行於戊軸午未申酉為諸質點以直交於軸之面言之則心點為午未申酉諸點之重心作午甲綫直交於戊心則有等數



戊午=戊心+心午+二戊心心甲

設再作未乙申丙酉丁諸綫直交於戊心則有諸等數

命戊午爲天戊心爲地和午爲人則有等數

戊未——戊心_上心未_下二戊心心乙

戊申——戊心_上心申_下二戊心心丙

戊酉——戊心_上心酉_下二戊心心丁

午戊午_上未戊未_上——戊心_上(午_上未_上)

上午心午_上未心未_上——二戊心(午心甲_下未心乙_下申心丙_下酉心丁_下)

等 心 因
數 有 重

午心申_下未心乙_下申心丙_下——○

午戊午_上未戊未_上申戊申_上——(午_上未_上申_上)戊心_上午心_上未心_上申心_上

此爲重心
周質阻率

此聚於心
點爲戊軸
質阻率

此爲原質
阻率

和_(午戊午) = 戊心 和_(午上) 和_(午心午)

和_(午心午) = 人環軸半徑

和_(午天) = 人(地)環軸半徑

已知心點周質阻率，即知戊點周質阻率。

凡平行於軸之諸軸周質阻率，俱大於心點周質阻率。

第五款 懸點擺心點有互易之理，懸點作擺心，則擺心

作懸點。

午即諸質點和(午心午)即諸質

點乘環軸半徑方心點

即癸點戊為懸點丑為

擺心癸為重心

$$\text{戊丑} = \frac{\text{環半徑}}{\text{戊心}} \uparrow \text{戊心}$$

$$\text{心丑} = \frac{\text{環半徑}}{\text{戊心}}$$

$$\text{戊心} = \frac{\text{環半徑}}{\text{心丑}}$$

$$\text{丑戊} = \frac{\text{和(午戊午)}}{\text{戊心和午}}$$

$$\text{和(戊午)} = \frac{\text{和(午心午)} + \text{戊心和午}}$$

戊丑恆因於戊心戊心不變戊丑亦不變 試以心為

心戊為界作平圓綫於擺面即直交於懸軸之面此平圓綫上任

取何點作懸點戊丑終不變故逐點懸之擺次俱同也

若以心為心丑為界作平圓綫此平圓綫上任取何

點作懸點擺次亦俱同也

重學卷十三終

重學卷十四

英國艾約瑟口譯

海甯李善蘭筆述

論器動

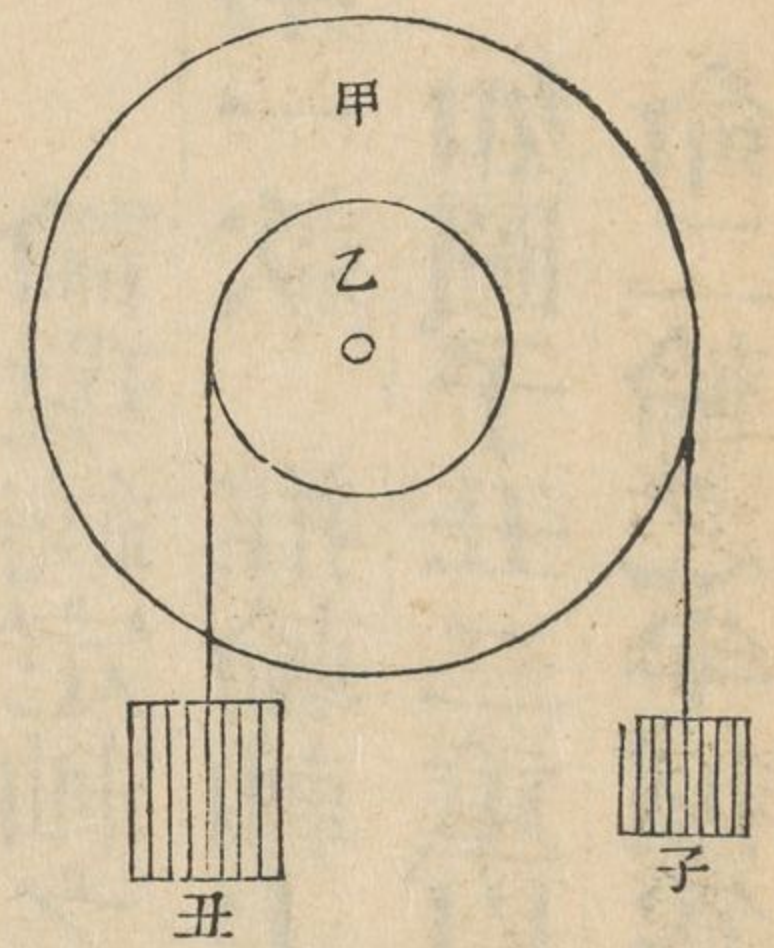
此卷用前所推得之理求諸助力器之長加力及諸器互
相生動之長加力已知長加力用和分法推其動

和分法
見別書

論環繞定軸之理

第一款 推輪軸上所加之重長加力

如圖子丑二重以索纏於甲乙二輪二輪共一地平軸
命二輪之半徑爲庚辛全質爲午環軸半徑爲乾甲乙



器繞本軸徑之質阻率為乾方乘午
 取午體內一質點命為未所加之力
 為子乘地力距軸綫為庚負力為丑
 乘地力距軸綫為辛有等數如左

質阻率 = 乾和未 = 乾午

動率 = 子地力庚丁丑地力辛

子長加力 = $\frac{(子庚丁丑辛)地力庚}{子庚丁丑辛丁午乾}$

方向自
上而下

丑長加力 = $\frac{(子庚丁丑辛)地力辛}{子庚丁丑辛丁午乾}$

方向自
下而上

此二數為定數若求得之力為定力則器動可推
 設丑乘辛大於子乘庚則力生動必在對面方向丑雖

本非動力必下行也

命子索力為角乘地力子因重下行因索力上行故有

等數

$$\text{子動力} = \text{子地力} \times \text{角地力}$$

$$\text{長加力} = \frac{(\text{子} \times \text{角}) \text{地力}}{\text{子}}$$

$$\text{子} \times \text{角} \text{地力} = \frac{(\text{子} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{地力} \times \text{庚})}{\text{子} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{乾}}$$

$$\text{角} = \frac{(\text{子} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{乾})}{\text{子} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{乾}}$$

命丑索力為亢乘地力有等數

$$\text{亢} = \frac{(\text{子} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{乾})}{\text{子} \times \text{庚} \times \text{辛} \times \text{午} \times \text{乾}}$$

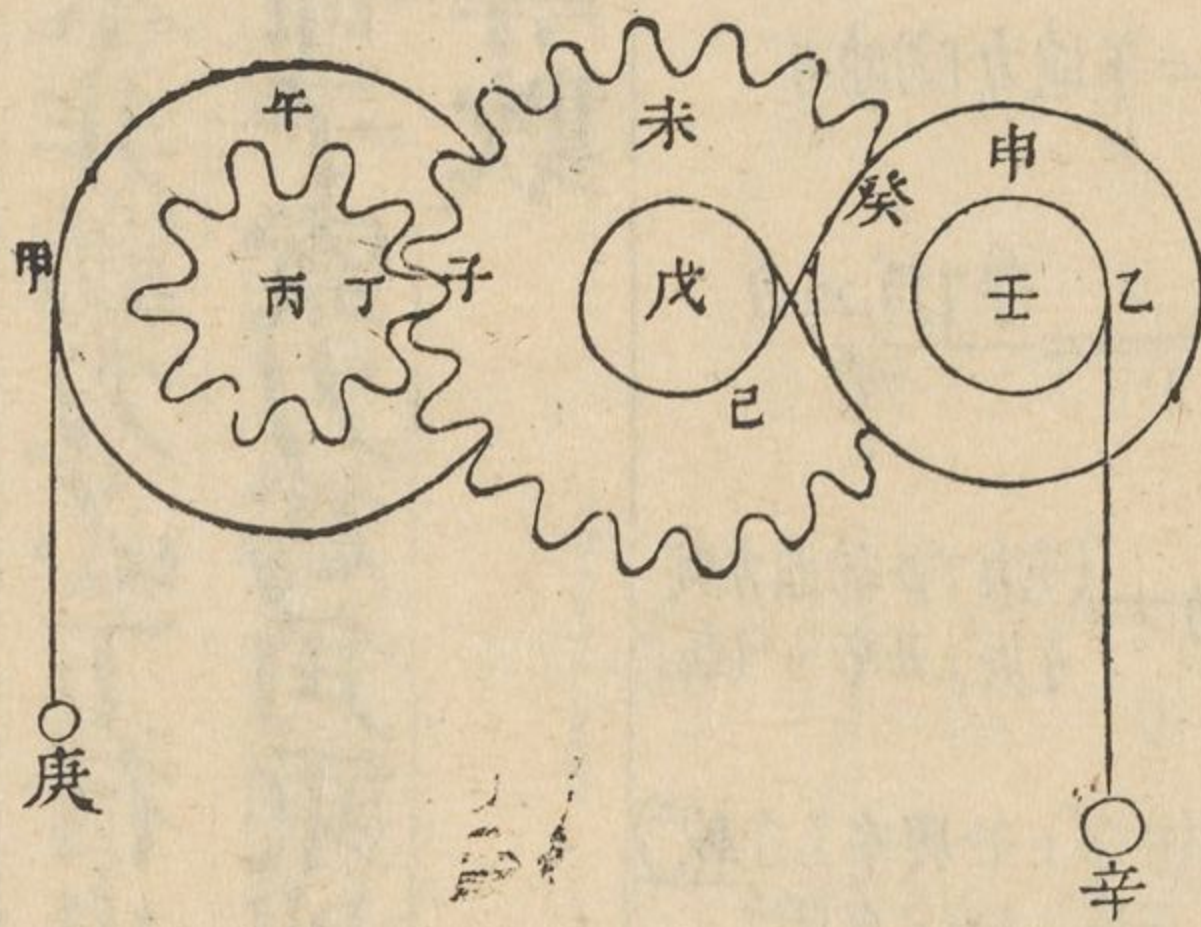
動心抵力因子丑而生必等於二索力之和則必有等於二索力和之對力阻之依靜重學之理器上之力必相定故動心抵力有等數

動心抵力一角上亢

子丑(庚上辛)上(子)上(丑)午乾
子庚上丑辛上午乾

第二款

推聯輪軸上所加之重長加力



如圖諸輪與諸軸相加或用齒
 如丁子或用索如己癸理同設
 更用別加法亦同 命第一輪
 軸二半徑為角為亢第二輪軸
 二半徑為氏為房第三輪軸二
 半徑為心為尾

所加之力在甲為庚乘地力在乙為辛乘地力其方向對面以靜重學理言之辛乘地力之對力在庚有等數

故生動於

$\frac{\text{尾房亢地辛}}{\text{心氏角}}$

角路之力

角路即

甲距丙等

數如下

$\frac{\text{尾房亢地辛}}{\text{心氏角}}$ 庚地力丁 動力

取午乘乾方未乘坤方申乘震

方為各輪質阻率在內取天為

庚實長加力因各長加力之比

如各速之比故有等數

子或丁長加力 $\frac{\text{亢天}}{\text{角}}$

己或癸長加力 $\frac{\text{亢房天}}{\text{角氏}}$

乙或辛長加力 $\frac{\text{亢房尾天}}{\text{角氏心}}$

因庚實長加力為天故無論距丙綫若何長短在午輪
 上實長加速恆等於天乘亢為實角為法假如有質點
 寅命此離丙點之綫為丑則實動力有等數

$\frac{\text{寅} \text{天}}{\text{角}}$

此力繞行

$\frac{\text{寅} \text{天}}{\text{角}}$

此為加於甲點之

$\frac{\text{天和} \text{寅}}{\text{角}}$

丙點之時

力故午輪上全實

實動力

有等數

繞兩力

動力有等數

全實動力

此即甲

準此推之

點之全

未輪子點

力故又

之全實動

有等數

力有等數

$\frac{\text{天} \text{午} \text{乾}}{\text{角}}$

全實動力

$\frac{\text{未} \text{坤}}{\text{角}} \times \frac{\text{天} \text{亢}}{\text{角}}$

未全實動力

因器本理令

合體繞丙之

力等於甲點

之力故有式

未坤
氏

亢天
角

繞丙力

繞丙力

又辛重

實長加

力有等

數

亢房尾天
角氏心

辛實長加力

辛實長加力

辛實長加力

以此推之

辛重在甲

點之動力

有等數

亢房尾天
角氏心

辛動力

辛動力

辛動力

繞丙點

之動率

等數如

下

亢房尾
角氏心

庚丁辛

地力角

繞丙力

繞丙

有用

之力

等數

如下

亢房尾
角氏心

庚角天上辛角天

繞丙實力

繞丙實力

亢房震
角氏心

亢坤
角氏

上申角天

上未角天

上午角天

乾
角

乾
角

乾
角

乾
角

乾
角

準前理命

亢實角法

爲日房實

氏法爲月

尾實心法

爲星則有

等數

地力角(庚丁辛日月星)——

角天(庚丁辛日月星)——
庚丁辛 日月星 午 乾 未 坤 申 日 月 震 心

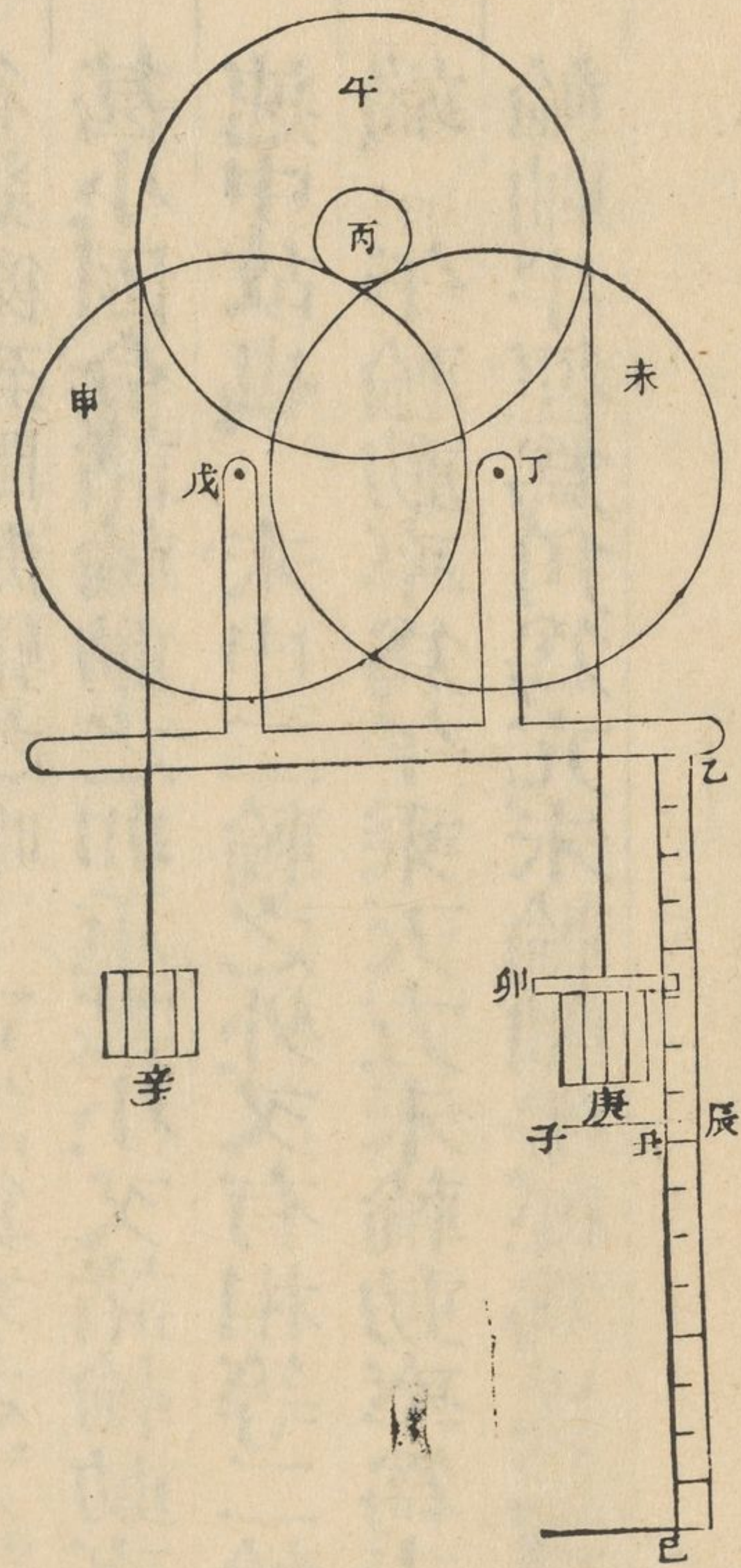
天——(庚丁辛日月星)地力
庚丁辛 日月星 午 乾 未 坤 申 日 月 震 心

辛長加力——日月星天

此二長加力
俱爲定數

重體向地心之力成路與速阿德符突用器測之以證明
算術

如圖庚辛二相等重以細索懸於滑車午將小重卯加



於庚上
庚辛二
重懸於
二空圓
柱中柱
之大小

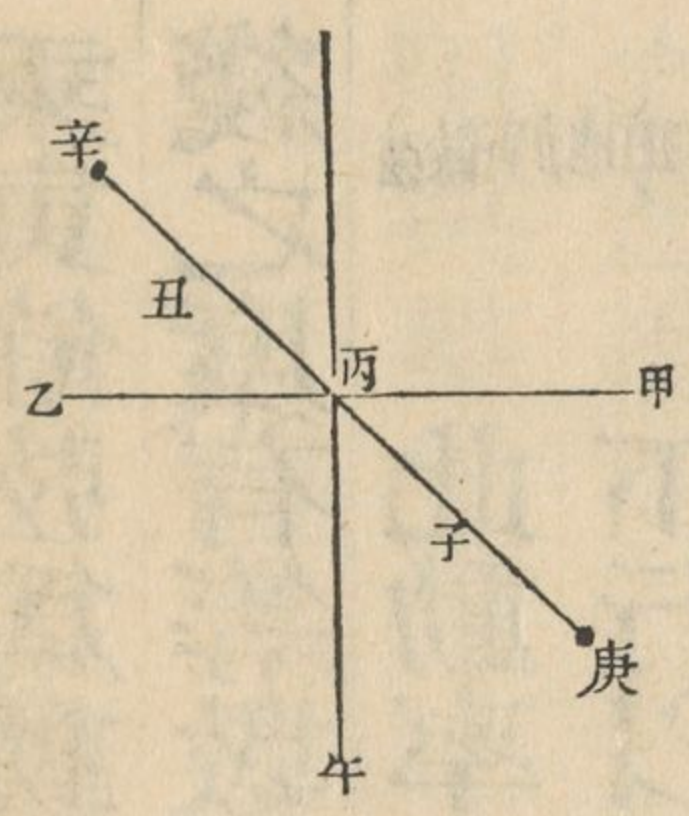
相等令風氣阻力相等則遲速亦相等午車軸丙極小
 又加未申二減阻力之輪則軸上面阻力幾等於無矣
 測時刻須用擺測路須用尺如乙法令卯體略大則庚
 重過圓柱口子丑時卯體不能過必閣於子丑上因器

上只有一箇長加力爲卯重所生故庚重過辰點後必
以辰點所得之速爲平速下行至己點必止爲柱底所
阻也庚自乙至子丑聞卯聲查鐘擺時刻若干至己聞
庚聲查鐘擺時刻若干乃置辰己路以二時之較除之
得速二時之較謂聞卯聲後至聞庚聲之時可證算理之不誤 庚辛速
甚小因令諸輪動之卯重甚小又諸輪動率亦在漸加
速中故也 未申二輪之外又有相等二輪在丙軸後
端 午輪動率爲午乘天方未輪動率爲未乘地方午
輪軸半徑爲角爲亢未輪軸半徑爲氏爲房有等數

$$\begin{aligned} \text{庚長加力} &= \frac{\text{卯地力}}{\text{二庚} \perp \text{卯} \perp \text{午} \frac{\text{天}}{\text{角}} \perp \text{四未} \frac{\text{地}}{\text{角}} \text{辰}} \\ \text{諸輪質阻率} &= \frac{\text{午} \frac{\text{天}}{\text{角}} \perp \text{四未} \frac{\text{地}}{\text{角}} \text{辰}} \end{aligned}$$

諸輪質阻率
令速及路變
一如右邊數
之全質收於
午輪之周

第三款 求桿上二重長加力



如圖庚辛二重加於桿之子丑二端
桿質為乾重心距動心為坤桿與地
平成角為寅庚辛綫為成寅角時桿
之方向子乘寅餘弦坤乘寅餘弦丑

乘寅餘弦為動心丙點上地平綫遇庚辛及重心三垂綫之度有等數。

此動率合庚

下行以乾乘

震方為桿之

質阻率有等

數

三力動率 = (庚子 上 乾坤 下 辛丑) 地力寅餘弦

庚長加力 = (庚子 上 乾坤 下 辛丑) 地力子寅餘弦
庚子 上 辛丑 上 乾震

此力直

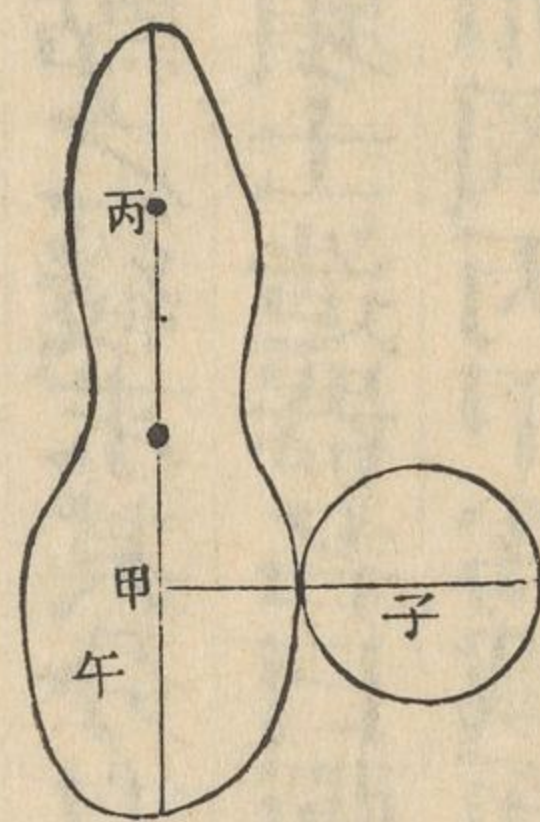
加於丙

庚

第四款 有物繞行丙軸至某點時為某體用某速所擊

求繞軸加減動

動體相擊其抵力相加只在一霎時中



如圖子體用某速擊繞丙軸之午
 體作丙甲綫直交擊時抵力方向
 命丙甲綫爲見午體之質阻率爲
 午乘乾方凡有能力用子甲方向
 加於體無論何時所生之速一如午乘乾方爲實見方
 爲法之質體收於甲點設將質點代體任何時中所生
 之速總同以此而知子體用端速直擊丙甲合體於
 甲與擊午乘乾方爲實見方爲法之午體收於甲點無
 異設體質極堅無凸力則擊後午必以子速行準動
 理第三例擊前後之質乘速同命擊後甲點速率爲邦

有等數

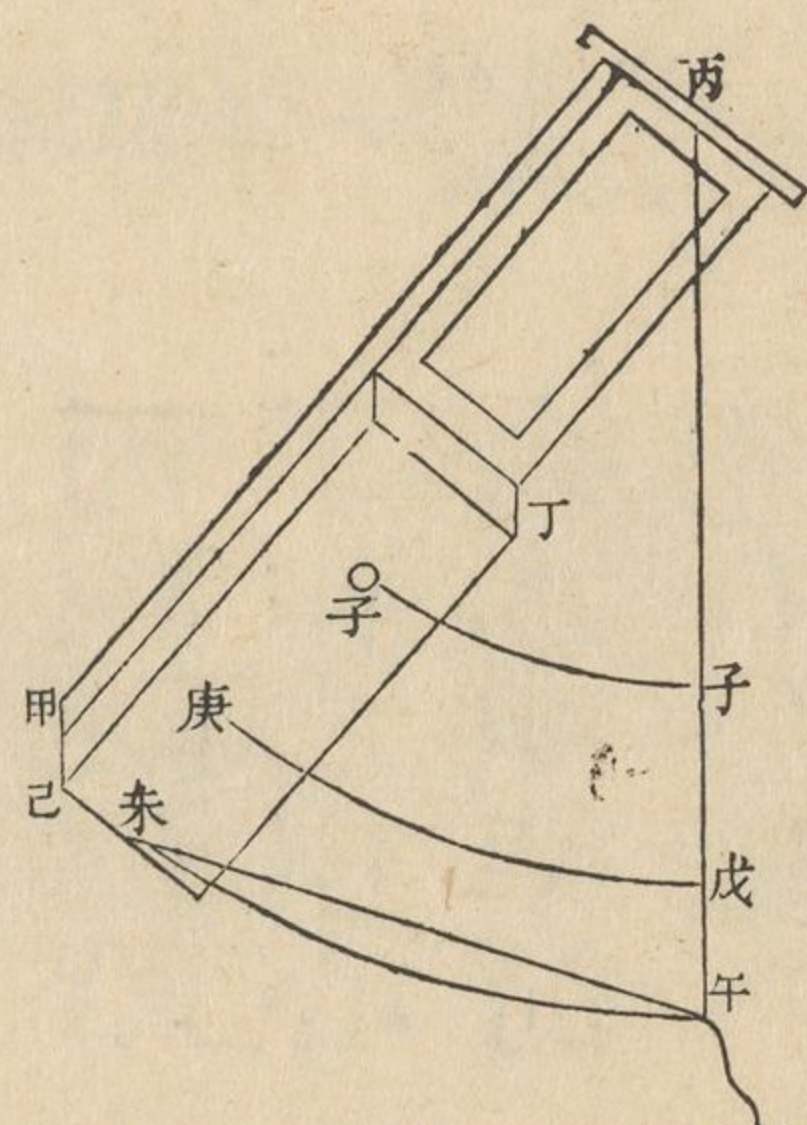
$\frac{\text{子端}}{\text{午乾}} = \frac{\text{子端}}{\text{午乾}}$
 $\frac{\text{子端}}{\text{子見}} = \frac{\text{午乾}}{\text{子見}}$

擊後若無他力相加午體必依
平速繞軸行如軸平於地平地
力加之則上行速盡必下行矣

設體質有凸力依前凸力條求之擊後子午二體必分
行

設非正相擊且二體之面極平滑則用直交擊面過切
點之綫求其分力

羅頻士造器名曰彈擺用此條之理以考鎗礮彈子之速
如圖丙甲為鐵面懸於地平軸丙鐵面上有木板丁己



鐵面靜時用鉛子打穿木板於
 子令鐵面擺動於午未弧欲知
 午未通弦以細綫繫於擺之未
 點穿過午點小穴擺之未點行
 至己則綫從穴出自午至未一

段不復回穴可量而知
 鉛子雖洞木遇鐵而止戊為

鐵面并鉛子之擺心擺之本動與全質體收於戊點相
 同以此而知戊點上行至庚之弧綫與下行至最卑點
 時之弧綫等命此弧度為乙角則戊點下行過乙角弧
 所得之速即等於依直綫下墜過乙角正矢路所得之

速故有等數

最卑點戊速 = $\sqrt{\text{地力丙戊乙正矢}}$

——乙通弦 $\sqrt{\text{地力丙戊}}$

準前在
最卑點
甲速有
等數

甲速 = $\frac{\text{子端見}}{\text{子見上午乾}}$

戊速 = $\frac{\text{子端見丙戊}}{\text{子見上午乾}} = \text{乙通弦}\sqrt{\text{地力丙戊}}$

丙距鐵板鉛
子和之重心
命為坤準前
卷有等數

丙戊 = $\frac{\text{子見上午乾}}{\text{(子上午)坤}}$

子見上午乾 = $\frac{\text{(子上午)坤丙戊}}$

子端見丙戊 = $\text{乙通弦}\frac{\text{(子上午)坤丙戊}}{\text{地力丙戊}}$

端 = $\text{乙通弦}\frac{\text{(子上午)坤}}{\text{子見}}\sqrt{\text{地力丙戊}}$

一率 戊速
二率 甲速
三率 丙戊
四率 丙子

得戊速之
等數如左

設彈擺擊後一分中擺動次數命為寅則有等數。

次時——六〇——半周
丙戊 地力

地力丙戊——六〇——地力
半周寅

端——乙通弦——子午六〇——地力坤
子半周寅見

赫敦立測礮子速法用索懸礮於架開礮時視礮退行若干弧度即乙角礮與相連諸物之其重即午蓋懸物加減速或由於物擊或由於本凸力理無異也在礮軸所生之質乘速即子乘端蓋本方向礮子之質乘速等於對面方向懸物之質乘速也依此推得礮子一秒中

速在一千六百與二千英尺之間。

論輓動之理

圓體輓時體周各點遞合於綫之各點或遞合於面之各點。

圓體有輓動必生過面動有過面動亦必生輓動。

如有索繫於體體輓時索或纏上體周或卸下體周此軸無定處與繞定軸之理不同輓動時諸動之方向俱若直交過輓軸之面而逐時輓軸恆平行於過重心之原輓軸原輓軸或不過重心亦平行也。

第五款 重心行於直綫體或纏於綫或卸於綫求諸生

動力之和及諸動率。

體自平行於本方向重心離本處至末處又離所至之處再至末處逐時不同故各點之動可分爲輓動過面動生動力若不變可以一秒中所生之速爲率蓋各點之速可分爲二則所加之速與生動力皆可分爲二也動力生於輓動亦生於過面動故二動俱爲動力之源設重心之動所生長加力爲子則午乘子爲午點過面動所生之動力而各動力之和爲午乘子之和因各動力平行且相等也若全質爲末則亦等於子乘末各平行力午乘子之并力必經過合體之重心亦必在

重心方向綫上。所以任取繞重心之一點言之。依重心方向諸動率之和必等於○。假如午點距過重心之輓軸爲甲。此點有實長加力丑。則午乘甲乘丑爲午點之實動力。此力直交甲半徑。作午點縱橫二綫。命爲天地。以重心言之。二綫在輓面上。分實動力爲二力。天地與甲成三角形。甲天地三邊直交。本力及二分力三方向綫。三邊與三力必有比例。故以諸力方向言之。午乘地乘丑。負午乘天乘丑。爲午乘甲乘丑之分力。以天地二綫言之。和午乘甲乘丑。爲和午乘地乘丑。負和午乘天乘丑之并力。惟和午乘地乘丑。等於丑乘和午乘地。亦

等於○。以重心之理證之自明。

準前論由輓動之理所生諸實動力之并力亦
等於○。以過重心軸言之午乘甲乘丑之動
率為午乘甲方乘丑諸動率之和有等數。

和丁午天丑—丑和午天—○
和午甲丑—丑和午甲

—未乾丑

未乘乾方即軸之質阻率

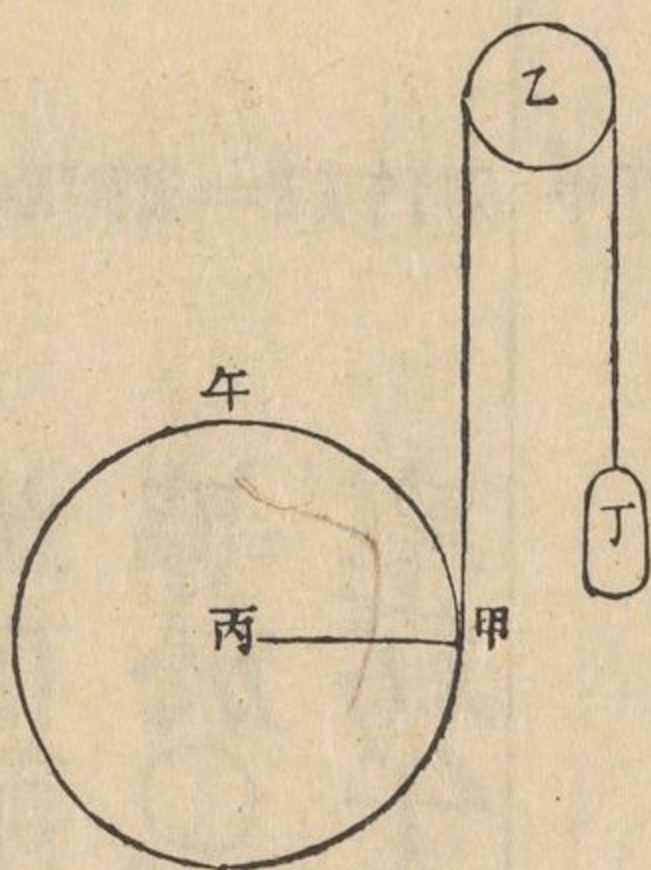
由此可見加於全質未上諸實動力無異於未乘子力
加於重心其方向即重心所行之直綫諸力之動率即
未乘乾方乘丑之動率未乘乾方乘丑之力所以令合

體環繞重心故各點逐時所在之處有二力一子力即
重心動所生之實力一丑力即本點距過重心輓軸輓

動所生之實力本點距軸
當作一

第六款 有圓柱卸下於索索過定滑車一端有他重求

圓柱動



如圖午為圓柱體卸下於甲乙丁索
 索經過乙滑車一端有丁重求午體
 動滑車之質阻力不論甲乙丁之索
 力有定數命為癸乘地力午體之質
 阻率為午乘乾方重心上之實長加力為子各點距軸

之實長加力為丑半徑為壬所加之力有二一癸乘地力在圓周甲點上行一午乘地力在重心丙點下行所加之力及實力即生加減力必有對面等力此二力之動率等以靜重學之理證之有等數。

設丁點之實長加力為寅有等數。

午地力丁癸地力 = 午子

癸地力壬 = 午乾止

丁地力丁癸地力 = 丁寅

丙甲半徑平於地平設丙點以庚速下行甲點以辛速上行以丙言之甲點之速為庚加辛甲繞丙之速為庚辛則輓動所生實長加力有等數。

此三力皆為定率所以午體重心下行及丁重下行及

$$\text{子} = \frac{\text{午地力丁癸地力}}{\text{午}}$$

$$= \frac{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾地力}}{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾}}$$

$$\text{寅} = \frac{\text{丁地力丁癸地力}}{\text{丁}}$$

$$= \frac{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾地力}}{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾}}$$

$$\text{丑} = \frac{\text{癸地力壬}}{\text{午乾}}$$

$$\frac{\text{二丁地力壬}}{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾}}$$

準此推之得左式

$$\text{輾動實長加力} = \frac{\text{令庚大之力} \cdot \text{令辛大之力}}{\text{壬}}$$

$$= \frac{\text{子} \cdot \text{寅}}{\text{壬}} = \text{丑}$$

$$\text{子} \cdot \text{寅} = \text{壬} \cdot \text{丑}$$

$$\text{丁午地力丁癸地力} \cdot \text{丁午地力丁午癸地力}$$

$$= \text{丁癸地力} \cdot \frac{\text{壬}}{\text{乾}}$$

$$\text{二丁午乾} = (\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾}) \cdot \text{癸}$$

$$\text{癸} = \frac{\text{二丁午乾}}{\text{丁壬} \cdot (\text{午丁}) \cdot \text{乾}}$$

輓動皆為平加速。

設子為負。

午必上行。

如下式。

$$\frac{\text{丁} \text{王} \text{丁}}{\text{午} \text{丁}} \text{乾} = \text{〇}$$

$$\frac{\text{午}}{\text{丁}} = \frac{\text{乾} \text{丁} \text{王}}{\text{乾}}$$

如此王必小於乾即

子為負。設寅為負。

丁必上行如下式。

$$\frac{\text{丁} \text{王} \text{丁}}{\text{午} \text{丁}} \text{乾} = \text{〇}$$

$$\frac{\text{午}}{\text{丁}} = \frac{\text{乾} \text{丁} \text{王}}{\text{乾}}$$

如此。

則寅

為負。

午體不必全圓。但卸索處可當圓周。其軸必經過重心。

索之垂面必直交軸。亦必經過重心。

設圓柱空而極薄。壬半徑即為全質距心綫。則乾等於

壬有等數如左。

$$\text{子} = \frac{\text{午} \text{地} \text{力}}{\text{二} \text{丁} \text{上} \text{午}}$$

$$\text{寅} = \frac{\text{二} \text{丁} \text{午} \text{地} \text{力}}{\text{二} \text{丁} \text{上} \text{午}}$$

$$\text{丑} = \frac{\text{二} \text{丁} \text{地} \text{力}}{\text{二} \text{丁} \text{上} \text{午} \text{乾}}$$

$$\text{癸} = \frac{\text{二} \text{午} \text{丁}}{\text{二} \text{丁} \text{上} \text{午}}$$

設等質之實圓柱則乾方等於壬方之半見別書有等數

$$\text{子} = \frac{\text{丁} \text{午} \text{地} \text{力}}{\text{三} \text{丁} \text{午}}$$

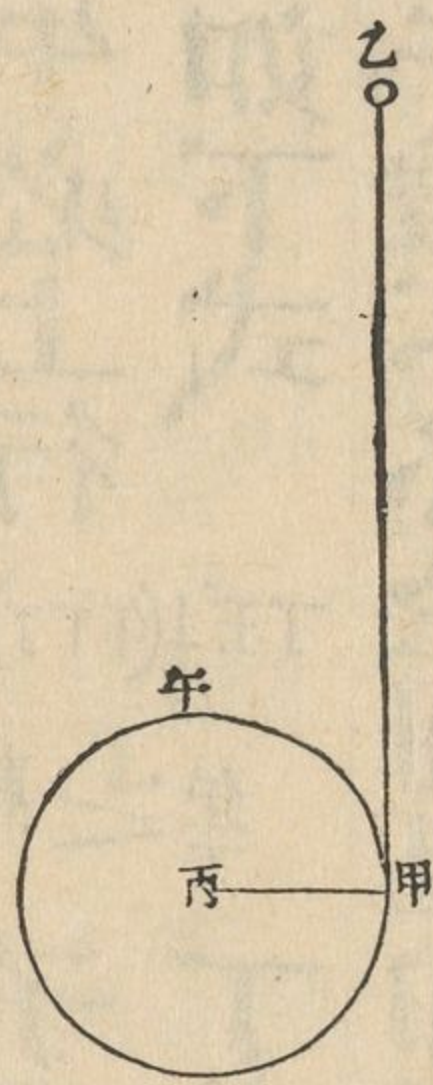
$$\text{寅} = \frac{\text{三} \text{丁} \text{午} \text{地} \text{力}}{\text{三} \text{丁} \text{午}}$$

$$\text{丑} = \frac{\text{二} \text{丁} \text{地} \text{力}}{\text{二} \text{丁} \text{午} \text{乾}}$$

$$\text{癸} = \frac{\text{二} \text{午} \text{丁}}{\text{二} \text{丁} \text{午}}$$

第七款 圓柱卸於垂索索之一端着於定點求長加

力



如圖午為圓柱體卸於甲乙索索之上端乙着於定點依前款設丁重不上不下一如甲乙

索着於乙定點則動理如前而丁長加力等於○有等數

丁壬丁(午丁丁)乾^二 = 〇

丁 = $\frac{\text{午乾}^{\text{二}}}{\text{壬上乾}^{\text{二}}}$

癸 = $\frac{\text{午乾}^{\text{二}}}{\text{壬上乾}^{\text{二}}}$

子 = $\frac{(\text{午丁癸})\text{地力}^{\text{二}}}{\text{午}} = \frac{\text{壬地力}^{\text{二}}}{\text{壬上乾}^{\text{二}}}$

設空圓
柱其周
甚薄則
有等數

乾 = 壬

子 = $\frac{\text{地力}^{\text{二}}}{\text{二}}$

癸 = $\frac{\text{午}^{\text{二}}}{\text{二}}$

設等質之實

圓柱有等數

乾 = $\frac{\text{壬}^{\text{二}}}{\text{二}}$

子 = $\frac{\text{地力}^{\text{二}}}{\text{三}}$

癸 = $\frac{\text{午}^{\text{二}}}{\text{三}}$

設為球體

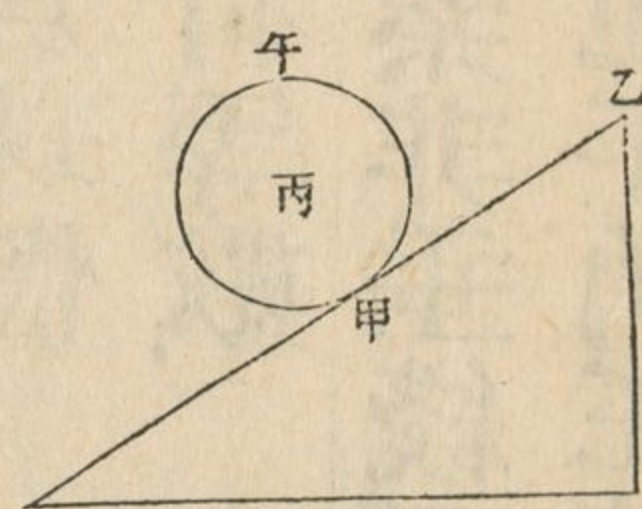
則有等數

乾 = $\frac{\text{壬}^{\text{二}}}{\text{五}}$

子 = $\frac{\text{地力}^{\text{五}}}{\text{七}}$

癸 = $\frac{\text{午}^{\text{二}}}{\text{七}}$

設索非垂綫而加於斜面其理亦同惟地力改用地力
乘地平角正弦

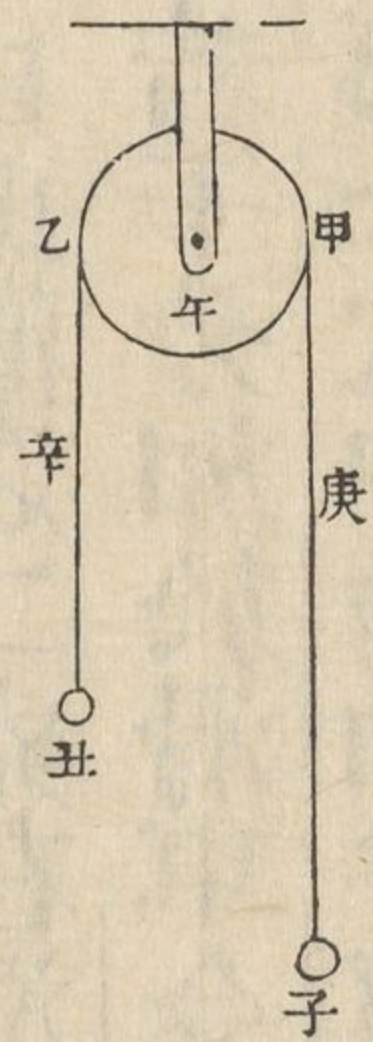


索力 = 癸地力地平角正弦

設午體無索以斜面阻力令午不為直動而為輓動其
 理亦同惟索力改用斜面阻力假如無面阻力直動之
 長加力為一則有面阻力輓動之長加力空圓柱為二
 分之一實圓柱為三分之二球為七分之五

論滑車動

第八款 彼重引此重用靜滑車求長加力



如圖子重引丑重其索經過午
滑車午乘乾方為滑車質阻率
命滑車半徑為角子重下行之

實長加力為天即令丑重上行之實長加力甲子索力
為庚乘地力乙丑索力為辛乘地力所以加於滑車周
之索力為庚乘地力少辛乘地力則有等數

天 = $\frac{(\text{庚} \times \text{辛}) \text{地力}}{\text{午乾}}$

子長加力 = 天 = $\frac{(\text{子} \times \text{庚}) \text{地力}}{\text{子}}$

丑長加力 = 天 = $\frac{(\text{辛} \times \text{丑}) \text{地力}}{\text{丑}}$

子天 = $(\text{子} \times \text{庚}) \text{地力}$

丑天 = $(\text{辛} \times \text{丑}) \text{地力}$

$(\text{子} \times \text{丑}) \text{天} = (\text{辛} \times \text{庚}) \text{地力} + (\text{子} \times \text{丑}) \text{地力}$

此所得二等數一以午乘乾方乘之二以角方乘之併得左式。

$$\frac{\text{午乾天} \cdot (\text{子} \perp \text{丑}) \text{角} \text{天}}{(\text{子} \perp \text{丑}) \text{地力角}}$$

$$\frac{\text{天}}{(\text{子} \perp \text{丑}) \text{地力角} \cdot \text{午乾} \cdot (\text{子} \perp \text{丑}) \text{角}}$$

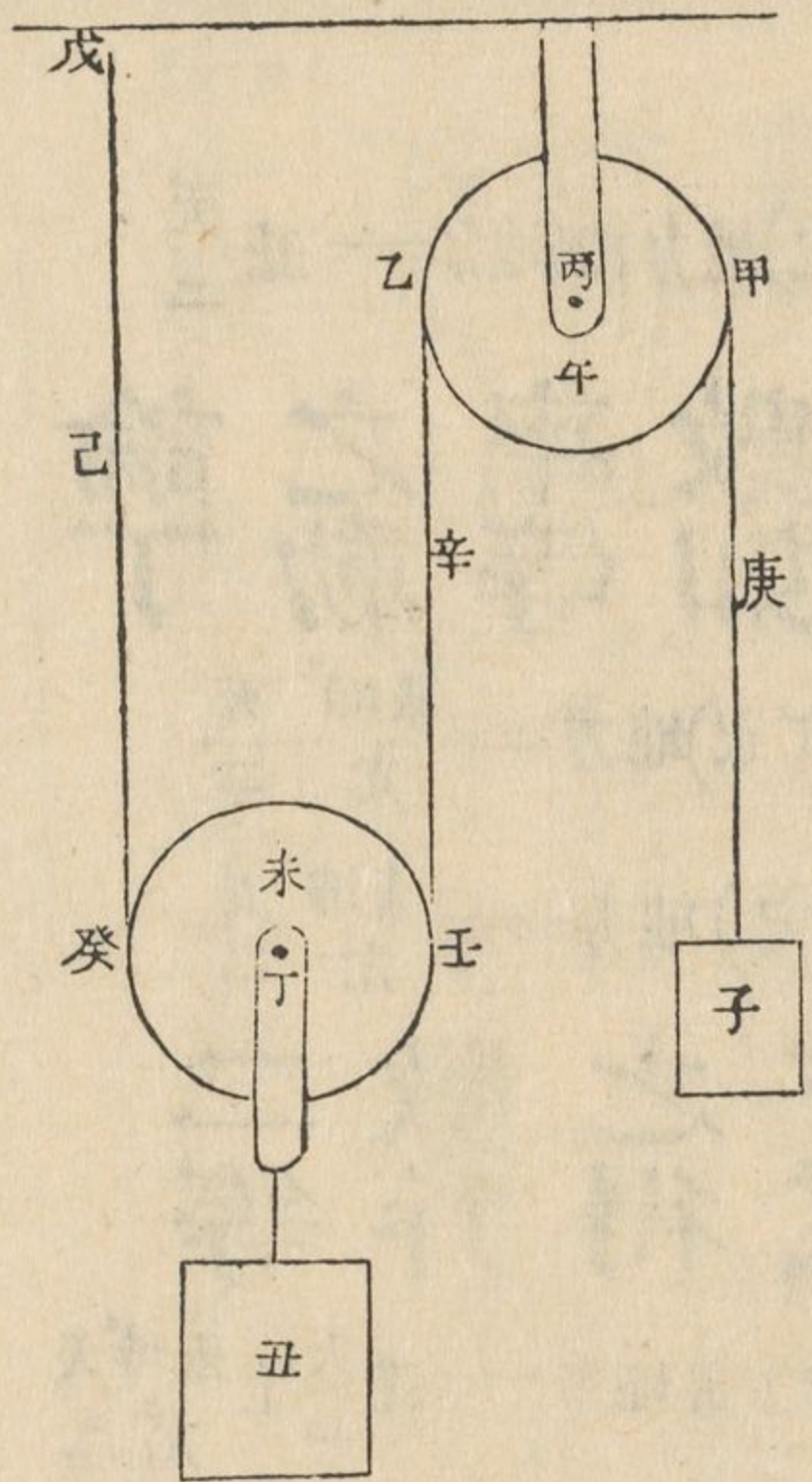
甲子乙丑二索力等數如下。

$$\text{甲子索力} = \frac{(\text{午乾} \perp \text{二丑角}) \text{子地力}}{\text{午乾} \cdot (\text{子} \perp \text{丑}) \text{角}}$$

$$\text{乙丑索力} = \frac{(\text{午乾} \perp \text{二子角}) \text{丑地力}}{\text{午乾} \cdot (\text{子} \perp \text{丑}) \text{角}}$$

由此觀之二索在滑車周索力隨處不同子甲索力有若干分加於滑車令轉其餘分則加於乙丑也。第一款中輪軸半徑設相等則其等數與滑車同。

第九款 一動一靜二滑車索平行求長加力



如圖子丑為二重午未為

二滑車未動午靜午乘乾方未

乘坤方為質阻率角亢為

二滑車半徑甲子索力為

庚乘地力乙壬索力為辛

乘地力癸戊索力為己乘地力子長加力為天午車周

實生動長加力亦為天丑長加力為天之半因速減半

故也設癸為索上定點未心丁必以子半速上行則癸

繞丁點行亦如子半速未車有加力有實力以加力言

之辛乘地力已乘地力上行丑乘地力下行丑重中兼未滑車重
 以實力言之丑長加力為半天未周繞丁長加力亦為
 半天故繞丁之力等於天二九其距軸綫為一準前款繞
 丁動率等於天未坤二九即有等數

$$(辛上己)地力 \div (丑地力) = 丑 \frac{天二}{二}$$

論丁之動率等如下數如

$$(辛丁己)地力 = \frac{未坤天二}{九}$$

$$(辛丁己)地力 = \frac{未坤天二}{九}$$

二等數并之得下式

$$二辛地力 \div (丑地力) = 丑 \frac{天二}{二} \frac{未坤天二}{九}$$

另有等數如下

$$天 = \frac{子丁庚地力}{子}$$

$$(子丁庚)地力 = 子天$$

$$天 = \frac{(庚丁辛)地力角}{午乾}$$

$$(庚丁辛)地力 = \frac{午乾天}{角}$$

二等

數并

之得

下式

$$(子辛)地力 = \frac{子天 \frac{午乾}{角} 天}{二}$$

又以前

二等數

之并改

為下式

$$(辛地力) = \frac{丑地力 \frac{丑天 \frac{未坤}{元} 天}{二}}{二}$$

以此二

式并之

得下式

$$子地力 = \frac{丑地力 \left(\frac{子天 \frac{午乾}{角} 天}{二} \right)}{二}$$

(子丑)地力

$$天 = \frac{(子丑)地力}{\frac{子天 \frac{午乾}{角} 天}{二}}$$

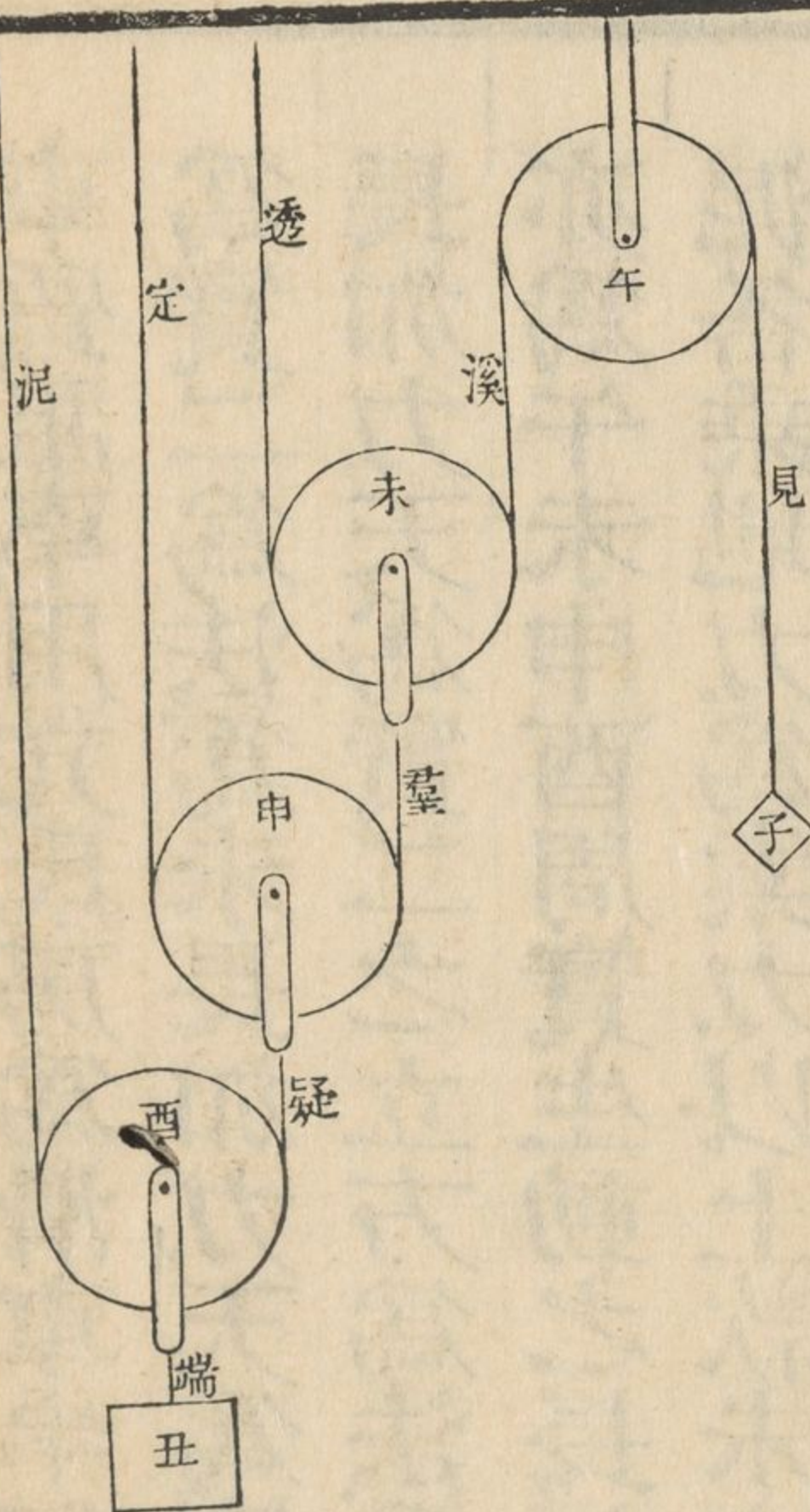
依此等

數索力

亦可推

第十款

連滑車求長加力



如圖午未申酉一
 靜諸動連滑車索
 俱平行午乘乾方
 未乘坤方申乘震
 方酉乘巽方為滑

車質阻率用亢氏房為滑車半徑天為子實長加力天為實二為法為未長加力天為實二之立方為法為酉長加力準前款理亦為午未申西周實生動之長加力見溪羣疑端透定泥各乘地力為索力以上款未車之理論各車有等數

餘倣此移

左之負為右

之正又消去

透定諸力得

下式

$$(子丁見)地力 = \frac{子天}{二}$$

$$(見丁溪)地力 = \frac{午乾天}{角二}$$

$$(溪丁透)地力 + 未地力 + 羣地力 = \frac{未天}{三}$$

$$(溪丁透)地力 = \frac{未坤天}{元二}$$

$$(羣丁定)地力 + 申地力 + 疑地力 = \frac{申天}{三}$$

$$(羣丁定)地力 = \frac{申震天}{氏二}$$

$$子地力 = \frac{子天 + 見地力}{二}$$

$$見地力 = \frac{午乾天 + 溪地力}{角二}$$

$$溪地力 = \frac{未坤天 + 未天 + 未地力 + 羣地力}{元二}$$

$$羣地力 = \frac{申震天 + 申天 + 申地力 + 疑地力}{氏二}$$

餘做此○以遞左消右得下式

$$\frac{\text{子地力}}{\text{子天}} = \frac{\text{午乾} \frac{\text{天}}{\text{角}}}{\text{未坤} \frac{\text{天}}{\text{九}} + \frac{\text{申震} \frac{\text{天}}{\text{氏}}}{\text{未天} \frac{\text{申}}{\text{二}} + \frac{\text{申天} \frac{\text{申}}{\text{二}}}{\text{未地力} \frac{\text{申}}{\text{二}} + \frac{\text{申地力} \frac{\text{申}}{\text{二}}}{\text{端地力} \frac{\text{申}}{\text{二}}}}$$

如此等數之理顯矣未索力即舉丑之力故有等數

$$\text{丑長加力} = \frac{\text{天}}{\text{二}} = \frac{(\text{端} \frac{\text{丑}}{\text{二}}) \text{地力}}{\text{丑}}$$

$$\text{端地力} = \frac{\text{丑地力}}{\text{二}} \frac{\text{丑天}}{\text{二}}$$

前等數中端乘地力以此消之即得子長加力之等數如下

$$\frac{\text{天}}{\text{子}} = \frac{(\text{子} \frac{\text{未}}{\text{二}} \frac{\text{申}}{\text{二}} \frac{\text{申}}{\text{二}} \frac{\text{丑}}{\text{二}}) \text{地力}}{\text{午乾} \frac{\text{天}}{\text{角}} + \frac{\text{未坤} \frac{\text{天}}{\text{九}}}{\text{申} \frac{\text{申}}{\text{二}} + \frac{\text{申震} \frac{\text{天}}{\text{氏}}}{\text{申} \frac{\text{申}}{\text{二}} + \frac{\text{丑天}}{\text{二}}}}$$

任有若干滑車俱倣此。此第一式連滑車也。二式三

式其理亦同。

圖見卷三

第十一款 不論何器令地力加之各點速之比例率爲定數求長加力。

命子爲器之一體設午爲重物加於子體令器不動處處相定則子少午乘地力爲所加生動之力子速爲角丑寅等體諸速爲亢氏等子體上實長加力爲天因諸力之比例爲諸速微分至無窮小時末得數之比例故有等數。

天_抗 力加長_丑 =

天_抗 力動實_丑 =

準前款諸相定之能
力分兩邊在一箇方
向其生動諸力在對
面方向有式如下

天_抗 寅_天 丑_天 子_天 天_抗

依微分和分重學論之詳別書若有諸力加於一點恰相
定設所加之點微動以微動方向言之諸力諸微路之
和必相消恰盡微動能力方向為正相定力方向為負
本款角亢氏諸速以能力加諸點言之與此理合故有
等數

又戊體繞重心角速等

於乙為實甲為法命此

數為亥得二數如下式

$$\frac{\text{戊}}{\text{乙}} \frac{\text{角}}{\text{角}} \quad \frac{\text{戊}}{\text{乾}} \frac{\text{角}}{\text{角}} \quad \frac{\text{亥}}{\text{角}}$$

本卷諸款之理此款足以該之細觀自明

重學卷十四終

