新中學文庫

數學全書

第一冊 算術

韋柏 著
鄭太朴 譯

商務印書館發行

數學全書

第一册 算術

Von H. Weber 著

鄭太朴譯

商務印書館發行

目　　次

第一章

簡易羣論　自然數

第二章

加乘減　整數

第三章

除法　有理數

第四章

無理數

第五章

可量之量 比及比例

第六章

方數與對數

第七章

複數

第八章

組合論

第九章

二項式及多項式定理 算術級數

第十章

等餘式 羃餘數 平方餘數

第十一章

二次式 二次無理數 循環連分

數學全書

第一册 算術

第一章 簡易羣論 自然數

§1. 引言

1. 奈塞曼之代數學史論(Nesselmann, Kritische Geschichte der Algebra)內,謂

"數目之概念,實爲單純者,且係吾人精神之所固有;故欲爲之作一科學的定義,亦猶求證歐几里得(Euclid)之基本定理,總必失敗."

按之事實,無論古代或中世紀,吾人未聞對於數目概念之暗昧的起源,有能啓示之者.其由皮他谷拉斯(Pythagoras)及其學派所傳及今人者,均係數目之神祕的遊戲,其中固含有算術上之眞理,但於數目概念本身,仍無所啓示.歐几里得所作之定義,亦猶其幾何定義,僅爲字義之解釋,實已先含其概念在其內也.

然吾人用以思想之精神,固不願有所自限,故凡有問題之處,必繼續研討之不已.對於向來已然之數目概念,近代

之探討,未嘗置之,且於研究此概念之發生上,不能謂毫無所得.在康德(Kant)之哲學內,論數目概念之處極少.[1] 蓋康德之系統內,數學雖佔重要地位,惟其所及,多以幾何學爲主.康氏將算術與時間相關,一如幾何學之與空間相關然[2];此種意見,主之者實多[3].然以吾人觀之,則此種見解在某種意義上言之,固有其理由,但究未能就其純粹性及普遍性上以得數目之概念也.海巴德(Herbart)於1824年時已論及此.

新近之數學,則由數目概念本身出發以研究之,高斯(Gauss)於其致培賽爾(Bessel)之信(1830年四月九日)內,謂數目與空間不同,係吾人精神之產物,故有將此概念之產生,歸之於更基本之思想動作者,即事物之彼此聯結,以構成種屬概念及類(用柏拉圖Plato之意義)是.關於此之研究,其屬於數學性質者,實爲羣論之一部分,其中所論爲量論之基本問題,尋常數目則視爲較普遍的概念之一特例.

---

1. 參觀 Michælis, Über Kants Zahlbegriff. Progr. Charlottenburg 1884.
2. 參觀 Kant, Prolegomena. §10.
3. 海米爾敦(Sir W. R. Hamilton)亦以爲數目概念之起源,得自時間之概念(Dublin Transactions 17, 1837).幷參觀 Hankel, Vorlesungen über die komplexen Zahlen, Leipzig, 1867, 第17頁. Cayley, British Assoc. 1883 (Works 11. Bull. des sciences mathém. 2, 8, 1884). Voss, Über das Wesen der Mathematik. Zweite Aufl. Leipzig 1913, 第33頁.

2. 欲將自然數之概念,依羣論以確立之,亦有重大之疑問可發生.蓋羣論之基本概念內,實先已含有反復及自然數列之觀念,故須於此二觀念中,求數學思想之最後基礎.[1] 事實上,新近關於算術基礎之敍述,多直接由自然數列出發.但須承認者,則有限羣之概念,實較之數量之概念爲先有.蓋動物已能識個別之羣,幷識其中之變化(例如鴨對於其鶵,牧犬對於其羊羣),而在各個人之發展過程中,則當一歲時,已可見其有同類事物所成羣之印象,且能將某種羣之印象作比較.[2] 但由開始的數目觀念[3] 2, 3, 4, …… 以達數列之認識,則其間相去當遠.故獲則一普遍的,與空間時間無關的比較羣,其中各元素之一切個別性質均經棄去,僅留其在序列中之位置性質,此則非先有發展較高之抽象能力不可.但迄此階段爲止之發展,可視爲"先數學"者,不若由哲學及心理學研究之爲妥也.

3. 吾人能自立於天地間,兼能與他人相了解,實賴吾人之有此能力,於紛然雜陳,倏起倏滅之印象,感覺,思想

1. H. Weyl, Das Kontinuum. Leipzig, 1918. 第 19, 37 頁. 幷參觀 Poincaré, L'enseignement math. 1 (1899), 160.

2. 參觀 D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht. Abhandlungen über den math. Unterricht in Deutschland 3, 8. Leipzig 1913. E. Mach, Erkenntnis und Irrtum. Leipzig 1906. 第 323 頁.

3. "一"於開始時不視爲數目. 德洪 (Theon von Smyrna) 之言,直至十六世紀時,凡著作算書者均祖述之,甚至1740年時,布方 (Buffon) 猶於牛頓微分算法之法文譯本內,作"一非數目"之語.

中,能取出其或種羣屬,視之爲"事物,""單位,""思想之對象."欲將一個別事物之一切特徵統行列出,此爲絕對不可能之事.故所謂事物者,實吾人感覺及思想內之某種極大限度(密集處所)而已.許多事物之總,吾人視之爲一新事物,名之曰"羣"(Menge),例如學校內之一級,爲學生之羣,城市爲其中居民或房屋之羣,一團兵爲士兵之羣,森林爲樹之羣,等等.

4. 本書之初版及二版內,曾以廣義的羣之概念,爲研究數目本性及其目的之基礎,且按談德金(Dedekind)氏之定義,將羣別爲有限的與無限的二者.此種方法,驟觀之固似自然,但其所用定理,謂恆有事物不在已知之羣內,則不能免於困難.蓋"一切事物所成之羣,"顯然無此屬性.而談氏之證明無限羣之存在,亦卽以此爲根據.[1]

此項矛盾,及與此相似之矛盾,見於廣義的羣之概念內者,倘吾人視羣爲其一切元素之內涵,則將成爲不可解.觀於所謂"羅素氏之矛盾"[2] (Russell's Widerspruch),益可見此.羅氏矛盾如下:—

羣有不將其自己本身包含入內者,尋常之羣均係如此,故羣之本身與其成分視爲相異者;然亦有將自己本

1. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig 1888. No. 66.

2. B. Russell, The Principles of Mathematics. Cambridge 1903.

身一幷包含入內之羣,例如一切事物所成之羣是,凡用否定賓詞所確定之概念,例如"非人"之概念,尤多如此. 今試將一切不含自己本身之羣 m, 作爲一羣 M. 倘 M 羣不含自己本身,則此羣亦爲一 m,故必須含入 M 內,是即 M 不含自己本身時,必須含自己本身也;仿此,倘 M 含自己本身,則又必不能含自己本身.

從可知由羣之普通的定義內,可引出自相矛盾之概念,"一切事物之羣"一概念,其尤著者也.

康德於"純粹理性之矛盾"內,指出萬有概念之矛盾,蓋已有見及此;所謂萬有者,與一切事物之羣何以異?

初等數學對於無限羣方面所發生之困難,固不能論列,但完全不論其基礎之起源,則亦不可.故於此初等數學之開卷處,略述簡易之羣論,惟無限之概念,則自始即力避之,僅以有限羣爲限.[1] 用此方法,不難由經驗之立場出發,以獲得普遍的數目概念之說明.

5. 輓近所盛行之趨向,在用公理(Axiom)以樹立數學各部門之基礎,對於其對象,概不加以定義,即吾人不問此項對象之爲何,祇假定其存在,因即對於其間之關係及連結法,爲立一公理之系統,於是以此爲出發,純恃概念,用論

1. 參觀 E. Zermelo, über die Grundlagen der Arithmetik. Atti del IV. congresso intern. matematici. Rom 1909. Acta math. 32 (1909). A. Schoenflies, Akad. Amsterdam 1920. Math. Ann. 83 (1921).

理的推論以建立全部門.[1]　希爾白(Hilbert)首用此法以建立幾何學之基礎,繼之即有算術之公理系統,一切實數之內涵以及適用於此之加乘定律,即由此推得.[2]　亦有僅對於自然數作一公理之系統者,皮亞諾(Peano)實爲其首.[3] 以此爲出發,亦可漸次擴大以推得其餘各種數目.

§2. 已整列之羣

1. 對於一羣內二不同之元素,倘能按照一規定,指出其孰者爲較小,且將此法應用於羣內三元素 a, a', a'' 時,能得如次之結果: 設 a 小於 a', a' 小於 a'', 則亦 a 小於 a''; 則此羣謂之已整列者(geordnet).

倘有一羣,可如是整列之,則此羣謂之可整列者.

設 a 小於 a', 則吾人亦可云: a' 大於 a.

於解釋此項定義時,有可說明者如下:

吾人之選取"大於,""小於"二語,蓋爲簡單計; 倘用"先於,""後於,""高於,""低於,""左於,""右於,"或任何其他

1. 參觀 A. Schoenflies, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 20 (1911).

2. D. Hilbert, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 8 (1900) 重印於其所著"幾何學之基礎,"第二版內(按此書已有中文譯本,商務印書館出版——譯者註). E. V. Hungtington, A set of postulates of real algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905). 幷參閱 Löwy, Lehrb. d. Algebra 1, Leipzig 1915.

3. G. Peano, Arithmetices principia. Turin 1889. K. Grelling, Die Axiome der Arithemetik, Diss. Göttingen 1910. K. Boehm, Heidelberg. Akad. 1911 參觀 Hilbert, Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik. Verhandl. d. III. Intern. Mathematikerkongresses Heidelberg 1904 ("幾何學基礎"第四版, 1913, 附錄 VII). C. Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen. Leipzig 1918.

相似之語，均無不可．吾人固不必因此而想及實體方面之較大及較小也．

於表明大小之整列上，尋常用如下之符號：

設 A 爲一羣，a 與 a' 爲其二元素，則

(1) $$a<a',\ a'>a$$

所表者同其意義，卽 a 小於 a'，a' 大於 a 是也．倘 a'' 爲 A 之又一元素，則由

$$a<a',\ a'<a''$$

當得 $$a<a''.$$

於是吾人可云 a' 在 a 與 a'' 之間．通常所稱整列之大小性質，實已包含在此數式內．

設 A 爲一羣，尙未將其整列計及者，則吾人可用 $\overline{A}$ 表此相同之羣，惟已有一定之整列．

由吾人之經驗，可知確有可以整列之羣存在，且整列之法可不一，例如手之五指，一直線段上之點，等等．得此數例，已足證明．至於不能整列之羣之有無，此則屬於超絕羣論範圍內之問題，非此處所能論及．

2. 倘 B 羣內之每一元素 B，同時卽爲 A 羣內之元素，則 B 羣爲 A 羣之部分；如 A 內至少有一元素，爲 B 內所無者，則 B 名爲 A 之眞部分．

羣之由單獨一元素所成者，無有眞部分．其他之羣均可有眞部分．

設 A' 爲 A 之部分，A'' 又爲 A' 之部分，則 A'' 亦爲 A 之部分．如 A' 爲 A 之眞部分，或 A'' 爲 A' 之眞部分，或二者均爲眞部分，則 A'' 亦爲 A 之眞部分．

設 B 爲 A 之眞部分，則凡屬於 A 而不屬於 B 之元素，亦祇有此項元素，另屬於一其他羣 C，此羣名爲 B 對於 A 之補充．爲表明此關係，吾人可寫作

$$A=B+C \text{ 或 } A=C+B.$$

故 C 亦爲 A 之眞部分，B 卽其補充．

設 B 與 C 爲二羣，則可作一羣，以 $A=B+C$ 表之，凡在 B 或 C 內（或二者內均有）之元素，均取入之，但亦祇能取入此項元素．倘 B 與 C 無有相同之元素，則 B 與 C 均爲 A 之眞部分，互爲補充．

3．凡可整列之羣，其部分均爲可整列者．

蓋如 $\overline{A}$ 爲一已整列之羣，B 爲 A 之部分，則 B 亦必爲已整列者，因 B 中任何二元素 B, B'，必有適用於 $\overline{A}$ 中之大小關係也．於是吾人可云，B 係按照 $\overline{A}$ 而整列者．

4．設 $\overline{B}$ 與 $\overline{C}$ 爲已整列之羣，無有共同之元素，則 $A=B+C$ 亦爲可整列之羣．

蓋如 A 內之二元素 a, a'，本屬於同一之部分，例如 B，則在 $\overline{B}$ 內既已整列，在 A 內自必可同樣整列之（事例 a）．

若 a 原屬於 B，a' 原屬於 C，則可使 $a<a'$（事例 b）．

今試證明,將 A 如是整列時,大小性質仍可保而不失.試於 A 中取三個不同之元素 a, a', a'',并設 $\overline{A}$ 中之整列法爲

(2) $$a<a',\ a'<a''.$$

則當證明其結果,必得

(3) $$a<a''.$$

於此,吾人可分爲四個事例以論之:

1. a 屬於 C. 則因 (b) 之關係,a' 與 a'' 亦屬於 C,按 $\overline{C}$ 之整列法即可得 (3).

2. a 屬於 B, a' 屬於 C. 則因 (2) 及 (b) 之關係,a'' 亦必屬於 C,故按 (b) 可得 (3).

3. a 屬於 B, a' 屬於 B,但 a'' 屬於 C. 如是則由 (b) 又可得 (3).

4. a'' 屬於 B. 如是則 a 與 a' 亦必均屬於 B,而 (3) 可由 $\overline{B}$ 中之整列法以得之.

§3. 有限羣

1. 將已整列之羣 $\overline{A}$,分成爲二部分 $B+C$,并使 B 之每一元素小於 C 之每一元素,謂之一"切"(Schnitt). B 與 C 二部分,名爲 $\overline{A}$ 之下分與上分 (der untere und der obere Abschnitt) "切"之符號,吾人用

(1) $$A=B\,|\,C$$

以表之.

2. 倘已整列之羣 $\overline{A}$ 內,有一元素 a_0,對於 A 內任何其他元素 a,均

$$(2) \qquad a_0 < a,$$

則 a_0 名爲 $\overline{A}$ 內之最小元素. 最小元素不能多於一個;蓋如 a_0' 亦爲一最小元素,而按 (2) 既有 $a_0 < a_0'$,則必不能同時復有 $a_0' < a_0$.

仿此,倘 $\overline{A}$ 內有一元素 a_1,對於 A 內之任何其他元素 a 均

$$a < a_1,$$

則 a_1 爲其中之最大元素. 最大元素亦不能多於一個.

已整列之羣內,倘有一最大元素及一最小元素,則此羣謂之閉合(geschlossen)者.

3. 倘能將 A 羣如是整列之,俾 $\overline{A}$ 本身及 $\overline{A}$ 之每個切之上下分均爲閉合者,則 A 名爲有限羣.[1]

如是確定之有限羣概念,可不致有矛盾,此則不難由經驗以知之.

僅由單獨一元素所成之羣,本身已爲已整列者.且因該元素同時爲最大元素及最小元素,故此羣亦爲閉合者.如

1. 此有限羣之定義肇自 Stäckel, 爲 Jahresh. d. Deutsch. Math.—Ver 16, 425 (1907).

此之羣,除本身外無有部分可求,故幷爲有限者.

由二個元素所成之羣,除本身外尚有一元素所成之上下分各一,故亦爲有限者.

倘閉合羣$\overline{A}$,由多個元素所成,即多於二個元素者,則除最小元素α_0及最大元素α_1外,至少尚有一個中間元素α存在,此元素α能適合如次之條件:

$$\alpha_0<\alpha<\alpha_1.$$

4. 已整列羣$\overline{A}$之每一中間元素α,能產生二個切,其法如下.將A內一切小於α之元素,盡取入B內,其大於α者,則盡入之C內,α本身或入於B,或則入於C.就α之取入B或C,吾人採用下列二式之一:

$$(3)\qquad A=B_\alpha+C \text{ 或 } A=B+C_\alpha \qquad (4).$$

設$\overline{A}$爲閉合羣,則可用最小元素α_0以產生一個切,使其下分B內祇有一元素α_0,其上分則由其餘之元素所成.今如將α_0取入C,則C與A相同,而B成爲無有.但吾人仍稱之爲B羣;此種羣可以零羣名之,其符號爲0.對於A之最後的元素α_1,亦可用上述之法.如欲使(3),(4)二記法於此亦能適用,則可設

$$(5)\qquad \begin{aligned} &B_{\alpha_0}=\alpha_0 \text{ 或 } B=0,\ C_{\alpha_0}=A,\\ &B_{\alpha_1}=A,\ C=0 \text{ 或 } C_{\alpha_1}=\alpha_1. \end{aligned}$$

故此二方式爲:

(6) $$A=0+A \text{ 及 } A=A+0.$$

倘A僅爲一元素a所成,此之素同時爲最小者及最大者,則可設

$$B_{a_0}=B_{a_1}=a,\ C_{a_0}=C_{a_1}=a.$$

5. 設$\overline{A}$爲有限羣,則其一切上下分均爲有限者.今如於(3),(4)內將B之最大元素以β表之,C之最小元素以γ表之,則對於產生切之元素a,有

$$\beta<a<\gamma,$$

而$\overline{A}$內不能再有元素,在β與a,或a與γ之間;蓋凡$\overline{A}$內之元素,倘非a,β,γ三者中之一,則必小於β(倘屬於B),或大於γ(倘屬於C)也,因得以下之定理:

凡多於二元素之有限羣$\overline{A}$內,其任何一中間元素a,必有一最接近而較小之元素β,以及一最接近而較大之元素γ.此二元素,β與γ,謂之a之鄰近元素.

$\overline{A}$之最小元素a_0,祇有一較大之鄰近元素.其最大元素a_1,則祇有較小之鄰近元素.

倘β與γ爲a之鄰近元素,則a爲β之較大鄰近元素,爲γ之較小鄰近元素.

在有限羣A方面,任何一個切$B|C$,係由B之最大元素或C之最小元素所產生.

6. 有限羣之每一部分仍爲一有限羣.

欲證明此定理,可設$\overline{A}$爲一已整列之有限羣,$\overline{A'}$爲$\overline{A}$之部分,係按照$\overline{A}$而整列者.

設$B'|C'$爲$\overline{A'}$內之任何一個切,則可先於$\overline{A}$內作一個切$B|C$,使B'之每一元素均在B內,另外并取入較B'內一元素爲小之元素α.如是則B之補充爲C.

於是$\overline{A}$之$\overline{B}$分有一最大元素β,而此元素同時亦卽爲B'之最大元素.蓋β必屬於B',否則按B之定義,B'內將有更大之元素在,因而β亦不能爲B之最大元素;B'內亦不能有較β更大之元素,否則β非爲B之最大元素矣.

次再於$\overline{A}$內作一個切$B_0|C_0$,使B_0內之元素均小於B'內之一元素.B_0之補充爲C_0.如是則$\overline{A}$之$\overline{C_0}$分內有一最小元素γ,而此最小元素同時亦卽爲B'之最小元素.

仿此,并可證明C'有一最大元素及一最小元素,因而可知全羣A'以及其每一個分,爲閉合者.故按**3.**可知A'爲一有限羣.

7. 設$\overline{B}$與$\overline{C}$爲有限羣,無有共同之元素,則由此二者所合成之羣$A=B+C$,亦爲有限者.

蓋設B之每一元素中於C之每一元素,則A亦爲已整列者,且B與C內$\overline{B}$與$\overline{C}$之原有整列法,仍可於$\overline{A}$內保而不失.

如是則$\overline{A}$之一下分,或爲$\overline{B}$本身,或則爲$\overline{B}$之下分,或亦

可爲$\overline{C}$之下分,連有$\overline{B}$之全羣,故必有一最大及一最小之元素. 仿此,并可知$\overline{A}$之任何一上分,亦爲一閉合羣,因而$\overline{A}$爲有限者.

§4. 完全歸納法

1. 設有一普遍之定理$\mathfrak{A}$,對於一有限羣$\overline{A}$內之每一元素均有所稱述,吾人倘能證明下列之二點,則此定理已完全證明:

1. 此定理$\mathfrak{A}$適用於$\overline{A}$之最小元素α_0.

2. $\mathfrak{A}$適用於$\overline{A}$之任何一元素α時,倘α有之較大之鄰近元素α',$\mathfrak{A}$亦必適用於α'.

今試假定$\mathfrak{A}$不能適用於A之一切元素,則可作$\overline{A}$之部分羣$\overline{C}$,凡A內不適用$\mathfrak{A}$之元素,均取入之. 按§**3**. 之**6**.,$\overline{C}$有一最小元素γ,而按以上所設之1.,γ必非爲α_0. 因之,γ必有一較小之鄰近元素α,$\mathfrak{A}$於此可適用,蓋γ爲不適用$\mathfrak{A}$的元素中之最小者也. 旣如是,按以上所設之2.,$\mathfrak{A}$亦必適用於γ. 故$\overline{C}$羣不能存在,而該定理已證明. 吾人稱此定理爲完全歸納法之定理.

今卽用此以證明下列之定理:

2. 設A爲一羣,於某種整列$\overline{A}$之下,已可見其爲有限者,則於任何可能之整列$\overline{\overline{A}}$下,其有限性之範疇(§**3**. 之**3**.)仍不失.

倘 A 羣僅由單獨一元素 a_0 所成,此定理之可用至爲顯然,蓋此處祗有一個整列法也.

倘 A 非爲單獨一元素所成,而設 β 爲其最小元素或中間元素,則可按 § **3.** 之 **4.** 將 A 如是分之:

$$A=B_\beta+C,$$

幷假定此定理 **2.** 對於 B_β 已適用.

設 α 爲 $\overline{A}$ 內 β 之較大鄰近元素,則按 **1.**, 倘能證明定理 **2.** 之適用於 $B_\alpha=\beta_\beta+\alpha$, 此定理 **2.** 亦卽已證明.

試先作 B_α 之整列 $\overline{\overline{B_\alpha}}$, 使 α 爲最大之元素, 則 $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 爲閉合者. 其任何一個切, 或爲 $\overline{\overline{B_\beta}}\mid\alpha$, 或則爲 $\overline{\overline{B_\beta}}$ 內之一個切; 故按所設, $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 之諸分均爲閉合者. 倘 α 爲 $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 之最小元素, 亦可如是推論之.

設 α 爲 $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 之中間元素, 則 $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 爲閉合者, 而對於非由 α 所產生的切之二分, α 均可爲其中間元素, 故二者均爲閉合者. 但如 α 於 $\overline{\overline{B_\alpha}}$ 內如是產生一個切, 俾 α 在下分內, 則其上分同時爲 $\overline{\overline{B_\beta}}$ 內之分, 故二分亦均爲閉合者. 仿此, 若 α 在上分內, 亦可得此結果. 如是, 定理 **2.** 已證明, 同時幷可知 § **3.** 之 **3.** 內所作有限羣之定義, 與羣之如何整列法幷無關連.

3. 完全歸納法之定理, 爲數學證法上最重要且最多用的方法之一. 歐几里得實已默用之(見歐氏幾何要義

IX, 8).[1] 1654年時,巴士楷(Pascal)曾述及之,幷引莫洛里古士(Maurolycus)之書[2]爲參照. 前人恆以爲此定理肇自雅谷柏諾利(Jakob Bernoulli),[3]幷稱之爲由 n 角及 $n+1$ 之方法. 此定理首由談德金氏加以證明,[4]但潘加勒(Poincaré)[5]則謂此項證明,實建立於循環論法上,已先應用所欲證之定理,故在實際上,此定理實爲一不能證明之根本原則,無法歸之於更簡單的論理概念者也.

§5. 對映 等值

1. 以下凡有用及二有限羣 A 與 B 之處,吾人恆先假定此二羣無有共同之元素. 但此假定之意,非謂 A 與 B 內不能有客觀上相同之元素. 吾人之意,僅欲將其在 A 內時與在 B 內時視爲相異者而已. 實則 B 不妨爲 A 之一部分,或在實質上與 A 完全相同,亦無不可.

2. 二有限羣 A 與 A',倘能如是將其關連之,俾 A 之每一元素 a,與 A' 之一元素 a' 相屬成對,且 A 之每一元素 a',

1. 參觀 W. Lorey, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 27. (1921).

2. Maurolycus von Messina, Arithmeticorum libri duo 1537 (出版於 1575 年). 參觀 G. Vacca, Amer. Math. Soc. Bull. (2), 16 (1909). M. Cantor, Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. 33 (1902), 536.

3. Acta Eruditorum 1686; Opera, Genevae 1744; 1, 282.

4. Dedekind, 前所引之書,幷參觀 Zermelo, 前所引之著作.

5. Poincaré, Revue de métaphysique et de morale 2 (1891), 13 (1905/6); 及其所著"科學與假設"一書. 幷參觀 Couturat, Les Principes des mathématiques. Paris 1905, 以及 Weyl, 前所引書.

必在此項一個對內,亦祇在一個對內(例如左右二手之手指),則此二羣謂之等值者(äquivalent). 由此定義,可知等值性係彼此互相者. 用符號表之時,作

$$A \sim A',\ A' \sim A.$$

倘將構成此種等值性之A元素與A'元素間之相屬作出,則曰A'已對映(abgebildet)於A上,其相屬之二元素,謂之相當元素.

3. 倘A'與A''二羣,均與一第三羣A爲等值者,則此二羣彼此間亦等值. 蓋如$A' \sim A$內α'與α相屬,$A'' \sim A$內α''與α相屬,則α'與α''亦相屬,反之,任何一α''亦必與一確定之α'相屬.

今按1.內之意,將一羣A兩次取用之,則可云,每一羣均與其自己本身等值.

又$\overline{A}$爲已整列之羣,則凡與之等值之羣A',均可同樣整列之,其法在將A內元素間之關係,如$\alpha \quad \beta$,使A'內之相當元素α'及β',亦取用之. 如是則與$\overline{A}$內之最小及最大元素,α_0及α_1,相當者,有A'內之最小及最大元素α_0'及α_0'. 故得定理如下:

4. 倘A爲一有限羣,則凡與A等值之羣,均爲有限者.

倘有一羣M,既與A羣等值,又與A之一部分A'等值,則按3.,A當與其自己之部分A'等值.但吾人有以下之主要

定理:

5. 有限之羣A,不能與A之眞部分等值.

欲證明此定理,仍可用完全歸納之法. 式$\overline{A}$已任意整列,吾人今仍用§**3**之**4**.內之記法於此. 如是則所欲證明之定理,於$B_{a_0}=a_0$一羣,已能適用,蓋此羣僅由單獨一元素所成,無有眞部分可言,故決不能與其自已之眞部分等值.

今商β爲$\overline{A}$內任何一元素,且$\beta<a_1$,幷設吾人之定理對於B_β羣已適用,卽B_β與其自已之眞部分不等值. 又設α爲β之較大的鄰近元素. 今如B_α與其自己之眞部分B_α'等值,則可能之事例,不外以下之三種:

1. B_α'內不含α. 如是則B_α內之α與B_α'內之其他一元素α'相當,此元素係屬於B_β者. 倘$B_\alpha'=B_\beta'+\alpha'$,則$B_\beta'$爲$B_\beta$之眞部分,而因$B_\alpha=B_\beta+\alpha$,故若將$\alpha$, α'二相關元素由B_α及B_α'取出,卽得B_β於B_β'上之對映,此則按所設爲不可能者.

2. B_α'內含有α,且此元素於B_α與B_α'之對映內,與自己相當. 如是則$B_\alpha'=B_\beta'+\alpha$,而$B_\beta'$仍爲$B_\beta$之眞部分,蓋$B_\beta$當爲$B_\alpha$之眞部分也. 將其與自己相當之元素取去後,仍得$B_\beta$與$B_\beta'$之對映,此則不可能者.

3. B_α'含有元素α,但在B_α與B_α'之對映上,將α視爲B_α之元素時,與之相當者爲B_β之元素α',而將其視爲B_α'

之元素時,與之相當者爲B_β之元素a''(a'與a''可相同,但與a異,故在B_β內). 今將B_a與B_a'對映內之一切相屬均列出,但取去aa'及aa'',且將此二者分解開,使a與a,a'與a''相屬.如是則仍得B_β與B_β'之對映,因而與事例2無異.

於是關於a之稱述,即"B_a不與其自己之眞部分等值,"對於最小元素a_0已經證明,對於任何一元素a,則假定其適用於較小之鄰近元素β時,亦已證明.如是則完全歸納法之必要假設已經適合,而此定理對於最大元素a_1亦必適用,即適用於A羣本身也.

6. 今示A與M爲任何二有限羣.則可想而及者,有以下之四種可能性.

1. A與M等值.
2. A與M之眞部分M'等值.
3. M與A之眞部分A'等值.
4. 無論A本身或A之眞部分均不與M本身或其眞部分等值.

吾人今可證明,在此四種可能性中,祗有前三種中之一可發生,且亦必發生.

由定理**5.**,可知第三可能性與第一可能性,以及第二可能性與第一可能性,不能並立;蓋如$A\sim M$與$A'\sim M$相並立,則必有$A\sim A'$,此則按定理**5.**爲不可能者.

至於第二可能性與第三可能性亦不能並立,此可如是

明之:設 A 已對映於 M' 上,則 A' 已同時對映於 M' 之部分 M'' 上,故 $A' \sim M''$,而 M'' 爲 M 之眞部分.倘能同時有 $A' \sim M$,則必 $M \sim M''$,與定理**5**.相違.

此外則第四可能性決不能與第一,第二或第三可能性相並立,此理尤屬顯然.

欲證明第一二三之三個可能性中必有其一發生,因而第四可能性爲不可能之事,則可先假定第一與第三均不發生,即 M 既不與 A 等值,亦不與 A 之眞部分等值,於此假定下,吾人求證明 A 於是必與 M 之部分等值.

於此,吾人又須求助於完全歸納法.今將 $\overline{A}$ 與 $\overline{M}$ 任意整列之,幷仍用§**3** 之 **4**. 內之記法.

首先可知者,$\overline{B_{\alpha_0}} = \alpha_0$ 必可與 M 之部分,例如 $\overline{M}$ 之最小元素 μ_0,相對映.

設 B_β 已對映於 M 之部分 M' 上.於是 M' 與 M 必不相同,蓋按所設,M 與 A 之任何部分均不等值.因之,必有一元素 μ,在 M 內而不在 M' 內.今將 α 與 μ 相屬,而得 $B_\alpha = B_\beta + \alpha$ 與 $M' + \mu$ 之對映.但 $M' + \mu$ 仍爲 M 之部分,且爲眞部分(按所設).故 B_α 與 M 之眞部分對映,而完全歸納法上所須之假設已適合.如設 $\alpha = \alpha_1$,則得 A 與 M 之部分間之等值.

第一二三之三個可能性,吾人用下列之記法表之:

$$1.\quad A \sim M, \qquad 2.\quad A < M, \qquad 3.\quad M < A,$$

或

$$1.\quad M \sim A, \qquad 2.\quad M > A, \qquad 3.\quad A \quad M.$$

設 A, B, C 爲有限羣,則不難知:

若 $A<B$, $B<C$, 則亦 $A<C$.

若 $A>B$, $B>C$, 則亦 $A>C$.

若 $A>B$, 則亦 $A+C>B+C$.

§6. 數目

1. 建立數目概念之時,吾人由一任意之有限羣 A 出發,用確定之詞予以一標記 a,謂之此羣之數目,且規定凡與 A 等值之羣,其標記應相同,但凡與 A 不等值之羣,則不能有此標記.如是則凡與 A 等值之羣,其所屬之數目均同爲 a.

倘不由 A 出發,而由與 A 等值之羣 A' 出發;并予此羣以標記 a,則 A 所得之標記仍同. 倘將二等值羣,視爲同一屬類 (Klasse) 內者,則吾人可云:

數目 a,係 A 所確定的屬類之標記或屬性.倘一羣之元素,已按照某種次序整列好,今將其按別種次序另行整列之,則所得之新羣,與原來之羣仍等值.故可知與羣相屬之數目,與整列之序次並無關係.

此處所說明之數目,以與後面另行確定之數目相別,名爲自然數 (nat rliche Zahlen) 或基數 (Kardinalzahlen).

2. 設 A 與 B 爲任何二有限羣,a 與 b 爲其數目,則

1. $A \sim B$ 時,吾人可用 $a=b$ (a 等於 b),

2. $A<B$ 時,吾人可用 $a<b$ (a 小於 b),

3. $A>B$ 時,吾人可用 $a>b$ (a 大於 b)

以表之.

倘吾人僅欲表明 a 與 b 二數目不相等,不必指明其孰大孰小,則亦可用 $a\neq b$ 之記法.

由 § **5** 之 **3**., 可知:

設 $a=c$, $b=c$, 則亦 $a=b$.

又由 § **5** 之 **6**., 可知 a 與 b 二數目間,恆有以下三種關係中之一,亦祇能有其一:

$$a<b,\ \ a=b,\ \ a>b.$$

由 § **5** 之末,幷可知:

設 $a<b$, $b<c$, 則亦 $a<c$.

如是,吾人已能將數目按其大小整列之,且可知其有大小之性質 (§ **2**).

3. 設 a 爲任何一數目,則小於或等於 a 之數目,構成一有限羣,其數目爲 a.

此仍可由完全歸納法以得之.試取一已整列之有限羣 $\overline{A}$,仍用以前之記法.如是則此定理對於 B_{a_0} 已適用;吾人用數目 1 與之相屬.

今設 α 爲一任何元素,但與 α_0 不相同, β 爲其較小之鄰近元素. 設 B_α 與 B_β 之數目爲 a 與 b, 又假定此定理對於

B_β已適用,則小於b及等於b的數目之羣,其數目與B_β同,即b是,而吾人可將此項數目與B_β之元素相屬.今將數目a與元素α相屬,則即可知此定理於B_a亦適用,故對於A本身亦適用.

吾人按照B_α之數目a,稱α爲第a個元素,因即得序數(Ordinalzahlen).[1]

4. 設有二有限羣B及C,無有共同元素者,其數目爲b及c.將此二羣相結合成爲一新羣A,則此羣按§**3**之**7**.亦爲有限者.倘此羣之數目爲a,則a爲b及c所完全確定,吾人可設$a=b+c$或$=c+b$.同時a大於b,亦大於c.

今如c僅由一元素所成,則其數目$c=1$,而$a=b+1$爲b之較大的鄰近數目.

5. 設α爲A之中間元素,β爲其較小之鄰近元素,γ爲其較大之鄰近元素.又設b, a, c爲B_β, B_α, B_γ之數目,則按**2**.

$$b<a<c,$$

而b與a或a與c之間,均不能再有數目在.故除1以外,每

1. 觀以上之敍述法,可知吾人係以基數爲本.序數則由此推論而得.亦有反其道而行之,以序數爲出發,由此以推得基數者,如海姆霍爾茲(Helmholtz)及克朗納克(Kronecker)之方法是(見稱於Ed. Zeller之文,1887). 參觀E. G. Husserl, Philosophie der Arithmetik, Halle 1891; Capelli, Giorn. di mat. 39 (1901). 詳論序數及基數對於數學教學法上之意義者,有W. Jacobsthal之Das Lyzeum一書,第一册(1914).

一數目均有一較小之鄰近數目,而如將一有限羣視爲一更大羣之部分時,亦每一數目均有一較大之鄰近數目. a之二鄰近數目,以$a-1$及$a+1$表之.

6. 一羣內之元素,可將其每二個相屬成對.於是可有二個事例發生:第一,此種相屬成對之法,可將元素用完無餘,如是則此羣可謂之成雙者,其所屬之數目,謂之偶數.其次則此種相屬成對之法,不能將元素用完,餘下一個;如是卽可稱此羣爲成單者,其數目爲奇數.倘於羣內加入一元素,則成雙者變爲成單,成單者變爲成雙,故在數目之序列內,偶數與奇數恆相更迭.1爲一奇數,得此規定後,任何一數目之爲偶爲奇,卽不難完全確定.

7. 按**2**.,數目固可整列之,且有大小之性質,蓋如二數目不相同,則恆可確定其孰大孰小.但數目所構成之羣,謂恆爲有限者則不可;蓋任何一有限羣,恆可增加一元素於其內,使其成爲一新羣,因而其數目亦增大.[1] 從可知最大之數目,係不能有者.

8. 自然數,或較小之自然數,一切語言中均有其專名,除此項專名外,亦尙有其專用之簡略符號1, 2, 3, …… 算

1. "任何一有限羣,恆可增加一元素於其內,"此我當視爲一公理.(參觀 Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig 1914, 第五頁.)數目序列之可無限繼續,實以此爲根據.

法及數學之進步,與此項符號之選擇適當與否大有關係.計點內容極繁之羣時,吾人常將若干數目合成一總,視之爲新的單位,因而個別事物之計點可易以此項總之計點,則較便利.吾人語言中之十,二十,三十,百,二百,等等,卽已爲此種辦法之實行,但吾人所用之十進記數法,則爲其完備者.但吾人用一數字a時,必須用一標識,使何者爲所計事物之單位,得以明瞭.算法未發達時,恆將數字於其單位,於一表板或算盤上之不同的標記下表出之.嗣後始用一特殊之符號"0",卽零,以表明某個標記下未經有所塡入,故無有單位在內,此則不可謂非極大之進步.自此,標記之辦法卽成爲不必要,蓋數字之位置已足表出所用單位之種類.吾人今日完備之記數法,實建立於此簡單之根本思想上,惟在德語方面,發語時之數字,其序次與書寫時每不同,例如"三百五又六十"之爲365,則不能不使人驚駭其不和諧,而深感其不便也.[1]

在理論的研究上,我人恆用字母以代數目,如以上所已習用者,俾適用於任何數目,不僅適用於某一數目之稱述,得較簡且較精的陳明之.但此項字母,非若希臘著作中之代表一定數目者,故吾人可任意使其代表數目.

1. W. Förster, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 31 (1900) 以及 A. Schülke 之著作,同雜誌 46 (1915).

應用此項廣泛的符號之運算法,名爲字母算法或代數學(廣義的).[1]

§7. 第一章史料

1. 輓近以來,吾人對於數學史之興趣,較往昔漸爲濃厚;在數學之教學上,歷史的動力尤須提出,俾數學不致與其他科學相孤立,而知其爲文化發展史上所極重要而不可少之成分.[2]

2. 以普遍的羣之概念爲基礎,以研究數目之實質者,實肇自談德金氏,其所著小册 Was sind und was sollen die Zahlen? (Braunschweig 1888), 允爲不朽之作.其中論列,已頗完備.

3. 欲將數目總合,以成較高之單位,且其方法頗可觀者,吾人於希臘數學家亞希米德(Archimedes)之著作中可見之,惜其致崔克西浦(Zeuxippus)之稿已佚.今所存者尚有"沙算家"[3]一篇,亦極堪注意,且其中含有古人之宇宙觀及其他智識,故尤可尋味.

---

1. 代數學就狹義言之,爲方程論.

2. 參觀 M. Gebhardt, Die Geschicte der Mathematik im mathematischen Unterricht. (Abh. üb. d. math. Unterr. in Deutschland 3,6). Leipzig 1912.

3. Archimedes opera omnia, ed Heiberg, Leipzig 2, 242; F. Kliem 之德譯本第343頁.亞氏所提出之問題,係欲作極大數目之名稱,其具體問題在作一數目,使其大於與宇宙等大的球內沙粒之數.

關於各民族各時代所用之數目名稱及記數法 H. Hänkel 之遺著 Zur Geschichte der Mäthematik im Altertum und im Mittelalter Leipzig, (1874) 中記載頗多,而 E. Löffler 所著之小册 Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit (Math.—Phys. Bibliothek, Bd. 1, Leipzig 1912) 亦殊可一讀.

因實用上之需要而創用新的數目名稱者,近代亦有其例,如"Million"(百萬)一詞,其創用約當 1500 年時,首見於意大利,"Milliarde"(十萬萬)一詞,亦創於十六世紀時,但直至輓近,始成爲通用之語.此二語均爲意大利文法上 mille (卽千)一語之變大式.

4. 吾人今日所用之記數法,其出於印度無疑[1].但位置之原則,則紀元前二千年時,巴比倫人已有之,惟自不完備耳.自 1 至 9 之數目,均有個別符號以表之,此實出於印度,而其尤要者,則零之創用,亦出於印度人,得此創作,於是始能將任何數目寫出,不致有所限制.輓近始有人證實,在新大陸未發見之久遠以前,由家唐 (Yukatan) 之馬耶印第安人 (Maya-Indianer) 早卽應用位置原則,0 亦已

1. 俄國學者布諾夫 (N. Bubnow),則以爲吾人今日所用之記數法,係源於希臘,主之甚力 (Arithm. Selbständigkeit d. enrop. Kultur, Berlin 1914).

在內[1],此不可謂不足使人驚異之事,惟馬耶人所用者,非十進記法而係二十進法,其自1至19各數,均有簡單符號以表之,此項符號係由點與撇所成,[2]數目之各位則由上至下垂直的列之.馬耶人之文化,就其他方面觀之,多有亞洲文化之痕跡,惟記數法旣有如是之特性,則殊難謂此法亦與印度有關.[3]印度人之發明記數法,如是其完美,實爲不可及者,惜乎年代悠遠,無以考其歷史矣;吾人今日,第知千三百年前,其法已完備可用耳.[4]至於此種發明之何以出於印度,則Hankel之意,以爲由於印人之幻想,每以稱述無量數之神佛爲其表現,故大數之應用特多也[5](佛經上多稱述諸佛菩薩之數,每有至幾萬萬,幾千萬萬以及更大之數者).

此項新算法之入於泰西,則由亞拉伯人之傳授,蓋亞人曾侵入西班牙及北非洲也;羅馬人所傳下之不完備算法,尙未知應用零者,於是漸歸淘汰.此項新算法,彼此稱爲

1. 參觀 F. Cajori, The zero and Principle of Local Value used by the Maya Science (2) 44 (1915). S. Günther, Münch. Sitzungsb. 1917. 關於二十進法,參觀 A. v. Humboldt, Journ. f. Math. 4. (1829); A. F. Pott, Die quinare und vigesimale Zählmethode, Halle, 1847 及 1868.

2. 零則用貝形符號表之.

3. 參觀 Wieleitner, Ztschr. f. math. Unterr. 49 (1918).

4. 參觀 Löffler, Zur Geschichte der indischen Ziffern. Arch. f. Math. u. Phys. (3), 19 (1912).

5. 參觀 E. Arnold 之 "Die Leuchte Asiens," 其中有菩薩所用之算法,蓋由古代佛教所傳下者. (Reclam S. 18, Leipzig).

"Algorithmus," 習之者稱 "Algorithmiker," 以與 "Abacisten" (習用算盤者) 相別, 且彼此間時有敵對之概.[1] "Algorithmus" 一名稱之來源, 向在疑義中, 直至近時, 始知其脫胎於一亞拉伯數學家之名字, 蓋其名爲 Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî 也.[2] 此數學家之著作, 曾有極廣之流傳, 且時人極尊重之, 其著作年代約爲第九世紀初葉, 但吾人及今所見者, 乃 1857 年時所重獲之拉丁譯本. 今日之所謂 "Algorithmus" 者, 則爲一方法, 在求所欲之普遍結果, 但僅於特例, 且不將其結果以完成的形式表出之. (參觀 § **17** 歐氏之 Algorithmus).

算盤家之重要的代表者, 爲著名之吉爾白 (Gerbert, 教皇齊爾凡斯得第二 Silvester II). 對於 Algorithmus 在泰西之傳播, 其最有功績者, 爲十三世紀時之 Leonardo von Pisa (名 Fibonacci) (Liber Abaci), 以及原籍爲德國之 Jordanus Nemorarius (Algorithmus demonstratus). 後者并以 "cifra"[3] 名其所用之零, 實爲亞拉伯字 as-sifr 之轉音, 而此

1. 參觀 Friedlein, Die Zahlzeichen u. d. elem. Rechnen d. Griechen u. Römer u. d. chr. Abendlandes vom VII bis XIII Jahrh, Erlangen 1869.

2. Alchwarizmi 爲產地名字, 意爲 Chwarezm 之人, 卽今之 Chiwa 地方也. 從可知 Alchwarizmi 雖以亞拉伯文著作, 實爲波斯產. "Algebra" 一名稱亦由其重要著作之名稱 "Aldschebr Walmukabala" 脫胎而來. "Al" 係冠詞, "Aldschebr" 則爲 "整理," 使方程之兩端均由正項所成, "mukabala" 則 "同類項歸併之意." Ruska, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Heidb. Akad. (1917) 中, 將此二字譯爲 "補充與等於."

3. Euler 與 Gauss 亦從之.

字則譯自印度語 sunya (義爲"空"). 吾人今日所用之 "Ziffer" (數字) 一語, 以及法文之 "chiffre," "zéro" 均肇源於此.

然印度之數字,用及於日常生活,則其間又經極久之歲月,而後始漸以通行. 1299 年時, 弗老倫玆 (Florenz) 之商人,猶不以應用此項數字爲合法. 在德國方面,直至十六世紀之中葉,始爲一般所採用, 1522 年時黎善 (Adam Riese) 所著之算書,於促進其採用上,爲助尤非鮮淺.

5. 字母算法之發明者,允推維他 (Vieta) 氏,用運算符號,連結代表數量之字母,作廣泛之運算,實首見於其著作 "In artem analyticam Isagoge" (Tours 1591) 內. 逐漸補充之者,實爲十七世紀時之亞德萊 (Oughtred), 哈利歐 (Harriot), 及笛卡士 (Descartes) 諸人,但其成爲較完備之系統,得有今日之發展者,則萊伯尼玆 (Leibniz) 與歐拉 (Euler) 二人之功績最多.字母算法之主要意義,在其所用無國界的符號語言,凡代數定理,均可以最簡短,最不致引起疑義或誤會之方式,表出之,無須乎呆滯之語言.在數理之探討上,此法尤最爲得力,苟非有此發明,則十七世紀以來之數學發展,將爲不可能之事. 蓋記法之進步,其關係迥非鮮淺,研討上之新門徑,以及部分之新創闢,胥先有記法之改

善,始能引致(微積分,行列式,數方算法等).維他實已見及此理,故曾謂藉字母算法之力,必可"nullum non solvere problema",但萊伯尼茲則尤深見及此,故恆以適當選擇符號之重要爲言.

第二章

加乘減整數

§8. 加法

1. 數目之加法.已可由§6之4.內之定理得之.欲將二數目a與b相加,吾人可將數目爲a, b之二羣A與B,合成爲一羣$A+B$,而以$a+b$爲$A+B$之數目.以公式

$$(1) \qquad a+b=b+a$$

表出之定律,名爲加法上之交易律.

倘欲於實際上行相加之法,則不外將代表a, b二數目之事物,例如手指或算珠,按習用數列之値計點之.故計點法實爲根本之動作,一切算法均由之演出.[1]吾人可由數目a出發.再計點b個,則a與b之相加已成.如將較小數目(可用自1至9各數目)之相加結果熟習之,則與十進記數法相適合之諸規律,卽能使吾人得一方法,用之以求其他事例之結果時,可較爲簡便.

2. 設A, B, C爲三個羣,其數目爲a, b, c.吾人可將此三羣合成爲一,其法有二,卽,先將A與B相合.再將此與C

---

1. 參觀 M. Simon, Mathodik der elem. Arithmetik, Leipzig 1906, 第六頁.

相合,或先將B與C合,再以A合於此.無論用此法或彼法所得之羣相同,即

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

將此結果推用於數目時,即得加法上之結合定律:

(2) $$(a+b)+c=a+(b+c).$$

將此定律與交易定律並用時,則同一之和數,其形式可有十二個,而求和數之法,則可如下:

於a, b, c三數中,先任取其二,作其和數,再將此和數與第三數相結,以得一新和數.所得之結果,與先取何者二數,並無關係;故括弧可不需,而可寫作

$$s=a+b+c.$$

3. 應用結合定律時,任何多之被加數,吾人均可求其和數.

設有一羣R,爲諸數目

(R) $$a, b, c, d, \cdots\cdots, n$$

所成,其多爲r個.今於其中任取二個,先作其和.因之,吾人得一新羣,由$r-1$個數目所成.復於此羣內任取其二個結合之.並繼續此法,直至羣內祇有一個數目爲止.此數目與以前每次取二個數目之法,並無關係,即,與計算之順序無關.吾人稱此爲$a, b, c, d, \cdots\cdots, n$諸數之和,倘以表之,則可作

$$s=a+b+c+d+\cdots\cdots+n.$$

欲證明此定理,仍可用完全歸納之法.吾人前於**1.** 及**2.**內已知此定理於$r=2$時,或$r=3$時均適用.(僅以$r=2$為理由,此處尚不充分,因在二個被加數方面,結合定律尚未用及也.)今可假定此定理,已適用$r-1$個被加數之和,求於此假定下,證明其亦適用於r個被加數($r>3$).試於R系統內,將其任何二被加數合成爲一和數,爲便於應用符號計,即以a, b表此二數.於是得一羣R',由$r-1$個數目所成:

(R') $$(a+b),\ c,\ d,\ \cdots\cdots,\ n.$$

吾人自亦可先將b與c結合,以得一羣R'',亦由$r-1$個數目所成:

(R'') $$a,\ (b+c),\ d,\ \cdots\cdots\ n.$$

仿此,亦可先將c與d結合,得

(R''') $$a,\ b,\ (c+d),\ \cdots\cdots,\ n.$$

按所設,在R', R'', R'''內,數目之和,已適用上項定理,即,與計算之順序無關者.今可再將此法應用一次,使R'與R''以及R'與R'''均成爲相同之系統,即

$$R' \text{ 與 } R'' \text{ 均成爲 } (a+b+c),\ d,\ \cdots\cdots\ n,$$

$$R' \text{ 與 } ''' \text{ 則爲 } (a+b),\ (c+d),\ \cdots\cdots\ n.$$

如是則R', R'', R'''所產生之和均相同,如所欲證者.

在實際的計算方面,吾人恆先將被加數按任意之順序上下寫出之,再由上或下開始,將後一數目加於已得

之和數上.計算之結果,與相加之順序幷無關係.

4. 由一數目 m,以得其鄰近較之數目 $m+1$,此爲加法上之一特例.惟加法亦可僅用如次之二關係以得之:$m+1$ 爲 m 後之次一數目,以及 $a+(b+1)=(a+b)+1$.[1] 又由§**5**之末所明之理,及§**6**之**2**.內所確定之"大於"及"小於"概念,可知 $a, b, c, \cdots\cdots$ 諸數之一部分所成之和數,必小於其全部之和數,而如將被加數中之一個或若干個增大之,則其和亦必增大,卽:

(3) 倘 $a>b$,則 $a+c>b+c$.

此種關係,吾人名之爲加法上之單調性(Monotonieeigenschaft). 作 $a+b$ 形式之式 (a, b 爲不定之數),亦稱爲二項式.仿此,$a+b+c$ 稱爲三項式;廣之,由若干被加數所成之和數式,名爲多項式.各個被加數,稱爲多項式之項.[2]

§ 9. 乘法

1. 一有限之羣 A,吾人固可計點其中之各個事物.但亦可按其中一定的等値部分以計點之,例如每次取其五

1. 見 H. Grassmann, Lehrb. d. Arithmetik, Berlin 1861. 幷參觀 O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig 1914. 或 A. Loewy, Lehrb. d. Algebra, 1 Leipzig 1915.

2. Euklid (歐几里得)對於二個不能通約的部分所合成之線段,曾用 ἐχ δνο ὀνομάτων (ex duobus nominibus) 以表之. "Binom" (二項式), "Trinom" (三項式), 以及 "Polynom" (多項式) 諸語,均由此演出;但 "Polynom" 一語,係由拉丁及希臘兩種語源合成,在語言上實不合式.參觀 Stäckel, Bibl. Math. (3), 4 (1903).

個事物是.今設 B 爲此項一部分,其數目爲 b,則每次取 b 個事物時,若干次後卽可將全羣 A 取盡.如是,可知 A 羣之數目爲

$$b+b+b+\cdots\cdots+b,$$

而此式則爲若干相同被加數之和數.對於此式,吾人另用一記法表之.今設有 a 個被加數,均等於 b,而須求其和,則

$$a=3\text{ 時, 有 } b+b+b,$$

$$a=4\text{ 時, 有 } b+b+b+b.$$

其 a 個 b 之和,吾人以 $a\cdot b$ 表之,或簡作 ab(讀 b 之 a 倍),名其法曰乘;或曰以 a 乘 b.

b 稱爲被乘數,a 則爲乘數.其結果 ab,謂之 a 與 b 之乘積.

按定義,可知 $a\cdot 1=a$,吾人并設 $1\cdot b=b$.由此式出發,吾人卽可由較低乘數之乘積,以得較高乘數之乘積.其公式爲

(1) $$(a+1)\,b=ab+b,$$

此則可直接由乘之定義以得之.

2. 交易定律.

乘法上之第一主要定理,爲其交易定理;此定理之內容,係說明乘之結果,無關於孰爲被乘數及孰爲乘數,吾人倘將二者相易,所得結果仍同;用公式表之,作

(2) $$ab=ba.$$

欲證明此定理,仍可用完全歸納之法.試設想有 a 個羣 B,為分別其各個計,以 $B_1, B_2, \cdots\cdots B_a$ 表之.任何一羣與任何一羣間,吾人假定其無有共同之元素,且此項羣之數目均為 b.如是則乘積 ab,為 M 羣之數目,此 M 亦即由 B_1, $B_2, \cdots\cdots B_a$ 諸羣所合成者.

今於 $B_1, B_2, \cdots\cdots B_a$ 之每一羣內,增入一新元素,則 b 成為 $b+1$,而於 M 羣內,增入 a 個新元素.倘 M 因之而成為 M',則 M' 之數目為 $ab+a$.他方面,此數目亦即等於 $a(b+1)$,故得

(3) $$ab+a=a(b+1),$$

於 $b=1$ 時,此公式亦仍可用.但 $b=1$ 時,按定義,可知 $ab=ba$.今如假定,對於任何之 b,公式(2)已適用,則由(3),可知

$$a\,(b+1)=ba+a,$$

而如於(1)內將 a, b 互易,即有

$$ba+a=(b+1)\,a,$$

故 $$a\,(b+1)=(b+1)\,a,$$

此即是,(2)對於 b 之次一較大者亦適用.如是,完全歸納法之基本條件已具備,而交易定律乃已普遍的證明.

因之,在乘積方面,乘數與被乘數之分別,殊無大必要.故吾人可不加分別,同稱之為乘積之因子.

3. 結合定律.

試設想將$B_1, B_2, \cdots\cdots B_a$諸羣之一切元素,均易以一羣$C$.此項羣$C$,其數目均同爲$C$,但任何二羣間無有共同之元素.今將此項$C$羣之一切元素結合之,則得一新羣$P$,其數目當求得之.

C羣之多,共爲ab個,故P羣之元素,共有

$$(ab)\,c$$

個.他方面,每個B羣內所有之元素數爲bc,B羣共有a個,故P內之元素數,亦爲

$$a\,(bc)$$

個.故得

$$(ab)c=a(bc), \tag{4}$$

即所謂結合定律是.

將此定律與交易定律並用,則同一之乘積,其形式可有十二個.

於是吾人可將計算規則,總之如下.先將a, b, c三數目中之二,求其乘積,再將此乘積與其餘一數相乘,以得一新乘積.所得結果,與先求何者二數之乘積並無關係,故括弧亦可省去,而以

$$m=abc$$

表之.m名爲a, b, c三數之乘積,此三數均爲乘數之因子.倘乘數內有字母及數目同爲因子,例如$3ab$,則此數目因

子，如3，亦名曰係數.

以上所用交易律及結合律之證法，吾人亦可如下得其具體觀念. 試設想C羣之元素均爲球體，每a個成爲一列，b列成爲一方形，c個方形相疊成爲一方柱體，其三邊各有a，b及c個球體. 如是則將方柱析爲方形時，有三種形式，而將方形析爲列時，亦有二個形式可取也.

4. 任何多因子之乘積，亦可仿加法方面之法求之. 設有一羣數目

$$a, b, c, d, \cdots\cdots n,$$

其數爲r個. 今隨取其中之二，作其乘積. 如是則羣成爲$r-1$個元素所成；此方法可繼續用之，則最後所得之羣，祇由一個數目所成. 此數目與以前每次之任取二個，并無關係，卽與計算之順序無關者，吾人名之爲$a, b, c, d \cdots\cdots n$諸因子之乘積，倘以$P$表之，則有

$$P = abcd \cdots\cdots n.$$

此式之證法，與以前加法方面者全相同，亦仍用歸納法，惟將和數易以乘積而已.

5. 由加法方面(§8)之相似的定理，卽可得乘法上之單調定律：

$$設\ a>b,\ 則\ ac>bc.$$

此外，並可知，由$a>b$，$c>d$，卽

$$ac>bd.$$

用完全歸納之法,吾人並可證明,任何多因子所成之乘積,倘此項因子中有若干個被增大,其餘者仍舊,則此乘積亦被增大.由此並可得一系如下:乘積ac,祇於$a=b$時,方能與bc相等.

§10. 和數之乘積

1. 乘法上之分配定律.

倘乘積之二因子中,其一爲若干被加數之和,則乘積亦可以等多的被加數之和表出之,無須於乘前先將被加數合成爲一,然後行相乘之法也.

設有一和數

$$s=a+b+c+\cdots\cdots+k,$$

須與一數目m相乘,則由乘之定義,可知其乘積等於一和數,其中有m個被加數爲a,m個被加數爲b,等等,乃至於m個被加數爲k.因被加數之順序無關於所得之和,故可先將m個a結合之,則得乘積ma,再將m個b結合之,得mb,等等,以至於得mk.因之,有

$$ms=ma+mb+mc+\cdots\cdots+mk.$$

爲表明m與一和數$a+b+c+\cdots\cdots+k$相乘計,吾人用一括弧將和數括入,故可作

$$(1)\qquad m(a+b+c+\cdots\cdots+k)$$
$$=ma+mb+mc+\cdots\cdots+mk.$$

按乘法之交易律,亦可作

$$(2)\qquad (a+b+c+\cdots\cdots+k)m$$
$$=am+bm+cm+\cdots\cdots+km.$$

(1)與(2)二公式所表者,名爲乘法上之分配定律.尋常簡易之算法上,亦多用之,例如53.7可作50.7+3.7於心中算出之.十進記數法內任何大數目之相乘,恆用"一個乘一個"之法算出之,其基本原理亦在此定律上.

有時吾人亦每用及以下形式之和數:

$$ma+mb+mc+\cdots\cdots+mk,$$

即其各項均有一相同之因子者.於是吾人可將此和數易成爲乘積

$$m(a+b+c+\cdots\cdots+k)\quad\text{或}\quad(a+b+c+\cdots\cdots+k)m.$$

此種方法謂之"將因子m括出."

2. 倘m亦爲一和數,如

$$m=a'+b'+c'+\cdots\cdots+h',$$

則(1)與(2)之右端仍可應用以前之法,因得定理如下:

求二個和數之積,

$$(a+b+c+\cdots\cdots k)(a'+b'+c'+\cdots\cdots+h'),$$

可將一和數之諸被加數,遍乘其他和數之諸被加數,取此項乘積之總和.

倘其一和數爲r個被加數,其他和數爲r'個所成,則乘

積內共有 rr' 個被加數.蓋(2)右端之被加數 $am, bm, cm, \cdots\cdots, km$, 每個均含有 r' 個被加數也.

3. 吾人有時亦可不將 $a, b, c, \cdots\cdots$ 諸數寫出,僅用其中之一,例如 a, 附以標記以別之,卽所謂"標數"(Index)[1]者,如 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ 等諸數,卽附有標數者也.但標數本身,亦可用字母爲之.如是則此字母可爲 $1, 2, \cdots\cdots, r$ 等數,例如

$$a_\alpha, \quad \alpha=1, 2, 3, \cdots\cdots, r.$$

於是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ 等諸數之和, s, 亦可如是表之:

$$s=\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha.$$

於此,符號 Σ(希臘字母,讀 sigma)視爲"和數"之簡寫.1與 r 名爲 α 之界.有時倘不須說明此項界,則亦可簡作

$$s=\sum_{\alpha} a_\alpha.$$

如是,定理2.之內容,卽可簡括之於下式中:

$$(3) \qquad \left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right)=\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta.$$

同時,吾人卽可將此定理推廣至任何多之因子,例如

$$(4) \qquad \left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{r'} b_\beta\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{r''} c_\gamma\right)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma.$$

1. 標數之應用,創自 Leibniz.

倘將此項式內之括號捨去,亦無不可.

§11. 方數

1. 吾人曾由相同被加數之加法,推得乘法,今如求相同因子之乘積,則亦可推出一種新運算法,即所謂乘方者是.

今試作 n 因子之乘積,此項因子均爲相同者,例如 a. 其所得之結果,名爲 a 之 n 次方,寫作

$$(1)\qquad aa\cdots\cdots a=a^n,$$

於此,左端共有 n 個因子 a; a 名爲底數, n 爲指數,吾人可云: "a 乘至 n 次," 或曰 "a 高 n." 取一數目 a 之 n 次方,亦曰 "使 a 高至 n 次方."

因幾何學上之應用, a 之二次方 a^2, 亦曰 "a 之平方," 其三次方 a^3, 則曰 "a 之立方."

a 之一次方,即 a 本身;

$$(2)\qquad a^1=a.$$

將 1 乘任何數目時,仍得被乘數,故於任何指數 n, 恆爲:

$$(3)\qquad 1^n=1.$$

方數上之主要定理,其證不難直接由定義得之者,如下:

2. 同底數之二方數,倘將其指數相加,保存其原底數,則此二方數已相乘. 用符號表之:

(4) $$a^m a^n = a^{m+n},$$

蓋此式之左右端,均爲 $m+n$ 個因子 a 之乘積也. 用完全歸納之法,吾人不難將此定理,推至於任何多之因子,得下式:

(5) $$a^m a^n \cdots\cdots a^q = a^{m+n+\cdots\cdots q},$$

於此, $m, n, \cdots\cdots, q$, 爲任意之數.

3. 今如使(5)內之指數 $m, n, \cdots\cdots, q$ 均相等,則得方數之第二定理如下:

倘將一方數之指數乘之,仍保其底數,則此方數已被高至所乘之次數. 用符號表之,即

(6) $$(a^m)^r = a^{mr}.$$

4. 因乘法上之交易律,吾人求若干因子所成乘積之 n 次方時,可將各因子一一使其高至 n 次,取其乘積即得:

(7) $$(abc\cdots\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots\cdots$$

倘使此式中之底數均相等,則按(5),復得定理**3**.

5. 吾人所用之十進記數法,蓋建立於數目10之方數上. 10之 n 次方,即1與 n 個零所成;此項方數,爲各位之單位. r 位之數目 $\{abc\cdots\cdots mn\}$, 其意義爲

(8) $$a10^r + b10^{r-1} + c10^{r-2} + \cdots\cdots + m10 + n.$$

$1, 10, 10^2, \cdots\cdots 10^r$, 名爲 $n, m, \cdots\cdots a$ 之位値. 吾人欲使數目之位値不致有疑義,則數列內倘有某方數不存在時,必須有以表明之,是即0(零)之使用是. 如是,(8)內之字母

$a, b, c, \cdots\cdots, m, n$,其所代表者不出下列之各數字:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

倘計算時,須用超過以上各數字之數,則有如次之公式在:

$$(a+10)\,10^r = 10^{r+1} + a10^r.$$

十進數目之乘法,其基礎在§**10**之**2**.定理上,此不難見者也.

除1以外,任何數目g,吾人均可用之爲一數目系統之基本數目,其數字共有g個: $0, 1, 2, \cdots\cdots, (g-1)$. 就理論言之,最簡單者當爲二進法,以2爲基本數目,其數字僅有0與1二者(Leibniz, Math. Schriften, C. J. Gerhardt 所編訂之本 7, 223).

巴比倫人曾用蘇曼人(Sumerern,巴比倫原有之土人)所傳下之六十進法,其基本數目爲60,但60以下之數,仍用十進法.[1]

在方數方面,交易律與結合律均不能用,蓋a^b與b^a不能相同,例如$2^5=32$, $5^2=25$是,而$a^{(m^n)}$與$(a^m)^n$亦大相異,如$2^{(2^3)}=2^8=256$, $(2^2)^3=2^6=64$. 緣此,故雖有人仿照由加推得乘之法,欲於此方面另闢新運算法,結果總歸失敗,惟如將底數與指數改爲同數,則或可有成耳.此項運算法上之定

1. 参觀 E. Löffler, Die arithm. Kenntnisse d. Babylonier u. das Sexagesimalsystem. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 17 (1911).

律,並不如是之簡單,且無論實用上或科學上均尚無此必要也.

6. 平方及立方數,巴比倫人已知之(辛開雷 Senkereh 之表,約爲紀元前二千年之物). 較高之方數,則始見於紀元後二百年之狄咈方氏(Diophant). 方數算法之建立,德國往昔之哥斯學家[1] (Cossisten) 供獻最多(參閱 Adam Riese 1524, Christoph Rudolff 1525, Michael Stiffel 1544 所著之算書). 今日所用之方數寫法,肇自笛卡士(見其 Géométrie 1637).

"Potenz" (方數) 一語,蓋譯自 δύναμις, 希臘數學家用以表數目之平方者也; 1572 年時出版之代數學 (Bombelli 所著) 中首用之,其意亦祇表平方. 直至十八世紀時,始引伸其義而廣用之,但十八世紀末之著作中,尚有用 "Dignität" (Tartaglia 1556 年時所創) 以及 "Potestät" (Vieta 1591 年時所創) 等語者.

"Exponent" (指數) 一語,肇自 Michael Stifel, 見其 Arithmetica integra (1544) 一書.

§ 12. 減法

1. 試由一有限羣 A, 取去其一眞部分 B, 則尚餘一有

1. "哥斯" (Coss) 一語,與"代數學"同義,源於意大利語 cosa, 此語則譯自 Leonardo Pisano 於 1200 年時所創用之 "res" 一語; 十五世紀時,未知數謂之哥斯.

限羣,可以$A-B$表之. 此羣之數目c,完全被A與B之數目a與b所確定. 吾人寫之爲

$$c=a-b,$$

而名$a-b$爲"a與b之差,"$a-b$讀爲"a減b." 求此差之算法,謂之減法. a稱爲被減數,b則爲減數.

因B爲A之眞部分,故被減數恆大於減數.

2. 吾人亦可以如次之方式,獲得較廣的減之概念:

迄今所論之運算法,加,乘,及乘方,均稱爲正運算法(direkte operationen),於此,恆已先有二已知數a與b,再按一定之法,以求得一第三數目c.今如先用一運算法$\mathfrak{A}$,使給果c及二數中之一,如a,爲已知者,則吾人須用一其他新運算法$\mathfrak{A}'$,以求另一數目b;此新運算法$\mathfrak{A}'$,吾人名之爲"與$\mathfrak{A}$相反之運算法."因加與乘方面,適用交易律,故先所已知者爲a或爲b並無關係,從可知此二運算法之相反法,各各祇有其一.

加法之相反運算法爲減法,故其任務如次:

求得一數,使其與一已知數相加時,得已知之和數.

凡未知之數,爲吾人所欲求者,尋常恆以字母之末後數字表之,今亦遵此.如是,設a爲已知之被加數,c爲已知之和數,$c>a$,則減法之任務,可用下式表之:

$$a+x=c. \tag{1}$$

如是二式所成之等式,其中含有求出固定數目之任務者,謂之一方程(Gleichung).

所求之數x,亦可如下表之:

$$x=c-a, \tag{2}$$

此卽表$(c-a)$爲一數,與a相加可得c者;

$$a+(c-a)=c. \tag{3}$$

因加法上適用交易律,故亦可作

$$(c-a)+a=c. \tag{3'}$$

3. 倘方程(1)能成立,則以下之方程,亦必成立:

$$(a+x)+b=c+b.$$

b可爲一任何之數,而按結合及交易律,幷可得

$$(a+b)+x=c+b.$$

由此,得

$$x=(c+b)-(a+b),$$

卽

$$c-a=(c+b)-(a+b). \tag{4}$$

今於此式之右端,將$(c+b)$易爲c,$(a+b)$易爲a,則其左端之c當易爲$c-b$,a當易爲$a-b$,而a, b, c三數目間有如次之大小關係:$b<a<c$;於是方程(4)之左右端相易後,有

$$c-a=(c-b)-(a-b). \tag{5}$$

此方程(4)與(5)內,含有定理此下:

倘被減與減數各增減一相同之數,其差不變.

4. 今設

(6) $$x=a+(b-c),$$

即,於 a 上加以減之結果 $(b-c)$. 則

$$x+c=a+(b-c)+c,$$

或按 (3)′,

$$x+c=a+b,$$

故 $$x=(a+b)-c.$$

於此,吾人尚可將 a 與 b 相易,不致影響及於 x, 並可應用加法上之交易定律於 (6), 則得

(7) $$\begin{aligned} a+(b-c)&=(a+b)-c \\ &=(b-c)+a \\ &=b+(a-c) \\ &=(a-c)+b. \end{aligned}$$

由此,可知吾人不妨將括弧捨去,蓋不致有錯誤可發生也. 因而得

(8) $$\begin{aligned} a+b-c=b+a-c&=b-c+a \\ &=a-c+b, \end{aligned}$$

此即加減上之結合定律也.

5. 今設

$$x=a-(b+c),$$

則 $$x+(b+c)=a=(x+c)+b,$$

故 $$x+c=a-b,$$

以及
$$x=a-b-c,$$
因而有

(9) $$a-(b+c)=a-b-c.$$

但如
$$x=a-(b-c),$$
則按(7),可得
$$x+(b-c)=a=(x-c)+b,$$
故 $$x-c=a-b,\ x=a-b+c,$$
而有

(10) $$a-(b-c)=a-b+c.$$

(9)與(10)內,含有常用的括弧式之減法:

倘將括弧捨去,其中之加號易以減號,減號易以加號,則與減括弧內之式相同.

減法方面之單調性,不難由§5內關於有限羣等値性之定理以推得之,可表之如下:

倘 $a>b>c$, 則 $a-c>b-c$.

§13. 負數 蹔數

1. 在自然數之範圍內,加法恆可施行,即,任何自然數之相加,結果恆得一確定之自然數.故吾人可云,自然數就加法而言,爲一自足之領域(geschlossenen Bereich).就乘法及乘方而言,自然數亦爲自足之領域,蓋吾人可將此二

者視爲特種之加法也.仿此,一數目之倍數,就以上三種正運算法而言,亦爲自足之領域;但奇數之領域,或一數之方數所成之領域,則祇能就乘及乘方而言爲自足者,就加而言,即有不能.

就減法而言,自然數之領域不能自足.蓋在自然數之領域內施行減法時,必須被減數大於減數而後可.吾人倘不欲自限於此種減法,則迄今所知之數目領域,必得加以擴大,即新數目之創用是也.此項新數目,實爲"吾人精神之自由創造"[1].但吾人必須使此項數目適於運算,故有對之設立定律之必要.將其加入已有之領域時,即以此項定律爲根據.於此,吾人須以保持之原則(Prinzip der Permanenz)爲指歸,此原則雖早多默用之,但其對於算術之系統的建設上之意義,則首爲韓克爾(H. Hankel)[2]所指出,按此原則,凡適用於原有數目之運算規則,其已知者,當使其包含在適用於新數目之規則內,成爲特例,而凡適用於原有數目之定律,當儘量對於新數目保存之.但此原則,不能視

1. Dedekind 前所引書. 參觀高斯致培塞爾信(1811 年十一月廿一日, Gauss 全集 10, 1, 363),其中有云:"吾人不可忘却,函數及一切數學上概念之結合,蓋僅爲吾人自己之創作,故吾人所用以出發之定義,遇有失其意義時,不當問其'應取何者,'而當問'何者爲便,'此則個人所愼遵循者也. 舉例言之,如負乘負之積是." (并參觀 §47 之 2.)

2. H. Hankel, Vorlesungen üb. d. komplexen Zahlen. Leipzig 1867.

爲證法上之根據,[1] 且新數目方面之規則,非爲證明而係設定者,故於應用此原則時,當須指出運算法之推用於已擴大領域,不致發生矛盾.

2. 試先一究被減數於減數相等時之減法,則其問題在求得一數 x,有如次之屬性者:

$$a+x=a.$$

加法上之結合律,於此仍當適用. 如是則與 § **12**, **3**. 內之情形同,故於 $c=a$ 時,(4) 與 (5) 仍適用,卽

$$a-a=(a+b)-(a+b)$$

$$=(a-b)-(a-b),$$

從可知 x 與 a 之値並無關係. 此數今以 0 表之,且不問 a 爲何數,倘吾人假定交易律於此新數目仍適用,則有

$$a-a=0,$$

(1)

$$a+0=0+a=a.$$

如是,迄今祇當作爲一數字之零,0,今亦用之爲數目矣. 此數目與 § **3**, **4**. 內之零羣相當.

3. 今如被減數小於減數,例如 $3-7$,則可將此寫作下式.

---

1. Hankel 名此原則爲"引路"的根本定理,使吾人於設定新數目之結合定律時,得有所遵循,蓋此項定律之本身,初無若何之限制而可任意者也.

$$3-7=3-(3+4).$$

如將§**12**內之公式(9)用於此,卽得

$$3-7=3-3-4=0-4.$$

於此,吾人儘先將可能之減法施行,故先減去3,得0,然後再求將4由之減去.

如是,吾人可將此類之任何一減式,變爲由0減去之式,卽,以0爲被減數者．其普通式如下:

$$a-b=0-(b-a) \qquad a<b.$$

此種以0爲被減數之減式,吾人今卽用之爲新數目,而因其被減數恆爲同一之0,故可略去之,將$0-4$簡作-4.廣之,

(2) $$-a=0-a.$$

此卽是,自然數領域內所不能有之減式$0-a$,吾人卽將其作爲新數目$-a$用入,幷按減之定義,使此數目有此屬性,卽,與a相加時得0;以符號表之,

(3) $$a+(-a)=0.$$

4. 如是所用入之數目,名之爲負數,幷將前此所原有之數目,名爲正數,以與之相對．負數前之減號,於是失去其定義(2)所賦予之運算號性質,而成爲標明負數之標記,吾人名之曰數目之性質號．對於正數,吾人如須標明之,則亦可加一性質號＋於其前．正數,負數,及0,總稱之

爲整數. $+a$ 與 $-a$, 其和適爲0, 吾人名此二者爲相反之數. 倘於(3)內仍假定其適用交易律, 則此項名稱自爲互相者. 0與其自己相反, 卽, $+0$ 與 -0 相同. 相反數之相反數, 仍爲原數, 卽

$$-(-a)=+a, \tag{4}$$

蓋按(3)與(2), 可知

$$a=0-(-a)=-(-a)$$

也. 因之, 公式(1)亦卽可推及於 a 爲負數之時.

設 a 爲一正數或負數, 則 $+a$ 與 $-a$ 二相反數中之正數, 名爲 a 之絕對值, 以 $|a|$ 表之. 例如

$$|-5|=5.$$

5. 用以下之方法, 吾人可對於整數作其大小順序如下:

1. 設 a 與 b 爲正數, a 大於 b, 則吾人云 $-a$ 小於 $-b$.

於 $b=0$ 時, 吾人仍用此規定, 因而

2. 正數均大於0, 負數均小於0.

3. 每個正數大於每個負數.

由此項規定, 則有二任何之整數時, 如 a 與 b, 其間關係恆有以下三者中之一, 亦祇有其一:

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b.$$

而如有三個數目 a, b, c 時,

倘 $a<b$ 及 $b<c$, 則亦 $a<c$.

任何一整數之值,得此項規定,卽已確定.爲與絕對值分別計,吾人亦稱此種值爲相對值.吾人於是可將整數確定的列出之如下,其兩端均可入於無限:

$$\cdots\cdots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \cdots\cdots$$

於此,每一數較在其左者爲大,較在其右者則爲小.

6. 欲將正數與負數之列,與具體事物相關,俾易明瞭其意義,則吾人對於"零,"不當以"一無所有"之概念對之,而當視爲若干多之事物,其數有定,但尙未經確定者,故可以此爲"標準數,"而將所論之多寡,與之相較.如是則正數可視爲超出,負數爲不足,均對此標準數而言.用此種概念時,吾人卽不難應用整數之列,以爲計點事物之具;凡具有相反性之事物,如收入與支出,寒暑表上冰點上下之度數,南北緯度,正負電等,均可以整數方面之正負表之.

用直線上之點,將數目之列圖表之,此法亦以上項之概念爲根據.圖表法不獨於敎學上,使算術定律之推論,得有具體之觀念,故多用處,且代數學之得以應用於幾何學上,重要者如解析幾何學及微積分之幾何的應用,亦以此爲基礎,其重要可知也.

於一直線上取一點 P_0, 爲零點.由此點出發,吾人可緣直線之兩方向進行,其一方向內之點,與其他方向內者,其

間有相反之關係可求.其一方向,吾人名之爲正方向,其他則爲負方向.於正方向內再取一點 P_1,用 P_0P_1 段爲度,

圖 1

於正方向內自 P_1 出發,負方向內自 P_0 出發,向兩方度此直線.如是則吾人可得一列之點,其間之距離均相等,兩方均可入於無限,其由 P_1 出發於正方向內所得者爲 P_2, P_3, P_4, ……, 由 P_0 出發於負方向內所得者爲 P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, …….於是吾人可將任何一整數 a, 用 P_a 點圖表之,此點之標數爲 a.吾人名 P_a 點爲數目 a 之圖,簡表之爲"a 點."a 之絕對值 $|a|$, 卽 a 點與零點間之距離.

7. 負數亦首見於印度;當巴士加拉(Bhâskara, 生於紀元後 1114 年)之世,必已完全發見.其在泰西雖 Leonardo Pisano (1225 年時), Nicolas Chuquet (1484), Michael Stifel (1544) 等已有其正確觀念,但直至解析幾何學成立後,始爲人所承認.

關於數目圖表法之歷史,以及 Nicolas Oresme (1350 年時)對此之供獻,可參觀 Krazer, Zur Gesch. d. graph. Darstellung, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 24 (1915) 及 Wieleitner, Bibl. Math. 14 (1915).

§14. 整數領域內之加減

吾人今按自己之意,對於整數之算法,制爲若干規律如下,但吾人恆以前所云之保持之原則爲指歸.

1. 加法. 設 a, b 爲二整數,其絕對值爲 α, β, 並設 $\alpha \leqq \beta$. 於是吾人設定:

倘	a	b		
	$+$	$+$	則	$a+b=\alpha+\beta$
(1)	$-$	$+$		$a+b=\beta-\alpha$
	$+$	$-$		$a+b=-(\beta-\alpha)$
	$-$	$-$		$a+b=-(\alpha+\beta)$

(2) $$a+b=b+a.$$

於此,0 可作爲正數,亦可作爲負數用.

藉列點(圖 1)之助,加法可如下圖表之:

如欲於數目 a 上加以數目 b, 其絕對值爲 β 者, 可按 b 之爲正或爲負, 由 a 點出發, 向前或向後計點 β 個點. 如是所得之終點, 卽爲數目 $a+b$ 之圖.

2. 減法. 在同樣之假定 $\alpha \leqq \beta$ 下, 吾人設定:

倘	a	b		
	$+$	$+$	則	$a-b=-(\beta-\alpha)$
(3)	$-$	$+$		$a-b=-(\alpha+\beta)$

$$+\quad -\qquad a-b=\alpha+\beta$$

$$-\quad -\qquad a-b=\beta-\alpha$$

(4) $$b-a=-(a-b).$$

自然數之加與減(0亦在內),可見其已含於(1)及(3)內;任何數目,不問其間之大小關係如何,吾人於是均得用此二公式以加減之.其所得之結果,恆爲數列內之一確定數目.

3. 將公式(3)與(1)並用時,可知對於任何二整數,有

(5) $$a-b=a+(-b).$$

用語言表之:減去任何一數,與加上其相反之數,意義相同.

因此,加減二法,可融而爲一,而其單調性則可併爲一定理如下:

設 a, b, c 爲任何三整數,如 $a>b$,則亦 $a+c>b+c$.

由(1)與(3),復得定理如下:

一和數之絕對值,至多等於其各被加數之絕對值之和.

此定理即可推及於若干被加數,得[1]

1. 試用數目之圖表法,以得此定理之圖解,則其明顯猶如自明者.

(6)　$|a+b+c+\cdots\cdots| \leqq |a|+|b|+|c|+\cdots\cdots$ 蓋祇當被加數之號全相同時,方能相等也.

4. 加法上之結合律. 加法上之交易律,吾人已於(2)內假定之. 其結合律則見於下式中:

(7)
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

於此, a, b, c 爲任何三數目,其絕對值以 α, β, γ 表之.

此定律實可由定義(1)與(2)得之. 因 a, b, c 之號及大小而發生之不同事例,得如次之說明後,其數可卽減少: 公式(7)如已適用於任何三數目 a, b, c 所成之系統,則 a 與 b 易,或 b 與 c 易,或 c 與 a 易,或亦可將 a, b, c 易爲 $-a, -b, -c$ 後,亦仍適用. 因之,吾人祇須於 $\alpha \gtreqless \beta \gtreqless \gamma$, 及 $\gamma=c$ (卽 c 爲正數)之假定下,證明(7)之適用,則已可無問題.

於是吾人祇須按 a 與 b 之號別爲四個事例. 按(7)與(1),吾人所當證明者爲如次之四事:

1. a 與 b 均爲正:
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

2. a 爲負, b 爲正:
$$(\beta-\alpha)+\gamma=(\beta+\gamma)-\alpha$$

3. a 爲正, b 爲負:
$$\gamma-(\beta-\alpha)=\alpha+(\gamma-\beta).$$

4. a 與 b 均爲負:
$$\gamma-(\alpha+\beta)=(\gamma-\alpha)-\beta,\ \gamma>\alpha+\beta,$$
$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha-(\gamma-\beta),\ \gamma<\alpha+\beta.$$

此項算式之適用,不難對於每一事例證明之.例如欲證明2.之適用,可取一羣B,其數目爲β者,由之取去一羣A,其數目爲α者,再加入一羣C,其數爲γ者,則所得之羣可以$(B-A)+C$或$(B+C)-A$表之.

5. 吾人如將§**8**, **3**.內所已用之法,詳細觀察之,則可得如次之普遍定律:

倘有任何一羣整數(被加數),須求其和,則可先將其中任何二數合之,以得其和,於是此羣中之元素,即較前爲少;再於其中任取二者合之,並繼續此方法,直至祇有一數目爲止.此數目與先前諸運算法之順序並無關係,名爲原有諸數之和.

6. 交易律與結合律,於減法方面,其形式與前不同.但如吾人將減視爲相反數目之加,則亦不難由加法方面之形式中推得之.設a, b, c爲任何三數,則關於此之公式如下:

$$a-b=-(b-a) \qquad [\text{如}\ (4)],$$

$$(a+b)-c=a+(b-c),$$

(8)

$$(a-b)+c=a-(b-c)=a+(c-b),$$

$$(a-b)-c=a-(b+c)-(a-c)-b.$$

觀以上之公式,可知§**12**內所已得之規則,關於自然數

領域內括弧式之減法者,亦可推至於任何之整數.故吾人有

(9) $$a-(b+c\cdots\cdots+n)=a-b-\cdots\cdots-n.$$

由若干加及減所合成之式,謂之總.其中須加或須減之各數,均名為項.

§15. 整數領域內之乘法

1. 倘如§**9**內所明,吾人將乘視為加之反復,則被乘數為負數或為0時,此項概念亦尚能適用.於此,吾人不難由§**14**內之(9),對於二自然數a, b,得如次之式:

(1) $$a(-b)=-(ab)$$

(2) $$a\,0=0.$$

但如乘數為負數時,此種定義即無意義可言.故對於此種符號當予以何種意義,是在吾人之決定.因之,吾人可將下式作為定義:

(3) $$(-a)\cdot b=-(ab),$$

(4) $$(-a)(-b)=ab,$$

(5) $$0\cdot b=0.$$

倘吾人假定交易律之適用,則公式(3)可自(1)得之,至於公式(4),則如假定(3)亦能適用於b為負數時,即可由§**13**.(4)以得之.公式(5),按交易律,可由(2)[1]得之.

1. A. Loewy (見 Lehrb. d. Algebra, 第388頁) 將整數之乘法建立在$a\cdot 1=a$及$a(b+1)=ab+a$二公式上,其法在規定此二式之適用於一切正負數,然後由之以證明以上所列乘法之諸規則.

2. 根據以上之公式,及關於整數之大小順序之規定,即可由加法之單調定律,以推得乘法之單調定律:

設 $a>b$, 則

$$\text{於任何正數}\ c:\quad ac>bc$$

$$\text{於任何負數}\ c:\quad ac<bc$$

$$\text{而於}\quad c=0:\quad ac=bc.$$

以前 (1) 至 (5) 各公式內,已將任何整數 a, b 相乘時之交易律

(6)
$$ab=ba$$

含入,並可由之得以下之定理:

二數之乘積,其因子中至少有一個爲零時,方能成爲零,亦必成爲零.

二正數或二負數之乘積,爲一正數.

一正數與一負數相乘時,其積爲負數.

3. 乘法上之結合定律,爲

(7)
$$(ab)c=a(bc).$$

吾人不難就變換符號所得之各種事例,由正數方面之定律,及以前之種種規定,以推得之.如是,適用於任何多因子所成乘積

$$P=abc\cdots\cdots k$$

之普遍定理,亦可如§9, 4. 內證明之,而吾人求此乘積時,可先任作二因子之積,並繼續任作之以至於最後獲得

一數目,此數目與運算之順序並無關係.

關於乘積之號,吾人有如次之定理:

一乘之爲正或爲負,決定於其中負因子之數爲偶或爲奇.

4. 分配定律於整數之相乘方面亦仍適用,因而§**10. 2**. 內關於二和數之積之定理,對於任何整數之被加數,亦仍爲適用者.以下三式,爲此定理之實例中之特爲重要者,故於此舉出之:

$$(a+b)(a+b) \text{ 或 } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

(8) $$(a-b)(a-b) \text{ 或 } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

5. 吾人既有任何多因子之乘積可求,則負數之方數,其概念即不難得之.負數方數之指數倘爲偶者,則此方數爲正數;倘爲奇數,則方數爲負數:

(9) $$(-a)^n=a^n \ (n \text{ 爲偶數}),$$

$$=-a^n \ (n \text{ 爲奇數}).$$

從可知負數之平方恆爲正數.

此外,尚有下列二式亦可提出:

(10) $$(-1)^n=+1, \text{ 於 } n \text{ 爲偶數時},$$

$$=-1, \text{ 於 } n \text{ 爲奇數時}.$$

此式之應用尤多,吾人常用之以表一數目隨 n 之爲偶或

奇而爲正或爲負. 例如(9)亦可寫作下式:

$$(-a)^n=(-1)^n a^n.$$

6. 吾人旣規定種種運算規律後,則加,減及乘三種運算法,於整數領域內已可無疑義,且可無限制的施行,卽整數間之任何一個此種運算,其結果恆爲一確定之整數. 故就加,減及乘而言,整數成爲一自足之領域(但對於乘方而言,尙不能自足,因吾人對於指數爲負數之方數尙未有說明也).

第　三　章

除法　有理數

§ 16. 除法及數目之可除性

1. 設 a 與 b 爲自然數,則吾人恆可確定一正乘數 m,使 mb 大於 a.

蓋如 $a=1$,則可知對於任何 b,此定理均可用;因 b 旣 $\geqq 1$,則吾人祇須取 $n>1$,卽有 $nb>1$. 但由此卽可知 a 爲任何數時,$nab>a$,故如 $m\geqq na$ 時,則必 $mb>a$.

今如 $b<a$,則能使 $mb>a$ 之諸數目中可有一最小者.此數必大於1,故可用 $q+1$ 以表之.吾人於是有

$$qb\leqq a<(q+1)b.$$

試設
$$a-qb=r,$$

則如 $qb=a$ 時,$r=0$,否則此數爲一正數,且必小於 b. 故得定理如下:

設 a, b 爲二已知之自然數.$b<a$,則可求得一正數 q,以及一數 r,大於或等於0但小於 b 者,使

$$a=qb+r,\tag{1}$$

且 q, r 二數,爲 a, b 所不二的決定.

由已知之a, b, 以求q, r二數, 名爲以b除a; a爲被除數, b爲除數. 數目q謂之商數, r則爲餘數. 吾人可云: "a內含有b至q倍,其餘爲r."

吾人日常生活中,常有該項問題遇到,如須將a個不可分之事物,歸爲相同之b部分是,此時吾人須用此方法矣.就一般言之,其結果恆不能恰恰無餘.

倘a, b已用十進法記出,吾人須如何方能求得q與r二數,此則初等的數字課中已有之,故不再及.

2. 設餘數爲0, 則吾人云: "b能將a除盡," 或曰 "a可爲b所除," 或亦可云"b爲a之除數," "a爲b之因子," "以b除a適盡," "a爲b之倍數."

故如有一整數m, 能使

$$a=mb, \tag{2}$$

則a可爲b所除. 如是,此處之問題,係先有一乘積a及一因子b, 而須求其他一因子m. 故求m之運算法,實爲乘法之反. m名爲a與b之商數. 爲表明此關係,吾人恆將其寫作

$$m=a:b, \text{或 } m=\frac{a}{b},$$

$$\text{或 } m=a/b.$$

以語言表之: m等於a被b除.

倘將可除之定義推廣之,則吾人可云:

數目 0 可爲任何正數或負數所除. 蓋方程(2)內 $a=0$, $m=0$ 時, b 可爲任何數, 此方程無不適用. 倘 a 可爲 b 所除, 則 a 亦可爲 $-b$ 所除, 而 $-a$ 亦可爲 $+b$ 與 $-b$ 所除. 二數之號同, 則其商爲正, 號異則商爲負. 但吾人提及一數目之除數時, 吾人恆以其自然數(正數)者爲限.

任何一數, 可爲其自己本身所除, 亦可爲 1 所除. 蓋於 $a=b$, $m=1$ 時, 方程(2)仍適用, 而如 $b=1$, $a=m$, 方程亦仍成立也. 此卽:

$$\frac{a}{a}=1 \text{ 及 } \frac{a}{1}=a.$$

凡與 0 不同之數, 不能以 0 除之. 蓋方程(2)於 $b=0$ 時, 必須 $a=0$ 方能成立. 但如 a 與 b 均爲 0, 則 m 爲任何數均可.

3. 由定義, 吾人尙可得如下之定理:

倘乘積之一因子可爲 b 所除, 則此全乘積可爲 b 所除. 但乘積可爲 b 所除時, 不必其中有因子能爲 b 所除者; 例如 $3\cdot4$ 可爲 6 所除, 但 3 與 4 均非爲 6 所可除者.

倘 a 與 b 二數, 可爲一第三數 c 所除, 則 $a+b$ 與 $a-b$ 均可爲 c 所除; 吾人亦可將此定理視爲一較廣定理之特例:

設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 諸數, 均可爲 b 所除, 並設 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 爲任何之數, 則

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots\cdots$$

亦可爲 b 所除.

蓋按(2),可有數目 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$, 能使

$$a_1=m_1 b,\ a_2=m_2 b,\ a_3=m_3 b,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

者,故

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots\cdots=$$

$$b(m_1c_1+m_2c_2+m_3c_3+\cdots\cdots)=b\cdot M.$$

§17. 最大公約數

1. 倘 a 與 b 二自然數可爲一第三數目 c 所除,則 c 名爲 a 與 b 之公約數.因數目之除數,決不能較該數目本身爲大,故在 a, b 之諸除數中,必有其一爲最大者.此數名爲 a, b 二數之最大公約數.求已知二數之最大公約數,實爲算術中根本任務之一.對於此之解法,歐几里得曾已得之,故即名該法爲歐几里得之Algorithmus,[1] 或稱爲最大公約數之Algorithmus;今述之於下:

2. 設 a 與 a_1 爲已知二數,可假定其爲正數;今須求其最大公約數.倘此二數相等,則其值即爲此所求之最大公約數.故吾人可假定其不相等,並設 $a>a_1$.今以 a_1 除 a,則除不盡時卽有餘數可得,此餘數必小於 a_1,可以 a_2 表

1. Euklid, El. VII, 2.

之.再用a_2以除a_1,倘仍不盡,則又得一餘數a_3,此數亦必小於a_2.如是繼續進行時,所得之餘數.即逐漸減小,故經過若干次之除後,必可適盡.蓋$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$相繼之數,爲等於或小於$a_1$的數所成有限羣之部分,故亦爲已整列之有限羣.而有一最後之元素.除至此最後之餘數時,必得適盡之除法,而運算於是終了.此方法可用以下之諸式。表出之,$q, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{n-1}$等,爲各次相除所得之商數:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
a &= q \cdot a_1 + a_2,\\
a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-2} &= q_{n-2} \cdot a_{n-1} + a_n,\\
a_{n-1} &= q_{n-1} \cdot a_n.
\end{aligned}
$$

吾人今可證明:

a_n爲a與a_1之最大公約數.

蓋如吾人由最後一方程推至於第一個,則由最後一個者,可知a_n爲a_{n-1}之除數,而由最後次一個,可知a_n亦爲a_{n-2}之除數;再往上推,可知a_n並爲a_{n-3}等等之除數,以至於爲a_1及a之除數.反之,由第一方程亦可知a與a_1之公共除數,必爲a_2之除數,而由第二方程,亦可知必同爲a_3之除數,等等,以至於爲a_n之除數.故可知.

1. a_n爲a與a_1之除數.

2. a與a_1之公約數爲a_n之除數.

今設d爲a與a_1之最大公約數,則由1.,可知

$$a_n \gtreqless d,$$

而由2.,又可知 $$a_n \geqq d,$$

故必 $$a_n = d.$$

由此,可得以下之系:

二數之除數,亦必爲其最大公約數之除數.

試舉例以明之:

$$\begin{aligned} 6552 &= 14 \cdot 448 + 280, \\ 448 &= 1 \cdot 280 + 168, \\ 280 &= 1 \cdot 168 + 112, \\ 168 &= 1 \cdot 112 + 56, \\ 112 &= 2 \cdot 56. \end{aligned}$$

或爲較明瞭易見計,亦可如下列之:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 14 & & 1 & & 1 & & 1 & & 2 \\ 6552 & : & 448 & : & 280 & : & 168 & : & 112 & : 56 \\ 6272 & & 280 & & 168 & & 112 & & 112 & \\ \hline & 280 & & 168 & & 112 & & 56 & & 0 \end{array}$$

故得56爲6552與448之最大公約數.

3. 求最大公約數,時吾人亦可用

$$a = (q+1)b - (b-r)$$

一式,以代

$$a = qb + r.$$

倘 $b-r$ 小於 r, 卽 $2r$ 大於 b, 則用此式較爲便利. 倘如是, 吾人名 $-(b-r)$ 一負數爲絕對最小餘數. 用此絕對最小餘數於 (1) 之算法內, 吾人可較速達到目的.

仍用以上之例, 則可如下算出之:

$$6552=15\cdot 448-168,$$

$$448=3\cdot 168-56,$$

$$168=3\cdot 56$$

或

$$\begin{array}{cccc} & 15 & 3 & 3 \\ 6552 : & 448 : & 168 : & 56 \\ 6720 & 504 & 168 & \\ \hline -168 & -56 & 0 & \end{array}$$

可見其較前爲速

4. 多於二數之最大公約數, 吾人亦可求之; 此種公約數, 卽諸數之公除數中之最大者. 觀以下之說明, 則知求此種公約數之法, 不難歸之於前述之法中.

設 d 爲 a, b 二數之最大公約數, 則 a, b, c 三數之任何除數, 亦卽爲 d 與 c 之除數, 而 d 與 c 之任何除數, 亦爲 a, b, c 之除數. 因之, d 與 c 之最大公約數, 亦卽爲 a, b, c 之最大公約數.

5. 二數之最大公約數倘爲 1, 卽, 除 1 以外, 二數間無有公約數, 則此二數謂之互質數 (其一對於其他而言爲質

數),或曰不通約數.[1] 倘將其不成問題之除數 1 不計入,則吾人可云,此項數無有公約數可求.

例如 3 與 7, 15 與 49, 105 與 128 均爲此項數.已知之二數 a 與 b,欲知其是否爲互質者,吾人恆可用前述歐氏之法以判定之,雖大數亦可如此.於此,倘 a 與 b 爲互質,則必得其最大公約數 $a_n=1$.

6. 於此吾人有以下之根本定理:

設乘積 ab 可爲 m 所除,a 與 m 爲互質者,則 b 可爲 m 所除.

吾人倘於歐氏之法 (1) 內,設 a 與 $a_1=m$ 爲互質者,則卽不難見此定理之合理,蓋如是,則必得 $a_n=1$,卽

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a &= q_1 \cdot a_1 + a_2,\\
a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-2} &= q_{n-2} \cdot a_{n-1} + 1.
\end{aligned}
$$

用 b 乘此項式後,得

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
ba &= q \cdot ba_1 + ba_2,\\
ba_1 &= q_1 \cdot ba_2 + ba_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
ba_{n-2} &= q_{n-2} \cdot ba_{n-1} + b.
\end{aligned}
$$

1. Fuklid, El. VII. Def. 12.

今如 ba 可爲 a_1 所除,則由第一方程,可知 ba_2 亦可爲 a_1 所除,由第二,又可知 ba_3 亦可爲 a_1 所除,等等,故知 $ba_1, ba_2, ba_3, \cdots\cdots, ba_{n-1}, b$ 諸數均可爲 $a_1=m$ 所除. 吾人所欲證之定理,於是已含在內.

設 a, b 之最大公約數爲 d, 並設

$$a=da', b=db', \tag{4}$$

則 a' 與 b' 爲互質者. 蓋如此二數尙有一公約數 $e>1$, 則 a 與 b 可爲 de 所除,而 d 非爲最大公約數矣.

7. 設有一數,可爲 a, b 二數所除,則此數謂之 a 與 b 之公倍數. 原二數之諸公倍數中,必有其一爲最小者,其餘者則可爲此最小者所除.

蓋如 m 可爲 a 及 b 所除,則亦可爲 da' [見前式(4)] 所除因而可作如下之形式:

$$m=da'n.$$

因此數尙可爲 db' 所除,則必 $a'n$ 可爲 b' 所除,而因 a' 與 b' 爲互質者,故必 n 可爲 b' 所除. 今設 $n=b'e$,

則
$$m=da'b'e.$$

從可知,可爲 a 及 b 所除之數,必亦可爲 $da'b'=ab/d$ 所除,故 ab/d 實爲 a 與 b 二數之最小公倍數.[1]

故如吾人已得 a 與 b 之最大公約數,則其最小公倍數亦即已知.

1. Euklid, El. VII, 34.

8. 最小公倍數之概念,亦可推至於多於二個之數,猶最大公約數然. 如欲求 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 若干數目之最小公倍數,可先求其中任何二者之最小公倍數,即將此易去 a 與 b,以得較少之數目;於是繼續用此法,直至最後祇有一數目爲止,即得所求之最小公倍數.

§18. 質數與合數

除本身及 1 而外,無有其他除數之自然數,謂之質數其由多因子所成之數,謂之合數. 數目 1 於此爲一例外,蓋此數祇有一個除數,其他數目,則祇少均有二除數.就若干方面觀之,吾人不將 1 視爲質數,實較有利.故吾人可將數目分爲三類:單位數,質數及合數. 此種分法,自以方便爲目的,故亦有將單位數同視爲質數者.初觀之似較爲自然也.但吾人則願將單位數與質數相別,俾若干定理得較簡表出之.

關於質數,吾人有以下諸定理:

1. 倘二數目之乘積 ab,可爲一質數 p 所除,則 a, b 二因子中,至少其一可爲 p 所除.[1]

蓋如 a 不能爲 p 所除,則 a 與 p 爲互質者,因 p 除 p 與 1 外,亦無其他除數也. 故如 ab 可爲 p 所除,則按 § 17. 6., b 必可爲 p 所除.

1. Euklid, El. VII, 30.

此定理不難即推廣之:

設 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 諸因子所成之乘積,可爲一質數所除,則此諸因子中,至少有一個可爲此質數所除.

2. 凡合數 m,必可以一種方式,作爲諸質數之乘積表之,或曰分解成爲質因數,但亦祇有此一種方式.

欲證明此定理,吾人可先明白,凡合數至少可爲一質數所除.蓋如 m 爲合數,則必有一除數 m_1,小於 m,但大於 1.倘 m_1 本身亦爲合數,則必有一較小之除數,m_2;繼續用此法推論,可知最後所得之除數,必爲一質數.今設 p_1 爲 m 之質除數,而

(1) $$m = p_1 m_1,$$

則 m_1 小於 m,而如此數非爲質數,亦必有一質除數 p_2.如是,可設

(2) $$m = p_1 p_2 m_2.$$

再仿前法,則因小於一已知數 m 之自然數,其多不能無限,故 $m_1, m_2, \cdots\cdots$ 諸數,必至一質數而止.因之,吾人可將 m 分解成爲質因子,其數爲 n 個:

(3) $$m = p_1 p_2 p_3 \cdots\cdots p_n.$$

$p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ 諸質數中,自可有相同者,且可發見幾次,故吾人可將此項因子,併爲方數.倘 p 發見 π 次,q 發見 X 次,r 發見 ρ 次,等等,則可作

(4) $$m = p^{\pi} q^{X} r^{\rho} \cdots\cdots$$

於此，p, q, r 等均爲不相同之質數，$\pi+\chi+\rho+\cdots\cdots=n$.

由此，吾人亦不難知，此項分解法祇有一方式，蓋按 **1.**，(4) 內已分解之數，不能爲其他質數所除，$p, q, r, \cdots\cdots$ 諸數之發見次數，亦不能多於 $\pi, \chi, \rho, \cdots\cdots$ 次也.

3. 質數之多無限.[1]

今設 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots, \omega$ 爲一列質數，由第一個質數起至 ω 爲止. 試作其乘積，並加以 1:

$$\Omega=\alpha\beta\gamma\cdots\cdots\omega+1, \tag{5}$$

則此數大於 ω，亦不能爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots, \omega$ 諸數所除.蓋用此項質數中之任何其一除此數時，必尙餘 1 也. 因之，Ω 本身或爲質數，或可爲 ω 以上之質數所除. 故不論 ω 爲如何大，恆可有大於 ω 之質數在.

又如 n 爲任何一自然數，則自 1 至 n 多數之乘積，加以 1:

$$N=(1.2.3\cdots\cdots n)+1,$$

吾人可一一研究之. 如數不能爲 $2, 3, \cdots\cdots, n$ 所除，故不論 n 如何大，恆有大於 n 之質數在，或云，n 與 N 之間必尙有質數在. (O. Szász 君所口頭告知).

求一合數之質除數，或判定一已知數之是否爲質數，較之求二數間之最大公約數，困難萬倍.吾人至今尙無解決

1. Euklid, El. IX, 20. 此定理尙有一極簡單之證，係 E. Kummer 所創

此問題之直接方法,而研究質數之分配定律,實爲算術上最深奥問題中之一.吾人今可涉及者如下.

4. 用十進記數法寫出之數 N,是否可爲 2, 3, 5 三個質數所除,吾人有一簡單之標識,可用以判定之.今將 n 位之數目 N 寫出之,則有

$$N=\{a_1a_2\cdots\cdots a_n\}$$
$$=a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}10+a_n.$$

因 10 及其一切方數均可爲 2 及 5 所除,故如 a_n,即其最後之一位,可爲 2 或 5 所除,則 N 亦可爲 2 或 5 所除.

此外則 100 可爲 4 及 25 所除,故如 $a_{n-1}\cdot 10+a_n$,即 N 之最後二位 $\{a_{n-1}a_n\}$ 所表之數,可爲 4 或 25 所除,則 N 亦可爲 4 或 25 所除.仿此,並可得 N 可爲 8 或 125 (以及 2 及 5 之更高的方數)所除之範疇.

今設 q 爲 N 之"横和數",即,不論位值僅加其數字所得之和:

$$q=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n,$$

則 $$N-q=a_1(10^{n-1}-1)+a_2(10^{n-2}-1)+\cdots\cdots+a_{n-1}(10-1).$$

而因 $10-1=9$, $10^2-1=99$, $10^3-1=999$, ……, 均可爲 9 所除,故 $N-q$ 亦可爲 9 所除.因之 N 與 q 二數中倘有其一可爲 3 或 9 所除,則其他一個亦必可爲 3 或 9 所除;於是吾人有如下之規則:

數目 N 之橫和數倘能爲 3 或 9 所除,則此數本身亦能爲 3 或 9 所除.

今如設

$$q'=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\cdots\cdots\pm a_1.$$

則 $$N-q'=a_{n-1}(10+1)+a_{n-2}(10^2-1)+a_{n-3}(10^3+1)+\cdots\cdots.$$

因 $10+1=11$, $10^2-1=99$, $10^3+1=1001$, ……, 均可爲 11 所除.故必 N 與 q' 同時可爲 11 所除或否.

5. 尚有一極簡單之規則,可用以判定許多除數者,並述於此[1]:

今設 m 不能爲 2 與 5 所除,今取此數之倍數中,其末位爲 1 者,並取其最小者 $10\mu+1$ (此種數恆可求得,此則不難知者). 放棄 1 後所得之數目 μ. 名爲 m 之可除數.欲判定一數 $n=10a+\alpha$ 是否可爲 m 所除,可先求 α 與 μ 之乘積,由 a 減去之.如是即得一數 $n'=a-\alpha\mu$; 祇當此數可爲 m 所除時,n 方可爲 m 所除.如 $n'=10a'+\alpha$,則復可求得 $n''=a'-\alpha'\mu$; 並可繼續此法,直至所得之數,直接可判定其能爲 m 所除與否爲止.

倘 $\mu>\frac{m}{2}$, 則吾人可取其補充的可除數 $\overline{\mu}=m-\mu$, 以 α 與 $\overline{\mu}$ 之乘積加於 a 上.

1. 參觀 Züge Arch. d. Math. u. Phys. (3) 4 (1903), 其中尚引有較此以前之著作.

證：因

$$n'=a-\alpha\mu,$$

故
$$10n'=10a-10\alpha\mu$$
$$=10a+\alpha-\sigma(10\mu+1)$$
$$=n-\alpha(10\mu+1).$$

按所設，$10\mu+1$ 可為 m 所除．故必 n' 可為 m 所除時，n 方能為 m 所除．因 m 與 10 係互質者．

倘用補充的可除數，則

$$n'=a+\alpha\bar{\mu}=a+\alpha(m-\mu),$$

而
$$10n'=10a+10\alpha(m-\mu)$$
$$=10a+\alpha+10\alpha m-\alpha(10\mu+1)$$
$$=n+10\alpha m-\alpha(10\mu+1),$$

故得與前相同之結論．

倘 $m=3, 9, 11$，則此定理所明者與前所述之規律無異，此不難見者．

倘 $m=7$，則 $\mu=2$，故須自 a 減去 α 之二倍．

例：
$$
\begin{array}{r}
n=588152243\\
6\\
\hline
218\\
16\\
\hline
505\\
10\\
\hline
588140\\
16\\
\hline
42
\end{array}
$$

42 可為 7 所除，故 n 亦可為 7 可除．

倘 $m=13$, 則 $\mu=9$, 故 $\bar{\mu}=4$, 而須將 a 之四倍加於 a 上.

再舉例以明之:

$$
\begin{array}{r}
n=74546589\\
36\\
\hline
694\\
16\\
\hline
485\\
20\\
\hline
568\\
32\\
\hline
488\\
32\\
\hline
780
\end{array}
$$

780 可爲 13 所除, 故 n 亦可爲 13 所除.

設 $m=19$, 則 $\mu=17$, 故 $\bar{\mu}=2$, 因而須將 a 之二倍加於 a 上.

6. 設 m 非爲質數, 則可將其分解成爲二因子, 每個均大於 1. 倘 $m=ab$, $a \lesseqgtr b$, 則 $a^2 \lesseqgtr m$, 故可知 m 之因子中, 至少當有一個, 其平方不大於 m. 故如難知數目 m 是否爲質數時, 則可先按 **4**. 內之法, 以覘其是否可爲 2, 3, 5, 11 所除. 如其不能, 則可用一切質數除之, 其平方不大於 m 者; 倘均不能除之, 則此數必爲質數無疑. 例如一小於 100 之數, 不能爲 2, 3, 5, 7 所除, 則此數爲一質數. 仿此, 凡 10000 以下之數, 吾人祇須用 100 以下之質數以試之卽可.

7. 決定質數之問題, 古代之數學家已曾從事於此. 愛拉杜斯丁 (Eratosthenes) 之所謂"篩"法, 吾人及今尙得見

其片斷.凡某一數目以下之一切質數,均可用之以決定之.

將某數以下之一切數目,均寫出之,仍按其次序列出.由第一個質數 2 出發,每隔一數,卽抹去一數.如是,一切 2 之倍數(2 本身不在內)卽均被抹去.於是再由 3 開始,每隔二數(已抹去者亦算入)卽抹去一數;幷將此法繼續使用,凡未經抹去之數,均可由之開始,隔適當之數,以抹去他數.如是則最後所存者,卽均爲質數.按 **6**.,可知此種方法,祇須用於開始數目,其平方不大於數列中之最大數者,爲止.例如決定 $121=11^2$ 以下之質數時,祇須抹去 2, 3, 5, 7 之倍數卽可.[1]

此種篩法,以及用已知質數之除法,其應用自極有限,蓋數目之大超過相當限度時,計算工作過繁,實難施行也.故求大數之除數,以及判定其是否爲質數,此實爲算術中最難問題之一.因之,亦有將某種限度以下數目之因子及質數列成爲表,以便檢查者.吾人今日所有之因子表,其最高限度爲 10^7,故 10000000 以下之一切質數,均已知之.[2] 其數

1. P. Stäckel (見 Heidelb. Akad., 1917) 曾用愛氏之法出發,以信深奧之數目論的研究.

2. 此項表,曾由 L. Chernac 計算至 1020000,由 J. Ch. Burckhardt 計算至 3036000,由 Z. Dase 計算其七百萬至九百萬之間者,而其四百萬至六百萬之間者,則爲 Glaisher 氏所計算.因子表之最豐富者,爲 Lehmer 之 Factor Tables for the first ten Millions. Publ. of Carnegie Instit. Washington 1910.尋常便於用之較小者(至 400000 爲止),可於 "Sammlung math. Tafeln" (名 Vega, 由 Hülsse 主編)中得之.關於此之報告,可閱 Gauss 全集 2, 第 181 頁以下. Lehmer 並有一表,載至 10006721 爲止 (Publ. of Carnegie Inst. Washington 1914).

之多,爲664579. 在一百之下者有25,在一千之下者有168,二千之下者有303個質數. 麥塞(Meissel, Math. Ann. 2, 1870, 3, 1871)氏曾有一極可注意之法,使吾人可將大範圍內之質數計算,歸之於較小範圍內之計算. 如是,麥氏曾推定(見Math. Ann. 21, 1883)一萬萬以下,共有5761455個質數. 吾人所已知之最大質數,爲[1]

$$2^{61}-1=2305843009213693951.$$

分解大數時,吾人常須借助於高等算術,主要者爲平方式之理論.

§ 19. 分數

1. 於§ **16. 2.** 內,吾人已知a被b除時,倘a可爲b所除盡,則此法亦可視爲乘法之反. 按此,除之任務如下:

求得一數,使其與一已知數相乘時,得已知之乘積.或亦可云:由以下之方程內,求得數目x:

$$bx=a.$$

所求之數x,可如下式表出之:

$$x=a:b \text{ 或 } x=\frac{a}{b}.$$

此即是,$\frac{a}{b}$爲一數,與b相乘時,可得a:

1. 此數首爲Seelhoff所指出,其後曾屢經他人證明(Ztschr. f. Math. u. Phys. 31, 1886). 按Powers (Am. Math. Monthly, 18, 1911)所論,$2^{89}-1$亦爲一質數.

$$\frac{a}{b}\cdot b=a.$$

如是,必須 a 爲 b 之倍數時, $\frac{a}{b}$ 方有意義可言. 以前吾人曾推廣加法之反,並因之而引入一種新數目,即負數,今如欲推廣除法,則吾人又須將數目之範圍加以擴大,再用入一種新數目,即所謂分數者是. 吾人祇須於形式上作一概念之系統,並制定一運算規律,則此項新數目即可用入. 但此項新數目之系統,不僅此而已,其在外界之事物關係上,實亦有所代表者.

2. 按如次之方式,以獲得分數之概念,實爲最簡單者. 設 m 爲一符號,可用以代表整數中之任何數者(零,正數或負數), n 則爲代表正數之符號. 由此二符號所合成之符號 m/n 或 $\frac{m}{n}$,讀爲"m 被 n 所除," 或"n 分之 m," 爲任何二數 m, n 所完全決定. 吾人名之爲"分數," m 稱爲分子, n 則爲分母.[1]

吾人今提出以下之規定:

1. 用同一之數,將分子與分母乘後,分數之值不變. 即,

$$\frac{m}{n}=\frac{qm}{qn}. \tag{1}$$

---

1. "Bruch" (分數) 一語, 譯自 Leonardo von Pisa 之 "numerus ruptus" (在中世紀較後之著作內, 多用 "fractio" 一語), 而此語則爲亞拉伯語 "al-kasr" 之譯文.

因之,倘分子與分母有公約數,則可將其剔去,分數之值並不受若何之影響,例如 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{10}{15}$. 將公約數剔去,即,以 $\frac{m}{n}$ 代 $\frac{qm}{qn}$,謂之"用 q 約此分數." 其相反之運算,即,以 $\frac{qm}{qn}$ 代 $\frac{m}{n}$,則謂之"用 q 擴此分數."

按此規定,每一分數可有任何多之不同形式,其値則均相同.在此種種形式中,有一爲最簡單者,吾人亦稱之爲約盡式.倘用分子與分母之最大公約數以約分數,則即得此式.分數之約盡式內,分子與分母爲互質者.

倘有若干分數,則吾人恆可使其分母成爲相同者.蓋吾人倘取各分母之公倍數,並將諸分數擴之,則諸分數之分母均可成爲相同者.

例如 $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$ 三分數,倘設 $n=a_1b_1c_1$,則可如下表之:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{ab_1c_1}{n},\quad \frac{b}{b_1}=\frac{a_1bc_1}{n},\quad \frac{c}{c_1}=\frac{a_1b_1c}{n}.$$

若干分數之分母之最小公倍數,名爲此項分數之主要分母.

2. 二分數之分母如相同,則其分子亦相同時,此二分數即相等,亦祇於此時方能相等.否則分子較大之分數,大於分子較小者.

此種規定,因乘法上之單調律,故可與前面之規定不相衝突.關於大小規定之基本假設,於此亦已具有:設 α, β, γ 爲三分數,$\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$,則亦 $\alpha>\gamma$. 吾人亦可用下式總括此種大小之規定:

設 $\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$ 爲二分數,則

$$ab_1 \lesseqgtr ba_1 \text{ 時}, \alpha \lesseqgtr \beta. \tag{2}$$

蓋如將二分數寫作以下之形式時:

$$\alpha=\frac{ab_1}{a_1b_1}, \quad \beta=\frac{a_1b}{a_1b_1},$$

卽得此定理也.

倘二約盡分數相等,如 $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$,則按 (2) 必 $ab_1=ba_1$,而因 a 與 a_1 以及 b 與 b_1 均爲互質者,故按 § **17, 6**, a 當爲 b 之除數,同時,b 亦當爲 a 之除數,且 a_1 爲 b_1 之除數,b_1 亦爲 a_1 之除數. 此則祇有 $a_1=b_1$ (因 a_1 與 b_1 爲正數),以及 $a=b$ 方可能. 故得定理:

分數之約盡式祇有一個. 故如吾人已知 $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$ 二分數均已約盡而相等,則此二分數必相同,卽,$a=b$, $a_1=b_1$.

3. 符號 $\frac{a}{1}$ 之意義,當仍如前爲

$$\frac{a}{1}=a. \tag{3}$$

卽,分數之分母爲1者,等於其分子之整數. 故 $\frac{1}{1}=1$, 而按(1),可知

(4) $$\frac{a}{a}=1.$$

又如 $a=mb$, 則按(1)

$$\frac{a}{b}=\frac{mb}{b}=\frac{m}{1}=m.$$

故如 a 爲 b 之倍數,則 $\frac{a}{b}$ 之意義,與§**16**內所用者同.

觀(3),可知整數可插入分數之列內,以前所定整數間之大小順序,亦已含在分數者內. 凡以0爲分子之分數,其值爲0,以正數爲分子者,分數爲正,以負數爲分子者,分數爲負.

於是吾人可將一切分數,包含正負整數在內,整列之,是謂有理數之列.與整數方面相同,吾人亦將有理數之值分爲絕對值與相對值二者.用絕對值時,吾人僅論其絕對之值或正值,用相對值時,負數恆小於正數,且二負數中,其絕對值較小者爲較大. 分數之絕對值小於1者,謂之眞分數. 故眞分數之分子,其絕對值必小於分母.

3. 欲得一圖解,並使分數應用於實物上,可於代表整數之直線(圖1)上,將其每格均分爲 n 小段,則可由0點出發,計點此項分點(原有之點亦仍計入),於正方向內得

$\frac{+1}{n}$, $\frac{+2}{n}$, $\frac{+3}{n}$, ………於負方向內得 $\frac{-1}{n}$, $\frac{-2}{n}$, $\frac{-3}{n}$, ……. 如是,此項點所代表者即爲一切分數及其大小關係之圖,但此項分數之分母均爲 n,或可化爲 n 者. 在實用上,例如尺度方面,吾人恆設 n 爲10或10之方數.

4. 由(2),可知二正分數中,倘其一之分母較大,二者之分子相等,則此分母較大者之値較小. 蓋如 $a=b$, $a_1>b_1$, 則 $ab_1<a_1b$ 也. 因之,倘有一已知之分數,則吾人必可作任何多之分數,其値均小於此分數. 分數 $\frac{1}{n}$ 之分母 n 愈大,則此分數愈小,而如 a/b 爲一已知之正分數,則吾人恆可取如是大之 n,使 $1/n<a/b$. 此定理實爲以下定理之一特例:

設 α, β 爲任何二不相等之有理數,則可求得任何多之有理數,就其大小而言,均在 α 與 β 之間.

蓋如 $\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$, $\alpha<\beta$, 即 $ab_1<ba_1$, 則 ba_1-ab_1 爲一正整數. 故吾人可取一乘數 q, 使 $q(ba_1-ab_1)$ 大於任何數 r (§ **16**, **1**.), 因而 qab_1 與 qba_1 之間可有任何多的整數. 倘 x 爲如是之一數,則

$$qab_1<x<qba_1,$$

因而

$$\frac{a}{a_1}<\frac{x}{qa_1b_1}<\frac{b}{b_1}.$$

5. 因此定理,吾人欲將有理數按整數之法如是排列之,俾於每一有理數之兩旁,可得其直接相鄰之較小及較大有理數,此實爲不可能之事.

幾何的言之,即凡二有理點之間,吾人尚可插入無數多之有理點也. 在觀念上,此爲自明之理;其意義即謂任何一線段,吾人可任意析之爲任何多之等分. 吾人可云:有理點無所不密.

用尺度上之分點以表有理數時,於絕對值之減短概念內,聯有恆趨於短的線段之觀念,吾人應用分數於實物時,恆有此種觀念同起.但純就概念言之,在上項規定中,實無有客觀上之大小概念在其內也.

6. 以上所論之分數,$\frac{m}{n}$吾人僅以分母n爲正者爲限;就根本上言之,亦已足用. 但有時應用負分母時,可較便利. 惟0一數,則吾人不能用之爲分母. 今用以下之方程,爲負分母的分數之定義:

$$\frac{m}{-n}=\frac{-m}{n}=-\frac{m}{n}. \tag{5}$$

如是,(1)內恆用正數q之限制,即已取消. 除0而外,吾人可取任何整數用之.

§20. 分數之算法

1. 欲將分數相加減,可按§19先作其共同之分母,主

要分母尤佳,將各分數均化為共同分母者.此種方法,謂之通分.

今如

$$\alpha=\frac{a}{n},\quad \beta=\frac{b}{n},$$

則吾人作其和及差之定義如下:

(1) $$\alpha+\beta=\frac{a+b}{n},\quad \alpha-\beta=\frac{a-b}{n}.$$

倘 α 與 β 之分母不同,如 $\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$,則可用 b_1 以擴第一分數,用 a_1 擴第二者,即得二同分母之分數.如是則

(1') $$\alpha+\beta=\frac{ab_1+ba_1}{a_1b_1},\quad \alpha-\beta=\frac{ab_1-ba_1}{a_1b_1}.$$

故可知任何二分數之和與差,仍為一分數,惟不必為約盡之式$\left(例如\ \frac{1}{3}+\frac{5}{12}=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\right)$.加減所得結果,與 α, β 之取何種形式,並無關係;蓋如吾人用 q 以擴大 α, β,則 $\alpha\pm\beta$ 亦為已經 q 所擴後之形式.

於是任何多分數之和數,吾人不難求之,而 § **8**, § **14** 內整數運算方面之諸定律,於此亦仍適用.蓋若干分數之加減,其算法無異於整數方面,第將其單位易為 $\frac{1}{n}$ 耳.其所不同者,則開始時須通分,得結果後又須約分而已.

2. 乘法.二分數 $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$ 之乘積,吾人以 $\frac{ab}{a_1b_1}$ 為定義.由

之,吾人卽可推及任何多分數之乘積:

分數相乘時,將各分母相乘,再將各分子亦相乘.分數之乘積爲一分數,其分子爲諸分數分子之乘積,分母爲諸分數分母之乘積.

所得之結果內,自可將分子與分母之公因子剔去.如是,整數之相乘,可視爲此種乘法之特例.交易律及結合律之適用,此則直接可由定義知之,蓋分子與分母方面均適用此二定律也.按加與乘之規定,分配律亦仍適用.故整數乘法方面之一切定律,有理數乘法上均適用之.

關於符號之規律,於此亦仍舊,卽,乘積之爲正爲負,視負因子數之爲偶爲奇而定.

乘積之因子中有一爲0時,乘積卽爲0,亦至少須有一爲0時,方能爲0.

但關於絕對值之大小關係,則有不同可發生.蓋在此處,吾人之定理如下:

乘積$\alpha\beta$之絕對值小於或大於α,隨β之爲眞分數或非眞分數而定.蓋如$\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$,則按之§**19**.(2),隨aa_1b之小於或大於aa_1b_1,而$\alpha\beta$小於或大於α,卽,倘a, a_1爲正,則其小於或大於隨$b<b_1$或$b_1<b$而定,此卽隨β之爲眞分數或非眞數而定也.

3. 設 α, β, γ 爲分數,而如 γ 非爲 0. 則祇當 $\alpha=\beta$ 時,方能 $\alpha\gamma=\beta\gamma$. 此可由 § **19**, (2) 以知之. 蓋如 $\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$, $\gamma=\frac{c}{c_1}$, 則 $\alpha\gamma=\beta\gamma$ 時,

$$\frac{ac}{a_1c_1}=\frac{bc}{b_1c_1};$$

而如用 b_1 以擴第一分數,用 a_1 擴第二者,即得

$$acb_1=bca_1.$$

因 c 非爲 0, 故按 § **9** 之末,必有

$$ab_1=ba_1,$$

即

$$\alpha=\beta$$

4. 除法. 今可於有理數之領域內,將除法推廣而解決之.

設 α, β 爲二已知有理數. 今欲求得一數 ξ, 使其與 β 相乘時,得 α. 即,須有一數,能適合

$$\alpha=\xi\beta \tag{2}$$

者. 倘 $\beta=0$, 則可見此問題即無法解決,除非 α 亦 $=0$, 因 ξ 爲任何數, $\xi\beta$ 恆爲 0 也. 故如 α 與 β 均爲 0, 則任何之 ξ 可解決此問題. 但若 β 非爲 0, 則此問題祇有一解. 蓋如有二解, ξ 與 ξ', 則必 $\xi\beta=\xi'\beta$. 按 **3.**, 祇有 ξ 與 ξ' 相等,否則必不可能.

故今之問題,在求 (2) 之一解. 今如 $\alpha=\frac{a}{a_1}$, $\beta=\frac{b}{b_1}$, 則可

知

(3) $$\xi=\frac{ab_1}{a_1b}$$

爲其解. 因

$$\xi\beta=\frac{ab_1b}{ba_1b_1}=\frac{a}{a_1}=\alpha.$$

求 ξ 之法, 吾人謂之 α 被 β 除. α 爲被除數, β 爲除數, ξ 爲其商, 寫作

(4) $$\xi=\alpha:\beta \text{ 或 } \frac{\alpha}{\beta}.$$

設 α 與 β 均爲整數, $\alpha=a$, $\beta=b$, 則 $\xi=\frac{a}{b}$, 而如 b 可將 a 除, 則此爲一整數. 故可知, 欲將整數除之不使有餘, 普通祇能以分數解決此問題, 而此則爲分數相除之特例.

5. 按 **2.**, 吾人亦可將 (3) 如是寫之:

(5) $$\xi=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{b_1}{b}.$$

今如 $\alpha=\beta$, 卽 $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, 則 $\xi=1$. 而得

$$\frac{b_1}{b}\cdot\frac{b}{b_1}=1.$$

凡有理數, 如 $\frac{b}{b_1}$ 與 $\frac{b_1}{b}$, 其乘積爲 1 者, 謂之互倒數. 設 $\frac{b}{b_1}=\beta$, 則按 (4) 其倒數可以 $\frac{1}{\beta}$ 表之, 而將 β 中之分子與分母相易時, 卽可得之. 按 (4) 及 (5), 吾人今可寫作:

(6) $$a:b=a\cdot\frac{1}{\beta},$$

故得定理如下:

分數a被分數β所除時,係將a與β之倒數相乘.

$\beta=0$時,(2)成為不可解或不定,故在算術中吾人恆不許以0為除數或為分數之分母.惟在高等解析之某部分中,吾人對於$\frac{1}{0}$一符號亦予以某種意義,實較便利.

6. 按以上所有諸規定,可知分數之加,減,乘,除諸算法,在有理數之領域內可無限制施行,且不致有疑義發生.此項運算法之任何一種,施於有理數時,所得恆為一有理數.故吾人稱此項運算法為有理的運算法,其就有理算法為自足之數目領域,名為有理性之領域,或曰數目之體(Zahlenkörper). 如是,吾人可云:

有理數構成一數目之體.

7. 乘方. 乘之概念既確定,則乘方之法隨之而得. 設a為一分數,n為一自然數,則a^n為n個因子之乘積,此項因子均相同者. a名為底數,n為指數,a^n為a之n次方.

設$a=\frac{a}{b}$,則$a^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

但吾人迄今所確定者,係n為正整數時之乘方. 今試將此概念推至於負指數,並推至於指數為0時. 倘吾人將適用於正整數m及n之根本方程

(7) $$a^m a^n = a^{m+n}$$

推至於任何整數之指數,則此問題已解決.

今於(7)內設 $n=0$, 則 $a^m a^0 = a^m$, 故如 a, 卽 a^m 不等於 0, 則

(8) $$a^0 = 1.$$

又於(7)入設 $n=-m$, 則

$$a^m a^{-m} = a^0 = 1, \text{故}$$

(9) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

因之,倘(7)須適用於一切整數的指數,則必 $a^0=1$, a^{-m} 等於 a^m 之倒.

有此規定,吾人卽可將方數之列,向兩方伸出無限:

$$\cdots\cdots a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \cdots\cdots$$

於此,任何一方數,可用 a 乘其左側者,或用 a 除其右側者得之.

8. 設 a 爲正的非眞分數,卽 $a>1$, 則 a^n 隨 n 之增大而大,此可由方數之定義用反復之乘法以知之.

今如 $a=1+\gamma$, 則 γ 爲一正數,而

$$a^2 = a + a\gamma > 1 + 2\gamma$$

$$a^3 > a + 2a\gamma > 1 + 3\gamma,$$

用完全歸納法時,可知對於任何正整數 m, 有

$$a^m > 1 + m\gamma,$$

或因 $\gamma = a - 1$,

(10) $$\alpha^m > 1 + m(\alpha - 1) \qquad \alpha > 1.$$

如使 m 充分大,則 $1 + m(\alpha-1)$ 可大於任何大之已知數 c.

因之:

設 $\alpha > 1$, c 爲一任何已知之正數,則可有一正數 m, 凡 $n \geqq m$ 時,即 $\alpha^n > c$.

應用至倒數時,可知 $\alpha < 1$ 時,吾人可有充分大之 m, 凡 $n \geqq m$ 時, α^n 即小於任何已知之正數 c.

9. 今再退而論 $\alpha > 1$, 則 α^n 之隨 n 而增大,吾人尙可較詳一論之.

按 (10), 自可知

(11) $$\alpha^m > \gamma \cdot m,$$

於此, $\gamma = \alpha - 1$, 爲與 m 無關之正數.

今設 $k+1$ 爲一任何已知之正整數,則不問整數 n 如何大,恆可有二個相接的 $k+1$ 之倍數,使 n 在其中間:

(12) $$(k+1)m \gtreqqless n < (k+1)(m+1).$$

今將 (11) 之兩端均方至 $(k+1)$ 次,則因 $\alpha^n \geqq \alpha^{(k+1)m}$, 有

(13) $$\alpha^n < \gamma^{k+1} m^{k+1}.$$

又按 (12),

$$m > \frac{n}{k+1} - 1 = \frac{n}{k+1}\left(1 - \frac{k+1}{n}\right).$$

倘 ε 爲一正的眞分數,卽 $0<\varepsilon<1$, 並假定 $n>\frac{k+1}{1-\varepsilon}$, 則

$1-\frac{k+1}{n}>\varepsilon$, 故

$$m>\frac{n\varepsilon}{k+1},$$

而按 (13) $$a^n>\left(\frac{\gamma\varepsilon}{k+1}\right)^{k+1}\cdot n^{k+1}.$$

今設 c 爲任何一已知數,則可使 n 如是大,俾

$$n\left(\frac{\gamma\varepsilon}{k+1}\right)^{k+1}>c,$$

則卽

(14) $$a^n>c\cdot n^k.$$

如是,吾人有以下之定理:

設 $a>1$, k 爲已知之任何自然數, c 爲任何大之正數,則 n 超過充分大之數值時,卽有 $a^n>c\cdot n^k$.

吾人亦可云: a^n 之隨 n 而增大,較之 n 之高次方尤甚.

10. 於 § **15**, **4**. 內,吾人已得極重要之公式

(15) $$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

用此式時,吾人可將二平方之差,化爲一乘積.吾人今可證明如次之定理,俾此式得推廣至於其他等指數的二方數之差:

對於任何正整數之指數 n, 有

(16)　$a^n-b^n=(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b).$

今可用完全歸納法以證明之. 於 $n=2$ 時, 此式與 (15) 相同.今假定其已適用於 n, 則當證明其對於 $n+1$ 於是亦適用.倘如是,則必

(17)　$a^{n+1}-b^{n+1}=(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)(a-b).$

爲簡單計, 可用 F_n 表 (16) 內之第一括弧式, (17) 內之相當者, 則用 F_{n+1} 表之. 如是則

$$F_{n+1}=a^n+bF_n,$$

故

$$\begin{aligned}F_{n+1}(a-b)&=(a^n+bF_n)(a-b)\\&=a^{n+1}-a^nb+bF_n(a-b).\end{aligned}$$

按所設, $F_n(a-b)=a^n-b^n$, 故

$$\begin{aligned}F_{n+1}(a-b)&=a^{n+1}-a^nb+b(a^n-b^n)\\&=a^{n+1}-b^{n+1},\end{aligned}$$

此即 (17) 已經證明,故吾人之定理亦已證明.

吾人亦可將此定理作爲如下之形式表出之:

二等高方數之差,恆可爲其底數之差所除, 其商爲

(18)　$\dfrac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}.$

此公式對於 a, b 之正負值均適用, 惟不能 $a=b$. 今以 $-b$

易 b，則吾人須分別 n 之爲偶或爲奇.

1. n 爲偶，$=2m$，則按(2)，有

$$(19)\qquad \frac{a^{2m}-b^{2m}}{a+b}=a^{2m-1}-a^{2m-2}b+a^{2m-3}b^2-\cdots\cdots+ab^{2m-2}-b^{2m-1},$$

卽，等高之二方數，倘其指數爲偶者，則其差可爲其底數之和所除.按爲上之定理，此差亦可爲其底數之差所除.故按(15)必可爲底數之平方之差所除. 此亦可直接由(18)知之，蓋 $a^{2m}-b^{2m}=(a^2)^m-(b^2)^m$ 也.

2. n 爲奇，$=2m+1$. 如是則按(18)，將 b 易以 $-b$ 後，得

$$(20)\qquad \frac{a^{2m+1}+b^{2m+1}}{a+b}=a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots\cdots-ab^{2m-1}+b^{2m},$$

卽，等高之二方數，倘其指數爲奇者，則其和可爲其底數之和所除.

例如按(18)及(20)，有

$$(21)\qquad \frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2,$$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$$

11. 今於(18)內設 $a=1$，並於 b 處易以 q，則得

$$(22a)\qquad 1+q+q^2+\cdots\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

或用 -1 以以擴分數後，有

(22b) $$1+q+q^2+\cdots\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

第一式可於$q<1$時用之,第二式則用於$q>1$時.倘$q=1$,則此二式均不能用,亦猶(18)內之$a=b$,為不能用者,但公式左端之和數,則成為n.

試舉數例如下:

1. $q=2$:

$$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

2. $q=\frac{1}{2}$;並於(22a)內以$n+1$易n:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}.$$

(22)內之$1, q, q^2, q^3, \cdots\cdots, q^{n-1}$諸項,構成一所謂幾何級數.其中之每一項可用$q$以乘其前一項得之,或其中任何二相接項之商數,恆為$q$,此為幾何級數之屬性.此處之首項,為1;廣之,凡$n$項之幾何級數,其首項為$a$,其商為$q$,則此級數如下:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \cdots\cdots, aq^{n-1}.$$

此級數係用a以乘首項為1之級數而成;故吾人即可按(22)以得其n項之和S:

(23a) $$S=a\frac{1-q^n}{1-q}=a\frac{q^n-1}{q-1},$$

或亦可作

(23b) $$S=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

§21. 有盡小數

1. 吾人所常用及之分數算法,即其加及減,恆須先求其公分母,並通分之.故如分數之分母倘先爲相同者,則其算法即可簡易.十進之分數,即能適於此目的,尤因吾人之量法已採用十進者,故能特爲適用;在尋常應用及科學上(如天文.測地學等),吾人今日多用之.[1] 就根本上言之,此法僅爲十進記法之繼續.以十進法記出之數.

$$\{a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_1\,a_0\}=a_n\,10^n+a_{n-1}\,10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\,10+a_0$$

其中每一數字之位值,較在其左者小十倍.故吾人可將此寫法向右繼續,將位值爲 $\frac{1}{10}=10^{-1}$, $\frac{1}{10^2}=10^{-2}$, $\frac{1}{10^3}=10^{-3}$, ……之數字連下,惟須標明其指數之開始處者.尋常吾人恆用逗點以表之如是,

$$\{a_na_{n-1}\cdots\cdots a_1a_0,\ \alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_m\}$$

---

1. 巴比倫人曾按其記數法作爲六十進之分數,以 60, 60^2, ……,爲分母(辛克雷之表肇自紀元前二千年),同時,埃及人則曾用分子爲1之分數,尤可注意,蓋所用運算,必更繁也(見 Ahm 之算書).古代最重要之數目表,即托拉米 (Ptolemäus) 之弦線表(約當紀元後150年時),亦以六十進之分數表出已知圓心角之弦長.十進分數之發明者實爲維他 (Vieta, Canon mathematicus 1579).但荷蘭人司蒂芬 (Simon Stevin, 1585 時)以及瑞士人皮爾其 (Jobst Bürgi, 1592 年時)亦曾創用,初未知維他已有此發見也.但其算法之發展,則不能不歸功於數目表之應用(三角及對數表等),十六世紀末及十七世紀初之算家,多致力於其計算.其詳見對數章中.

所表者卽爲

$$a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 10+a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\cdots+\frac{a_m}{10^m}$$

一數.是卽用逗點將數目之整數部分與其分數部分相分開.倘數目無有整數部分,卽,在0與1間之數,則可於逗點之整寫一0.

十進分數較尋常分數之主要優點,在使吾人卽可明瞭該數之大小,故有若干數目時,一觀卽可將其作比較,無須特爲決定也.然亦有其弱點,則往往極簡單之分數,如$\frac{1}{3}$,$\frac{5}{6}$,$\frac{3}{7}$等,已無法用有盡之十進分數表之(參觀§**31**及§**66**).

2. 十進分數之算法,與計算整數之法同.

在加及減方面,吾人必須將諸數如是上下列之,使位值相同之數字適相承.倘諸數之位數不同時,則可加以0,使其均相同,於是卽可用恆常之法算之,猶如無有逗點者然,惟所得之結果內,仍須於諸數之逗點處加以逗點.

3. 倘欲用10以乘一十進分數,則祇須將逗點向右移動一位便可,用10^h以乘時,卽向右移動h位.反之,如欲用10或10^h以除之,則可將逗點向左移動一位或h位.吾人祇須於數目之開始處或末後補以適當多之0,則此種運算法恆可施行.

4. 欲將二十進分數相乘,如α與β相乘,並設α於逗點後有μ位,β於逗點後有ν位,則不妨先將其逗點略去,卽,先將整數$10^{\mu}\alpha$與$10^{\nu}\beta$相乘.如是,卽得乘積$10^{\mu+\nu}\alpha\beta$,故欲得$\alpha\beta$時,必須用$10^{\mu+\nu}$除之,卽,須將乘積之$\mu+\nu$位,置於逗點之後.故十進分數之乘法,不難歸之於整數之乘法也.

5. 設α於逗點後有μ位,β有ν位,而欲用β以除α,則可作整數之除:$10^{\nu}\alpha:10^{\nu}\beta$.卽,於除數內將逗點略去,於被除數內則將逗點向右移動ν位,如是則此除法與α被β除相同.故吾人卽可按整數之法除之,迨至整數部分除完後,商內卽須用入逗點.

6. 縮略之十進分數.十進分數內數字之位值,愈在右者愈小.在計算上,或數目之表出上,吾人常可將最在右之數字,自某位以後均略去之,其原因或則緣於未知,或則因問題本身上可不須之.將此項數目略去,謂之將十進分數縮略之.例如數學表(對數表,三角表等)方面,吾人恆取至若干位為止(三位,五位,七位等).計算圓周時,吾人用$\pi=3.14\cdots\cdots$一數,恆用其縮略者,至於須取至若干位,此則隨吾人所須要之精粗而定.例如半徑之長,如精確至$\frac{1}{1000}$,則吾人用π時,至小數四位而止,多亦無意義者.

十進分數之縮略,可按以下之規則為之,此則不難直接由十進分數之概念以得之:

倘略去之數字中,其第一個大於4,則可將保存之數字之末位增1;否則可不變動之.

如是所發生之差誤,至多等於末位之單位之半.倘所略去者祇有一位,而此位爲5,則吾人於末位增1或不增,其差相同.於此種事例方面.倘所用之十進分數較多,則爲糾正此項差誤計,吾人可於末位爲偶數時增以1,爲奇數時卽不增.

關於縮略之十進分數之算法,可閱以下諸書: Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig, 1900; Möller, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung, Wien 1906; Neuendorff, Praktische Mathematik (Aus der Natur u. Geisteswelt Nr. 341), Leipzig 1917.

§ 22. 有盡連分

1. 今設 a 與 a_1 爲二正數,且互質者, $a>a_1$. 倘將歐几里得之法應用於此,則得一串方程如下:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
a &= qa_1 + a_2\\
a_1 &= q_1a_2 + a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-1} &= q_{n-1}a_n + 1\\
a_n &= q_n\cdot 1.
\end{aligned}
$$

其中之餘 $a_2, a_3, \cdots\cdots$, 恆趨於小,故

$$a>a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n>1.$$

今試一論以下諸有理數:

(2) $$\frac{a}{a_1}=x,\ \frac{a_1}{a_2}=x_1,\ \frac{a_2}{a_3}=x_2,\cdots\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}=x_{n-1}.$$

按(1)可知

(3) $$\begin{aligned} x &= q+\frac{1}{x_1}\\ x_1 &= q_1+\frac{1}{x_2}\\ x_2 &= q_2+\frac{1}{x_3}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1} &= q_{n-1}+\frac{1}{x_n}\\ x_n &= q_n. \end{aligned}$$

此處之 q_i 表 $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ 之商,卽 x_i 內所含之最大整數. 故

$$q_i\leqq x_i<q_i+1,$$

於此,等號祇適用於 $i=n$ 時.

2. 吾人亦可將方程(3)視爲與(1)無關者,而如是解釋之: x 爲一非眞分數,吾人將其作爲雜分數寫出之,其整數部分爲 q,其眞分數爲 $\frac{1}{x_1}$,故 x_1 又爲一非眞分數,仍可如上寫出之,等等.就根本上言之,此法自不能與歐几里得之法相異,且吾人惟有根據此法,乃能知對於任何有理數

x, (3) 中之連串的方程恆有終止之時，卽，最後必有整數 $x_n = q_n$ 發生也.

例如 $a=480$, $a_1=139$, 則用歐氏之法時，得

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\
480 : & 139 : & 63 : & 13 : & 11 : & 2 : & 1 \\
417 & 126 & 52 & 11 & 10 & & \\
\hline
63 & 13 & 11 & 2 & 1 & &
\end{array} \tag{4}
$$

用 (3) 時，有

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{480}{139} = 3\frac{63}{139} = 3 + \frac{1}{x_1} \\
x_1 &= \frac{139}{63} = 2\frac{13}{63} = 2 + \frac{1}{x_2} \\
x_2 &= \frac{63}{13} = 4\frac{11}{13} = 4 + \frac{1}{x_3} \\
x_3 &= \frac{13}{11} = 1\frac{2}{11} = 1 + \frac{1}{x_4} \\
x_4 &= \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{x_5} \\
x_5 &= 2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

3. 試於 (3) 之第一方程內，於 x_1 處將第二方程內 x_1 之式代入，再將第三方程內 x_2 之式代入，等等，則得

$$
x = q + \frac{1}{x_1} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}} = \cdots\cdots \tag{6}
$$

$$=q+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{q_{n-1}}+\frac{1}{x_n}.$$

或將 x_n 易入 q_n, 則 x 或

$$\frac{a}{a_1}=q+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{q_{n-1}}+\frac{1}{q_n}. \tag{7}$$

如是之式,謂之(有盡)連分.[1] 諸整正數 $q, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ 謂之部分分母,諸有理數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 名爲其全商. 吾人爲簡單計,可不用(7)而用較簡之寫法:

$$\frac{a}{a_1}=(q, q_1, \cdots\cdots, q_{n-1}, q_n). \tag{8}$$

如是,前所舉之例,其連分如下:

$$\frac{480}{139}=(3, 2, 4, 1, 5, 2).$$

此種寫法,吾人亦可推用於(6),並任意至 x_ν 爲止:

$$x=(q, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{\nu-1}, x_\nu), \tag{9}$$

但如是,則 x_ν 不能爲整數,而由(6)及(7),可知其等於如次之連分:

$$x_\nu=(q_\nu, q_{\nu+1}, \cdots\cdots, q_n). \tag{10}$$

吾人可名全商 x_ν 爲餘連分,係將連分(8),於部分分母 $q_{\nu-1}$ 處中止之而得.

1. 欲意之詳盡 吾人當稱之爲有法連分,以與普通之連分相別,蓋普通連分方面,分子不必爲1,且部分分母 $q, \cdots\cdots, q_n$ 亦不必爲整數也.

以前所用之限制 $a>a_1$, 亦可放棄. 倘 $\frac{a}{a_1}$ 爲一眞分數, 則祇有 $q=0$, 故不妨於 (7) 內去之, 但如用 (8) 之寫法, 則不可去. 例如

$$\frac{139}{480}=(0, 3, 2, 4, 1, 5, 2).$$

吾人並可許 a 取負値, 如是則 $q<\frac{a}{a_1}$ 而爲相接之負整數. 其餘之部分分母均仍爲正整數. 但如吾未有聲明, 則 q 恆視爲非負數.

4. (8) 內之連分, 吾人尙可將其改變之. 蓋在 (1) 內, 餘數 $a_n>1$, 故亦 $q_n>1$. 今設

$$q_n=q_n-1+\frac{1}{1},$$

則 (7) 內之最後部分分母 q_n 卽易爲 q_n-1 與 1 二部分分母. 故

$$\frac{a}{a_1}=(q, q_1, \cdots\cdots q_{n-1}, q_n-1, 1). \tag{8a}$$

此卽任何有理數可有二種方法展爲連分, 其中之一, 其最後部分分母 >1, 其他者之最後部分分母則爲 1. 如是, 部分分母之數可爲偶, 亦可爲奇. 仍以前之例而言, 其第二展開法爲

$$\frac{480}{139}=(3, 2, 4, 1, 5, 1, 1).$$

5. 用歐氏之法,吾人可將一已知之有理數,化成爲連分.反之,自亦可知任何一有盡連分,所表者爲一有理數,故吾人即有此問題,如何將一已知之連分用一有理數 $\frac{a}{a_1}$ 表之.吾人如一究 x 與全商 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 之關係,則解決此問題之法,不言而喻. 按 (3), 有

$$(11)\qquad x=\frac{qx_1+1}{x_1},$$

而如於此式內設 $x_1=q_1+\frac{1}{x_2}$, 則

$$x=\frac{(qq_1+1)x_2+q}{q_1x_2+1}.$$

於此,吾人仍可將 x_2 易以 $q_2+\frac{1}{x_3}$, 等等,故所得之式,其形式爲

$$(12)\qquad x=\frac{A_\nu x_\nu+A_\nu'}{B_\nu x_\nu+B_\nu'}.$$

欲證明此式之普通,可用完全歸納法爲之. 蓋如設 $x_\nu=q_\nu+\frac{1}{x_{\nu+1}}$, 則可得

$$x=\frac{(q_\nu A_\nu+A_\nu')x_{\nu+1}+A_\nu}{(q_\nu B_\nu+B_\nu')x_{\nu+1}+B_\nu},$$

其形式與 (12) 無異,故用該式內之寫法時,必與

$$x=\frac{A_{\nu+1}x_{\nu+1}+A'_{\nu+1}}{B_{\nu+1}x_{\nu+1}+B'_{\nu+1}}$$

相同. 因之,可知

$$A'_{\nu+1}=A_\nu,\ B'_{\nu+1}=B_\nu,$$

故亦

(13) $$A_\nu'=A_{\nu-1},\ B_\nu'=B_{\nu-1},$$

而

(14) $$A_{\nu+1}=q_\nu A_\nu+A_{\nu-1},\ B_{\nu+1}=q_\nu B_\nu+B_{\nu-1}.$$

觀(13)時,可知 x 與任何一全商 x_ν 間,有以下之關係:

(15) $$x=\frac{A_\nu x_\nu+A_{\nu-1}}{B_\nu x_\nu+B_{\nu-1}}.$$

6. 冉公式(14),以下二列數目內:

(16) $$\begin{array}{l} A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_{n+1} \\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots,\ B_{n+1} \end{array}$$

其任何一數,爲其前二數所決定,故吾人祇須知其首二數 A_0, A_1, 以及 B_0, B_1, 則其餘之數, 卽不難由之推得. 今於(15)內設 $\nu=1$, 將其與(11)相較,卽得(17) $A_0=1$, $A_1=q$; $B_0=0$, $B_1=1$.

公式之如(14)者,能使吾人由數列中在前之數,以推得其在後之數,因而數列中之每一數,爲其前若干數所決定. 如是之式,謂之轉推式(Rekursionsformeln). (17)內之值,吾人必須先知之,乃能由此以推其餘之數,謂之轉推之開始條件(Anfangsbedingung der Rekursion). 故吾人可云: (16)內之二數列,其轉推式同,但其開始條件不同.

仍用**2.**內之例時,有

$$
(18)\qquad
\begin{array}{c|ccccccc}
q_\nu & & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 2 \\
\hline
A_\nu & 1 & 3 & 7 & 31 & 38 & 221 & 480 \\
B_\nu & 0 & 1 & 2 & 9 & 11 & 64 & 139
\end{array}
$$

對於第二個展開法,其末後爲

$$
(18a)\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 5 & 1 & 1 \\
\hline
38 & 221 & 259 & 480 \\
11 & 64 & 75 & 139
\end{array}
$$

7. 今於(15)內之 x_ν 處,易以 q_ν,則由(9),可知 x 成爲 $(q, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_\nu)$. 同時,(15)之右端亦卽成爲 $\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}$[見公式(14)],故

$$(19)\qquad \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}=(q, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_\nu).$$

$\nu=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ 之諸分數,謂之連分(8)之近似分數.其分子及分母可用轉推式(14)以計算之.最後之近似分數 $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ 表連分(8)之值.

按(18),連分(3, 2, 4, 1, 5, 2)之近似分數爲

$$\frac{3}{1},\quad \frac{7}{2},\quad \frac{31}{9},\quad \frac{38}{11},\quad \frac{221}{64},\quad \frac{480}{139}.$$

因一切 q_ν 均爲正整數,故由(14),可知

$$A_{\nu+1}>A_\nu,\quad B_{\nu+1}>B_\nu.$$

卽:

相繼的近似分數之分子與分母,恆趨於增大.[1]

8. 今用 B_ν 乘(14)之第一式,用 A_ν 乘其第二式,將其相減,則得

$$A_{\nu+1}B_\nu - B_{\nu+1}A_\nu = A_{\nu-1}B_\nu - B_{\nu-1}A_\nu;$$

或如用 $(-1)^{\nu+1}=(-1)^\nu(-1)$ 乘其兩端,即有

$$(-1)^{\nu+1}(A_{\nu+1}B_\nu - B_{\nu+1}A_\nu) = (-1)^\nu(A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1}).$$

從可知 ν 爲任何値時,此式右端之値恆相同;如設 $\nu=1$,則按(17),此値爲 $(-1)(-1)=1$,故得定理如下:

二相繼的近似分數之分子與分母間,有以下之關係

$$A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1} = (-1)^\nu. \tag{20}$$

9. 由此可得極重要之結果.第一,吾人可知 A_ν 與 B_ν 間無公約數,蓋如有之,則此公約數必能除 ± 1 矣.故

一切近似分數均爲約盡者.

A_ν 與 $A_{\nu-1}$ 以及 B_ν 與 $B_{\nu-1}$ 之間亦必如此,即

二相繼的近似分數之分子間及分母間,均無公約數.

10. 今試一觀任何一近似分數與全連分 x 間之差,則按(15),有

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} - x = \frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_\nu x_\nu + A_{\nu-1}}{B_\nu x_\nu + B_{\nu-1}}$$

$$= \frac{A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1}}{B_\nu(B_\nu x_\nu + B_{\nu-1})}$$

1. 祇當 $q_1=1$ 時,爲一特例,於是 $B_1=B_2$,而分母由 B_2 後方開始增大.

或

$$\frac{A_\nu}{B_\nu}-x=\frac{(-1)^\nu}{B_\nu(B_\nu r_\nu+B_{\nu-1})}. \tag{21}$$

於$\nu=1,2,3,\cdots$,時,此項差數迭爲負正,但右端之分母則恆增大,故得:

近似分數,更迭的較連分之值x爲較小及較大,由兩方漸與之接近,直至最後之$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$與x相等.[1]

從可知近似分數之標數爲奇者,

$$\frac{A_1}{B_1},\quad \frac{A_3}{B_3},\quad \frac{A_5}{B_5},\quad \cdots\cdots$$

構成一向上之數列,其爲偶者

$$\frac{A_2}{B_2},\quad \frac{A_4}{B_4},\quad \frac{A_6}{B_6},\quad \cdots\cdots$$

構成一向下之數列,但第一列內之任何一數,較小於第二列內之任何一數.二數列內相當的二分數之差,即相繼的二分數間之差,就其絕對值而論,恆趨於小,而按(20),有

$$\frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}=\frac{(-1)^\nu}{B_\nu B_{\nu-1}}. \tag{22}$$

11. 近似分數之作用,在使已知之有理數,可近似的用較簡單之分數以表之.所謂較簡單的分數之意義,即分母較小者,此係均就約盡式而言.吾人有一定理如下:

1. 吾人可用圖解之觀念,以明瞭此項相接近.

介於二相繼的近似分數間之分數,不能較此二近似分數之任何其一爲簡單.

今如 $\frac{A}{B}$ 在 $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ 與 $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ 之間,則

$$\frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}},\quad \frac{A}{B}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$$

二差數,其號相同(隨 ν 之爲偶爲奇而爲正爲負),其第一差數之絕對値,較之第二者爲大:

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| > \left|\frac{A}{B}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|>0,$$

或按 (22),

$$\frac{1}{B_\nu B_{\nu-1}}>\frac{|AB_{\nu-1}-BA_{\nu-1}|}{BB_{\nu-1}}>0.$$

由此,知

$$B>B_\nu\cdot|AB_{\nu-1}-BA_{\nu-1}|>0,$$

而因右方之第二因子爲一正整數,故至少當等於1,而得

$$B>B_\nu,$$

此即 $\frac{A}{B}$ 不能較 $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ 爲簡單,較 $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ 自更不簡單矣.

12. 由 (21),吾人可判定一近似分數與 x 間之相去幾何,因而知其精確之程度. 因 $x_\nu\geqq q_\nu$ (祇於 $\nu=n$ 時方可用等號),故 $B_\nu x_\nu+B_{\nu-1}\geqq B_{\nu+1}$, 而

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu}-x\right|\leqq\frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}}, \tag{23}$$

於此,祇當 $\nu=n$ 時,方可用等號. 因之,自亦

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu}-x\right|<\frac{1}{B_\nu^2}. \tag{24}$$

從可知近似分數與連分之眞值間之差,小於該分數分母之平方之倒.

又由 **11**. 之定理,知任何近似分數 $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, 較之不增大分母而得之其他分數,實爲接近於眞值,蓋任何較接近眞值之分數,其分母必較大也.

因近似分數有此項屬性,故吾人多用連分.以代替數目多之分數,俾此項分數可用較簡單而近似者以代之.[1] 例如取至小數 11 位爲止之數值

$$\pi=3.14159265359,$$

其連分爲

$$(3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ \cdots),$$

其近似分數爲

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103993}{33102},\quad \cdots\cdots.$$

此中之第二個,已爲亞希米得(Archimedes)[2] 所得,簡易

---

1. 最初用此法者爲 Daniel Schwenter (Geometriae practicae tractatus, 1618), 繼之者有 Huygens (Descriptio automati planetarii, 1698). Huygen 氏書內,係用齒輪以表星象之運轉,於此,輪上齒數相比,皆使其儘量與行星環繞時間之相比同. 定理 11., Huygens 實已知之.

2. 亞氏之功績,主要者在將 π 夾於二界之間,即 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

算法中所常用之 $3\frac{1}{7}$ 即是; 其第四個, 因其數目可列為 113355, 故特易記憶, 實創自老梅蒂 (Adriaen Metius 卒於 1607 年).[1] 按 (23), 可知其與眞値之差, 不及

$$\frac{1}{113\cdot 33102}=\frac{1}{3740526},$$

故其首六位小數與 π 之眞值相同.[2]

---

1. 因與其子相別, 故稱之爲老梅蒂. 此近似值, 亦有謂梅氏之前已經 Valentin Otho (1573) 所發見, 而述於 Praetorius 者.

2. J. Wallis (Algebra, 1685) 曾將 π 之連分求至 34 個部分分母, 並計算其近似分數. 參閱 Lagrange, 對於 Euler, Algebra (1774) 之補註 (Ostwalds Klassiker Nr. 103). P. Harzer, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 14 (1905), 324.

第四章
無理數

§ 23. 平方根

1. 自然數之數列內,含有其他自然數之二次方(平方),例如

$$
\begin{aligned}
&1=1^2, \quad 4=2^2, \quad 9=3^2, \quad 16=4^2,\\
(1)\qquad &25=5^2, \quad 36=6^2, \quad 49=7^2, \quad 64=8^2,\\
&81=9^2, \quad 100=10^2.
\end{aligned}
$$

此項數目, 1, 4, 9, 16, … 名爲平方數, 1, 2. 3, 4, … 爲其根(較詳當曰平方根). 爲表明此種關係,吾人寫之爲

$$1=\sqrt{1}, \quad 2=\sqrt{4}, \quad 3=\sqrt{9}, \quad 4=\sqrt{16}, \quad \text{等等}.$$

2. 故 $\sqrt{D}$ 一符號所表者爲一數目,其平方等於正數 D. 今如

$$x=\sqrt{D}, \quad \text{則} \quad x^2=D,$$

反之亦然. 從可知平方根之計算,實爲乘方算法之反,於此,方數之值 $(=D)$ 及指數 $(=2)$ 爲已知,所求者則爲其底數. 此種問題,其初祇於 D 爲一數之平方時乃能解決,例如

$$\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3},\quad 蓋因\quad \frac{25}{9}=\frac{5^2}{3^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

也．進之,吾人知 $\sqrt{9}$ 可為 $+3$, 亦可為 -3, 因 -3 之平方亦為 9; 故吾人寫作 $\sqrt{9}=\pm 3$. 廣之,倘 $x^2=D$, 則 $\sqrt{D}$ 可為 $+x$, 亦可為 $-x$, 因而平方根有二相反之值,而為二值者．但平常如不經聲明,則 $\sqrt{D}$ 恆取其正值．

3. 吾人今提出以下之問題:

設有一數,用十進法記出,為已知者,今以 a 表之．今當判定 a 是否為一平方數;倘為平方數,須求其根;倘非平方數,則求其含於 a 中之最大平方數,並求其根．

解決此問題之算法,謂之開方,於 a 前用一符號 $\sqrt{\ }$ 以表之．a 名為被開方數．倘 a 為 100 以下之數,則吾人一檢 (1) 時,卽可解決此問題．

吾人今且假定,對於某數 a, 此問題已解決,卽,吾人已求得一數 α, 能適合

(2) $$\alpha^2 \leqq a < (\alpha+1)^2$$

一條件者．今試由之以推得其他一數目

(3) $$a_1=100a+10b+c$$

之解決法,於此, b 及 c 為二數字．按此,可知 a_1 係由增加 bc 二數字於 a 上而產生者,故 a_1 較之 a 多二位數字．如是,吾人須求一數 α_1, 能適合如次之條件者:

$$a_1{}^2 \leqq a_1 < (a_1+1)^2.$$

今設

(4) $$a_1 = 10\alpha + \beta,$$

則須如是決定 β, 使

(5) $$(10\alpha+\beta)^2 \leqq a_1 < (10\alpha+\beta+1)^2.$$

此處之 β 必爲一位之數; 蓋如 $\beta \geqq 10$, 則按 (3) 及 (5), 可知

$$100(\alpha+1)^2 \leqq (10\alpha+\beta)^2 \leqq 100a+10b+c,$$

故 $$(\alpha+1)^2 \leqq a + \frac{b}{10} + \frac{c}{10^2},$$

而因 $\frac{b}{10}+\frac{c}{10^2}$ 小於 1, $(\alpha+1)^2$ 爲一整數, 即有

$$(\alpha+1)^2 \leqq a,$$

此則與 (2) 相違矣.

按 § **15**, (8) 之第一式,

$$(10\alpha+\beta)^2 = 100\alpha^2 + 20\alpha\beta + \beta^2,$$

故由 (5), 可知必

(6) $$\beta(20\alpha+\beta) \leqq 100(a-\alpha^2)+10b+c,$$

吾人須於此條件下以決定儘量大之 β, 而因 β 之值, 祇能爲 0, 1, 3, …, 9 中之一, 故吾人不難即決定此值. 欲略知其大概, 吾人可用 2α 以除 $10(a-\alpha^2)+b$, 則所得之商, 可爲 β 之暫用值, 但在或種狀況下, 必須減小若干單位方可; 經幾次練習後, 此種算法不難純熟而成爲敏捷. 尋常

所用之開方法,即建立於基礎上,[1] 吾人試舉一例以示其法卽可:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{\ } & 7\,|\,64\,|\,00\,|\,00=2764 \\
 & 4 \\ \hline
47 & 364 \\
7 & 329 \\ \hline
546 & 3500 \\
6 & 3276 \\ \hline
5524 & 22400 \\
4 & 22096 \\ \hline
 & 304
\end{array}
$$

以上第二數字 7, 得自 36 : 4, 本當爲 9, 但必須減成爲 $\beta=7$, 俾 $\beta(20\alpha+\beta)$ 不致超過 364.

因之, 2764^2 或 7639696 爲 7640000 中所含之最大平方數,而

$$7640000=2764^2+304.$$

4. 用相同之方法,吾人亦可求一十進分數,使其平方與一已知數 a 之差,其小如吾人所欲者.

吾人可先求 $10^{2n}a$ 內所含之最大整平方數 α^2. 如是則

(7) $$\alpha^2 \gtreqless 10^{2n}a<(\alpha+1)^2,$$

1. 將被開方數每二位分開之,此法已見於印度人 (Aryabhatta, 紀元後 450 年). 今日所用之開方法形式,首見於 Gemma Frisius 之算書中;此書出於 1540 年頃,當時頗爲流行.

故如設 $\alpha_n=\frac{a}{10^n}$, 則

(8)
$$\alpha_n^2 \lesseqgtr a<\left(\alpha_n+\frac{1}{10^n}\right)^2.$$

吾人於 a 後加 $2n$ 個 0, 則 a 即成爲 $10^{2n}a$, 而將 a 之末後 n 位置於小數點之後, 則即由 a 得 α_n. 倘將 α_n 之末位增大 1, 則所得之值已太大.

數目 α_n 名爲 $\sqrt{a}$ 之近似值, $\sqrt{a}$ 本身則不必已將其用入爲數目. 仍用前例, 則 27,64 爲 764 之平方根近似值, 即

$$27,64^2<764<27,65^2.$$

同此, 吾人可求十進分數平方根之近似值. 吾人祇須由小數點出發, 向兩方將每二位分開之便可, 必要時可於末後加以 0.

5. 繼續此法時, 吾人可得一列之十進分數, 其與 a 平方根之相接近, 繼續增加, 即, 其平方與 a 之差繼續減少. 例如對於 $\sqrt{2}$, 吾人可有如次之一列近似值:

(9) 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ......

此項數值, 構成一向上之數列. 其平方爲(取至小數七位爲止):

1,96; 1,9881; 1,999396; 1,99996l6;

等等. 故其與 2 之差繼續減少, 但均小於 2. 吾人試再作一列數目, 即將 (9) 內每一數之末位增大 1:

(10)　　$1,5;\quad 1,42;\quad 1,415;\quad 1,4143;\quad \cdots\cdots$

此數列係向下者.其平方爲

$$2,25;\quad 2,0164;\quad 2,002225;\quad 2,0002102;$$

等等,亦向2漸次接近,但由上向下.

6. 不用十進分數時,吾人亦可用尋常分數之列,其中之數,與平方根之值漸次接近.試一觀如次之數列:

(11)　　$\frac{1}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{17}{12};\ \frac{41}{29};\ \frac{99}{70};\ \frac{239}{169};\ \cdots\cdots$

則可得其構成之定律如下:

此中每一分數之分子,爲其前一分數之分子加分母之二倍,其分母則爲其前一分數之分子與分母之和.如設 p_n 爲分子, q_n 爲分母,均爲第 n 個分數者,則

(12)　　$p_n=p_{n-1}+2q_{n-1};\quad q_n=p_{n-1}+q_{n-1}.$

用此二轉推式時,吾人可由 $p_1=1$, $q_1=1$ 出發,以得其後分數之分子與分母,其多可隨意而定.由(12),不難知

$$p^2{}_n-2q^2{}_n=-(p^2{}_{n-1}-2q^2{}_{n-1}).$$

故　　$(-1)^n(p^2{}_n-2q^2{}_n)=(-1)^{n-1}(p^2{}_{n-1}-2q^2{}_{n-1}).$

從可知此式於 n 爲任何數,其值均同,而因

$$(p^2{}_1-2q^2{}_1)=1,\ \text{故}$$

(13)　　$p^2{}_n-2q^2{}_n=(-1)^n$

由此,即可知

$$\frac{p^2_n}{q^2_n}=2+\frac{(-1)^n}{q^2_n}. \tag{14}$$

事實上,

$$\left(\frac{1}{1}\right)^2=1=2-\frac{1}{1^2},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{2^2},$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}=2-\frac{1}{5^2},$$

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2=\frac{289}{144}=2+\frac{1}{12^2},$$

$$\left(\frac{41}{29}\right)^2=\frac{1681}{841}=2-\frac{1}{29^2},$$

....

由(12),吾人亦可知分母 q_n 隨 n 而增大,而因其爲正整數,故可超過任何先定之值. 故 n 增大時,(14)內之分數平方與2之差,繼續減小,最後可小於任何小之數,即,此項分數所表 $\sqrt{2}$ 之近似值,恆超於接近. 由(14),並可知分數之平方,迭較2爲小及大. 故吾人可將數列(11)分爲二列:

$$1;\quad \frac{7}{5};\quad \frac{41}{29};\quad \frac{239}{169};\quad \ldots\ldots$$

$$\frac{3}{2};\quad \frac{17}{12};\quad \frac{99}{70};\quad \frac{577}{408};\quad \ldots\ldots$$

其第一列爲向上者，第二列爲向下者，且第一列之數均小於第二列之數，其中相承二數之差恆趨於小，最後可小於任何先定之數．此事實不難知之．按(12)，倘用 q_{n-1} 以乘其第一方程，用 p_{n-1} 乘第二者，則相減後得

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -(p^2{}_{n-1} - 2q^2{}_{n-1}),$$

或按(13)

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n,$$

故
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}},$$

卽上所述之事實也．

7.　此外尚有一計算平方根之近似値之法，此法實已爲海龍(Heron von Alexandria，紀元前120年時)所發見．今如 D 非爲平方數，而欲求 $\sqrt{D}$ 之値，吾人並設 a^2 爲大於 D 之最小平方，卽

$$(a-1)^2 < D < a^2.$$

今試計算如次之數列：

(16)
$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{D}{a}\right); \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{D}{a_1}\right);$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{D}{a_2}\right); \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

以後(§ **104**. **4**.)吾人可知，其所表者爲 $\sqrt{D}$ 之近似値，且其接近恆增加．今姑以 $D=2$ 爲例一論之．於此，$a=2$，故定諸分數(吾人將 $a=2$ 視爲第0個分數並列入)如下：

$$(17)\qquad 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{17}{12};\ \frac{477}{408};\ \frac{665857}{470832};\ \cdots\cdots$$

今如 $a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ 爲第 n 個分數,則由(16)可得轉推式(對於 $n=2, 3, \cdots$):

$$P_n=P^2_{n-1}+DQ^2_{n-1};\quad Q_n=2P_{n-1}Q_{n-1},$$

故得

$$P_n^2-DQ_n^2=(P^2_{n-1}-DQ^2_{n-1})^2,$$

因而可推得

$$P_n^2-DQ_n^2=(P_1^2-DQ_1^2)^{2^{n-1}}.$$

此處 $D=2$, 故(除 $n=0$)

$$P_n^2-2Q_n^2=1,$$

而
$$\frac{P_n^2}{Q_n^2}=2+\frac{1}{Q_n^2}.$$

從可知(17)爲一向下數列,其平方由上向下與2相接近,極爲迅速. (17)內之末後一分數,其平方與2之差,不及 $5\cdot 10^{-12}$. 又可知(17)內之數,自第二個以下,有與(11)內之數相同者,卽與其第 2, 4, 8, 16, … 諸數相同,亦卽與其第 2^n 個相同.

由尋常分數所構成之數列(11)及(17)——與(9)內之十進分數相不同——吾人不難卽發見構成之定律,故可將其伸至無限.

§ 24. 無理數

1. 倘能將一自然數分解成爲質因子,則此數之是否爲平方數,卽不難知之.今設 $a, b, c, \cdots\cdots$ 爲不同之諸質數

$\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 爲正指數,則

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots\cdots$$

一數,祇於 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 均爲偶數時,乃能爲平方數,如係如是,亦必爲平方數.

此定理實爲其他一定理之結果,卽一自然數祇能以一種方式分解成爲質因子也.

倘此條件已成立,則 $\alpha = 2\alpha', \beta = 2\beta', \gamma = 2\gamma', \cdots\cdots$, 而

$$\sqrt{m} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \cdots\cdots$$

但如 m 非爲平方數,則亦無有一分數 $\frac{p}{q}$, 其平方爲 m 者,蓋任何一非整數的約盡分數之平方 $\frac{p^2}{q^2}$, 仍爲一如是之分數也(Eutokios, "亞希米德著作之注疏," 約當紀元後 500 年時出版).

與此相同,一約盡分數 $\frac{m}{n}$, 祇於 m 及 n 俱爲平方數時,乃能爲其他一分數 $\frac{p}{q}$ 之平方.蓋二分數旣約盡,如能相等 $\frac{m}{n} = \frac{p^2}{q^2}$, 則必 $m = p^2$, $n = q^2$ (參觀 § **19**, **2**.).[1]

2. 因之,與乘方相反之算法,極有限制.此種限制之無法解除,猶之分數未用入之前,除法亦曾被限而無法進一步者.

---

1. 談德金於其 "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Braunschweig, 1872) 一書內,曾另有一證法,不必用及數目之可分解成爲質因子一定理.

故吾人如仍不欲自限,則推有將數目之概念,再加以擴充,復再用入一種新數目,而以其與有理數相別,吾人可名之曰無理數.此項新數目,自亦爲吾人精神之所創.故是否須用入之,此則亦爲一便利之問題.對於實用的計算上,倘計算仍僅能施行於有理數範圍內.則對此問題,自可不需可否.推不僅爲算術學內部之和諧,俾許多定理不致繁冗難解計.吾人有採用此種擴充之必要.卽在幾何學上,亦不能少此也.

3. 吾人前已見之,對於任何一有理數,直線上必有其一確定之點.反之,謂對於直線上之任何一點,必有其一有理數,此則不然.吾人試作一勾股形,其勾與股二邊,均爲單位長,則其弦置於直線上,而使其一端與0點相合時,其他端之點卽與$\sqrt{2}$相當,而此則非爲一有理數也.吾人並可用圓規與直線,作一切正有理數之平方根,則不難見甚小之直線段上,雖已有無量數之點,與有理數相當,但此外尚有無數之點,無有有理數與之相當者.對於此項點,吾人亦可將施於有理點之方法,卽算術運算之圖解,應用於其上,故吾人自然而有此思想,對於此種非有理點,亦將某種確定的算術形態,卽所謂"數目"者,與之相當.此亦卽無理數所以發見之歷史的淵源也.

欲將無理數之概念,全建立於幾何觀念上,因卽將數目視爲直線上之點,俾每一點有其一相當之數,此種方法,嚴

格論之,殊多困難.蓋如是則吾人所得之無理數,僅以能在直線上作出者爲限.其他由算術方法而得之無理數,高次根,對數等,欲使其亦有相當之點,則必借助於公理.謂任何一數,必有其直線上之相當點(康圖 G. Cantor 之公理.見 Math. Ann. 5, 1872, 128). 談德金所提出之連續性公理,關於直線者,[1] 其作用正相同;此公理之內容如下:

倘將一直線上所有之一切點如是分爲二類 A 與 A',俾 A 中每一點在 A' 中每一點之左,則有一確定之點 α,將直線如是切爲二部分,其一部分內含有 A 之一切點,其他部分內含有 A' 之一切點.

此項關於直線之公理,蓋由吾人之空間觀念所產生.故純用概念時,殊難確定之.因之,採取此種一公理時,實尚不足使吾人對於數目概念,有純算術的理解.惟在觀念上,則殊使人信之耳.故吾人以後可以之爲補助了解及集法思想之用,猶之符號所成之語言然,不欲用之於論證.故無理數之理論,仍純用算術的方法建立之.於此,吾人採用談德金氏所創之"切"之概念爲基礎.[2]

---

1. 間距相嵌之公理,其作用亦與此相同 (Ascoli Rend. Ist. Lomb. 2, 28, 1895, 並參觀 Bieberbach, Differentialrechnung, Leipzig 1917). 關於必須有之幾何的假設,俾直線上之點得與數列中之數相對應,參觀 Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. Leipzig 1909. F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.

2. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872.

4. 將正負有理數如是分爲二類 A 與 A',使 A 中之每一數小於 A' 中之每一數,謂之有理數區域內之一"切".

如是之一個切,吾人用 $(A \mid A')$ 以表之.其 A 中之有理數,可以 a 表之,A' 中者則以 a' 表之.其他字母之應用,亦按此法.吾人稱 A 爲切之左方,A' 爲右方.

一有理數 r 產生二個切 $(R \mid R')$.

今將小於 r 之一切數,入之於 R,其大於 r 者則均入於 R',r 本身可入於 R 或 R',則 r 爲 R 內之最大數,或爲 R' 之最小數.如是產生之切,吾人名之爲有理切.

但亦有某種切,不能如是用有理數以產生之者;此種切,吾人稱之爲無理切.此可於下例內見之:

今將一切正有理數,其平方大於 2 者,盡取入 A' 中,其餘之一切有理數,則盡取入 A 中.如是,吾人即得一個切.在此切方面,可知 A 中無有最大之數,A' 中亦無最小之數.蓋如 $a^2<2$,則可取一自然數 n 使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2=a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2$$

如是則 $a+\frac{1}{n}<a$,但仍 $\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2$.仿此,並可證明無有最小之 a'.

5. 故如 $(A \mid A')$ 方面有最大之 a 或最小之 a',則此切爲有理切,倘無有最大之 a,亦無最小之 a',則此切爲無理切.

因之,倘$(A\mid A')$爲無理切,則對於任何a,必可有更大之a在,對於任何a',亦必可有更小之a'在.

在每一個切$(A\mid A')$方面,有任意多之數目之對a, a',其差$a'-a$小於任何小之已知正數d.

欲證明此定理,可於A'中取一數目a_0',於A中取一數a_0,並如是取一自然數n,使

$$\delta=\frac{a_0'-a_0}{n}<d.$$

在

$$a_0,\ a_0+\delta,\ a_0+2\delta,\ \cdots\cdots,\ a_0+n\delta=a_0'$$

一數列內,必有最後一個$a_0+k\delta$尚在A內,今以a表之.其後之數$a'=a_0+(k+1)\delta$卽屬於A'.如是則.

$$a'-a=\delta<d.$$

在無理切方面,此二數之間,尚有任意多之數,屬於A及屬於A'者;在有理切方面,亦至少有一方內有任意多之此項數.

吾人今卽將有理數r,與其所產生之二個切相配.

對於一無理切,吾人可用新數目中之一個體,卽一無理數,與之相配,此無理數可以α表之.吾人可云:$(A\mid A')$一個切.確定或產生一數目α.吾人倘欲稱$(A\mid A')$一個切卽爲數目α,亦無不可.如是,可寫作

$$(A\mid A')=\alpha.$$

在以後之論列內,吾人當恆以小寫之拉丁字母表有理數,希臘字母則表無理數.

6. 設 g 爲左方之固定數目,g' 爲右方之固定數目,均爲 $(A \mid A')$ 一個切者,則吾人將 A 內小於 g 之數或 A' 內大於 g' 之數均放棄時,此切及其所產生之數目,不致有何變化.倘吾人如是爲之,則可云該切之左方或右方已有界限,倘兩方均如是爲之,則曰兩方均有界限.此三個事例,吾人以 ${}_g(A \mid A')$, $(A \mid A')_{g'}$, ${}_g(A \mid A')_{g'}$ 表之.

7. 吾人今所有之問題,在使無理數有大小之順序,且將有理數亦按其大小插於其中.

設有二個切 $(A \mid A')$ 與 $(B \mid B')$.倘僅有一數目 a',同時爲 b 者,則此數爲 a' 中之最小者,同時爲 b 中之最大者.此二個切於是爲有理的,其數值同爲 $\alpha=\beta$.故吾人可作一定義如下:

至少須有二個 a',同時爲 b 者,數目 α 乃謂之小於 β.

但如是則必有無量數的如是之數:$a'=b$.觀圖 2,此種

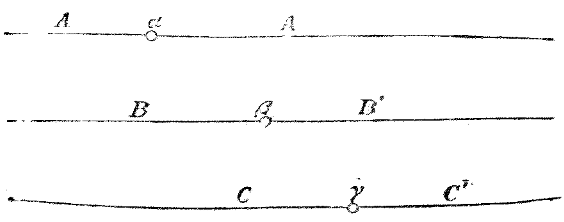

圖 2

關係即不難見,故吾人可有定理如下:

設 $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, 則亦 $\alpha<\gamma$.

如此之大小順序規定,於有理數方面,實與尋常之法相同.吾人祇須將產生有理切之有理數與該項切相配,作為其值便可,蓋如有二有理數,而能求得一第三者,較第一者為大,第二者為小,則此二有理數中之第一者小於第二者.

設 $(A \mid A')$ 為一個切,則任何一數 $-a'$ 小於任何一數 $-a$. 今如以 $-A$ 及 $-A'$ 表一切 $-a$ 及 $-a'$ 之總,則 $(-A' \mid -A)$ 亦為一個切.其所產生之數目,可以 $-\alpha$ 表之,名為與 α 相反之無理數.

8. 吾人或尚可一試,用切之原則以獲得其他新數目.但此為不可能之事,吾人於下可見之:設 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')$ 為有理數及無理數區域內之一個切,則 $\mathbf{A}$ 中之任何數 α 較之 $\mathbf{A}'$ 中之任何數 α' 為小.如是之切,恆可用一有理數或無理數產生之,此數本身可為 $\mathbf{A}$ 中之最大數,或為 $\mathbf{A}'$ 中之最小數.蓋如 r 為任何一有理數,則此數或屬於 $\mathbf{A}$,或屬於 $\mathbf{A}'$. 今以 a 表 $\mathbf{A}$ 中之有理數, a' 表 $\mathbf{A}'$ 中者,則 $(A \mid A')$ 以及其所屬之有理數或無理數 σ 即於以產生.倘 α 在 $\mathbf{A}$ 內,但非為其中之最大數,則其中必有有理數 a, 大於 α 者,故 σ 亦大於 α; 仿此,並可知,倘 α' 屬於 $\mathbf{A}'$, 但非其中之最小者,則 $\sigma<\alpha'$. 故 σ 祇能有此可能性,為 $\mathbf{A}$ 中之最大數,或為 $\mathbf{A}'$ 中之最小

數.故$(\mathbf{A}\mid\mathbf{A}')$除$(A\mid A')$外不能產生其他之數目.

有理數與無理數之總,吾人名之爲實數.按以上所云,可知任何一數,均可於實數區域內作一個切以產生之.

9. 吾人今作如次之定義:

設有一羣數目,倘係無所不密,[1] 且其任何一個切$(\mathbf{A}\ \mathbf{A}')$之$\mathbf{A}$中有最大數或$\mathbf{A}'$中有最小數,則此羣謂之連續者.

如是吾人可云:

實數之羣爲連續者.

反之,有理數之羣則非連續者.在連續之羣方面,任何一個切所決定之數屬於該羣,反之,倘無所不密之羣方面有此屬性,則此羣即爲連續者.

連續性之概念,吾人不難將其推至於任何已整列之羣,即羣內之任何二元素a及b可按一方法以決定其孰先孰後者.例如直線上之點,即係如此,故無所不密之點所成之羣,倘將其任意分爲二部分時,恆決定一羣內之點,則此羣爲連續者.此亦即談德金氏之公理所賦予直線之屬性,故可知此公理與以下之語,其意義正相同:

直線上一切點所成之羣爲連續者.

§25. 有界數羣 上下界

1. 按康圖氏之公理,實數之羣恆可將其與直線上點

1. 見§19, 5.

所成之羣如是相關之,俾數羣內之任何一數,點羣內必有一點與之相當,反之亦然.故凡關於數羣之定理,點羣方面必有與之相當者,而吾人研究其一羣時,其他羣亦即爲吾人所探討.因之,數目與點,數羣與點羣,直可視爲二而一之物,而數羣不妨以點羣(直線的)表之.

設有一點羣$\mathfrak{T}$,以及一數目T,凡$\mathfrak{T}$內之數目,均小於T,則此點羣$\mathfrak{T}$,謂之有界在上者.如是之數T,名爲此羣之上外數.凡大於T之數,同時亦即爲上外數也.

仿此,倘有一數t,凡羣內之數目均大於t,則此羣謂之有界在下者.t名爲其下外數.凡小於t之數,亦均爲下外數.

倘一點羣上下均有界,則此羣可簡稱爲有界羣.羣內之一切數,均在其上下外數之間.

2.　今有一羣$\mathfrak{T}$,係有界在上者.其中之任何一數,可以τ表之.如是,吾人可將一切實數分爲二類如次:$\mathbf{A}'$中含有$\mathfrak{T}$之一切上外數,其餘之一切數則均入於$\mathbf{A}$內.於是吾人即得實數區域內之一個切$(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')$.其所決定之有理數或無理數$\gamma$,名爲$\mathfrak{T}$之上界.

按§**24**, **5**., $(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')$內可有任意多的數目之對$r, r'$,其差小於任何已知之正數.他方面,羣內至少有一數目τ,小於r',但不小於r.凡數目τ,均不能大於γ,蓋凡大於γ者,

卽爲$\mathfrak{T}$之上外數也．故必

$$r \leqq \tau \leqq \gamma \leqq r',$$

此處之等處不能同時均用.於是得如次之定理,而上界亦卽不二的爲其所確定:

$\mathfrak{T}$之上界爲一數目,凡數目τ均不超過之,但τ可任意接近之.

仿此,凡有界在下之羣,亦有一下界.凡羣內之數均不超出之,但可任意與之接近.

正數之羣,係有界在下者,0卽爲其下界.眞分數之羣係有界者,其下界爲-1,上界則爲$+1$.

3. 在有限羣方面,其下界卽爲其中之最小元素,上界則爲其最大元素.在無限羣方面,上下界不必屬於羣內,如以上之諸例所已示及.倘屬於羣內,則其上界名爲其極大值,下界爲其極小值.故上界羣之極大值,或爲其一切上外數之極小值,而下界則爲羣之極小值或爲其下外數之極大值.

設$(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')$爲產生$\alpha$之切,則$\alpha$爲一切數目$a$之上界,同時亦卽爲一切數目$a'$之下界.

§26. 無理數之算法

1. 吾人今須對於無理數區域內之根本運算法,作一說明.

設 α 與 β 爲任何二數,由 $(A \mid A')$ 及 $(B \mid B')$ 二個切所產生,則 $A+B$ 所表者爲一切數目 $a+b$ 之總,$A'+B'$ 爲一切數目 $a'+b'$ 之總. 如是,則 $a+b$ 恆小 $a'+b'$,故 $A+B$ 爲有界在上者,$A'+B'$ 則有界在下. $A+B$ 有一上界,以 γ 表之,$A'+B'$ 之下界,則以 γ' 表之. 今設 r 爲 $A+B$ 內之數,則凡較此小之有理數均屬此羣,故凡不屬於 $A+B$ 之有理數,必較之羣內之任何數爲大,卽爲其上外數. 從可知任何 $\leqq\gamma$ 之有理數,均屬於 $A+B$. 仿此,並可知任何 $\geqq\gamma'$ 之有理數必屬於 $A'+B'$.

但 γ 與 γ' 二界,不能爲不同之數.

蓋在 γ' 之任何接近處,且較 γ' 爲大之處,必有數目 $a'+b'$,而在 γ 之任何接近處,且較 γ 爲小之處,必有數目 $a+b$,吾人又知 $a'+b'>a+b$. 故可知 $\gamma'\geqq\gamma$. 但 γ' 不能 $>\gamma$,蓋如是則必尙有數目 a, a', b, b',其正差 $a'-a$ 及 $b'-b$ 小於任何小之數,故 $(a'+b')-(a+b)$ 亦可小於任何小之數. 因而 γ 與 γ 不能爲不同之數.故得以下之定理:

$A+B$ 與 $A'+B'$ 產生一個切,$(A+B \mid A'+B')$,其所確定之數爲 γ. 吾人名此切爲 $(A \mid A')$ 與 $(B \mid B')$ 二個切之和,亦卽 α 與 β 之和,寫作

(1) $$(A \mid A')+(B \mid B')=(A+B \mid A'+B')$$

或 $$\alpha+\beta=\gamma.$$

故得定義如下:

二數目 α 與 β 之和 $\alpha+\beta$, 爲一切和數 $a+b$ 及 $a'+b'$ 之共同(上與下)界.

2. 將 β 由 α 減去之其定義不如作爲加一相反之數,則殊簡單. 今如

$$\beta=(B \mid B'),$$

則其相反之數(§**24**, **7**.)

$$-\beta=(-B' \mid -B),$$

按 (1), 得二個切之差:

$$(A \mid A')-(B \mid B')=(A-B' \mid A'-B). \tag{2}$$

故得定義如下:

α 與 β 二數之差,爲 $a-b'$ 及 $a'-b$ 之共同(上與下)界.

3. 關於乘法,吾人可先就正數 α, β 作其定義. 對於其中之一數,例如 β, 我人可用一正數 h, 使 β 之切成爲有界在下者.因之,吾人可設

$$\alpha=(A \mid A'), \ \beta={}_h(B \mid B').$$

今以 AB 表一切數目 ab 之總, $A'B'$ 爲一切數目 $a'b'$ 之總. AB 羣爲有界在上者,其上界爲 γ, $A'B'$ 則爲有界在下者,其下界可以 γ' 表之.如是則凡小於或等於 γ 之有理數,屬於 AB 內,而凡小於或等於 γ' 之有理數,屬於 $A'B'$. 吾人不難知 γ 與 γ' 二界實爲相同[1]者,故 AB 與 $A'B'$ 構成一個切

1. 倘仿 1. 中之法詳論之,則首先可推論得 $\gamma' \geqq \gamma$, 但不能 $\gamma' > \gamma$. 因

$$a'b'-ab=\frac{1}{2}[(a'-a)(b'+b)+(b'-b)(a'+a)]$$

一差,與 $a'-a$ 及 $b'-b$ 同時可成爲小於任何小之數也.

$$(AB \mid A'B')=\gamma,$$

與h並無關係(因無論如何γ'與h並無關係).吾人稱之爲α與β之乘積,故有:

正數α與β之乘積$\alpha\beta$,爲ab及$a'b'$之共同(上與下)界.

倘有一因子爲0,則此項考慮亦仍可用.$\alpha=0$時,其切之左方爲一切負有理數及0,其右方則爲一切正有理數.如是則$\beta={}_h(B \mid B')$時,$(AB \mid A'B')$與α之切同,故亦$\gamma=0$.

負數之相乘,亦可仿上法用一面有界之切說明之.倘吾人將有理數方面之規律用於此,則可極簡單;按此,吾人有

$$(-\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(-\beta)=-\alpha\beta;$$

$$(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\beta.$$

4. 用二正數h,h',使一個切兩方均爲有界:${}_h(B \mid B')_{h'}$,則此切確定之正數β.B之b及B'之b'可遍取h與h'間一切有理數爲值,故$\frac{1}{b'}$與$\frac{1}{b}$可遍取$\frac{1}{h'}$與$\frac{1}{h}$間之一切有理數,而任何一$\frac{1}{b'}$小於任何一$\frac{1}{b}$.如是,此項數目產生一兩方有界之切${}_{\frac{1}{h'}}\left(\frac{1}{B'}\middle|\frac{1}{B}\right)_{\frac{1}{h}}$.由之確定之數目,名爲$\beta$之倒數,以$\frac{1}{\beta}$表之.

按3.,β與$\frac{1}{\beta}$之乘積,爲$\frac{b}{b'}$與$\frac{b'}{b}$之共同(上與下)界.但此數爲1,蓋對於一切b,b':

$$\frac{b}{b'}<1<\frac{b'}{b}.$$

故對於$\frac{b}{b'}$之上界γ及$\frac{b'}{b}$之下界γ',有

$$\frac{b}{b'}\leqq\gamma\leqq 1\leqq\gamma'\leqq\frac{b'}{b}.$$

因γ與γ'相同,故必$\gamma=\gamma'=1$,而

$$\beta\cdot\frac{1}{\beta}=1.$$

於是吾人可將$\alpha:\beta$視爲α與$\frac{1}{\beta}$之乘.按**3.**,二數目之商,其切爲

$$\left(\frac{A}{B'}\middle|\frac{A'}{B}\right)=\gamma,$$

而吾人可云:

二正數之商$\alpha:\beta$,爲$\frac{a}{b'}$與$\frac{a'}{b}$之共同(上與下)界.

對於負數之相除,有理數方面之規律,可仍保存,即

$$\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta};\quad\frac{-\alpha}{-\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

除數必不可爲0.

5. 以上四種基本運算法,必須得如次之重要定理,乃能有實用之價值.此定理吾人可名之爲連續性之定理.

設α,β爲任何二數,但吾人用以相除時,α/β,恆假定β不爲0.又以$f(\alpha,\beta)=\rho$表此二數之四種運算中任何一種之結果,$f(a,b)=r$則爲二有理數a,b之結果.另有二任意之已知數,h,h',有如次之關係者:

$$h<\rho<h'.$$

吾人並可如是選擇之,使$h'-h$成為任意小.如是,吾人即可求得a_1, a_1', b_1, b_1'諸數,使

$$a_1<\alpha<a_1', \quad b_1<\beta<b_1',$$

且凡有理數a, b,能適合如次之條件者:

(3) $$a_1<a<a_1', \quad b_1<b<b_1',$$

必能 $$h<r<h'.$$

或以語言表之如下

倘有理數a, b與無理數α, β充分接近,則無理數運算$f(\alpha, \beta)$之結果,可用相同的有理數運算$f(a, b)$以接近之,可至任所欲之程度.

a, b名為α, β之近似值.

此定理之證,不難由無理數運算之定義以得之,故祇須將其中之一,較詳一論之,即足明瞭.今以加法$\alpha+\beta$為例;因ρ為$a+b$之上界,$a'+b'$之下界,故如c, c'為產生ρ之切$(C \mid C')$內之任意數,則c與ρ間必可有一$a+b$,插入其間,吾人今以a_1+b_1表之.仿之,在ρ與c'之間,亦必可有$a_1'+b_1'$插入,因而$(a_1'+b_1')-(a_1+b_1)$可為任意小.如是

$$c<a_1+b_1<\rho<a_1'+b_1'<c'.$$

但如a, b適合(3),則

$$a_1+b_1<a+b<a_1'+b_1'$$

故以上之定理即以證明.

6. 此定理尙可推廣之如下:

連續性之基本定理. 設ρ爲反復應用四則法$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$諸數而得之複合運算$F(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)$之結果, h與h'爲二數,

$$h<\rho<h',$$

且$h'-h$可爲任意小. 則可求得$a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; \cdots\cdots$諸數, 使

$$a_1<\alpha<a_1'; \quad b_1<\beta<b_1';$$

$$c_1<\gamma<c_1'; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

如$a, b, c, \cdots\cdots$諸有理數能適合

$$(4) \qquad a_1<a<a_1'; \quad b_1<b<c_1';$$

$$c_1<c<c_1'; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

諸條件, 則$r=F(a, b, c, \cdots\cdots)$亦必適合如次之條件:

$$h<r<h'.$$

吾人不難用完全歸納之法,由**5**.之特例以證明此定理.

今設此定理對於一數目系統$\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$及其運算法

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)=\rho,$$

以及對於一其他數目系統$\mu, \nu, \cdots\cdots$及其運算法

$$\phi(\mu, \nu, \cdots\cdots)=\sigma$$

均已證明. 吾人試由之推得其複合運算法

$$F(f, \phi)=\tau$$

之亦適用此定理. 如是, 可取二數h與h', 使

$$h<\tau<h'.$$

按 **5** 吾人可爲 ρ 及 σ 求得 k, l, k', l', 使

(5) $$k<\rho<k', \quad l<\sigma<l',$$

俾 $F(r, s)$ 亦在 h 與 h' 之間; r 與 s 卽 ρ 與 σ 之近似值, 亦在 (5) 之界限內;

(6) $$k<r<k', \quad l<s<l.$$

因吾人已假定該定理對於 f, ϕ 之適用, 故可對於 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots, \mu, \nu, \cdots\cdots$ 求得有理的近似值 $a, b, c, \cdots\cdots, m, n, \cdots\cdots$, 在充分小之界限內, 使

$$f(a, b, c, \cdots\cdots)=r. \quad \phi(m, n, \cdots\cdots)=s$$

在 (6) 之空隙內. 如是, 該定理已完全證明.

7. 此項定理, 不僅能使實用的計算家, 知其所作之近似值的計算, 可精確至任意之程度, 且能使吾人得理論上之重要結果. 知凡適用於一切有理數之等式或不等式, 對於無理數亦必適用.

凡有理數間之方程, 必可成爲如次之形式:

(7) $$f(a, b, c, \cdots\cdots)=0;$$

此處之 f 表四則法之反復的應用. 倘此方程對於一切可能的有理數 $a, b, c, \cdots\cdots$, 均適用, 則對於無理數 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 亦必適用, 卽吾人亦有

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)=0$$

蓋如 $f(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)$ 不等於 0, 例如等於一正數, 則可取二

個正數h, h',使

$$h<f(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)<h',$$

如是則對於某種有理的近似值,$f(a, b, c, \cdots\cdots)$在h與h'之間,故亦為正,卽與(7)相違.

不等式之情形亦如此.例如f與ϕ為二種運算之結合,對於一切有理數$a, b, \cdots\cdots$,凡適合$\phi(a, b, \cdots\cdots)>0$一條件者,卽$f(a, b, c, \cdots\cdots)>0$,則對於一切無理數,凡適合$\phi(\alpha, \beta, \cdots\cdots)>0$一條件者,亦必$f(\alpha, \beta, \cdots\cdots)>0$.蓋如$\phi(\alpha, \beta, \cdots\cdots)>0$,而$f(\alpha, \beta, \cdots\cdots)<0$,則可取二個負數$h, h'$及二個正數$k, k'$,使

$$h<f(\alpha, \beta, \cdots\cdots)<h'$$

$$k<\phi(\alpha, \beta, \cdots\cdots)<k'.$$

於是可取$\alpha, \beta, \cdots\cdots$之近似值$a, b, \cdots\cdots$使$\phi(a, b, \cdots\cdots)$仍為正,而$f(a, b, \cdots\cdots)$仍為負,卽與所設相違.

§27. 以相關數列確定無理數之法

1. 由連續性之基本定理,實用的算法上用有理數以代無理數之法,已成為合理,但用談德金氏之切,以定無理數之概念,吾人仍不能得此項有理的近似值.今如反觀§23,則知吾人固由近似值出發,以得無理數之概念者,故祇須將§23.5.及6.內所舉之例之共同標識提出,推之於普通之數,則不難得無理數之其他的定義.

吾人先作一說明如次: 所謂一數列者,為一羣無限多

之數目,其中之任何一數,均按某種先定之方法構成之,於此羣中有其一定之位置,故可按其次序予以號數,俾由其標數得識別之.倘數列中任何一數不較其在前者爲小或大,則此數列謂之單調者.如不較其在前者爲小,則謂之單調向上,不較其在前者爲大,即爲單調向下(吾人不僅可由概念上明之,且可作其幾何的圖解,以得其觀念).

今設有一計算方法,用之以得有理數之數列二個:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots\cdots$$

$$a_1', a_2', a_3', a_4', \cdots\cdots$$

此二數列,具有如次之屬性:

1. 第一列爲單調向上者,即

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \cdots\cdots\cdots$$

2. 第二列爲單調向下者,即

$$a_1' \geqq a_2' \geqq a_3' \geqq a_4' \cdots\cdots$$

3. 第一列內之任何數,不能大於第二列中之相當者,即

$$a_1 \leqq a_1', a_2 \leqq a_2', a_3 \leqq a_3', \cdots\cdots\cdots$$

4. 二數列中二個相當數之差,末後可小至於任意小,即對於任何已知之正數 ε, 必可得一標數 n (此數與 ε 有關), 凡在其後之差,均

$$a'_{n+\nu} - a_{n+\nu} < \varepsilon,$$

故此關係於 $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 均可用.

倘吾人採用 G. Kowalewski 之語法,以"幾於一切"一語,表"一切在內,僅有有限多爲例外"之意(見其所著"微積分原理"),則吾人亦可云:

二數列中相當二數之差,"幾於一切"均小於一任意之已知正數 ε.

倘能適合此四條件,則此二數列可名之爲相關數列(verbundene Folgen).

由 1., 2., 3. 不難知第一列中之任何數,不能大於第二列中之任何數. 蓋如 $a_i>a_k'$, 而 $i<k$, 則按 1. 必 $a_k'<a_i\leqq a_k$. 此卽與 3. 相違, 若 $k<i$, 則按 2. 必 $a_i>a_k'\geqq a_i'$, 亦與 3. 相違.

2. 今可有二個事例:

I. 有一有理數 r, 在每二個相當數之間, 故對於任何之 n

$$a_n\leqq r\leqq a_n'.$$

於是吾人可證明,此種有理數祇有一個,蓋如倘有一第二個 s, 假定其大於 r, 則 $s-r=d$ 爲一固定之正數,而有

$$a_n\leqq r<s\leqq a_n'.$$

但如是則對於任何一標數 n, $a_n'-a_n\geqq d$, 此卽與條件 4. 相違, 因按此條件, 由某個標數以上, $a_n'-a_n$ 可小於任何一已知之數,亦必可小於 d 也.

在此事例下,吾人可云二數列決定一數目 r. 後文內可見其例.

II. 無有有理數,恆在二數列之相當二數間者. 例如§ **23. 6.** 內之例卽係如此. 蓋試處(15)內數目之平方,構成I. 內所云之數列,其每二個相當之平方將2包含入內. 倘(15)決定一有理數,則此數之平方當爲2,但此係不可能者,吾人前已知之.

在此事例下,吾人可云此二數列決定一新的無理數α. $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 名爲α之下近似値. $a_1', a_2', a_3', \cdots\cdots$ 爲其上近似値.

由此定義出發,吾人可規定此項數之大小關係,及其基本運算法,以建立無理數之理論,如吾人根據談德金之定義所已爲之者. 關於此,吾人不能詳論,[1] 但當指出其如何可與談氏理論相關而已.

3. 今設$(A \mid A')$爲有理數區域內之一個切,則吾人可用任意多之方法,由A內取出一向上之數列,由A'內取出一向下者,俾條件4. 得以適合. 今設$a_1, a_2, \cdots\cdots; a_1', a_2', \cdots\cdots$爲如是之二數列,$\varepsilon$爲一任意之已知正數,則由某個標數$m$以下:

---

1. 欲知其詳,可參觀 A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Leipzig 1915, 第六十頁以下. 用相關數列以確定無理數之法,實與尋常之近似方法有密切之連繫,首創之者爲 P. Bachmann, Vorlesungen über die Natur der irrationalen Zahlen, Leipzig, 1892. 此種方法與康圖之定義有關,見 Math. Ann. 5, (1872), 123, 較詳可參觀 21, (1883), 564. 惟康圖氏係由一個不必爲單調的數列出發. 此與§ **23, 7.** 內之第三例相當.

(1) $$a_m'-a_m<\varepsilon.$$

因之,此二數列爲相關者,決定一數目 α,而按此種理論上之規定,其値恆在一下近似値及一上近似値之間,故對於任何一個 m,

(2) $$a_m\leqq\alpha\leqq a_m'.$$

今如 $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \cdots\cdots; \overline{a}_1', \overline{a}_2', \cdots\cdots$ 爲由切內所得之另二個數列,則由某個 n 以下,

(3) $$\overline{a}_n'-\overline{a}_n<\overline{\varepsilon},$$

此處之 $\overline{\varepsilon}$,亦爲一任意之已知正數.吾人今可指出,此二數列所決定之數 $\overline{\alpha}$,必與 α 相同.

蓋對於任何之標數 n,有

(4) $$\overline{a}_n\leqq\overline{\alpha}\leqq\overline{a}_n',$$

故如 α 與 $\overline{\alpha}$ 不同,而 $\alpha>\overline{\alpha}$,因而 $\alpha-\overline{\alpha}=d$ 爲一確定之正値,則按(2)及(4)

$$d\leqq a_m'-\overline{a}_n.$$

但按(1)及(3),

$$(a_m'-\overline{a}_n)+(\overline{a}_n'-a_m)<\varepsilon+\overline{\varepsilon}=\eta.$$

此處括弧內之差均爲正數,故自必 $a_m'-\overline{a}_n<\eta$,而 $d<\eta$.

但 η 爲任意之正數,可使其小於 d,故必 $d=0$,而 $\alpha=\overline{\alpha}$.因之:

無論吾人如何由一個切內取出二相關數列,其所屬之實數恆相同.

吾人不能謂談德金氏所定意義下之無理數,與相關數列所確定者全相同.吾人須知在此種定義方面,所論者非爲客觀上實有之物,因而可謂同一事物之二種不同的看法;其所從事者,蓋二種獨立之思想產物.但因諸種關於大小關係及根本運算法之規定,故吾人已有其全部對應.其一種數目方面之任何定理,可轉用於其他種方面,故於任何算術定理上,吾人用數目時,採取談氏之意義或用以上之意義,均無不可.[1]

§ 28. 極限值之概念

1. 用相關數列以確定實數概念之法,尚可就其他之觀點上以了解之.

試一論下列二相關數列:

$$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \cdots\cdots\cdots$$

$$0{,}4;\ 0{,}34;\ 0{,}334;\ 0{,}3334;\ \cdots\cdots\cdots$$

此二列所決定者爲有理數 $\frac{1}{3}$, 蓋上列中任何一數 $<\frac{1}{3}$, 下列中任何一數 $>\frac{1}{3}$. 試將各個數與 $\frac{1}{3}$ 之差一算,即不難知之. 蓋

$$\frac{1}{3}-0{,}3=\frac{1}{3\cdot 10};\ 0{,}4-\frac{1}{3}=\frac{2}{3\cdot 10};$$

1. 參觀 Perron, Was sind und was sollen die irrationalen Zahlen? Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 16 (1907). 詳論各種採用無理數之法,並證明其可等值者,見 Loewy, Lehrb. d. Algebra, 第二百五十七及二百八十四頁.

$$\frac{1}{3}-0,33=\frac{1}{3\cdot 10^2}\ ;\ 0,34-\frac{1}{3}=\frac{2}{3\cdot 10^2}\ ;$$

$$\frac{1}{3}-0,333=\frac{1}{3\cdot 10^3}\ ;\ 0,334-\frac{1}{3}=\frac{2}{3\cdot 10^3},$$

....

故可知上列及下列中之數,有此屬性,卽其與某一有理數之差(取其正者),末後可小於任何小之數.在此種狀況下,吾人可云,第一列及第二列之數趨於極限値(Grenzwert) $\frac{1}{3}$,或以 $\frac{1}{3}$ 爲其極限(Grenze).廣之,吾人可作如次之定義:[1]

謂 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 爲一數列(不必爲單調者).倘有一數目 γ,其與 c 之差之絕對値,末後可小於任何小之已知正數,則吾人云:c 之數列爲收歛者,有一極限値 γ;或曰:此數列向極限値 γ 收歛;吾人寫之爲

(1) $$\gamma=\lim_{n\to\infty} c_n,$$

讀作:"n 向無限時,c_n 之極限爲 γ." 倘不致有誤會發生,則 $n\to\infty$ 之符號亦可略去.

如是,$c_1, c_2, \cdots\cdots$ 一數列有一極限値 γ,但對於任何之已知正數 ε,吾人可得一標數,於 $\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 恆有[2]

---

1. 此定義在未用入無理數之前,僅對於有理數而言,尤用於有理的極限値.

2. Wallis, Arithmetica infinitorum, 1655.

(2) $$|\gamma-c_{n+\nu}|<\varepsilon$$

倘 $\gamma=0$, 則得如次之概念:

倘一數列中數目之絕對值,末後可小於任何已知正數,卽對於任何小之正數 ε, 可有一標數 n, 於 $\nu=1, 2, 3, \cdots$ 恆有

$$|c_{n+\nu}|<\varepsilon,$$

則此數列有一極限值.此極限值爲0.

2. 極限值之概念,實爲根本重要者.數學中之解析學,卽從事於無限(級數,乘積,連分,微積分等)之數學部分,尤以此爲其基本概念之一.故特再爲其定義作一解,雖其語法出於幾何的觀念,然實不必與之有若何之關連也.

今試設想,數列中之數目 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 以及 γ 一數,均已於直線上以點表出之,則(2)之意義,卽表示一切 $c_{n+\nu}$ 點與 γ 間之距離,小於 ε. 吾人於是可云,$c_{n+\nu}$ 點在(ε 所決定的)γ 之附近.如欲將此算術的以表出之,則吾人可先作一定義:

a 與 b 二數間之一切數目 z, 卽適合

$$a<z<b$$

一條件者,名爲一間距(Intervall) (a, b). a 與 b 爲間距之兩端;倘無聲明,則尋常恆不將其計入間距內. $b-a$ 名爲間距之長.

今設 ε 爲任何一正數,則可作一間距 $(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)$, 謂之

γ之附近.於是極限値之定義,可簡單述之如下:

設$c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$爲無限多數所成之數列,倘$\gamma$之任何一附近內,[1]有該數列中幾於一切之數,則此數列以γ爲其極限値.

3. 今仍退而論前此之例,設$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots; a_1', a_3', a_3', \cdots\cdots$二數列,決定一有理數$r$則恆有

$$a_m \leqq r \leqq a_m',$$

故對於任何一標數$n+\nu$

$$r - a_{n+\nu} \leqq a'_{n+\nu} - a_{n+\nu};$$

$$a'_{n+\nu} - r \leqq a'_{n+\nu} - a_{n+\nu},$$

而按相關數列之基本屬性4.,對於任何一正數ε,可有一標數n,凡於較大之標數$n+\nu$,恆

$$|r - a_{n+\nu}| < \varepsilon,$$

及
$$|r - a'_{n+\nu}| < \varepsilon.$$

此其意義卽是:

倘有理數r爲$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots; a_1', a_2', a_2', \cdots\cdots$所決定則

$$r = \lim a_n = \lim a_n' \tag{3}$$

今試一表每二個相當數目所構成之間距

$(a_1, a_1'), (a_2, a_2'), (a_3, a_3'), \cdots\cdots$則可知其長恆趨於小,末後可小於任何小之正數,且任何一間距均在其前者之中,

1. 故在任何小之附近內,亦必如此.

卽間距內之任何一數,均在其前之間距內,故此項間距係相嵌入者,[1]而極限値爲唯一之數目,屬於一切之間距者.間距相嵌之法,其概念亦卽在此;惟須經過無限多之步驟,乃能至於完成.[2]

4. 設有二相關數列,$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots; a_1', a_2', a_3', \cdots\cdots$,其所決定者非爲有理數,則此處仍有一間距之相嵌在,惟無有有理數在一切間距之內,故間距相嵌之法在有理區域內不能完成.於是吾人須採用入無理數.無理數之作用,在假設一數目之存在,能於概念上將此項無限之程序完成之.對於此數α,吾人規定其恆有

$$a_m < \alpha < a'_m,$$

故可知(設c_n爲其一或其他數列之元素)對於任何已知之正數ε,由某一標數n以下,恆

$$|\alpha - c_{n+\nu}| < \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

因此種與(2)相同之屬性,故無理數α可作爲a_n與a_n'之共同極限値:

$$\alpha = \lim a_n = \lim a_n'. \tag{4}$$

如是吾人未將無理數視爲極限値而確定之,而係根據其基於相關數列之定義,其大小性質之規定,及運算方法,

---

1. Bieberbach, Differentialrechnung, Leipzig 1917.
2. 參觀 B. Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe, Leipzig und Wien, 1890,此書中對於極限概念之認識論的及心理的基礎,有深刻之探討.

而知其有此屬性.此項屬性即吾人於有理數方面視爲極限値之特性者.

因之,用不等式(2)以確定極限値之法,以前僅限於有理數者,今可取消此種限制,而將其推及於任何之實數數列.吾人於是亦可研究實數(不僅有理數)之數列;由之,吾人亦可得間距之相嵌,而此二數列有一共同極限値之屬性,亦仍存在.

5. 今試一論以下之例.設a與b爲二正數,$a<b$.吾人由之計算得一數列,由算術均數及幾何均數(參觀§**38**,**4**.)所構成者:

$$a_1=\frac{a+b}{2}, \qquad b_1=\sqrt{ba_1},$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2=\sqrt{b_1a_2},$$

(5)

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \qquad b_{n+1}=\sqrt{b_na_{n+1}}$$

如是則

(6) $$b_1{}^2-a_1{}^2=ba_1-a_1\frac{a+b}{2}=a_1\frac{b-a}{2}>0,$$

故 $a_1<b_1$. 仿此,可知

$$a_2<b_2, \quad a_3<b_3, \cdots\cdots$$

因而 $$a<a_1<a_2<a_3\cdots\cdots,$$

$$b>b_1>b_2>b_3\cdots\cdots.$$

從可知 $\{a_n\}$ 構成一單調向上數列, $\{b_n\}$ 構成一單調向下數列,而第一列中任何一數,小於第二列中一相當數.由(6),因

$$b_1{}^2-a_1{}^2=(b_1+a_1)(b_1-a_1)=2a_2(b_1-a_1),$$

而 $a_1<a_2$, 故

$$b_1-a_1<\frac{1}{4}(b-a),$$

仿此,並可知

$$b_2-a_2<\frac{1}{4}(b_1-a_1),$$

....

$$b_n-a_n<\frac{1}{4}(b_{n-1}-a_{n-1}).$$

今將此項不等式相乘,並將兩端之共同因子去之,則有

$$b_n-a_n<\frac{1}{4^n}(b-a).$$

故可知二相當數之差,末後可小於任何小之數.因之,可知:

$$a, a_1, a_2, \cdots\cdots; \quad b, b_1, b_2, \cdots\cdots$$

為二個相關數列,有一共同之極限值.[1]

此二收歛數列,於計算圓周上極關重要.亞希米得用內外切多邊形以計算圓周之法,實以此為基礎.蓋設 u_m 為

1. 此極限值之存在,首為 J. Gregory 所證明,見 Exercitationes geometricae, London 1668.

內切有法 m 邊形之周, U_m 爲外切有法 m 邊形之周,則有以下之式:

$$\frac{1}{U_{2m}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_m}+\frac{1}{u_m}\right);$$

$$u_{2m}=\sqrt{u_m U_{2m}}.$$

今設

$$a=\frac{1}{U_m},\quad b=\frac{1}{u_m},$$

則 a_1, b_1 爲內切及外切 $2m$ 邊形之相當數.此數列之極限值爲圓周之倒數,故[1]於半徑爲1時,

$$\lim a_n=\lim b_n=\frac{1}{2\pi}.$$

6. 用不等式(2),吾人固可判定一數目 γ,是否爲一數列之極限值,但如不知 γ 其數,則於一已知之數列,即不

---

1. 於任何之開始數值 a, b, 吾人以 $M(a,b)$ 表其極限值,則 $M(a,b)=b.M\left(\frac{a}{b},1\right)$, 而如 $\frac{a}{b}=\cos x$, 則可知

$$M(\cos x,1)=\frac{\sin x}{x}.$$

倘按亞希米得之法,由有法六邊形出發,則

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\sqrt{3},\text{ 故 } x=\frac{\pi}{6},$$

$$\sin x=\frac{1}{2},$$

而

$$M(a,b)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2\pi}.$$

能判定其是否有極限値.下列之定理,即能解決此問題者:[1]

設 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 爲一數列,倘對於任何一正數 ε,可有一標數 n,凡在 c_n 後之數目,均在 $(c_n-\varepsilon, c_n+\varepsilon)$ 一間距中.即

$$(7) \qquad |c_n - c_{n+\nu}| < \varepsilon, \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots,$$

則此數列爲收斂者,亦祇當此時爲收斂者.

首先可知者,倘數列有極限値 γ,則不等式(7)不能成立.蓋如是則對於一已知之正數,吾以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 表之者,可有一數目 m,凡標數 $n > m$ 時,恆

$$|\gamma - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因 $c_n - c_{n+\nu} = (c_n - \gamma) + (\gamma - c_{n+\nu})$,故按 § **14**, (6):

$$|c_n - c_{n+\nu}| \leqq |c_n - \gamma| + |\gamma - c_{n+\nu}| < \varepsilon.$$

反之,倘(7)能成立時,該數列必爲收斂者,則可如下知之:

吾人將一切實數分入二類.凡被數列中幾於一切之數所超過之實數,均取之入 **A** 類,即對於 **A** 中之任何數 a,可有一標數 m,俾一切 $c_{m+\mu} > a$. 其餘之實數,均歸入 **A′** 類.如是則 **A** 中之任何數小於 **A′** 中之任何數.即 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')$ 爲一切實數區域內之一個切,故按 § **24**, **8**. 決定之數目 γ.

---

1. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes usw. (1817), 第 35 頁 (Ostwalds Klassiker Nr. 153, 第 21 頁). Cauchy, Cours d'Analyse (1821), 第 125 頁.

今設c_n為$\mathbf{A}$中之一數,則按(7),一切其餘之$c_{n+\nu}$均在$(c_n-\varepsilon, c_n+\varepsilon)$一間距內,故$c_n+\varepsilon$為$\mathbf{A}'$中之數,而$\gamma$以及幾於一切之$c$,均在$(c_n, c_n+\varepsilon)$一間距內,即對於已知之正數$\varepsilon$,必有一標數$m$,俾一切$c_{m+\mu}$在$(c_n, c_n+\varepsilon)$之內,因而必

$$(8) \qquad |\gamma-c_{m+\mu}|<\varepsilon, \ \mu=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

倘c_n為$\mathbf{A}'$內之數,則$c_n-\varepsilon$為$\mathbf{A}$內之數,而γ及幾於一切之c均在$(c_n-\varepsilon, c_n)$內. 因之,對之已知之數ε,亦必有一數目m,俾不等式(8)能成立. 如是,已可證明γ為數列之極限值.

7. 凡收斂之數列,自必為有界者. 對於極重要之一類數列,即單調數列,此種屬性已足使其有收斂性,而有以下之定理:

凡有界之單調數列,恆為收斂者,就其為向上或向下的單調,而以其上界或下界為極限值.

此定理可直接由**2.**內之極限值定義以知之,蓋界之任何一附近內,有數列中幾於一切之數也.

8. 極限值之概念,亦可將其附於一較廣之概念下.

設有任何一無限點羣.[1] 倘有一數,在其任何一附近內,[2] 有該羣之數目在,則此數名為該羣之叢聚值(Häufungswert)或叢聚點(Häufungspunkt).

1. 倘無其他聲明,則以後吾人提及一羣時,恆指一無限之羣.
2. 故亦在其任何小之附近內.

叢聚點本身不必屬於羣.例如以下之點羣[1]

$1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{11}{16}, \cdots\cdots$ 有二叢聚點 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{2}{3}$，其中第一個屬於羣內,第二個則不屬.

下列之重要定理,名爲波爾察諾魏斯德拉斯(Bolzano-Weierstrass)二氏之定理:

任何有界點羣,至少有一叢聚値.

由圖形之觀念上言之,此定理幾爲自明者.蓋有界之一直線段上,既有無限多之點,則此項點至少必於一處以無限多相聚也.純就算術,則可如下證明之:

設 $\mathfrak{C}$ 爲一有界點羣.則吾人恆可有數目 a_1, b_1, 使 (a_1, b_1) 間距之內,點羣之一切數均落入.今用一點 $c_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$, 將此間距平分之,則 (a_1, c_1) 與 (c_1, b_1) 二間距中,至少有其一,其中尙有無限多之數,例如 (a_1, c_1). 吾人於是將 a_1 寫作 a_2, c_1 作 b_2, 將 (a_2, b_2) 用 $c_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2)$ 再平分之,並以 (a_3, b_3) 表所得二間距中之一,其內有無限多之數者(二部分間距中,至少有其一,有無限多之數在內). 如是可繼續至於無限,而得一間距之相嵌,其中每個較在其前者小一半.此

1. 今用 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\cdots$ 以表羣之元素,按其次序表之,則

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+a_{n-2}\right), \quad b_n=\frac{1}{2}\left(b_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$$

爲其普通式. 今將線段 $\overline{01}$ 放大,將點於其上表出之,即不難得其幾何圖形. 上所述之叢聚點,算術上亦不難證明之.

項間距之端，$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$; $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ 構成二相關數列，其所決定之數 γ，卽爲羣之一叢聚點，蓋 γ 爲一切間距 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots\cdots$ 內之點，而每一間距內含有羣之無限多數也.[1]

9. 羣內一切叢聚値之上界，名爲上極限 (Limes superior)，其一切叢聚値之下界，則謂之下極限 (Limes inferior)

一切叢聚値之上下界，其本身亦爲叢聚値，此則不難知者，卽叢聚値中有一最大及一最小者.故吾人可云:

上極限爲一切叢聚値中之最大者，下極限爲一切叢聚値中之最小者.

在上所舉之例內，倘羣之元素以 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 表之,[2] 則有

$$\limsup c_n = \frac{2}{3},$$

$$\liminf c_n = \frac{1}{2}.$$

按 **2.** 末之定義，可知一數列之極限値同時亦卽爲一叢聚値，且必爲其唯一之叢聚値.蓋如尙有其他者，則不能於極限値之任何附近內，數列中幾於一切之數均落入矣.故得定理:

---

1. 吾人亦可不必每次平分其間距，任取一分點，祇須如下便可:

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

2. $\limsup c_n$ 及 $\liminf c_n$ 二寫法，亦可作 $\overline{\lim}\, c_n$ 及 $\underline{\lim}\, c_n$.

在收斂之數列方面,上極限與下極限二者,與數列之極限值相同:

$$\lim c_n = \lim\sup c_n = \lim\inf c_n.$$

§29. 極限值之算法

1. 爲簡單計,以後吾人將數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 簡寫作 $\{a_n\}$.

今設 $\{a_n\}$ 爲一收斂數列, $\lim a_n = \alpha$. 試用一固定之數 c 以乘數列中之每一數,則數列仍爲收斂者,而其極限值亦被 c 所乘,即,

(1)
$$\lim ca_n = c \lim a_n.$$

蓋按 $\{a_n\}$ 之收斂性,對於任何正數 $\frac{\varepsilon}{|c|}$, 可有一標數 n, 俾

$$|\alpha - a_{n+\nu}| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

由此,知

$$|c\alpha - ca_{n+\nu}| < \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

此即上所述之定理也.

2. 設 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲二收斂數列,

$$\lim a_n = \alpha, \quad \lim b_n = \beta.$$

則吾人有下列之定理:

將二數列中相當數相加時所得之數列 $\{a_n + b_n\}$, 亦爲收斂者,其極限值爲 $\alpha + \beta$, 即

(2) $$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n.$$

證：　對於任何之正數 $\frac{\varepsilon}{2}$，有一[1]標數 n，於 $\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 恆有

$$|a_{n+\nu}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |b_{n+\nu}-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故按 § **14**, (6)：

$$|(a_{n+\nu}+b_{n+\nu})-(\alpha+\beta)|\leqq|a_{n+\nu}-\alpha|+|b_{n+\nu}-\beta|<\varepsilon,$$

此即上所述之定理也。

吾人可仿此以證明如次之定理：

將二數列中相當數相減而成之數列 $\{a_n-b_n\}$，亦爲收斂者，而有

(3) $$\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n.$$

此項定理不難即推廣至於任何多之數列，以及用加減而產生之數列。

3.　二數列中相當數相乘所得之數列 $\{a_nb_n\}$，亦爲收斂者，其極限值爲 $\alpha\beta$，即

(4) $$\lim(a_nb_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n.$$

證：　今設

$$a_{n+\nu}=\alpha+\rho_{n+\nu},\quad b_{n+\nu}=\beta+\sigma_{n+\nu},$$

---

1. 吾人不妨於二數列取其相同之標數，蓋如已有 $|a_{m+\mu}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\mu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 而 $m<n$，則吾人可將 $\mu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ $(n-m)$ 諸不等式放棄可矣。

則對於任何一正數δ,可有一標數n,於$\nu=1,2,3,\cdots\cdots$,

$$|\rho_{n+\nu}|<\delta,\quad |\sigma_{n+\nu}|<\delta.$$

但
$$|a_{n+\nu}b_{n+\nu}-\alpha\beta|=|\alpha\sigma_{n+\nu}+\beta\rho_{n+\nu}+\rho_{n+\nu}\sigma_{n+\nu}|$$
$$<(|\alpha|+|\beta|+\delta)\delta,$$

故如取$\delta<1$, $\varepsilon>(|\alpha|+|\beta|+1)\delta$, 則

$$|a_{n+\nu}b_{n+\nu}-\alpha\beta|<\varepsilon,\quad \nu=1,2,3,\cdots\cdots$$

4. 倘$\{b_n\}$內無有數爲0, $\beta=\lim b_n$亦非爲0, 則二數列中相當數相除所得之數列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, 亦爲收斂者. 其極限值爲$\dfrac{\alpha}{\beta}$, 即

(5)
$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

證: 仍用前證內之符號時,有

$$\left|\frac{a_{n+\nu}}{b_{v+\nu}}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\beta a_{n+\nu}-\alpha b_{n+\nu}|}{|\beta b_{n+\nu}|}=\frac{|\beta\rho_{n+\nu}-\alpha\sigma_{n+\nu}|}{|\beta b_{n+\nu}|}$$
$$<\left(1+\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)\frac{\delta}{|b_{n+\nu}|}.$$

因b_n無有爲0者, 故$|b_n|$之數列有一正的下界B, 而$|b_{n+\nu}|\geqq B$. 今如取

$$\varepsilon>\left(1+\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)\frac{\delta}{B},$$

則
$$\left|\frac{a_{n+\nu}}{b_{n+\nu}}-\frac{\alpha}{\beta}\right|<\varepsilon,\quad \nu=1,2,3,\cdots\cdots$$

5. 由末後之定理,可得以下者:

由二數列中相當數相乘而得之數列 $\{a_nb_n\}$, 以及數列 $\{b_n\}$, 倘均爲收斂者, 而 $\lim(a_nb_n)=\gamma$, $\lim b_n=\beta$, 且後者非爲 0, 則 $\{a_n\}$ 亦爲收斂者, 而 $\lim a_n=\dfrac{\gamma}{\beta}$.

蓋按 **4.**, 有

$$\frac{\lim(a_nb_n)}{\lim b_n}=\lim a_n=\frac{\gamma}{\beta}$$

也.

6. 定理 **1.** 及 **4.**, 不難反復應用四則算法以推廣之至於多個收斂數列, 而得以下之普通定理:

設有若干收斂數列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$,……, 其多有限, 並設

$$\lim a_n=\alpha,\ \lim b_n=\beta,\ \lim c_n=\gamma,\cdots\cdots \tag{6}$$

如 $F(a,b,c,\cdots\cdots)$ 爲應用有限多之定理運算於 $a,b,c,\cdots\cdots$ 所得複合運算之結果, 但在此項運算中, 並無以 0 爲分母或極限值爲 0 之處, 則用 $F(a_n,b_n,\cdots\cdots)$ 所得之數列, 仍爲收斂者, 其極限值爲

$$\lim F(a_n,b_n,c_n,\cdots\cdots)=F(\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots). \tag{7}$$

吾人不難知此定理實與 §**26** 內之連續性根本定理相當, 但其內容較多, 蓋 a_n, b_n, c_n,…… 不必如該處之爲有理數也.

§ 30. 無盡小數

1. 以上所論之無理數產生法, 不能使吾人由此以知全部實數內, 無理數如何分配於其中, 且由其本身, 吾人直

無法知無理數之究存在與否.吾人無有一標識,可由之以判定一個切或二相關數列所決定之數爲無理或有理者.由有理數之平方根,吾人固已獲得無數無理數之例,但如吾人能將一切實數表出之,俾每次對於一已知數能判定其爲有理或無理,則其意義自必更大.此項表法,實有多種.其中之最簡單,且對於尋常之算法上爲至重要者,即將任何一實數,用一(有盡或無盡的)十進分數以表出之是也.

2. 設A_n爲一十進分數,有n位在小數逗點之後,並設有一計算之方法,一公式或一種算法,能使吾人由之自A_n得一十進分數A_{n+1},較A_n多一位,其餘之各位,在其前者,均相同,且用此法時,所得之新分數,不能有第二個.此計算之方法,並有此屬性,能繼續至於無限.如§23內所舉,非平方數平方根之近似算法,亦即爲此種計算法之一.由此種計算法所產生之數字之列,有一逗點於其一定處所者,吾人名之爲無盡十進分數.

對於任何一無盡十進分數,可按下列之法,用一確定之數與之相當:

設

(1) $$A_n'=A_n+\frac{1}{10^n},$$

則$n>0$時,A_n'爲一十進分數,係將A_n之末位增大1而產生者(倘A_n之末位爲9,則可使其爲0,而增大其前一位之

數字). 又於 A_n 之末, 加一第 $(n+1)$ 位之數字 z, 使成爲 A_{n+1}; 故有

$$A_{n+1}=A_n+\frac{z}{10^{n+1}},$$

$$A'_{n+1}=A_n+\frac{z+1}{10^{n+1}},$$

而得

(2) $$A_n\leqq A_{n+1}<A'_{n+1}\leqq A_n'.$$

從可知 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 構成一單調向上之數列, $A_1', A_2', A_3' \cdots\cdots$ 爲一單調向下之數列, 而因任何之 A_n 小於 A_n', $A_n'-A_n=\frac{1}{10^n}$ 於 n 爲充分大時可小於任何小之正數, 故 $\{A_n\}$ 與 $\{A_n'\}$ 爲二相關數列.[1] 其所決定之數目 α, 名爲無盡十進分數之數值. A_n 爲其下近似值, A_n' 則爲其上近似值. 倘吾人於計算上用 A_n 以代 α, 則可云: $\alpha=A_n$ 之精確, 至於 n 位. 倘其第 $(n+1)$ 位 $\geqq 5$, 則不用 A_n 而取其上近似值 A_n' 爲較佳.

3. 反之, 對於任何之正數 α, 亦可予以一相當之無限十進分數, 於此, 一有盡之十進分數, 亦可加 0 於其後, 視之爲無盡者. 吾人可按其大小, 將分母爲 10^n 之有理分數整列之, 其中之最大但不大於 α 者, 以 A_n 表之, 即吾人設

(3) $$A_n\leqq\alpha<A_n'.$$

---

1. 參觀 §23, 5. 內之例.

於是可有一數字 z, 亦祇有此數字, 對於此,

(4) $$A_{n+1} \leqq \alpha < A'_{n+1},$$

故吾人可將十進分數 A_n 不二的繼續之, 使 α 爲 A_n 之上界. 於是吾人可云: 數目 α, 已用無盡十進分數表出之.

4. 吾人尙須解答此問題, 卽二個不同之無盡十進分數, 其數值是否可相同.

今設二不同之十進分數, 其下近似值爲 A_n 及 B_n, 其所有相同之數值爲 α, 則 n 充分大時, A_n 與 B_n 必於某位不相同. 今如 a_k 與 b_k 爲 A_n 與 B_n 內不相同數字之第一位, 並設 $a_k<b_k$. 如是則

(5) $$B_k - A_k = \frac{b_k - a_k}{10^k},$$

$$B_k - A_k' = \frac{b_k - a_k - 1}{10^k}.$$

按 (2), $n \geqq m$ 時, $B_n \geqq B_m$, $A_n' \leqq A_m'$, 故

$$B_n - A_n' \geqq B_m - A_m',$$

或如設 $$B_n - A_n' = \Delta_n,$$

(6) $$\Delta_n \geqq \Delta_m, \quad n \geqq m.$$

按 (5), 可知於任何 $n \geqq k$,

(7) $$\Delta_n \geqq \frac{b_k - a_k - 1}{10^k}.$$

今如此二十進分數之數值相同, 則必

(8) $$\lim \Delta_n = 0,$$

即,n 增大時,Δ_n 可小於任何小之數,因而按(7),必 $b_k-a_k-1=0$,而按(5),必 $\Delta_k=0$,又按(6),對於任何 $n\geqq k$ 時,亦必 $\Delta_n\geqq 0$. 由此可知,必任何之 Δ_n 等於0,蓋按(6),Δ_n 構成一單調向上數列,故如其中有一 >0,則不能再有 $\lim \Delta_n=0$ 矣. 因之,對於任何 $n\geqq k$,

$$B_n=A_n'=A_n+\frac{1}{10^n}. \tag{9}$$

今以 a_{n+1},b_{n+1} 表此二十進分數之第 $(n+1)$ 位數字,則

$$B_{n+1}=B_n+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}},$$

$$A'_{n+1}=A_n+\frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}},$$

而按(9),此二數必相等,故

$$B_n+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}=A_n+\frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}},$$

又按(9),並可知

$$\frac{1}{10^n}+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}=\frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}},$$

亦即於 $n\geqq k$ 時,

$$a_{n+1}=b_{n+1}+9.$$

但 a_{n+1} 決不能大於9,故必 $b_{n+1}=0$,$a_{n+1}=9$,祇須 $n\geqq k$ 時卽如此. 於是,事實上,此二十進分數 A_n 與 B_n 之極限值為相同者,卽為有盡之十進分數 B_k. 例如 2,42999 ……… 及 2,43000 ……… 二個十進分數,其數值同為 2,43;仿此,$1=0,999\cdots\cdots\cdots$.

§31. 化尋常分數爲十進分數法

1. 一尋常之分數,被10之方數所乘後能成爲整數時,方能化爲一有盡之十進分數. 分數之約盡式 m/n 內,其分母 n 除2與5外無有其他之質因子時.即 $n=2^a5^b$, a 與 b 爲整數時,即可如此,亦祇當此時方能如此;蓋如是則可取一整數 c,不小於 a 與 b 數中之大者,而 $^m/_n\,10^c$ 爲一整數.

倘有一正分數 $^m/_n$,則可用如次之方法,使其與十進分數相關.

按相除之法,吾人可求得一商數 z,及一餘數 m_1,使

(1)
$$m=zn+m_1.$$

此處之 z 爲一整數,可爲正或0. m_1 亦爲正數,且小於 n,祇於 m 可爲 n 所除時,方能爲0,即祇於 $^m/_n$ 爲整數時, m_1 方爲0.

再用此法於 $10m_1$,則有

(2)
$$10m_1=z_1n+m_2,$$

故
$$10m_1\geqq z_1n,$$

而 $z_1<10$. 從可知 z_1 爲 $0,1,2,\cdots\cdots 9$ 諸數字中之一. 倘 $m_2=0$,則 $^m/_n$ 等於一十進分數 (z, z_1). 倘 m_2 爲正數,則此數亦小於 n,吾人仍可繼續如上爲之:

(3)
$$\begin{aligned}10m_2&=z_2n+m_3\\ 10m_3&=z_3n+m_4\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$10m_s=z_s n+m_{s+1}$$

此中之 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_s$ 均小於 n, 倘未有爲 0 者. $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_s$ 則爲數字, z 亦可爲一較大之整數. 由 (1), (2), (3), 可知

$$\frac{m}{n}=z+\frac{m_1}{n},$$

$$\frac{m_1}{n}=\frac{z_1}{10}+\frac{m_2}{10n},$$

$$\frac{m_2}{n}=\frac{z_2}{10}+\frac{m_3}{10n}, \text{ 等等.}$$

故得:

$$\frac{m}{n}=z+\frac{z_1}{10}+\frac{z_2}{10^2}+\cdots\cdots+\frac{z_s}{10^s}+\frac{m_{s+1}}{n\cdot 10^s},$$

或以十進分數之形式寫出之:

$$(4)\qquad \frac{m}{n}=\{z, z_1 z_2\cdots\cdots z_s\}+\frac{m_{s+1}}{n\cdot 10^s}.$$

倘 $m_{s+1}=0$, 則 $m/_n$ 已化成爲一十進分數, 而此則必須於前所述之狀況下方能發生, 即 n (就其約盡式論) 爲 $2^a\,5^b$ 形式者. 否則此種方法尚可繼續, 故 (4) 內之 s 可至任意之大. 如是則十進分數

$$(5)\qquad A_s=\{z, z_1 z_2\cdots\cdots z_s\}$$

恆小於尋常之分數

$$(6)\qquad \gamma=\frac{m}{n},$$

而因 $m_{s+1}<n$, 故 $\gamma-A_s$ 小於 $\frac{1}{10^s}$, 且 A_s 之位數愈多, 則此差亦必愈小, s 充分大時, 可小於任何小之已知數值. 從可知

$\{A_s\}$ 收斂,其極限值爲

$$\gamma = \lim_{s\to\infty} A_s.$$

由 γ 得十進分數 A_s,謂之化尋常分數爲十進分數.吾人於是可於(4)內將餘數 $m_{s+1}/10^s n$ 不寫出,而以點表其可無限繼續:

$$(7)\qquad \frac{m}{n} = \{z, z_1 z_2 z_3 \cdots\cdots\}.$$

在計算 $z_1, z_2, \cdots\cdots$ 諸數字時,吾人先將分數 $^m/_n$ 化爲約盡式與否,即 m 與 n 有公因子與否,全無關係.

2. 如分母 n 於 2 及 5 外,尚有其他之質因子,則(1),(2),(3)所表之除法可無限繼續.但 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ 均小於 n,且爲正整數,故其中至多有 $n-1$ 個爲不相同者;因之,必有一個 m_β,與其前之 m_α 相等.今如 $\beta = \alpha + f$,則 $m_{\alpha+f} = m_\alpha$.由(3),吾人可知亦必 $z_{\alpha+f} = z_\alpha$,以及

$$m_{\alpha+f+1} = m_{\alpha+1}, \qquad z_{\alpha+f+1} = z_{\alpha+1};$$

$$m_{\alpha+f+2} = m_{\alpha+2}, \qquad z_{\alpha+f+2} = z_{\alpha+2}; \quad \cdots\cdots$$

末後,得 $\qquad m_{\alpha+2f-1} = m_{\alpha+f-1}, \qquad z_{\alpha+2f-1} = z_{\alpha+f-1},$

再得 $\qquad m_{\alpha+2f} = m_{\alpha+f} = m_\alpha, \quad z_{\alpha+2f} = z_{\alpha+f} = z_\alpha$, 故

$$(8)\qquad z_\alpha,\ z_{\alpha+1},\ z_{\alpha+2},\ \cdots\cdots\ z_{\alpha+f-1}$$

諸數字恆相循環,其次序如上.於是此十進分數謂之循環者,(8)爲其週期.有盡之十進分數,亦可視之爲循環者,以0(或9)爲週期,故有如次之定理:

任何一有理數,可化成爲循環的十進分數.

設 $a=1$,則小數點之後即已開始循環,吾人名此十進分數爲純循環者.倘 $a>1$,則小數點之後尙有數字在週期之前,此項數字,不在循環之內,如是此十進分數謂之雜循環者.

關於一有理數,其分母爲 n 者之十進分數,其週期至多爲 $n-1$ 個數字所成.關於此之詳細定理,以後當證明之(見§66).

3. 吾人今證明以上定理之反:

任何一循環十進分數,等於一有理數.

證此定理時,吾人可將週期 0 (或 9) 除外,蓋如是則十進分數已爲有盡者,自爲一有理數,可不待證矣.

今設 m 爲用十進法記出之 f 位之整數:

$$m=\{z_1z_2\cdots\cdots z_f\}, \tag{9}$$

吾人可假定,此項 z 並非均爲 0 或 9 者. 今作若干之數 $m_1=m$, m_2, m_3, ……,其法在將以前一數之左端首位置於末位處:

$$m_1=\{z_1z_2\cdots\cdots z_{f-1}z_f\}$$

$$=z_1\,10^{f-1}+z_2\,10^{f-2}+\cdots\cdots+z_f,$$

$$m_2=\{z_2z_3\cdots\cdots z_fz_1\}$$

$$=z_2\,10^{f-1}+z_3\,10^{f-2}+\cdots\cdots+z_1,$$

$$m_3=\{z_3z_4\cdots\cdots z_1z_2\}$$

$$=z_3\,10^{f-1}+z_4\,10^{f-2}+\cdots\cdots+z_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_f=\{z_f z_1\cdots\cdots z_{f-2}z_{f-1}\}$$

$$=z_f\,10^{f-1}+z_1\,10^{f-2}+\cdots\cdots+z_{f-1}.$$

以下之數 m_{f+1}, 仍與 m_1 相同, 故此項數可循環以至於無限. 又此項數均小於 10^f-1.

吾人不難知, 每二個相繼之數間有以下之關係:

$$10\,m_1=z_1\,(10^f-1)+m_2,$$

$$10\,m_2=z_2\,(10^f-1)+m_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$10\,m_f=z_f\,(10^f-1)+m_1;$$

此項方程, 亦循環至於無限. 今再加一方程於其前:

$$m=0\cdot(10^f-1)+m_1,$$

則得一方程所成之系統, 與(1), (2), (3)相似, 故可用之將眞分數 $\frac{m}{10^f-1}$ 化成爲十進分數. 吾人不難知此十進分數係純循環者, 其週期爲 $\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}$, 即

$$(10)\qquad \frac{m}{10^f-1}=\left\{0,\ \overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}\ \cdots\cdots\right\}.$$

今增加一任意之整數 a 於其上, 則以上之定理, 已對於任何純循環的十進分數爲證明. 吾人有

$$(11)\qquad \left\{a,\ \overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}\ \cdots\cdots\right\}=a+\frac{\{z_1z_2\cdots\cdots z_f\}}{10^f-1}$$

$$=\frac{\{a\,z_1z_2\cdots\cdots z_f\}-a}{10^f-1}.$$

倘有一雜循環十進分數<1,於此,在週期之前有k位小數,則此項非循環之各位小數,本身構成一數目a,而用10^k乘此十進分數後,即成爲一純循環之十進分數,其形式與(11)相同,故此雜循環十進分數,爲

$$(12)\qquad \left\{0,\ a\ \overline{z_1 z_2 \cdots\cdots z_f}\ \cdots\cdots\right\}=\frac{\{a\ z_1 z_2 \cdots\cdots z_f\}-a}{10^k\,(10^f-1)}.$$

倘再加上一任意之整數,則任何一循環十進分數即可作爲一有理數表出之,故以上之定理,已完全證明.

同時,吾人可知:

一有理數$\frac{m}{n}$之十進分數,隨n之與10爲互質或否,而爲純循環或雜循環者.

4. 吾人於是得一極簡單之方法,可用之以判定數目之爲有理或無理的. 按§**30**, **3**., 任何一實數可用一十進分數以表之,吾人今並知:

循環十進分數所表者爲有理數,非循環無盡十進分數所表者爲無理數.

§32. 無盡連分

1. 用十進分數以表實數之法,於實用的計算上固屬重要,但在科學方面,則用連分之法尤有重大之意義.

在§**22**內,吾人曾由如此之一串方程:

(1) $$x=q+\frac{1}{x_1},\quad x_1=q_1+\frac{1}{x_2},$$

$$x_2=q_2+\frac{1}{x_3},\ \cdots\cdots,$$

以求得一有理數 x 之連分；此處之 q_i, 表 x_i 內所含之最大整數，故

(2) $$q_i \leqq x_i < q_i+1.$$

對於任何之有理數 x, 此項方程有終止之時.吾人於末後得一整數 $x_n=q_n$, 而 x 可用有盡連分

(3) $$x=(q,\ q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots\ q_n)$$

以表之. 但如 x 爲一無理數，則 (1) 內方程之串，即無終止之時. $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 一切數均爲無理者，(2) 內之等號恆不能用. 吾人亦可由 (1) 以得一連分

(4) $$(q,\ q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots),$$

但此連分不終止,故爲一無盡連分.吾人於是須提出此問題：所設無盡連分者，其意義究若何？按 § **22** 之 (14) 及 (17), 在無盡連分方面,吾人可得無限多之近似分數 $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ 所成之列，其中之分母，隨 ν 而增大，可超過任何之界限，而按 § **22**. **10**. 內所云，吾人可云：

無盡連分之近似分數,

(5) $$\frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_3}{B_3},\ \frac{A_5}{B_5},\ \cdots\cdots\quad 以及\quad \frac{A_2}{B_2},\ \frac{A_4}{B_4},\ \frac{A_6}{B_6},\ \cdots\cdots$$

構成二相關數列,故確定一實數,名為無盡連分之值.吾人亦可云:此無盡連分向此值收斂.

2. 今試證明以下之定理:

任何一無盡連分有一無理之值.

蓋連分之值,必在(5)中二數列之相當二數目間,即在任何二相繼的近似分數之間.倘其值為一有理數$\frac{A}{B}$,則必對於任何之k,有

$$\frac{A_{2k-1}}{B_{2k-1}}<\frac{A}{B}<\frac{A_{2k}}{B_{2k}}.$$

按§**22**, **11**.,於是必$B>B_{2k}$,即大於任何一近似分數之分母,此則為不可能者,因分母B_ν隨ν而可增大,超出任何之界限也.

3. 吾人不難知無盡連分$(q, q_1, q_2, \cdots\cdots)$之值,與無理數$x$相同,該無盡連分亦即由之用(1)以獲得者.蓋按§**22**, (24),有

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu}-x\right|<\frac{1}{{B_\nu}^2}, \tag{6}$$

而因B_ν隨ν而增大至於無限,故對於任何小之正數ε,有一標數n,於$\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$,恆有

$$\left|\frac{A_{n+\nu}}{B_{n+\nu}}-x\right|<\varepsilon.$$

按§**28**, **1**.,此項關係之意義,即謂近似分數之數列,向x收斂,故

$$x=\lim_{\nu\to\infty}\frac{A_\nu}{B_\nu}.$$

此式之意義,亦卽謂 x 爲(5)中相關數列所決定之實數也.吾人可寫之作

$$x=(q,q_1,q_2,\cdots\cdots).$$

故對於任何一已知之無理數 x,可用(1)之算法,以得一確定之無盡連分.

4. 二個已知之無盡連分

(7) $$(q,q_1,q_2,\cdots\cdots)\text{ 及 }(r,r_1,r_2,\cdots\cdots),$$

其部分分母非盡同者,或可有相同之數值,此亦可想及之事.吾人今可證明其不能.

今設 q_k 與 r_k 爲二連分內最先不相同之部分分母,並設

$$\xi=(q_k,q_{k+1},\cdots\cdots);\quad \eta=(r_k,r_{k+1}\cdots\cdots)$$

如是則(7)之近似分數,其相同者至第 k 個 $\frac{A_k}{B_k}$ 爲止,而按§**22**,(15),此項連分之值,爲

$$\frac{A_k\xi+A_{k-1}}{B_k\xi+B_{k-1}}\text{ 爲 }\frac{A_k\eta+A_{k-1}}{B_k\eta+B_{k-1}}.$$

倘 $\xi=\eta$,則此項值可相等,亦祇當此時方能相等.但

$$q_k<\xi<q_k+1;\quad r_k<\eta<r_k+1,$$

卽在整數之列內,ξ 與 η 處於不相同之間距內,故必不能相等,而(7)內二連分之值亦不能相同.

總括以上所述,吾人可得一定理如下:

任何一無理數,祇可以一種方式展爲連分,且此連分必爲無盡者.

§33. 實數之羣論的研究

1. 在數目範圍之漸次的擴張上,吾人由自然數出發,依次及於整數,有理數及實數之全部,吾人對於原有之數目,每次增入無限多之新數目,於是吾人或可就渾樸之觀點上,將此項無限羣之"多寡"作一比較,吾人之意,或將謂負整之多,與正整數同,但有理數之多,則較整數多無限倍,蓋在任何小之間距內,已有無限多之有理數在,然以之與無理數較,則無理數之多,尤將多於有理數無限倍,因吾人將某一個有理數之平方根,用有理的運算於其上時,已可得無限多之無理數也.但由若干簡單之例,則可使吾人知此種常情上之多寡概念,用於無限羣時,其結果有足出人意外者.

1. 吾人試一觀偶數之羣:

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 2,\ 3\cdot 2,\ 4\cdot 2,\cdots\cdots$$

或可廣之,任何一數目 n 之倍數所成之羣,則可見其多與自然數之多相同.

2. AB 與 $A'B'$ 爲二線段,其長不同,亦不在一直線上.由 AA' 與 BB' 之交點 S,將其一線段上之點投射於其他一線段上.如是則對於 AB 上之每一點 P,有 $A'B'$ 上之一

點 P' 與之相當,故吾人必須云 $A'B'$ 與 AB 之長雖不同,但其點之多則相同.[1]

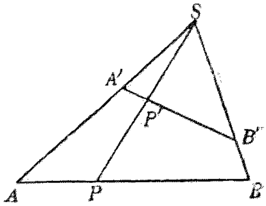

圖 3

由此可知任何一間距內,實數之多相同.

吾人亦可於算術上指出之:

設 a 與 b 爲實數,$a<b$. 今作 $a+\lambda(b-a)$ 一式,使其中之 λ 遍取一切小於 1 之正實數,則即得 (a,b) 間距內之一切實數.從可知每個間距內所有實數之多,如 λ 所可取之值同,亦卽與 $(0,1)$ 一間距內所有之數同. 設 a 與 b 爲有理數,λ 之值亦以 $(0,1)$ 中之有理值爲限,則可見任何一間距內之有理數,其多恆同.

此種極可注意之現象,顯然與"全體大於部分"之根本公理相違,故亦爲一無限方面之矛盾.[2]

2. 對於此項矛盾之發現,科學實不能漠視之.蓋由此可知吾人所用之概念,當必有模糊處,或則此項概念之定義,未臻於精確,或則此項定義所應用及之範圍,有不能盡

1. 設 M 爲 $A'B'$ 之中點,則可先將 $A'M$ 與 AB 相當,再將 MB' 與 AB 相當,則吾人必須云 $A'B'$ 雖較 AB 爲短,但 $A'B'$ 所有之點則倍多於 AB.

2. B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851. Neu herausgegeben von A. Höfler und H. Hahn. Leipzig 1921. Galilei 於其 Discorsi (1638, Ostwalds Klassiker Nr. 11) 中,已曾舉例以明無限之不可捉摸,蓋謂平方數之多,必與自然數之多相同也. 此例之足注意,尤因平方數在數列內恆趨於少,蓋愈往後則其間之相距愈遠,故吾人亦可謂平方數之多,對於自然數而言,實爲不足道者.

適當者.究其事實,後者實爲其原因,蓋"多寡"之概念,祇於有限羣方面有確定之意義,不當隨卽轉用於無限之羣也.[1] 故吾人如放棄無限羣之相比較則已,否則必須由較廣之概念出發,使有限羣方面之多寡概念,包入於其內.而可適用至無限之羣.康圖氏已將此問題告一段落,其所用之方法,係以二個羣內元素之相互對應爲出發.

3. 吾人倘將一有限羣 $\mathfrak{A}$ 之元素,一一與 1, 2, 3 …… 數列內之數相對應,則此羣謂之已被計點者(abgezählt). 倘將計點完成之,則吾人對於 $\mathfrak{A}$ 羣,已有自然數羣之部分羣 $\{1, 2, 3, \cdots\cdots N\}$ 與之相對應,此羣今以 $\mathfrak{N}$ 表之. 此種對應法,爲一對一而可互反者,卽對於 $\mathfrak{A}$ 之任何一元素 a,有 $\mathfrak{N}$ 之一元素 n 與之相當.反之,在此計點法中,對於 $\mathfrak{N}$ 之元素 n,有 $\mathfrak{A}$ 之元素 a 與之相當. 如是二羣間之一對一而可互反之關係,前於 § **5** 中已論及之;吾人名之爲等值性,而寫之作

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{N},$$

讀爲:"$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{N}$ 等值." 故吾人可云:

將一有限羣加以計點之意,卽謂求此羣與自然數羣之部分羣間之等值性.

1. Galilei 曾爲"相等,""大於,""小於"等諸語,對於無限方面無有意義可言,蓋此項語言祇適用有限之量也.——全體大於部分之根本定理,亦祇能用於有限羣,吾人不當隨卽推至於無限之義. 參觀 G. Cantor, Zeitschr. für Philosophie u. philos. Kritik 91 (1886), Abschnitt VIII, 7.

倘此部分羣$\mathfrak{N}$,名之爲$\mathfrak{A}$之計點羣,又設$\mathfrak{B}$爲與$\mathfrak{A}$等值之羣,則亦$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{N}$,卽:

等值之有限羣,其計點羣同.

凡等值之有限羣,其共同的數量概念,卽爲其元素之多寡,由其計點羣所確定.對此,吾人亦可稱之爲基數或實量(Mächtigkeit),故可云:

有限羣以其計點羣之實量爲其實量.

4. 等值性之概念,吾人可將其推至於無限之羣.例如按康圖氏之直線公理(§**24**, **3**.),一線段上之點羣,與一間距內之實數羣爲等值者.又如圖3內所表者,亦爲AB與$A'B'$二段上各點間之一對一而可互反之對應,故該處二無限點羣亦爲等值者.仿此,由一二次曲線,按極之關係,吾人亦可得點與線間之一對一而可互反之對應,此亦卽二個無限羣間之等值也.

今試退而論**1**.內之諸例,則可見該處所云之矛盾,均在於羣與其本身之眞部分羣等值.在有限羣方面,此種事實決不能發生(§**5**, **5**.),而就他方面觀之,此項屬性亦卽爲無限羣之標識,故談德金氏卽用之爲無限羣之定義.[1]吾人不欲如是爲之,而以如次之屬性爲無限羣之標識:凡由

1. 見談氏前所引書 Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1872.

無限羣內取出之有限的部分羣.決不能將該羣取盡;至於談氏定義中之屬性,則可證明之.

5. 先作一定義:

凡與自然數羣等値之羣,爲可計點者.

如是,吾人倘可將一羣,仿自然數列構出之,即將其元素按一次序排列之,俾直一元素有其所獨用的一號數,則此羣爲可計點者.吾人於是可將元素之總,即全羣,作爲一數列表出之: $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$.

在有限羣方面,吾人有計點羣,在可計點之羣方面,即自然數羣是.前所述之實量之概念,吾人亦推及至此,故可云:

可計點羣以自然數羣之實量爲其實量.

6. 吾人今不難見以下之定理:

一可計點羣之無限的部分羣,亦爲可計點者.

蓋如吾人由一可計點之羣 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 內取出無限多之元素,則此項元素均有標數 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots$ 者.而此項標數則與自然數列相對應,故亦構成一可計點之羣.但所取出之元素 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots\cdots$,其羣與標數之羣等値,故亦爲可計點者.

由此,即可知:

一可計點羣之任何無限部分羣,與全羣等値.

此外,並可知:

任何一無限之羣,有可計點的部分羣.

蓋如吾人由羣內取出一有限羣 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$, 則決不能將其取盡,而 a_n 以後,恆有 a_{n+1} 可取也.

7. 於是吾人可將上述之一切無限羣之特殊屬性證明之,即:

任何無限羣有與全羣等值之部分羣.

蓋如 $\mathfrak{M}$ 爲一無限羣,則必一可計點之部分羣 $\mathfrak{A}$. 設 $\mathfrak{B}$ 爲其餘一切元素所構成之羣,則吾人可寫之爲

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}$ 之任何一無限的部分羣 $\mathfrak{A}'$, 與 $\mathfrak{A}$ 等值,此則所已證明者. 今將其與 $\mathfrak{B}$ 相結合,則 $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; 但 $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B} = \mathfrak{M}'$ 爲 $\mathfrak{M}$ 之部分羣,故事實上 $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$.

8. 吾人如一觀以下諸定理,則可計點的羣之概念,其意義即明瞭,此項定理能將實數之性質表白,至堪注目,且亦即康圖氏所創普通羣論之基礎也(見 G. Cantor, Journal für Mathematik 77, 1874. 並參觀 Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung 1, 1892).

爲使讀者注意其重要計,特將該項定理,編以號數.

I. 有理數之羣,係可計點者.

吾人倘能將有理數列爲次序 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$, 則此定理即已證明.

今試取正有理數$\frac{a}{b}$之約盡式,凡分子與分母之和,均爲$N=a+b$者,吾人盡取之;此項數之多,自不能爲無限者,故可按分子之向上以排列之.同時,並將各數之相反數卽附於其後.列如$N=12$時.吾人得有理數如下:

$$\frac{1}{11},\ -\frac{1}{11},\ \frac{5}{7},\ -\frac{5}{7},\ \frac{7}{5},\ -\frac{7}{5},\ \frac{11}{1},\ -\frac{11}{1}.$$

今將$N=1, 2, 3, 4,\cdots\cdots$之各數列出,則得一數列如下:

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1};\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1};$$

$$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1};\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},$$

$$-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ -\frac{4}{1};\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在此數列中,每一有理數必發見一次,亦祇有一次發見於一確定之處所.故吾人已將定理證明.

吾人前曾(§**19. 5.**)謂有理數之羣,係無所不密者.蓋在任何小之間距內,必尚有有理數在.反之,自然數之羣,則係到處不密者,蓋羣內a之後,固有一b在,但(a, b)間距內,則無有該羣內之數也.然吾人今則可見此堪異之事實,卽無所不密之有理數羣,其實量乃與到處不密之自然數羣同.蓋有理數羣之所以爲無所不密,實由其一定之整列法,卽按其大小之整列法,所使然,吾人今既摧毁其整列法,則此羣卽成爲到處不密者矣.

一切有理數既爲可計點者,則任何一間距內之有理數,自亦爲可計點者.

9. 吾人今可提出此問題,即對於無理數,是否可有相當之定理.關於此,康圖曾有一定理,其所及者爲範圍頗大之一類無理數,惟吾人對於代數學須先有相當之知識,方能明之.

一n次之方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

(於此,吾人恆可假定a_0爲正數,不能爲0),其根不能多於n個(此處僅論其實根).倘$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$均爲整數,則其每一根謂之一代數數.$n>1$時,倘係數之間無有特殊之條件,則每一代數數爲無理數,惟每一有理數$\frac{a}{b}$,亦已屬於代數數,蓋此均爲方程$bx-a=0$之根也.此外則一切任意之根數(平方根,立方根,等等),即得自有理數之根數,與此項數之代數的連結.以及其他無限多之數,不能用有限多之有理算法及開方以得之者,亦均屬之.任何次之方程,有無限多個,其係數均爲整數,其根爲實數.故可見代數數之羣,較之有理數之羣大無數倍,而用幾何的圖表法時,代數點之充滿於直線上,較之有理點必更密無限倍.然吾人仍有以下之定理:

II. 代數數之羣,係可計點者.

欲證明此定理,可作如次之式:

$$N=n-1+|a_0|+|a_1|+\cdots\cdots+|a_n|.$$

對於N之任何正整值,n祇能取有限多之值,因$|a_0|$至少等於1,故n之值祇能爲$1, 2, \cdots\cdots N$. 今使n取其中之一值,則$a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$諸係數之值,其多有限.故對於一已知之$N$,祇能有有限多之方程.在構成方程時,除$a_0$外,吾人尙可假定$a_n$亦不等於0,蓋$a_n=0$時,此方程卽可用$x$除之,而得較小$n$之方程,故此可歸宿於該項方程內也.如是,以$N=4$爲例時,吾人可得如次之諸可能性:

$$\begin{array}{lll} n=1;\ |a_0|+|a_1|=4; & a_0=1, & a_1=\pm 3 \\ & \quad\ \ 2, & \quad\ \pm 2 \\ & \quad\ \ 3, & \quad\ \pm 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} n=2;\ |a_0|+|a_1|+|a_2|=3; & a_0=1, & a_1=\pm 1, & a_2=\pm 1 \\ & \quad\ \ 1 & \quad\ 0 & \quad\ \pm 2 \\ & \quad\ \ 2 & \quad\ 0 & \quad\ \pm 1 \end{array}$$

$$n=3;\ |a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|=2;$$

$$a_0=1, a_1=0, a_2=0, a_3=\pm 1.$$

此卽十六個不同之方程.

試設想將屬於$N=1, 2, 3, \cdots\cdots$之方程均寫出,並將屬於同一N之方程按一定之次序排列之,則凡以整數爲係數之方程,均有其一定之處所,故知:

整係數之代數方程之總,構成一可計點之羣.

試再設想,將每一方程之實根寫出之,並將屬於同一N

者亦按次序排列之,例如按大小之次序列之,且凡以前在較小之N下所已有過之根,均剔去之,則吾人即得一數列,每一代數數必於其中發見一次,亦祇於其中之某一確定處所發見一次.如是,定理II即已證明.且可知一切實代數數之總,其實量亦與自然數羣者同.

10. 經代數數之擴充後,數目之羣已有極大之擴張.於是吾人或可推想,以爲實數已盡於此矣.如是則每一實數均爲一代數數,而實數羣之無限,其種類亦不能與自然數羣之實量異.故如吾人不發見他種之例,則代數的無限一概念,亦將成爲不必要.但事實則不然.當1844年時,法國數學家劉維(Liouville,見Journ. de Math. 16, 1851),已曾指出非代數數之多,亦爲無限,此項數不能充適整係數之代數方程者;其後康圖氏始關於其實量有所證明,即以下之定理III是,由是吾人知可計點的羣之外,尚有他種存在.定理如下:

III. 一切實數之羣,爲不可計點者.

欲證明此定理,吾人可用此事實,即任何一實數,可用一無盡十進分數表之(於此,有盡十進分數亦可視爲無盡者,其週期爲0或爲9).倘一切實數之羣爲可計點者,則$(0,1)$一間距內之數,亦必可計點,而可將此項數作爲十進分數之列表出之:$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots$今設

$$z_1 = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\cdots$$

$$z_2=0,\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots\cdots$$

$$z_3=0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則吾人不難作一實數,屬於此間距,但不在此數列內者.試將第一分數內之第一位小數,第二分數內之第二位小數,廣之,第 n 分數內之第 n 位小數易以他數:

$$\alpha\neq\alpha_1,\ \beta\neq\beta_2,\ \gamma\neq\gamma_3,\ \delta\neq\delta_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但不可使某位以下均成為 0 或 9,則得一十進分數:

$$z=0,\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots\cdots$$

與以前之分數 $z_1, z_2, z_3,\cdots\cdots$ 中之任何其一不相同.[1] 故可知 $z_1, z_2, z_3,\cdots\cdots$ 一數列內,不能將 $(0, 1)$ 間距內所有之一切實數,均包入於其中,是則與前所設者相違,而此項數之羣為不可計點者,一切實數之羣自更不可計點矣.[2]

從可知實數之羣,其實量與自然數不相同.吾人稱之為連續體 (Kontinuum) 之實量.

一切實數之羣,與 $(0, 1)$ 間距內數目之羣為等值者.[3] 此

1. 此種常用之方法,羣論內謂之對角證法.

2. 潘加勒 (H. Poincaré) 對此尚有一極簡單之證法,見其 Math. Vorlesungen an der Universität Göttingen 4, Leipzig 1910, 第十五頁.

3. 試用 $x'=\frac{1}{4x}$ 之式,將 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 內之數目對映於大於 $\frac{1}{2}$ 之數目上,並用 $x'=1-\frac{1}{4(1-x)}$ 之式將 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 內之數對映於 $<\frac{1}{2}$ 之數,即不難見此.吾人亦可將任何間距 (a, b) 內之數對映於一切之實數.

則與任何一間距(a, b)內之羣數又相等值，如吾人於1.內所已知者.故得:

任何一間距內之實數之羣,其實量與連續體之實量同.

故可知任何一間距內之實數,其羣爲不可計點者,但其代數數之羣則可計點,因而代數數於實數中祇爲一極小之部分而已.非代數數,或所謂超絕數(transzendenten Zahlen)之領域,[1] 此處已得其啓示,但迄今對此領域,吾人尙未之硏究也.對於一已知數之判定其是否爲代數數或超絕數,亦尙多困難,故迄今所已能判定者,祇有一類之數,[2] 圓周率π亦卽其中之一.本書末編,對此再有述明.

§34 第四章史料

1. 無理之發見,實爲希臘數學之一大貢獻.最初蓋由皮他谷拉斯之定理,引出有理數之平方根,而彼時所知者,則爲若干簡單之例,如$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$等以至於$\sqrt{17}$

1. 用"transzendent"(超絕)一語以表非代數之數目,函數,曲線等,實肇自萊伯尼茲(Leibniz, 1686年時). 萊氏已語及超過任何次任何方程之量,故實已有超絕數之概念,惟未證明其存在. 證明其存在者,首爲劉維氏(見前引著作).

2. 吾人未將該項數計入,如劉維(見前引)及梅也(Maillet, 見其Introduction à la théorie des nombres transcendants. Paris 1906)所特意作出者.

(Theodor von Kyrene);[1] 但意義較大,且對於數學史有莫大之關係者,則爲無理概念之形成,卽不用感覺上之觀念,而純恃概念以獲得智識,知邊爲單位長之正方形,其對角線與向所從事之線段,性質上不相同,以1及2爲勾股之直角三角形,其弦亦如是.

對於無理數,最初作系統之理論者爲歐几里得之幾何要義第十卷,其形式全爲幾何的,蓋其中所論者非爲有理數與無理數,而爲可通約與不可通約之線段.[2] 但此種幾何的表法,實爲二千餘年來實數理論之基礎.故實數皆視爲與直線上之線段相同者,任何一線段與單位線段之

1. Platon, Theaetet 147. 歐几里得以前之無理數發見史,已不可考.有謂皮他谷拉斯實爲其發見者(紀元前550年時)但吾人僅知$\sqrt{2}$之無理性,係皮他谷派中人所證明(約當450年時). 對於無理數之性質,Platon時代已有相當之了解,此則可信者(約當400年時). 參觀 G. Junge, Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? Progr. Berlin 1907. H. Vogt, Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen. Bibl. Math. (3) 10 (1909/10). H. G. Zeuthen, Sur l'origne de la connaissance des quantites irrationalles. Akad Kopenhagen 1915.

2. 歐几里得所知者僅爲自然數. 可通約的量(見§36)相比,如數目相比(X, 5),但不可通約者則否(X, 7). 其所謂可通約與不可通約之概念,實卽與有理及無理之概念相同,但 ῥητός 及 ἄλογος 二語則不同.蓋前者表一線段,其長可與單位線段相通約,或則其平方可與單位線段之平方相通約,故有理數之平方根雖不能與單位線段相通約,但亦爲 ῥητός 也. 此項平方根之任何一種結合,均名爲 ἄλογοι (X, 21, 36, 53–96). 此外別無其他之無理數,故所論者均爲圓規與直線所可作之段. 因之,嚴格論之,歐氏幾何學實非連續體內之幾何學,而爲非連續體內者,惟除完全之公理外,其他公理均能適用於其中耳(參觀 Hilbert, 幾何學之基礎).

比,卽爲一數目.[1] 但自 Michael Stifel (1545) 以來,隨代數學及級數理論之進步,以及十進分數之應用,無理數之算術的特性,日以明瞭,故用之者日多.然其能全由幾何觀念擺脫,純以算術方法建立其基礎,則尙爲十九世紀以來之事.除談德金及康圖以外,其最有貢獻者,必推魏斯德拉斯(Weierstrass)氏,自六十年代以來,魏氏之講演,多用有界之單調數列以確定無理數.梅雷(Méray)氏之法,[2] 實與康圖之定義極相接近.

2. 二千五百年來之無理數歷史,至羣論之成立,乃告一結束;羣論實爲最新的數學體系之一也.羣論之發展,半由於若干數學上之根本問題(如 B. Bolzano 於其"無限方面之矛盾"一書內所論及者),半由於函數論上之問題(三角級數),但其對於算術,解析及幾何上意義之大,則遠出其歷史的來歷之上.凡諸基本概念,今莫不由羣論

1. Newton, 1685 (Arithmetica universalis 1707).

2. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig, 1872. Cantor, Math. Ann. 5 (1872), 但 21 (1883) 中有較詳之論著,其評論談德金及魏斯德拉斯之理論尤堪尋味. 關於魏氏理論之詳述,兼附有極多之歷史的及引證的材料者,可參觀 G. Mittag-Leffler, Tohoku Math. Journ. 17 (1920). Méray Revue des sociétés savantes: sciences math. 1869. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale Paris 1894. 關於各種無理數理論之比較的研究,可參觀 Loewy, Lehrbuch der Algebra 1, 254 ff., 284. 關於無理數算法及極限値理論之基礎,參觀 R. Baire, Théorie des nombres irrationels, des limites et de la continuité. Paris 1905. 最後,吾人並介紹 O. Perron 之 Irrationalzahlen, Berlin 1921

得其明確之定義.羣論之創立者,尤推康圖氏,其1873年以來之鴻篇鉅著,多爲斯學之基本.[1] 關於其發展史,A. Schoenflies有詳盡之報告,見Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 8 (1900),新增訂於1913年(其第二編出版於1908年). A. Fraenkel之Einleitung in die Mengenlehre (Berlin 1919)可爲斯學之入門書.較深入之書,有Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906; Russel, the Principles of Mathematics, Cambridge 1903/12; F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

本世紀之初,經§1.內所曾提及之諸種矛盾,[2] 羣論曾爲之動搖.蓋觀於此項事例,吾人對於斯學之論理的基礎,不能不發生疑問.數學家中,亦有前此曾對羣論有極大之貢獻,至此轉而懷疑之者(Poincaré. Borel).故E. Zermelo用公理之方法,以建立羣論之基礎,俾此項矛盾不再發生,實有極大之意義(見其Math. Ann. 65, 1908,中之著作Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre)[3]

1. Math. Ann. 第15卷(1879)以後. Acta Math. 2 (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883. Zur Lehre vom Transfiniten. Halle, 1890.

2. Russel, The Principles of Mathematics 1,366. Richard, Acta Math. 30 (1906). H. Poincaré, Revue de Métaphys. et de Morale 13 (1905), 14 (1906). Schoenflies, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 15 (1906), 20 (1911). F. Bernstein, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 28 (1919).

3. 關於羣論之公理的基礎,參觀Brouwer, N. Arch. f. Wisk. (2) 12 (1917); Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 28 (1919). Schoenflies, Akad. d. Wiss. Amsterdam 1920. Math. Ann. 83 (1921).

第五章

可量之量 比及比例

§35. 可量性

1. 今當討論此問題,卽吾人曾屢謂數目之概念,係吾人精神所創作者,然則當如何應用於外界之事物.自然數之應用,其方法爲計點,此則已於第一章中言之,故可不再及.至於有理分數及無理數,則其法在藉度量之動作,以應用於外界是.

度量法決不能有絕對之精確,且吾人之幾何作法,亦不能得實在之點,線或面,故在表明經驗上之大小關係時,有理數亦已足用,實無有創爲其他數目之必要.

然吾人於思想上,則不能放棄此項觀念,例如一平方之對角線,或一圓周,必有其一定之長,而可以數目表之;對於時間及重量亦然.故吾人總必作此假定,以爲全部數目,在外界之可度量的事物方面,有其等値者在.[1]

---

1. 在純粹數目之範圍內,連續性之概念至爲明晰,但欲於可度量之量,卽外界之事物方面,以明瞭此連續性,則其事至難,或爲不可能者.

Paul du Bois-Reymond 於其所著"Allgemeine Funktionentheorie" (Tübingen 1882) 內,曾研究此問題,其結果謂二種不相同且互相排斥之立場,卽理想的與經驗的,同爲可能,且同爲有理由者.

2. 一羣(如長,時間,質量等)之可量性,其實質不外以下諸端:

1. 羣內之二元素 a, b, 可爲相等者. 倘非相等,則其一較大,其他較小.

2. 設 a 爲羣內一元素,則有其他之元素,小於 a 者(可分性之無限).

3. 設 a, b 爲二(相等或不相等)元素,則有一第三元素 $c=a+b$, 亦在羣內,爲二元素之和. 和大於其任何一被加數.

   求和之時,適用加法上之交易律及結合律.

4. 設 b 小於 c, 則有一確定之元素 $a=c-b$, 有此屬性,能 $a+b=c$.

5. 將若干相等之元素 a, 反復求其和時,得倍數之概念 ma, 於此, m 爲一自然數. 在倍數方面,適用亞希米德之公理:[1]

   設 a, b 爲羣內任何二元素,則恆可得 a 之倍數 ma, 較 b 爲大. 故在一可量之羣內,既無最大之元素,亦無最小者,而由 2., 3., 4., 可知不同之元素間,恆有其

1. 此公理已見於歐几里得之要義 V, 8 內,或係 Eudoxus 所提出. 參觀 Archimedes, 論球及圓柱體之第五假設. 在算術中,吾人不難用連續性之公理以證明此公理. 參觀 O. Stolz, Math. Ann. 22 (1883) 及 39 (1891). O. Hölder, Ber. d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 53 (1901). Hilbert, "幾何學之基礎."

他之元素在,故羣為無所不密者.

6. 設 a 為羣內之任何之元素, n 為一自然數,則有一元素 b, 能 $nb=a$. 此元素 b 名為 a 之 n 分之一, 以 $b=\frac{a}{n}$ 表之. 至於此種元素 b, 不能有二個(不相同者), 此則不難由其他之假定以推知之. 蓋如 $b'>b$, 則 $nb'=nb+n(b'-b)$ 大於 nb 也.

為簡便計,吾人有時將若干相同之元素,視之為一個.

§36 可通約之量

1. 對於一可量的羣內之二元素 a, b, 吾人倘能得二個自然數 p, q, 俾

$$qa=pb, \tag{1}$$

則此二元素謂之可通約者.

由方程(1), 可知將 a 分為 p 等分, b 分為 q 等分時(按§35之6.), 二者相等:

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=d. \tag{2}$$

吾人於是可得 $a=pd$, $b=qd$. 從可知 d 為 a 與 b 之公共度量, "可通約"之意, 亦即指此. 在此狀況下, 吾人可云: a 與 b 二元素相比, 猶 p 與 q 二數目相比.

2. 倘用同一乘數將 a, b 乘之, 則方程(1)仍適用, 用同一除數除之亦然; 用同一乘數乘 p, q, 或用同一除數除 p, q, 均無不可. 故如 $\frac{p}{q}$ 分數之值不變, 則 p 與 q 之比亦不

變,因而吾人可將二數之比,亦卽可量的羣內任何二可通約元素之比,與有理分數一對一的相對應.因之,吾人表相比關係間之相等時,亦可不用(1)而用如次之方程:

$$a:b=p:q \text{ 或 } \frac{a}{b}=\frac{p}{q}.$$

倘 $\frac{p}{q}$ 分數大於 $\frac{p'}{q'}$ 分數,則吾人可云 $\frac{a}{b}$ 一比,大於 $\frac{a'}{b'}=\frac{p'}{q'}$ 一比.

3. a 與 b 名爲比之分子與分母.若 $a=b$,則其比 $=1$.設 $\frac{p}{q}$ 爲已知,則 a,b 二元素中,其一元素可任取之.蓋如 p,q 及 b 爲已知者,則可將 pb 分爲 q 等分,以得 a 而充適方程(1).若將此元素 b 固定,則羣內之任何一元素 a,凡與 b 可通約者,均得有一確定之數目 $\frac{p}{q}$,b 本身之數目則爲1.因之,吾人名之爲量法上之單位.單位之選擇,可任意爲之,但以方便爲指歸.惟在科學的用途上,吾人確定一無疑義之單位,且任何時候均可復按之,不致有變動,此實爲極重要之事.事實上,此種條件,甚難嚴格的實踐,但儘量的求達到此條件,則吾人曾以全力爲之.

§37. 不可通約之量

1. 在實用之目的上,吾人假定相比之量爲可通約者,因而其比爲有理者,實已足用.但欲求數目與可量的量間之完全的等值,則吾人卽有進一步之必要,並當研究無理的比.

按可量性之概念,設 e 爲一可量的羣內之任何一元素,r 爲一正有理數,則 re 亦爲該羣內之一確定的元素.今設 a 爲此羣內之任何一元素,則可將一切 r,凡 $re<a$ 者,均入於 R 類,其一切 r',凡 $r'e>a$ 者,均入於 R' 中,則吾人卽得一個切 $(R \mid R')$,而如有一個數目 r,能 $re=a$ 者,則可隨意將其入於 R 或 R'.此切決定一實數 α,今卽將其與元素 a 相對應.吾人設 $\alpha e=a$,名 α 爲 a 之量數.e 爲此量法上之單位,故如 e 變動,則此數自必隨之而變.設 $\beta e=b$ 爲此羣內之其他一元素,且 $a<b$,則亦 $\alpha<\beta$.

對於可量的羣內之任何一對 a, e,必可得一確定之量數 α,此實爲以前確定可量性之定義時所用假設之結果.反之,有已知之 e 時,吾人對於任何之數目 α,必可得一確定之元素 a,使其量數爲 α,此則爲對於可量的羣所作之假設,吾人之內在的觀念上,恆傾向之,故今後亦採用之.所謂羣之連續性,亦卽包含於此屬性中.在長之量法方面,已可由康圖或談德金之直線公理,或亦可由間距相嵌公理,以得此假設.吾人將此項公理推至於空間及其他可量之羣,因而視之爲亦有連續性者.

感覺上之觀念,與此種連續性之概念,不能相連繫,故外界之經驗既不能證明之,亦無從反證之也.

2. 今可作比之較廣的定義於下.

歐几里得(要義V,定義5)[1]曾有如次之定義:設a,b為一可量的羣之二元素,A,B為其他一羣(但亦可同為該羣)之二元素,則可取任何二自然數m及n.於是吾人於以下之三個事例中,必有其一,亦祇為有其一:

$$ma<nb,\ ma=nb,\ ma>nb. \tag{1}$$

倘不問取若何之m,n時,同時恆有

$$mA<nB,\ mA=nB,\ mA>nB, \tag{2}$$

則a與b比,猶A與B比.

吾人用以下之方程以表之:

$$a:b=A:B. \tag{3}$$

此處須說明者,則可量的羣之元素,吾人係取其絕對者(作為正量用之).由此,得:

二正數α與β之比,等於$\frac{\alpha}{\beta}$與1之比,卽

$$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}:1. \tag{4}$$

蓋由

$$m\alpha\lesseqqgtr n\beta,$$

用β除之時,卽得

$$m\frac{\alpha}{\beta}\lesseqqgtr n\cdot 1.$$

因之,吾人可將$\frac{\alpha}{\beta}$一數,視為α與β比之量,且凡與此比

1. 或有人謂歐氏所述之比例理論,當實築自Eudoxus云.

相等之比,亦均可用之爲量

3. 一可量的羣內二元素a, b之比,等於其量數α, β之比.

蓋如

(5) $$m\alpha < n\beta$$

則可於$m\alpha$與$n\beta$之間插入二有理數,mr及ns,使

(6) $$m\alpha < mr < ns < n\beta.$$

如是則$\alpha < r, s < \beta$,故如e爲單位,則

$$a < er,\quad es < b,$$

而按(6),得

(7) $$ma < nb.$$

仿此,倘已有(7),則亦可得e之有理倍數er及es,俾

(8) $$ma < mer < nes < nb,$$

因而有

$$\alpha < r,\quad s < \beta,$$

(9) $$m\alpha < n\beta.$$

吾人並可證明,$ma > nb$與$m\alpha > n\beta$二不等式,恆相關連,故可推知$ma = nb$恆以$m\alpha = n\beta$爲結果,反之亦然.

因之,$\frac{\alpha}{\beta}$爲a比b之量,與單位e之選擇並無關係.吾人用量數計算時,與用數目計算時同;但倘須提出者,則此種計算之結果,當予以何種之意義是.

必量數屬於同一之可量的羣,加與減乃有意義可言;

蓋如不屬於同一之羣,如時間與長度,則相加相減卽不可能.倘二量數之單位相同,例如均用長之單位,則其和及差卽爲所量的量之和及差之量數,仍以原單位爲單位.

在有理的量數方面,此可由§36之諸條得之,而由所設之連續性,並可推及於無理數.

量數之乘積,爲另一新羣內之量數.有單位爲因子方面單位之乘積.商數方面之情形仿此.如是,二個長之乘積爲面積量,三個長之乘積,爲體積量,長被時間所除之商爲速度量.但同一羣內二量數之商爲一比,而爲一純粹之數目.

§38. 比例

1. 方程之形式如

(1) $$a:b=c:d$$

者,名爲一比例.此中之a, b, c, d均爲可量的羣內之元素.祇當a與b及c與d各能相比時,卽必須a與b及c與d各屬於同一之可量羣時;此方程乃有意義可言.但a, b及c, d所屬之羣,不必相同,例如其一羣爲力之系統,其他羣爲長之系統,無所不可.因之,爲便於明瞭計,吾人常用線段以表任何羣之量.

a, b, c, d謂之比例之元素,a爲第一比例數,b爲第二,c爲第三,d爲第四比例數(比例之元素,尋常多名之爲"比

例之項,''吾人不欲採用之,蓋''項''之名稱,以用於算式內總合式之各成分較爲適當,故不欲亂其意義也).

設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲 a, b, c, d 之量數,則由 (1), 可得一數目之比例,或二商數之等式:

(2) $$\alpha:\beta=\gamma:\delta,\ \text{或}\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

由此等式,吾人可得若干算術的結果,而由此項結果,復可得關於 a, b, c, d 之結論.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 四數目中,倘有其三已知,則其餘之一即完全被決定.按吾人之假定,任何一量數,有其所屬之確定的(可量的)量,故:

一比例內四元素中有其三爲已知,則其餘之一元素,即隨之而不二的被決定.

2. 由 (2), 可得

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}\ \text{及}\ \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

故必須 a 與 c 可相比,即 a, b, c, d 四元素屬於同一之羣內,乃可由之得關於 a, b, c, d 之結論. 在此假定下,吾人得:

一比例內之二中間元素以及其二外間元素,均可相易. 故由 $a:b=c:d$, 可得

$$a:c=b:d\ \text{及}\ d:b=c:a.$$

3. 比例中數.

倘 (1) 內之第二與第三比例數相等,則此二者謂之第

一與第四元素間之比例中數．倘 a, b 爲二任意之數，吾人是否可由之決定其比例中數？ 卽吾人是否可求得一元素 x，使能充適

$$(3)\qquad a:x=x:b$$

一比例？ a 與 b 必須屬於同一之羣，此則無容疑者．設 α, β, ξ 爲 a, b, x 之量數，則由 (3)，得

$$\alpha:\xi=\xi:\beta,$$

$$\xi^2=\alpha\beta,$$

故
$$\xi=\sqrt{\alpha\beta}.$$

從可知求比例中數時，必引出平方根．

倘 a, b 爲長，則比例中數爲一平方之邊長，此平方之面積，等於以 a, b 爲邊之長方形之面積．

4. 二正數 α, β 之比例中數，卽 $\xi=\sqrt{\alpha\beta}$，亦稱爲該二數之幾何均數．設 $\alpha<\beta$，則 $\alpha^2<\alpha\beta<\beta^2$，

故
$$\alpha<\sqrt{\alpha\beta}<\beta.$$

二數之和之半，卽 $\mu=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，吾人名之爲 α 與 β 之算術均數，[1] 以與幾何均數相別．於正數 α, β，吾人亦有

$$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta.$$

關於此，有以下之定理：

---

1. 廣之，$M=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$ 爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，$n$ 個數目之算術均數．

二正數之算術均數,恆大於其幾何均數.

蓋 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$, 故 $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}>\alpha\beta$, 而 $\frac{\alpha+\beta}{2}>\sqrt{\alpha\beta}$.

5. **3.** 內之問題,可擴充之如次:於 a, b 二量之間,插入二比例中數,即求得 x, y 二量,使

(4) $$a:x=x:y=y:b.$$

今設其量數爲 α, ξ, η, β, 則有

(5) $$\alpha:\xi=\xi:\eta=\eta:\beta.$$

由此,得

$$\alpha\eta=\xi^2,\ \beta\xi=\eta^2,\ \alpha\beta=\xi\eta,\ \alpha^2\beta=\xi^3,\ \alpha\beta^2=\eta^3,$$

故[1] $$\xi=\sqrt[3]{\alpha^2\beta},\quad \eta=\sqrt[3]{\alpha\beta^2}.$$

(5) 內之比例,亦即 (4) 內之比例,於是即可解決.但 $\alpha^2\beta$ 所表者爲體積之量數,即其底爲以 a 爲邊之正方形,其高爲 b 之方柱體之體積,ξ 則爲一立方體之邊之量數,此立方體之體積爲 $\alpha^2\beta$. 故由 (4), 吾人可解決一問題,即將一方柱體化成爲等體積之立方體,而將其與 **3.** 相併用時,吾人即可將任何之平行六面體,化成爲立方體.

如設 $b=2a$, 即得著名之狄利人之問題 (Delisches Problem). 即求將立方體倍之之問題也.[2]

---

1. 立方根之觀念,須於下章內論之,今暫一用及之而已.

2. 狄利人因疫癘禱於阿波羅神,經啓示謂須將其壇倍之,壇作立方形,故有是問題發生.尋常將此問題之幾何的解決法,歸之於柏拉圖 (Platon). 關於其歷史及解決法,參觀 Enriques, Fragen der Elementargeometrie, 2. Leipzig 1907. · Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig 1911.

6. 黃金比例. 將一已知之線段 a, 分爲二段 x 與 $a-x$, 使較大之段 x, 成爲全段 a 與小段 $a-x$ 間之比例中數:

$$a:x=x:(a-x), \tag{6}$$

如 α, ξ 爲 a, x 之量數, 則卽得

$$\xi^2=\alpha(\alpha-\xi),$$

或

$$\xi(\xi+\alpha)=\alpha^2.$$

倘將其寫作

$$\left(\xi+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\xi+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\alpha^2,$$

則按 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 之公式,

得

$$\left(\xi+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}=\alpha^2,$$

$$\left(\xi+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\alpha^2,$$

故

$$\xi+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2},$$

而

$$\xi=\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\approx 0,618\,\alpha.$$

($\approx$ 內符號表"近於"之意).

從可知較大之段爲 $0,618\,a$, 其較小之段則爲 $0,382\,a$.

"黃金比例"之名,係後人數加.但當皮他谷派時代,曾視之爲莫大之神秘.因壓對於視覺之稱意,故希臘之建築術上多用之,其對於美感上之意義,詳論於 Luca Paciuolo 所著之 "Divina Proporzione" (1509) 一書內,此書實受 Leonardo da Vinci 之影響及助力而著成者.關於此之新著作,有 A. Zeising, Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenon, die ganze Natur und Kunst durchdringenden, morphologischen Grundgesetz entwickelt, Leipzig 1845. 此中所謂之基本定律,卽黃金比例也.Zeising不獨於人體方面指出之,兼欲於自然界及藝術方面證明其無往而不在. 並參觀 F. X. Pfeifer, Der goldene Schnitt, Augsburg 1885; H. E. Timerding, Der goldene Schnitt (Math. Bibl. Bd. 32), Leipzig 1918.

第六章

方數與對數

§39. 根數

1. 在方數之算法方面,有二相反之運算法.此二者可由下列之二問題以得之:

I. 方數c之值已知,指數n亦已知;今欲求其底數x,使

$$x^n=c.$$

此問題之解決法,即所謂開方或根數算法者是.

II. 方數c之值已知,底數a亦已知;今欲求其指數z,使

$$a^z=c.$$

此問題之解決法,使吾人得對數之算法.今先論根數之算法.

2. 設n為一自然數,c為一任意之正數或0,則有一正數x,亦祇有一正數x,能適合如次之條件:

$$x^n=c,$$

而如$c=0$,則祇有$x=0$能適合之.

此項數之不能多於一個,實可由一定理得之,即x為正數時,x^n與x同增加.故如x不等於y,則不能有$x^n=y^n$.

倘 c 爲正數,吾人不難證明 x 之存在.試將一切正數,其 n 次方小於 c 或等於 c 者入於 X 類,其 n 次方大於 c 者入於 X',並以 0 爲 X 之左方界限,則得一個左方有界限之切 $_0(X \mid X')$. 如是則一切正數均已歸入於 X 及 X' 內,而如 x 爲其所產生之數目,則 $x^n=c$.

蓋如 $x^n<c$,則按連續性之定理(§**26. 6.**),X' 內必有數目,其 n 次方小於 c,此即與 X' 之定義相違.仿此,並可知亦不能 $x^n>c$.

如是所確定之數目 x,名爲 c 之 n 次根,吾人以

$$x=\sqrt[n]{c}$$

表之.

倘 c 非爲一有理數之 n 次方,則此數恆爲無理數. n 名爲根指數. 正數 c,本身亦可爲無理數,名爲被開方數. $n=1$ 之事例,吾人可不論之,蓋如是則 $x=c$ 也.二次之根,所常遇見者,亦稱平方根,於此,吾人恆將根指數 2 略去不寫,故 $\sqrt{c}$ 之意,即表 $\sqrt[2]{c}$. 三次根亦稱爲立方根. 廣之,如 $\sqrt[n]{c}$ 之數均稱爲根數. 其特例有

$$\sqrt[n]{0}=0;\quad \sqrt[n]{1}=1.$$

3. 根數之算法上,適用以下之公式:

(1) $$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

以言語表之:

將指數相同之二根數相乘或相除時,可將被開方數之乘積或商數,求其該次之根數.

此定理可直接由乘法之交易律得之,蓋 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$ 也.

此定理不難卽推廣至於多個之根數,而如諸根數均相同時,得

(2) $$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

由 $(x^p)^q=(x^q)^p=x^{pq}=a$, 得 $x^p=\sqrt[q]{a}$, 及 $x=\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$, 同時並有 $x^q=\sqrt[p]{a}$, 及 $x=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$, 以及 $x=\sqrt[pq]{a}$, 故

(3) $$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[pq]{a}.$$

4. 關於根數之大小關係,有以下之定理:

1. 設 $a>b$, 則 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, 即

根數隨被開方數而增大.

蓋如 $\sqrt[n]{a}\gtreqless\sqrt[n]{b}$, 則亦 $\sqrt[n]{a^n}\gtreqless\sqrt[n]{b^n}$, 卽 $a\gtreqless b$ 也.

因 $\sqrt[n]{1}=1$, 故如 $a>1$, 則亦 $\sqrt[n]{a}>1$.

2. 設 $a>1$, $p>q$, 則

$$1<\sqrt[p]{a}<\sqrt[q]{a}.$$

卽倘被開方數大於1,則其根亦大於1,但隨根指數之增大而減小.

3. 設 $a<1$, $p>q$, 則

$$1>\sqrt[p]{a}>\sqrt[q]{a}.$$

倘被開方數小於1,則根數亦小於1,但隨指數之增大而增大.

以上三定理,可併爲一,且較詳如下:

4. 設 a 爲任何之正被開方數, α, α' 爲任意之二數,能適合如次之條件者:

$$\alpha<1<\alpha',$$

則當 n 超過一與 a, α, α' 有關之界限時,恆有

$$\alpha<\sqrt[n]{a}<\alpha'.$$

此項定理均不難由 § **20**. **8**. 以證明之. 蓋 a 大於1時,按 1., 亦必 $\sqrt[p]{a}$ 大於 1; 如 $p>q$, 則 $(\sqrt[p]{a})^p$ 大於 $(\sqrt[p]{a})^q$, 即 $a>(\sqrt[p]{a})^q$, 故 $\sqrt[q]{a}$ 大於 $\sqrt[p]{a}$, 如 2. 所明者. 仿此,不難得 3.

又如 $\alpha<1<\alpha'$. 則 n 充分大時,不問 a 爲何數,恆

$$\alpha^n<a<\alpha'^n,$$

故得 4.

5. 以上之定理 4., 亦可作如次之形式:

設 a 爲正數,作如次之數列:

(4) $$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \cdots\cdots,\ \sqrt[n]{a},\ \cdots\cdots$$

則在1之任何一附近內,有該數列之幾於一切之數. 按 § **28**. **2**., 即得:

設 a 爲任意之正數,則

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1.$$

按**4**.之2.於3.,(4)於$a>1$時,爲單調向下者,而於$0<a<1$時,則爲單調向上者.

6. 迄今所用之運算法,有有理運算法及任意高之根數算法,吾人總名之爲代數的運算法.

§40. 任何實指數之方數

1. 根數存在之證明,使吾人得一門徑,將§**20**內對於正負整指數所確定之方數,推及於分數並無理數之指數.

由方數之概念,可得

(1) $$(\alpha^m)^n=\alpha^{mn}.$$

以及

(2) $$\alpha^{-m}=1:\alpha^m.\ \alpha^0=1.$$

此處之m,n爲正或負之整數,α爲任意之數,自可爲無理數,故以希臘字母表之,

今可提出此問題:設μ爲一分數$\mu=\frac{p}{q}$,則α^μ是否可有一概念?

爲欲免去複雜計,可先假定底數α,爲一正數.[1] 由保持之原則,吾人於是可由(1)對於此問題得一答案.吾人規

1. 方數之最廣的定義,當另論之,茲姑從略.

定該公式對於分數之指數$m=\mu=\frac{p}{q}$亦適用,並設$n=q$,而有

(3) $$(a^{\mu})^q=a^p,$$

故[1]

(4) $$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p.$$

如(3)對於負數之μ亦當適用,則將p易爲$-p$時,得

(5) $$a^{\mu}=1:a^{-\mu}.$$

按此定義,有

(6) $$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}.$$

此即:任何一根數,可視之爲一方數,其指數係一倒數.如是,根數之算法,即歸入於方數算法內,亦猶減之歸入加,除之歸入乘然.

按(4),對於任何之指數μ,有

$$1^{\mu}=1.$$

在此項推廣之方數方面,吾人有以下之諸定理.

2. 吾人有

(7) $$a^{\mu+\nu}=a^{\mu}a^{\nu},$$

(8) $$(a^{\mu})^{\nu}=a^{\mu\nu}.$$

---

1. 方數之以分數爲指數者,首見於 Nicolas Oresme (約當1359年時,其符號及寫法自與近代所用者不同),但僅爲個別的用及.十六世紀時,亦時遇見.其意義之認識及系統的運算,則自牛頓始(見其1666年時發表之二項式定理及1687年之 Philosophiae naturalis principia).

蓋設 $\mu=\frac{m}{p}$，$\nu=\frac{n}{q}$，則 p,q 爲正數時，

$$(a^{\mu+\nu})^{pq}=a^{mq+pn}=a^{mq}a^{np}.$$

故求其 pq 次根時，得

$$a^{\mu+\nu}=\sqrt[pq]{a^{mq}a^{np}}=\sqrt[pq]{a^{mq}}\sqrt[pq]{a^{np}}=a^{\mu}a^{\nu}.$$

仿此，
$$[(a^{\mu})^{\nu}]^{q}=(a^{\mu})^{n}=a^{n\mu}=\sqrt[p]{a^{mn}},$$

而按§39之(3)：

$$(a^{\mu})^{\nu}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a^{mn}}}=\sqrt[pq]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{pq}}=a^{\mu\nu}$$

3. 設 $a>1$，$\mu>\nu$，則

(9) $$a^{\mu}>a^{\nu}.$$

蓋 $(a^{\mu})^{pq}=a^{mq}$，$(a^{\nu})^{pq}=a^{np}$，

如 $\mu>\nu$，則 $mq>np$，故

$$(a^{\mu})^{pq}>(a^{\nu})^{pq},$$

而得(9)

4. 設 $a>1$，c 爲任何一數亦大於1，則於任何之正數 μ，凡小於充分小之數目 μ_0 者，恆

(10) $$1<a^{\mu}<c.$$

蓋如求一數 p，後 $c^{p}>a$，則

$$c>a^{\frac{1}{p}}>a^{\mu},$$

於此 $\mu<\frac{1}{p}$，從可知 μ 適合於如次之條件時：

$$0<\mu<\frac{1}{p},$$

(10)卽能成立.若$0<a<1$,則將(9)及(10)內之大於與小於號相易時,公式仍適用.

5. 設$a>1$, a與a'爲a之下近似值及上近似值,又設c與c'爲適合如次條件之數:

$$c<a^{\mu}<c', \tag{11}$$

則$a'-a$充分小時,有

$$c<a^{\mu}<a'^{\mu}<c'. \tag{12}$$

蓋吾人祇須如是取a, a'時:

$$c^{\frac{1}{\mu}}<a<a<a'<c'^{\frac{1}{\mu}}$$

卽得以上之關係也.

6. 今可作指數爲無理數時方數之定義.設ξ爲一無理數,由$(X|X')$所產生.x, x'爲X, X'內之數.又設a爲一正數,並假定其大於1.如是則恆$x<x'$,而

$$a^{x}<a^{x'}. \tag{13}$$

故a^{x}之羣有一上界,$a^{x'}$之羣有一下界,且此二界不能相異.蓋如此二界爲β及β',則β'不能小於β,因吾人恆可得數目x,使a^{x}與β任意接近,並可得數目x',使$a^{x'}$與β'任意接近.故如$\beta>\beta'$,則吾人可取x, x',使$a^{x}>a^{x'}$,此卽與(13)相違.又若$\beta<\beta'$,則$\frac{\beta'}{\beta}$爲一非眞分數,而

$$1<\frac{\beta'}{\beta}<\alpha^{x'-x},$$

不問 x, x' 如何均然. 按 **4**., 此爲不可能者, 因 $x'-x$ 可任意小也.

設 $\alpha>1$, 則

$$\beta=\alpha^{\xi}$$

所表者, 卽 $\alpha^x, \alpha^{x'}$ 之共同的(上與下)界.

若 $0<\alpha<1$, 則 $\frac{1}{\alpha}=\alpha'>1$, 而 α^{ξ} 所表者, 爲 α'^{ξ} 之倒值:

$$\alpha^{\xi}=\frac{1}{\alpha'^{\xi}},$$

如是, 吾人已將方數推及於任何之正底數及任何之實指數.

7. 今證明如次之定理:

設 $\beta=\alpha^{\xi}$, a, a' 及 x, x' 爲近似值, 將 α 及 ξ 包在其中間, 吾人計算近似值之方數 $b=a^x$, $b'=a'^{x'}$, 又設 c, c' 爲二數, 能

$$c<\alpha^{\xi}<c',$$

則 $a'-a$ 及 $x'-x$ 充分小時, b 及 b' 亦在 (c, c') 間距內.

蓋 $x'-x$ 充分小時, 卽可得

$$c<\alpha^x<\alpha^{\xi}<\alpha^{x'}<c'.$$

按 **5**., 吾人可使 $a'-a$ 如是小, 俾

$$c<a^x<\alpha^x<\alpha^{\xi}<\alpha^{x'}<a'^{x'}<c',$$

是卽以上定理之證也.

8. 此處所作之廣的方數概念,吾人今將其推至於極限值之算法(§ **29**).

將 § **29**, **3**. 反復應用時,得:

設 $\lim a_n=\alpha$, p 爲一整正數,則

(14)
$$\lim(a_n{}^p)=\alpha^p.$$

蓋按 § **29**, **4**., $\lim(a_n{}^{-p})=\lim\left(\frac{1}{a_n{}^p}\right)=\frac{1}{\lim(a_n{}^p)}=\alpha^{-p}$, 故如 p 爲整負數,而 $\alpha\neq 0$ 時,此定理亦仍可用.

今當證明此定理之反,卽:

設 $\{a_n{}^q\}$ 爲一收斂數列,其中各數均爲以正數 a_n 爲底之 q 次方, q 亦爲正整數,又設 $\lim(a_n{}^q)=\beta$, 則 $\{a_n\}$ 亦爲收斂數列,而 $\lim a_n=\sqrt[q]{\beta}$.

試先假定 β 非爲 0. 按 § **28**, **6**., 對於任何一正數 ε, 可有一標數 n, 於 $\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$, 恆

$$|a_{n+\nu}^q-a_n^q|<\varepsilon.$$

按 § **20**, **10**., 吾人可寫之作.

$$\varepsilon>|a_{n+\nu}-a_n|\cdot|a_{n+\nu}^{q-1}+a_{n+\nu}^{q-2}a_n+\cdots\cdots+a_n^{q-1}|.$$

此中第二因子於 $\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 所取之值,因一切 a_n 均爲正數, $\lim a_n{}^q\neq 0$, 故有一正的,不等於 0 且與 n 無關之下界 M, 因而更必

$$\varepsilon > |a_{n+\nu} - a_n| \cdot M,$$

即
$$|a_{n+\nu} - a_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

故按 §28. 6. 即可知 $\{a_n\}$ 爲收斂者. 今如 $\lim a_n = \alpha$, 則按 (14), $\lim (a_n{}^q) = \alpha^q$, 即 $\beta = \alpha^q$. 故 $\alpha = \sqrt[q]{\beta}$.

若 $\beta = 0$, 即 $\lim (a_n{}^q) = 0$, 則於任何之正數 ε, 可有一標數 n, 於 $\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ 恆有

$$|a_{n+\nu}^q| < \varepsilon.$$

因
$$|a_{n+\nu}^q| = |a_{n+\nu}|^q, \text{ 故}$$

$$|a_{n+\nu}| < \sqrt[q]{\varepsilon}.$$

因而 $\{a_n\}$ 亦向 0 收斂.

9. 於是再可得一定理:

設 p 爲任何一整數, q 爲一整正數, $\{a_n\}$ 爲正數所成之收斂數列, $\lim a_n = \alpha$, 則

$$\lim \left(a_n^{\frac{p}{q}}\right) = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

蓋如 $a_n^{\frac{p}{q}} = b_n$, 則 $a_n{}^p = b_n{}^q$, 而按 (14), $\lim b_n{}^q = \alpha^p$, 故按適纔之定理

$$\lim b_n = \lim \left(a_n^{\frac{p}{p}}\right) = \sqrt[q]{\alpha^p}$$

$$= \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

因之:

設 $\{a_n\}$ 爲正數所成之收斂數列, $\lim a_n = \alpha$, 則於任何有理之指數 x, 有

$$(15)\qquad \lim (a_n{}^x) = \alpha^x.$$

對於任何實指數此定理亦仍可用.

蓋如 ξ 爲任何一實數, x_1, x_2 爲二有理數, 得 ξ 包入其間:

$$x_1 < \xi < x_2,$$

則
$$a_n{}^{x_1} < a_n{}^{\xi} < a_n{}^{x_2}$$

及
$$\alpha^{x_1} < \alpha^{\xi} < \alpha^{x_2}$$

(此處吾人假定 $a_n > 1$. 若 $0 < a_n < 1$, 則祇須將 $a_n{}^{x_1}$ 與 $a_n{}^{x_2}$ 相易, 其餘均相同).

今取 α^{ξ} 之任何一附近 U, 則按 **7.**, 可取如是小之間距 (x_1, x_2), 使 α^{x_1} 及 α^{x_2} 在 U 內. 如是,按極限值之概念(§ **28**, **2.**), 幾於一切之 $a_n{}^{x_1}$ 及幾於一切之 $a_n{}^{x_2}$, 因而亦幾於一切之 $a_n{}^{\xi}$, 在 U 內, 此卽是, α^{ξ} 爲 $a_n{}^{\xi}$ 之極限値也.

於是吾人可將連續性之基本定理(§ **29**, **6.**) 推廣之, 使 $F(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)$ 內亦可有底數爲正而以無理數爲指數之方數; 由此, 吾人並可知適用於指數爲有理數的方數之定理,亦適用於指數爲無理數者.

§ 41. 對　數

1. 按以上所云, 可知如爲 a 爲一正數, x 爲任何一數;

則有一正數 c, 爲方程

$$c=a^x$$

所不二的確定.

今可退而論 §39 内開始時所提出之問題 II:

設 c 與 a 爲任意之已知正數,則是否恆有一指數 x? 或: 吾人須將正數 a 高至幾次方,乃能得已知之正數 c?

x 名爲以 a 爲底時 c 之對數. 寫作

$$x=\overset{a}{\log}\, c.$$

例如以 2 爲底時, 2 爲 4 之對數; 以 2 爲底時, 6 爲 64 之對數; 以 10 爲底時, 1000 之對數爲 3, 等等. 1 之對數, 以任何數爲底時, 均爲 0, 因 a^0 恆爲 1 也.

因 1^x 於任何之 x 均爲 1, 故以 1 爲底時, 祇有數目 1 有對數, 而此對數爲不定者. 故在實用上, 1 不能用爲底. 吾人因而可假定, 底恆大於 1, 雖此假定似不必要者. 在此假定下, a^x 於正 x 大於 1, 於負 x 小於 1, 又因 $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, 故可知大於 1 之數, 其對數爲正, 小於 1 之數, 其對數爲負, 互爲倒數之數 c 及 $\frac{1}{c}$, 其對數相反相等.

2. 對於已知之 c 及 a, 恆有對數可求, 此仍可用一個切證明之. 今將一切 x, 凡 $a^x<c$ 者, 併入一類 X, 其一切 x', 凡 $a^{x'}>c$ 者, 亦併入一類 X'. 如是則任何一 x' 大於任何一 x, 吾人得一個切, 其所確定之數爲 ξ. 今如 a^ξ 大於 c, 則必

有一x,能$c<a^x<a^\xi$,此卽與x之定義相違;仿此,亦可知a^ξ不能小於c,故必等於c.於是可知:

任何一正數c,對於與1不同之正底數,有一對數,亦祇有一對數.

今設

$$x=\overset{a}{\log}\,c,$$

則c爲以a爲底時x之眞數.故

$$x=\overset{a}{\log}\,c \quad 與 \quad c=\overset{a}{\mathrm{num}}\,x$$

二方程,係同一事實之二種寫法(num 爲 Numerus 一語之略,卽眞數也).

3. 由方數之公式,吾人可得對數算法上之基本公式.今將方數之公式寫作如次之形式:

(1) $$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}a^{x_2},\quad a^{x_1-x_2}=a^{x_1}:a^{x_2},\quad a^{\mu x}=(a^x)^\mu,$$

於此,x, x_1, x_2, μ爲任何之實數.今

設 $$a^x=y,\quad a^{x_1}=y_1,\quad a^{x_2}=y_2,$$

則y, y_1, y_2亦可爲任何之數,但均爲正.於是有

$$x=\log y,\quad x_1=\log y_1,\quad x_2=\log y_2,$$

其底數a,吾人爲簡單計,已將其略去.公式(1),亦可作

$$a^{x_1+x_2}=y_1y_2,\quad a^{x_1-x_2}=y_1:y_2,\quad a^{\mu x}=y^\mu.$$

由此,得

$$x_1+x_2=\log(y_1y_2),$$

$$x_1-x_2=\log\frac{y_1}{y_2},\quad \mu x=\log(y^{\mu}).$$

卽對此任何之正數y, y_1, y_2,及任何之正或負數μ:

$$\log(y_1y_2)=\log y_1+\log y_2,$$

(2)
$$\log\frac{y_1}{y_2}=\log y_1-\log y_2$$

$$\log(y^{\mu})=\mu\log y.$$

故得定理如下:

乘積之對數,等於因子之對數之和.

商數之對數,等於被除數之對數與除數對數之差.

方數之對數,等於指數與底數之對數相乘之積.

4. 設a, b爲二正數,則按對數之定義,

$$a=b^{\overset{b}{\log} a},$$

故如x爲任意之數:

$$a^x=b^{x\overset{b}{\log} a}=y.$$

由此,得

$$x=\overset{a}{\log} y,\quad x\overset{b}{\log} a=\overset{b}{\log} y,\quad \text{卽}$$

(3)
$$\overset{b}{\log} y=\overset{b}{\log} a\cdot\overset{a}{\log} y.$$

由此公式,吾人卽可由其一之底a,轉至其他之底b而得如次之定理:

將底爲a之對數,與固定數$\overset{b}{\log} a$相乘,卽得底爲b之對數.

5. 因之,吾人祗須將某種底之對數算出,其餘之底者卽可得之.以10爲底之對數,首見於白利格(Henry Briggs)1617年時所發表之對數表[1]中.故以10爲底之對數,亦名白氏對數,但稱之爲常用對數較佳.以後凡用 $\log a$ 一符號而不附以底數者,概指此項對數.以10爲底數,實有下列各優點:

1. 用十進寫法之數目,如有 m 位在小數逗點之前,則此數在 10^{m-1} 與 10^m 之間,故其常用對數在 $m-1$ 與 m 之間(m 不能取用),卽對數之整數部分爲 $m-1$. 吾人稱之爲**指標**,而得如次之規則:

常用對數之指標,較之眞數之整數部分內數字之數小一.

2. 任何一數,可寫之作如次之形式:

$$z=\{a,a_1\,a_2\,a_3\cdots\cdots\}\cdot 10^k,$$

於此,a 爲 $1,2,\cdots\cdots,9$ 中之一數字,k 爲一正或負之整數(亦可爲0).如是則

$$\log z=\{0,a_1\,a_2\,a_3\cdots\cdots\}+k, \tag{4}$$

1. Logarithmorum Chilias prima, London 1617, 其中所含爲1000以下之對數,取至小數八位.其後1624年時,白氏又續發表其 Arithmetica logarithmica, 其中有1至20000以及90000至100000各數之對數,取至小數十四位.但按白氏所知,納泊爾(Neper)已曾用過10爲對數底.(見白氏致Kepler之信,1625年二月十九日;此信刊於 Kepleri Opera omnia 7, 311; 又見 Neper, Constructio 之附錄——參觀 §42, 1.)

卽 k 爲其指標也.

對數之小數部分,卽 $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\cdots$ 名爲附數.[1] 故可知:

凡小數點不同之數目(或因前後多0而致不同者),其附數均同.[2] 例如:

$$\log 58{,}07=1.7639518$$

$$\log 580700=5.7639518$$

$$\log 0{,}05807=0.7639518-2.$$

對數表內僅有對數之附數;指標不難直接得之. 0與1間之數,其對數爲負者;但書寫時吾人恆如(4)內之式,取正附數及負指標,故計算時可僅用正十進分數.吾人亦可不用 k 而用固定之數 -10,此種方法亦多用之,三角函數之對數方面尤然;例如

$$\log 0{,}05807=8.7639518-10.$$

§42. 對數之簡易算法

1. 對數最古之著作,[3] 爲納泊爾之 Mirifici Logarithmorum canonis constructio (附錄) 一書,其中已有一簡單之

1. mantissa (附數) 與德語之 Zugabe (附加) 義同. Wallis 用此語表十進分數方面之小數位, Gauss 於其 Disquisitiones arithmeticae (1801) Art. 312 內亦彷之;其專用於對數之小數位,實肇自 Euler, 見其 Introductio (1748) §112. 但 Euler 亦用此語以表一無限階數之餘數(參觀 Burkhardt, Math. Ann. 70, 170, 1911).

2. 在對數方面,小數點不用逗點而用點.

3. 按其出版之年(1619),蓋已爲第二種; 1614年時,納氏已有其第一種著作發表,卽 Mirifici Logarithmorum canonis descriptio. Constructio 一書,於1889年時經 W. R. Macdonald 譯爲英文,並加以增訂.

方法,白利格曾用之以計算其對數表.其所用之公式爲

$$\log\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

卽二數之幾何均數之對數,等於其對數之算術均數.求一切數之對數時,祇須求得1至10間各數目之對數卽可.如 $1<z<10$,則可設 $a=1$, $b=10$,因而 $\log a=0$, $\log b=1$, $\sqrt{ab}=\sqrt{10}=m$,而得 $\log m=0{,}5$.如是,倘 z 非適爲 $\sqrt{10}$,則在 $(1, m)$ 一間距或 $(m, 10)$ 一間距內.無論在此或彼間距內,吾人均以 a_1 表該間距之下端.以 b_1 表其上端,故得 $a_1<z<b_1$.於是再計算 $\sqrt{a_1b_1}=m_1$,有 $\log m_1=\frac{1}{2}(\log a_1+\log b_1)$,而得一新間距 (a_2, b_2), z 在其內,卽 (a_1, m_1) 或 (m_1, b_1).對於 $m_2=\sqrt{a_2b_2}$,有 $\log m_2=\frac{1}{2}(\log a_2+\log b_2)$.將此方法繼續時,吾人對於 z 及 $\log z$ 得間距之相嵌,故可任意與所求之對數相接近.歐拉(L. Euler)之 Introductio in analysin infinitorum[1] (1748) §106 內,曾舉一具體之例(求 log 5).此例中曾用二十次之開平方法,乃能得 log 5 至七位小數.從可知白利格及其繼起者弗來克(Adriaen Vlacq),求1至100000各數之對數至十位乃至十四位小數時,不知曾耗去幾多心血也.[2] 後來之對數表,蓋已得此爲基礎矣.

1. 德譯本爲 Maser 所譯,出版於 Berlin 1885 年,見 77 頁. Tropfke 之 Gesch. d. Elementarmath. 2, 168 及 Loewy, Lehrb. d. Algebra 1,224 均載之.

2. H. Briggs. Logarithmorum Chilias prima, London 1617; Arithmetica logarithmica, 1624 (十四位者), A. Vlacq 之增訂第二版 (Gouda, 1628) 中復完成之,但易爲十位者.

2. 在其他種種計算對數之簡易方法中,吾人僅能再舉其一;此法亦已爲白利格所用過,特爲簡單.[1] 設

$$\log a = x,$$

則 $$a = 10^x.$$

吾人先求 $a^2, a^4, a^8, a^{16}, \cdots\cdots$, 將其各個均分解爲因子,其一在 1 與 10 之間,其他爲 10 之方數. 例如 $a=2$ 時:

$$2^8 = 2{,}56 \cdot 10^2; \qquad 2^{16} = 6{,}554 \cdot 10^4;$$

$$2^{32} = 4{,}295 \cdot 20^9; \qquad 2^{64} = 1{,}845 \cdot 10^{19};$$

$$2^{128} = 3{,}403 \cdot 10^{38}; \qquad 2^{256} = 1{,}158 \cdot 10^{77};$$

$$2^{516} = 1{,}341 \cdot 10^{154}; \quad 2^{1024} = 1{,}798 \cdot 10^{308};$$

$$2^{2048} = 3{,}232 \cdot 10^{616}; \quad 2^{4096} = 1{,}044 \cdot 10^{1233}。$$

倘吾人已計算出

(1) $$a^{2^n} = m \cdot 10^\alpha, \quad 1 < m < 10$$

則 $$10^\alpha < a^{2^n} < 10^{\alpha+1},$$

故得

$$\frac{\alpha}{2^n} < \log a < \frac{\alpha+1}{2^n}.$$

於是吾人得二相關數列 $\frac{\alpha}{2^n}$, $\frac{\alpha+1}{2^n}$, 可用以決定 $\log a$ 之值,其近似程度隨意而定.

倘得 m 近於 1, 如以上之最後一方數,其中之 n 爲 12, 則

---

1. 參觀 K. Kommerell, Arch. Math. u. Phys. (3) 28 (1920).

可由$\frac{a}{2^n}$以得$\log a$之極接近的近似值.吾人於是得

$$\log 2=\frac{1233}{4096}=0,301025.$$

倘用$10^{\frac{1}{2^n}}$及$\frac{1}{2^n}$之表($18^{\frac{1}{2^n}}$可用平方根計算),[1]吾人卽不難將精確性增加.由第一種表內,可得二值,使

$$10^{\frac{1}{2^{\nu+1}}}<m10^{\frac{1}{2^{\nu}}},$$

因而

$$10^{a+\frac{1}{2^{\nu+1}}}<a^{2^n}<10^{a+\frac{1}{2^{\nu}}},$$

而得

$$\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+\nu+1}}<\log a<\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+\nu}}.$$

故(2)內$\log a$之間距,其長爲$\frac{1}{2^n}$,至此已減爲$\frac{1}{2^{n+\nu+1}}$.

在此處之例內($m=1,044$),有$10^{\frac{1}{2^6}}<m<10^{\frac{1}{2^5}}$,故$\nu=5$,而

$$\frac{1}{2^{a+\nu+1}}=\frac{1}{2^{18}}=0,000004,$$

$$\frac{1}{2^{n+\nu}}=0,000008.$$

因而

$$0,301029<\log 2<0,301033$$

故用五位小數時:

$$\log 2=0,30103.$$

1. 例如Callet之Tabes portatives de logarithmes,其中至$n=60$,取至小數三十位,Loewy之Lehrb. d. Algebra內將其縮至$n=20$,小數十位採入.

§43. 對數史料

1. 十五六世紀時,科學復興,天文學之研究尤盛,於是對於數目之計算,有求進步方法之必要,俾由天文觀察所得之大量數目,得便於應用.

乘法之計算,尤爲費事,故多欲求以加法代之.然其初未能發見對數,祇用及三角函數,蓋此爲自古來所已知而熟用者,尤因其幾何的屬性,故易於了解;至於指數函數,則因使用分數之指數,故於當時之算學家,尚未能應用.然在三角函數表方面,則已有較進步之方法,尤以Georg Joachim Rhaeticus之名作Opus Palatinum (1596)爲最.彼時所用之法,有所謂"Prosthaphaeresis" (源於希臘語之$\pi\rho o\sigma\zeta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$及$\alpha\phi\varepsilon\iota\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$,即"加上"及"取去"之意)者,其大要在於應用如次之三角公式:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

蓋如欲求二數(小於1)之乘積,則可按表檢得二角α,β,其正弦或餘弦即爲此二數者.於是按公式取此二角之和及差,求其餘弦,仍按式以得所求之值.

此種方法較之對數計算法爲繁,且對於除法,乘方,開方不能直接有所應用,但其根本思想則同,而按近代之

見解,三角函數實爲指數函數之以虛數爲指數者,則與對數有直接之關係矣.

此法之發明者爲牛耳白(Nürnberg)之牧師 Johannes Werner,但不久卽被遺忘.直至後來1580年以後,地哥白拉(Tycho Brahe)之烏拉甯堡(Uranienburg)天文臺上始重創而推廣之,惟當時卡塞(Kassel)之選帝侯威廉第四(Wilhelm IV)對於天文學尤極贊助,故其臣 Paul Wittich 及 Jobst Bürgi 對此亦多供獻.[1]

2 但此項方法,均被對數所陶汰.對數之發明,猶其他文化上之進步,實非一人之力所創,故吾人不易斷其自何人始.[2] 在亞希米德之"沙算"[3]內,吾人已見一段,其中指出一列數目,由1開始成爲幾何的比例者,可用之以求二數之乘積,其法在於該列中求一數,其與第一數之相距,猶第二數之距1;此亦卽對數算法之基本原理也.惟實際上應用及此種思想,則在科學復興時代之後.

發明對數之先驅者中,要以 Michael Stifel 氏爲最足注目.其於1545年發表於牛耳白之 Arithmetica integra 一書中,曾將一算術級數之諸數,與一幾何級數之諸數並舉,

1. 參觀 v. Braunmühl. Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, Leipzig 1903.

2. 關於對數之歷史及其採用之意義,可參閱 Gutzmer, Zum Jubiläum der Logarithmen, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914).

3. Archimedis opera ed. Heiberg 2, 271.

列爲如下之關係:[1]

$$\frac{-3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6}{\frac{1}{8}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{2}\quad 1\quad 2\quad 4\quad 8\quad 16\quad 32\quad 64}.$$

第一列之數目,並曾名之爲指數;[2] 此項數目之可向兩方繼續,且第一列中之加減乘除,與第二列中之乘,除,乘方,開方相當,亦均知之,故實已得有對數之基本屬性.惟第二列內插入中間之數後,第一列內亦必有數可插入,此則非所知矣;故其離實用尙遠.但其對於後來發見對數者之影響,則至爲深切,對數表之首創者 Jobst Bürgi 及 John Neper,亦多受其啓示.斯二人雖生同時,但其根本思想,使幾何級數內任何二相繼數之商,儘量與1相接近,俾此級數得趨於密,則各自所獨創,初未嘗相謀也.

Bürgi 爲 Toggenburg 之 Lichtensteig 地方人,其生平多在卡塞之威廉第四處,以其於機械方面有特長,故威廉深重之;中間亦曾往 Prag,與名天文家開柏萊(Kepler)相善.其所著"Arithmetische und Geometrische Progress-Tabuln"實成於1603及1611之間,但至1620年時始刊印.此項表之組織如次:對於 $x_n=10n$ (n 遍取 0, 1, 2, 3…… 等值)一列數目,

1. 算術級數方面,任何二相繼數之差相等,幾何級數方面,則任何二相繼數之商相等.

2. 此項對列,僅以正指數爲限者,以及相乘之定理,已見於1484年 N. Chuquet 之著作 Le Triparty en la science des nombres 中,惟此著作尙未付印,直至1880年時尙爲手稿.

作其他一數列 y_n. 於此, $y_0=10^8$, 其後則每個 y 較其前者多萬分之一, 即:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{y_n}{10000}=y_n\left(1+\frac{1}{10^4}\right).$$

如是, x_n 成爲一算術級數, y_n 則成爲幾何級數, 其公比爲 1,0001, 而

$$y_n=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{\frac{1}{10}x_n},$$

或如設

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}=1,0001^{10000}=\beta,$$

則

$$y_n=10^8\cdot\beta^{\frac{x_n}{10^5}}$$

故

$$x_n=10^5\overset{\beta}{\log}\left(\frac{y_n}{10^8}\right).$$

從可知 Bürgi 之表係以

$$\beta=2,718145926\cdots\cdots$$

爲底之對數表.[1]

3. Bürgi 之表刊印較遲, 故 John Neper 得獨享盛名, 爲對數表之首創者 (Neper 於 1550 年時生於愛丁堡 Edinburg 之附近, 卒於 1617 年). 其表卽 1614 年時所出之 Mirifici Logarithmorum canonis descriptio.

1. 最好由 $\log\beta=10^4\log\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$ 之展開以得此數, 兼可用 Namur 之十二位小數的表 (出版於 Brüssel, 1877).

Neper之時,吾人今日所用之函數概念尚未發見,但其所作對數及數目之連續數列,已極明晰[1]其所根據之思想,爲二個點,同時在運動中.其一點於直線軌道上作等速運動,速度爲c,其他點則於一單位線段上運動,[2]其出發時之速度亦爲c,但繼續減小,恆與所存之線段有同一之比. Neper名一定時間內第一點所經過之線長,爲第二點於此時所餘線長之對數.由此概念,六十年後微分法發見時,實可使人以之得自然對數也.[3] 吾人對於Neper之思想,尚可一論之.試將全部時間t析爲n元素τ;在每一時間元素內,第一點經過線長σ,故t時間內所經過者爲

$$x_n = n\sigma. \tag{1}$$

---

1. 此處所云,蓋用吾人今日之語言以敍Neper之思想內容.

2. Neper原來設此線段之長爲10^7,蓋其原意,在使三角函數之計算得以輕便,故其表中所含者實爲$0°$至$90°$各角之正弦值,而自Rhaeticus以後,將正弦視爲圓內之線段,此圓之半徑爲10^7,曾極爲普通.故在Neper方面,祇有整數,而吾人則須用七位小數.

3. 第一點在t時間內所經過者爲ct.

設v爲第二點當t時之速度,s爲其至該時所經過之線長,則有

$$v = \frac{ds}{dt} = c(1-s),$$

其開始條件爲$t=0$時,$s=0$,故得

$$ct = -ln(1-s).$$

而

$$\log \text{nep}\,(1-s) = -ln\,(1-s) = \log_{e^{-1}}(1-s),$$

此卽Neper之對數與自然對數爲相反者,亦卽以$\frac{1}{e}$爲底之對數也.此底小於1,故小於1之數,其對數仍爲正.此種規定,Neper實有意爲之,故Descriptio之第五頁中有云:"吾人應用正弦之值及小於1之數極多,故須使其對數爲正."

第二點於第一時間元素內亦經過 $\sigma=\sigma_1$. 此線長與全部所存之線長相比，爲 $\sigma:1=\sigma$. 此比當於任何處保存不變，故第二時間元素內，所經過者爲 $\sigma_2=\sigma(1-\sigma)$. 所餘者尚有 $1-\sigma-\sigma(1-\sigma)=(1-\sigma)^2$, 故第三時間元素內所經過者爲 $\sigma_3=\sigma(1-\sigma)^2$. 於是尚餘 $(1-\sigma)^2-\sigma(1-\sigma)^2=(1-\sigma)^3$. 廣之，$n$ 時間元素後，即 t 時間後，第二點尚餘

(2)
$$y_n=(1-\sigma)^n.$$

從可知 x_n (對數) 構成一算術級數，y_n (眞數) 構成一幾何級數，而如 σ 愈小，則二列內之數目亦愈密. 按 (1) 與 (2), 有

$$y_n=(1-\sigma)^{\frac{x_n}{\sigma}},$$

故如設

(3)
$$(1-\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}=\varepsilon,$$

則

$$x_n=\overset{\varepsilon}{\log}\, y_n.$$

倘將 Neper 之思想繼續貫澈，則 (3) 內須使 $\sigma\to 0$ 而取其極限值；如是則 ε 等於 e 之倒數 (e 即自然對數之底). Neper 自不能深入至此，但其極巧妙之算法，竟能使其對數(七位小數者)再往下算時，與以 $\frac{1}{e}$ 爲底者，可相同至十四位小數.[1]

---

1. 參觀 Constructio 之英譯本，出版於 Edinburg, 1889 年，第 92 頁. 又參觀 M. Koppe, Progr. d. Andreas-Realgymn., Berlin 1893. Sitzungsb. d. Berliner Math. Ges. 3 (1904), 48. Neper 對數內之差誤，將數值減小 $3{,}7\cdot 10^{-7}$, 於 1624 年時已爲 Benjamin Ursinus 所算出，見其 Magnus Canon triangulorum, Kölln (=Berlin).

4. 如吾人所見,Bürgi, Neper 以及 Stifel 之根本思想,在將算術級數與幾何級數相較.今日初等數學及教學上所用之定義,係將對數作爲某種已知底的方數之指數,對數算法爲乘方算法之反,此實爲十八世紀中葉以來之事,爲歐拉所提倡者.[1] 此種定義,實不能免於困難(底及眞數爲正之限制),尋常之教學上均避去之,蓋必須藉較深的函數論之研究,方能說明也.[2] 但按 F. Klein 之意見,Bürgi 及 Neper 之見解,實較合於近代之立場,蓋將其繼續推進時,可得科學上最適用之定義,卽,以積分 $\int\frac{dx}{x}$ 或雙曲線之面積爲其定義是.[3]

5. 自十進法之對數通行,第一次較完備之對數表(Arithmetica logarithmica ed. H. Vlacq, Gouda 1628)印行後,Bürgi 及 Neper 之對數卽漸歸陶汰. Vlacq 之表內載有 1 至 100000 各數之對數,均取至小數十位爲止,實爲後來一切對數表之基礎. 1794 年時, Vega 又加以增訂,重刊時名

---

1. Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748. Vollständige Anleitung zur Algebra, Petersburg 1770.

2. 參觀 F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. I. Teil. Leipzig, 1911. 第 323 頁.

3. E. Borel, Die Elemente der Mathematik, 德譯本係 Stäckel 所譯,出版於 Leipzig 1919. 此書內用 Bürgi 及 Neper 之立場以論對數. 參觀 M. Koppe, Progr. Berlin 1893. 雙曲線面積與對數之關係, Hadamard 之 Leçons de géométrie élémentaire (Paris 1901) 第二册第八章內,有極佳之簡易的敍述.

爲 Thesaurus logarithmorum.[1] 原有之差誤(約爲 $6\,{}^{0}/_{00}$),歷來漸加修正,故今日所用之表,可謂已臻於完備.

在實際的應用上,吾人知多數之事例方面,均無需十位之表,故天文及測地方面,今已通要七位者,而在學校之教學,及自然科學之應用上,其無需乎如是之精確者,卽七位者亦已嫌其不便,通常六位,五位,乃至於四位者已足用.[2]

但他方面,有時自然科學上(尤以天文學爲多),以及整數論之探討上,[3] 亦有嫌七位小數尙不足精確者,故習數學者,對於多位小數之對數表,亦須熟知其用法.位數較多之表,吾人尙未有完備者,蓋如須充分精詳,必須有鉅大之篇幅,卽計算時,亦需極繁之插入法.[4] 例如十位之表

---

1. 其照相鋅版之重印本,出版於 Florenz 1895. Vega 之表內,尙載有 Wolfram 氏之自然對數 (2200 以下之數者),取小數至四十八位,並有 10000 以下各質數之對數.(1908 年時, Thiele 曾增訂之,重刊於 Dessau). 關於 Thesaurus 之譏語及其所含之差誤,可閱 Gauss, 全集 3, 257.

2. 關於重要對數表, Glaisher 有一詳盡之報告 (Report on mathematical Tables, 43. Meeting of the British Association, London 1874). 參觀德文本数學百科全書 1, 985, 法文本內尙有極多之補充.七位以上之最新對數表,有 J. Bauschinger 及 J. Peters 之 Tafel der 8-stelligen Logarithmen der Zahlen von 1−200000. Leipzig 1910.

3. 按較深之算術研究(屬於橢圓函數論範圍者),可知於 Δ 之若干整值,卽 $\Delta=19,43,67,163$ 諸數時, $z=e^{\pi\sqrt{\Delta}}$ 與某種整數 A 極相接近.例如 $\Delta=67$ 時, $A=147197952744$, $\Delta=163$ 時, $A=262537412640768744$, 於此, z 與 A 之差,不及 10^{-12}.欲直接計算 A 時,須用十八位之對數表.參觀 Hermite, Théorie des équations modulaires 第 48 頁. H. Weber, Lehrbuch der Algebra 3 (Elliptische Funktionen), Braunschweig 1908, §69, 125, 134, 405.

4. 關於插入法,可參觀 §91

Thesaurus,已須三百頁之對開本,而用插入法時,並須顧及第二次差數.但吾人亦有若干種方法,可用之由較小之表以得多位之對數.其中之一已爲Briggs所用過,其後並屢經人重再發見(Briggs之Arithmetica logarithmica,1624,內已用及之).此法之基本原理,在得1與10間之正數,用較易施行之除法,析之作如次之形式:

$$z=a\left(1+\frac{a_1}{10}\right)\left(1+\frac{a_2}{10}\right)\cdots\cdots,$$

於此,$a, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 爲整數,其中除第一個外,亦有可爲0者.[1] 如是則吾人已有1,2,……9; 1,1,……1,9; 1,01,……, 1,09; ……; $1,0_m1,\cdots\cdots 1,0_m9$ (0_m 表相繼的 m 個0)之對數表時,log z 之值卽可由 z 之諸因子之值而得.Briggs曾作有此項表,至 $m=8$,小數十五位爲止.[2] 尋常教學上所用Greve之五位表內,載有該項對數至 $m=12$,小數十二位.Schrön之表

1. 吾人亦可使 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 取負值,且有時用負値時可較易得近似數,但吾人須有此項因子之對數表方可.

2. 其他多位小數之對數表,再介紹若干種於下:

A. Steinhauser, Hülfstafeln zur präzisen Rechnung 20-stelliger Logarithmen. Wien 1880.

R. Hoppe, Tafeln zur 30-stelligen logarithm. Rechnung. Leipzig, 1876.

C. Börgen, Logarithmisch-trigonom. Tafel auf 11 Stellen (Publikationen der Astr. Ges. XII). Leipzig 1903.

J. Peters u. J. Stein, 52-stellige Logarithmen. (Veröff. d. astron. Recheninst. Nr. 43). Berlin 1919.

對於此項表之評判,參觀A. J. Ellis, Proc. of the Royal Society of London 31 (1881), 401. 幷參觀J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900; M. Koppe, Berechnung der Logarithmen auf viele Stellen. Sitzungsber. Berliner Math. Ges. 16 (Arch. d. Math. u. Phys. 3, 26, 1917).

至 $m=9$, 取小數十六位, Peters 及 Stein 之表, 取小數五十二位, m 至 25.

第七章

複數

§44 二單位之複數

1. 吾人試再一反觀數目概念之發展階段,則先有正負整數,繼爲有理數,然後得無理數,每次所得之新數目,恆可將其插入原有者之間,此其大小之性質也. 然此種方法,至實數而告一段落;吾人欲於任何二實數間再插入新數目,實不可能,故就此點言之,實數之內涵已不能再有所擴張(參觀 §**24**, **8**.). 數目之範圍,至此已可謂包羅極廣,然謂一切算法於此已能無限制施行,則猶未也.試求一負數之平方根,則可知實數中不能得之,以正數爲底時,負數亦無有對數可求.然則數目概念之擴張,吾人仍有其必要,而所得之新數目,亦不能將其列入原有之數目內.

2. 今將每二個實數 a, b 聯結之爲一對 (a, b), 將其視爲一種新的數目形體,[1] 並名之爲複數,亦用一字母表之

---

1. 用數目之對以建立複數之理論,實自 W. R. Hamilton 始(見 Dublin Transact. 17, 1835). 但吾人不妨卽用數目之對以爲新數之定義. 於是此項數目之性質,與其運算之規則有關. 魏斯德拉斯曾將負數用數目之對以確定之,他納雷 (J. Tannery) 則用此項對以確定分數. (見 H. Padé, Premiéres leçons d'algébra élém., Paris 1892; J. Tannery, Leçons d'arithm. Paris 1894). 參觀 L. Couturat, De l'infini mathématique, Paris, 1896; Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig 1914.

作 $u=(a, b)$. 實數 a, b, 名爲 u 之成分.

對於此項新數,吾人可如是規定其運算規則,使適用於實數之定律,儘量仍可用,且使實數成爲其特殊之例,包含於複數中. 今先作加與減之定義如下:[1]

(1) $$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d) \qquad \text{I.}$$

設 $c=0, d=0$, 有

$$(a, b)+(0, 0)=(a, b).$$

卽其中有一對 $(0, 0)$ 將其加於任何對時,全無影響. 仿實數之例,吾人卽用 0 以表之,故

(2) $$(0, 0)=0 \qquad \text{II.}$$

反之,亦祇當 $a=0, b=0$ 時,乃能 $(a, b)=0$. 按 (1), 卽可知於複數方面,亦有

(3) $$u-u=0.$$

二複數 $(a, b), (c, d)$, 於

$$(a, b)-(c, d)=0$$

時,卽

$$a=c, \text{ 及 } b=d$$

時,吾人名之爲相等者:

$$(a, b)=(c, d),$$

亦祇當此時方爲相等者.

1. 爲使複數理論所根據之規定明瞭計,特用羅馬記數法於旁標出之.

吾人又按實數方面之例,設

$$0-u=-u,$$

而按(1)與(2),有

$$(4)\qquad -(a,\,b)=(-a,\,-b)\qquad \text{III}.$$

由此項規定,複數之加法上即適用交易律及結合律,減亦爲加之反.但單調性之定律(§ **8, 4.**),則此處無有,因吾人對於複數尚未有大小之規定也.

3. 設 n 爲一整正數,則 n 個相同的數目之對 $(a,\,b)$ 之和,以 $n\,(a,\,b)$ 表之,視之爲 n 與 $(a,\,b)$ 之乘積.按(1),可知

$$n\,(a,\,b)=(na,\,nb).$$

設 m 亦爲一整正數,吾人於 a 及 b 處易以 $\frac{m}{n}a$ 及 $\frac{m}{n}b$,則

$$n\left(\frac{m}{n}a,\,\frac{m}{n}b\right)=(ma,\,mb)=m(a,\,b).$$

但
$$m\,(a,\,b)=\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)(a,\,b),$$

而如吾人對於右方之乘積假定其適用結合律,則

$$m\,(a,\,b)=n\left[\frac{m}{n}(a,\,b)\right],$$

故得

$$n\left(\frac{m}{n}a,\,\frac{m}{n}b\right)=n\left[\frac{m}{n}(a,\,b)\right],$$

因而

$$\frac{m}{n}(a,\,b)=\left(\frac{m}{n}a,\,\frac{m}{n}b\right).$$

由此,吾人已可將數目之對與任何正有理數相乘,今如將其推廣至於任何負有理數 $-r$:

$$(-r)(a, b) = -[r(a, b)],$$

則按§26.7.內之連續性規定,必對於任何實數ρ,有

$$(5) \qquad \rho(a, b) = (\rho a, \rho b). \qquad \text{IV.}$$

設$\rho=0$, $(a, b)=u$,則

$$(6) \qquad 0.u = 0.$$

又如ρ及σ為任何二實數,則由$\rho u=(\rho a, \rho b)$, $\sigma u=(\sigma a, \sigma b)$,按(1)及(5),可知:

$$\rho u + \sigma u = [(\rho+\sigma)a, (\rho+\sigma)b]$$
$$= (\rho+\sigma)(a, b),$$

即

$$(7) \qquad \rho u + \sigma u = (\rho+\sigma)u.$$

故可知複數與實數相乘時,分配律仍適用.

4. 今採入二特殊的數目之對:

$$(8) \qquad (1, 0) = e_1, \ (0, 1) = e_2,$$

名之為複單位.

如是,按(5),　$(a, 0) = ae_1$, $(0, b) = be_2$,

又按(1),　$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$,

故可知:

複數(a, b)可用複單位表之如下[1]

1 複數之可用(9)內之形式表出之,其根據直接在於1內之加法規定.吾人因而亦可云:對於複數,吾人先已假定其可用(9)內之式表出之.但吾人亦可不用分開規定加與乘之法,而提出較廣之問題如次:吾人須如何作其加與乘之定義,乃能使算術上之公理仍可適用? Bieberbach於Math. Ztschr. 2 (1918)內曾指出,吾人祇須假定和與積為其成分之連續函數,即可用(9)內形式之數建立一系統,此系統能適合一切之條件.

(9) $$(a, b)=ae_1+be_2.$$

從可知複數之性質,爲其單位之性質所決定,故複數之種類,隨吾人對於單位所作之規定而言.

今設

$$e_1=1,$$

則

(10) $$(a, 0)=a.$$

故實數可包含於複數內,作爲其特例.

5. 用二個複單位 e_1, e_2 所作成之複數之總,名爲複數之系統.吾人於(9)內使 a, b, 遍取一切可能的實數,即可得之.

設 u_1, u_2 爲複數系統內之二數,其間無有如次之關係:

$$c_1 u_1+c_2 u_2=0$$

(c_1, c_2 爲實係數),則此二數謂之(直線的)不相關者.

吾人有如次之定理:

複數系統內之一切數,均可用該系統內二個不相關之數,直線的齊次的表出之.

今設

(11) $$\begin{aligned}\omega_1&=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2,\\ \omega_2&=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2\end{aligned}$$

爲系統內二不相關之數,則可按 e_1 及 e_2 解此二方程,得(§**74**, **5**.):

$$\delta e_1=\beta_2\omega_1-\alpha_2\omega_2,\quad \delta e_2=-\beta_1\omega_1+\alpha_1\omega_2$$

於此,

(12) $$\delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$$

倘 $\delta=0$,則可按以上之式,當有

$$\beta_2\omega_1-\alpha_2\omega_2=0,\quad -\beta_1\omega_1+\alpha_1\omega_2=0,$$

故 ω_1 與 ω_2 不能爲不相關者.因之,必 δ 不等於 0,而得

(13) $$e_1=\frac{\beta_2}{\delta}\omega_1-\frac{\alpha_2}{\delta}\omega_2,\quad e_2=-\frac{\beta_1}{\delta}\omega_1+\frac{\alpha_1}{\delta}\omega_2.$$

系統內之任何一數,爲

$$u=ae_1+be_2$$

今將(13)內 e_1 與 e_2 之式代入,則得

(14) $$u=\frac{a\beta_2-b\beta_1}{\delta}\omega_1+\frac{-a\alpha_2+b\alpha_1}{\delta}\omega_2,$$

故上述之定理已證明.此定理亦可將其作如次之形式表之:

系統內任何二不相關之數,亦可用以代 e_1, e_2 二單位.

6. 今試進而論相乘之法,提出如次之規定:

V. 系統內二數之乘積,當仍爲該系統內之一數.

吾人可先論單位之乘積,規定其適用交易律.故吾人可云:

VI. 必有三對實數 $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2$,能適合下列之條件者:

$$e_1e_1=(\lambda_1, \lambda_2)=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2,$$

(15) $$e_1e_2=e_2e_1=(\mu_1,\mu_2)=\mu_1e_1+\mu_2e_2,$$

$$e_2e_2=(\nu_1,\nu_2)=\nu_1e_1+\nu_2e_2.$$

此項方程,吾人稱之爲複數系統內之基本公式.系統之性質,得此項公式而定.

今設 $u=ae_1+be_2$, $\nu=ce_1+de_2$ 爲系統內任何二數,則吾人可規定實數方面之相乘規律,此處亦仍可用,故有

(16) $$uv=(ae_1+be_2)(ce_1+de_2)$$

$$=ace_1e_1+(ad+bc)e_1e_2+bde_2e_2 \qquad \text{VII.}$$

由此,任何二複數之相乘方面,交易律亦仍可用.分配律之亦適用,此亦不難見者.

蓋如

$$u=(a,b);\quad v=(c,d);\quad w=(f,g)$$

爲三複數,則

$$u+v=(a+c,\ b+d),$$

而 $$uw=afe_1e_1+(ag+bf)e_1e_2+bge_2e_2,$$

$$vw=cfe_1e_1+(cg+df)e_1e_2+dge_2e_2,$$

按(7),因 e_1e_1, e_1e_2, e_2e_2 仍爲該系統內之數,故有

$$uw+vw=(a+c)fe_1e_1+[(a+c)g+(b+d)f]e_1e_2+(b+d)ge_2e_2$$

$$=[(a+c)e_1+(b+d)e_2](fe_1+ge_2),$$

即 $$uw+vw=(u+v)w.$$

今將(15)內之式代入(16),則可知二複數之積,仍爲該系統內之一複數:

(17) $$(a, b)(c, d)=(p, q),$$

於此,

$$p=ac\lambda_1+(ad+bc)\mu_1+bd\nu_1,$$

(18)

$$q=ac\lambda_2+(ad+bc)\mu_2+bd\nu_2.$$

7. 推而進之,吾人更當求乘法上結合律之適用,即對於三數目

$$u=(a, b);\quad v=(c, d);\quad w=(f, g),$$

有

$$(uv)w=u(vw).$$

吾人先假定其適用於單位,即

(19) $$(e_1e_1)e_2=e_1(e_1e_2);\quad (e_1e_2)e_2=e_1(e_2e_2)$$ VIII.

今將(15)內之式代入此處括弧內之乘積,則得

$$\begin{aligned}(e_1e_1)e_2&=\lambda_1e_1e_2+\lambda_2e_2e_2\\&=(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\nu_1)e_1+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\nu_2)e_2,\\e_1(e_1e_2)&=\mu_1e_1e_1+\mu_2e_1e_2\\&=(\lambda_1\mu_1+\mu_1\mu_2)e_1+(\lambda_2\mu_1+\mu_2\mu_2)e_2,\\(e_1e_2)e_2&=\mu_1e_1e_2+\mu_2e_2e_2\\&=(\mu_1\mu_1+\mu_2\nu_1)e_1+(\mu_1\mu_2+\mu_2\nu_2)e_2,\\e_1(e_2e_2)&=\nu_1e_1e_1+\nu_2e_1e_2\\&=(\lambda_1\nu_1+\mu_1\nu_2)e_1+(\lambda_2\nu_1+\mu_2\nu_2)e_2.\end{aligned}$$

從可知,方程(19)使 $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2$ 諸實數間,有以下之

關係:

$$\lambda_2\nu_1=\mu_1\mu_2,$$

(20)
$$\lambda_1\mu_2+\lambda_2\nu_2=\lambda_2\mu_1+\mu_2\mu_2,$$

$$\mu_1\mu_1+\mu_2\nu_1=\lambda_1\nu_1+\mu_1\nu_2.$$

以後吾人卽不難知,單位方面既適用結合律,則任何三複數方面自亦必適用之. 故得:

方程(15)及(20),爲複數乘法上適用交易律,分配律及結合律之必要條件,亦爲充分條件.

8. 試將方程(20),寫作如下之形式:

$$\lambda_2\nu_1=\mu_1\mu_2,$$

$$\lambda_2(\mu_1-\nu_2)=\mu_2(\lambda_1-\mu_2),$$

$$\mu_1(\mu_1-\nu_2)=\nu_1(\lambda_1-\mu_2).$$

由此,卽不難見,倘非同時 $\lambda_1=\mu_2$, $\mu_1=\nu_2$, 則第一方程可由其他二者得之.

試設

$$\lambda_1-\mu_2=\beta\rho,\quad \mu_1-\nu_2=\beta\sigma,\quad \lambda_2=\gamma\rho,$$

$$\mu_2=\gamma\sigma,\quad \mu=-\alpha\rho,\quad \nu_1=-\alpha\sigma$$

$\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ 爲任何實數,則以上之方程均可適合. 故有

$$\lambda_1=\beta\rho+\gamma\sigma,\ \lambda_2=\gamma\rho,$$

(21)
$$\mu_1=-\alpha\rho,\qquad \mu_2=\gamma\sigma,$$

$$\nu_1=-\alpha\sigma,\qquad \nu_2=-\alpha\rho-\beta\sigma,$$

而方程(20)之根,於是亦已得之. 故吾人既選出 $\alpha, \beta, \gamma,$

ρ, σ 五數後,單位卽適用(15)內之規定,而複數之系統亦隨之而定.

由方程(21),卽可得如次之關係:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \alpha\lambda_1+\beta\mu_1+\gamma\nu_1&=0,\\ \alpha\lambda_2+\beta\mu_2+\gamma\nu_2&=0. \end{aligned}$$

試將此與(18)相比較,卽得以下之定理,極可注意:

倘二複數 (a, b), (c, d) 方面有如次之關係:

$$ac=\alpha t,\quad ad+bc=\beta t,\quad bd=\gamma t,$$

於此 t 爲一任意之實數,但不等於0,則二複數之乘積爲0時,不必有其一因子爲0.

今如設 $t=abs$, 則由第一及第三方程,得 $c=\alpha bs$, $d=\gamma as$, 將其代入第二方程後,有

$$(23)\qquad \gamma a^2-\beta ab+\alpha b^2=0.$$

由此,可知 $\frac{b}{a}=x$ 爲二次方程

$$(24)\qquad \alpha x^2-\beta x+\gamma=0$$

之根,且 $\frac{d}{c}=\frac{\gamma}{\alpha x}$ 時,$(a, b)(c, d)$ 一乘積卽可爲0,不須其一因子爲0,且亦祇當此時方能如此.吾人並可知 $\frac{d}{c}$ 爲方程之其他一根.然欲得該項數目 (a, b), (c, d), 則方程須有實根方可,此則須其判定式 $\beta^2-4\alpha\gamma$ 不爲負(參觀§**78**).故吾人稱 $\beta^2-4\alpha\gamma$ 爲系統之判定式,而得定理如下:

凡判定式爲負之複數系統內,必須有一因子爲0時,乘積乃能爲0,亦祇在此項系統內方如此.

IX. 吾人既願將初等算術上關於乘積爲0之定理保存,故以下須限於判定式爲負之系統.[1]

9. 對於以上所云之系統,有如次之定理:

系統內有一確定之數

$$e=\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2, \tag{26}$$

與系統內任何一數 u 相乘時,結果仍不變:

$$ue=u.$$

此數 e 名爲複數系統之率.

首先可知者,率不能多於一個. 蓋如 e' 亦爲一率,則必

$$ee'=e,\quad ee'=e'e=e',$$

故
$$e=e'.$$

---

1. 試將(22)內之第一方程用 e_1 乘之,第二方程用 e_2 乘之,將其相加,則按(15),可得:

$$\alpha e_1^2+\beta e_1e_2+\gamma e_2^2=0. \tag{25}$$

由此可知(用 e_2^2 除後),$\frac{e_1}{e_2}=x$ 能充適二次方程

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

故驟觀之似除負判定式之複數系統外,不能再有其他者,蓋如判定式非爲負,則方程必有實根,而 $\frac{e_1}{e_2}$ 爲實數. 但此種見解,實不正確,蓋吾人對於以 e_2^2 除之之意,及 $\frac{e_1}{e_2}$ 一商數,均尚未確定其義也. 故正確之結論當如下:

設 ω 及 ω' 爲二次方程之根,則吾人可將(25)易爲如次之式:

$$\alpha(e_1-\omega e_2)(e_1-\omega' e_2)=0.$$

如判定式非爲負,即 ω, ω' 均爲實,則乘積爲0時,不必有其一因子爲0.

吾人如并將判定式非爲負之系統用入,則代數上極重要之定理,將不復適用. 例如 a 不等於0之一次方程 $ax=b$,於是將有無限多之根,其他次數之方程亦然(參觀12).

今如 $u=ae_1+be_2$, 則用 (15) 內之式時,

$$ue=a\varepsilon_1(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)+a\varepsilon_2(\mu_1e_1+\mu_2e_2)$$

$$+b\varepsilon_1(\mu_1e_1+\mu_2e_2)+b\varepsilon_2(\nu_1e_1+\nu_2e_2)=ae_1+be_2.$$

故必

$$(27)\qquad \begin{aligned} a&=a(\varepsilon_1\lambda_1+\varepsilon_2\mu_1)+b(\varepsilon_1\mu_1+\varepsilon_2\nu_1),\\ b&=a(\varepsilon_1\lambda_2+\varepsilon_2\mu_2)+b(\varepsilon_1\mu_2+\varepsilon_2\nu_2). \end{aligned}$$

此二方程,對於 a 及 b 之任何值均當適用,故對於 $a=1$, $b=0$, 以及 $a=0$, $b=1$ 亦必適用.如是,卽有

$$(28)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1\lambda_1+\varepsilon_2\mu_1&=1,\\ \varepsilon_1\lambda_2+\varepsilon_2\mu_2&=0,\\ \varepsilon_1\mu_1+\varepsilon_2\nu_1&=0,\\ \varepsilon_1\mu_2+\varepsilon_2\nu_2&=1. \end{aligned}$$

反之,倘此項方程成立,(27) 亦卽對於 a, b 之任何值均適用.

吾人可由 (28) 之首二方程以計算 ε_1 及 ε_2. 應用 (21) 內之值,可知行列式

$$\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=\gamma(\alpha\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2)=\gamma f,$$

於此,吾人設

$$(29)\qquad f=\alpha\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2.$$

故得

$$\varepsilon_1\gamma f=\mu_2=\gamma\sigma,\ \varepsilon_2\gamma f=-\lambda_2=-\gamma\rho,$$

因而 f 非爲 0 時:[1]

$$(30)\qquad \varepsilon_1=\frac{\sigma}{f},\quad \varepsilon_2=-\frac{\rho}{f}.$$

此二值亦能充適(28)中之後二方程,此則不難知者.

祇當 $\frac{\rho}{\sigma}=x$ (此爲實數)爲二次方程

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

之根,則 f 卽成爲 0. 但按所設,其判定式 $\beta^2-4\alpha\gamma$ 爲負者,故此方程不能有實根,而 f 不能爲 0.[2] 因此,吾人已證明 e 之存在,且可知

$$(31)\qquad e=\frac{\sigma}{f}e_1-\frac{\rho}{f}e_2.$$

10. 以下之研究內,吾人將系統之率 e, 選爲單位,則簡便殊多.如是,吾人設 $e_1=e$. (15)內之基本公式,於是成爲:

$$ee=e,\ ee_2=e_2,\ e_2e_2=\nu_1e+\nu_2e_2,$$

而
$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=0;\ \mu_1=0,\ \mu_2=1.$$

由(21),又可得:

$$\rho=0,\ \sigma=\frac{1}{\gamma},\ \nu_1=-\frac{\alpha}{\gamma},\ \nu_2=-\frac{\beta}{\gamma}.$$

e 之屬性,與實數 1 適相同,而因對於任何之複數 u, 按(5)有

$$u\cdot 1=u,$$

且此種率祇有一個,故吾人直可設 $e=1$. 其他一單位,吾人用 j 表之,故系統之基本公式,成爲

1. γ 不能爲 0, 否則判定式成爲 β^2, 非爲負者矣.
2. f 爲有一定式(§68).

$$1\cdot1=1;\ 1\cdot j=j\cdot1=j;$$

$$j^2=-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}j.$$

用 γ 乘第三式時,得 j 之二次方程:

$$\gamma j^2+\beta j+\alpha=0.$$

再用 4γ 乘此方程時,得(§ **78**, **2**):

$$(2\gamma j+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

此式之右端爲系統之判定式,按所設當爲負者.今設

(32) $$\beta^2-4\alpha\gamma=-\Delta,$$

則 Δ 爲正數,而得

$$\frac{(2\gamma j+\beta)^2}{\Delta}=-1.$$

吾人於是再用入新式單位如下:[1]

(33) $$\frac{2\gamma j+\beta}{\sqrt{\Delta}}=i,$$

並卽用之以代 j.如是,吾人所有之單位爲1與 i,其基本公式爲

(34) $$1\cdot1=1;\ 1\cdot i=i\cdot1=i;\ i\cdot i=-1,$$

而有如次之重要定理:

新定式爲負之複數系統,均可歸爲以1及 i 爲單位之系統.

11. 用此二單位所作之數

1. 單位1與 i 二者間並不相關,其證甚易,讀者可自爲之.

$$a+bi,$$

實爲原來意義之複數,以後吾人用此名稱時,即指此項數而言. i 名爲虛單位,按(34)之末一式,亦即爲 -1 之平方根. 而因 $(-i)^2=i^2=-1$, 故此平方根有二,而須寫作:[1]

$$\sqrt{-1}=\pm i.$$

吾人前於**1**.內所欲求之負數之平方根,於是有法可以表之,即

$$\sqrt{-c}=\pm i\sqrt{c}.$$

複數內之 a, 名爲複數 $a+bi$ 之實部分, bi 則爲其虛部分. 倘實部分爲0,則複數成爲 bi, 即名爲(純)虛數,且隨 b 之爲正或負,而爲正虛數或負虛數. 二複數之實部分相同,虛部分僅異其號者,即 $a+bi$ 與 $a-bi$, 名爲共軛複數. 與 u 相共軛之數,尋常恆以 $\bar{u}$ 表之.

12. 關於此項複數之加,減及乘,按以前一般的複數方面之定律,有如次之公式:

$$(35)\quad \begin{aligned} &(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+i(b\pm d),\\ &(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc) \end{aligned}$$

二共軛複數之乘積則如下:

$$(36)\quad u\bar{u}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2,$$

---

1. 用字母 i 以表 $\sqrt{-1}$, 首見於歐拉氏(Euler) 1777 年時所作之稿內(刊於 Inst. calc. integr. 4, 184 內, 出版於 Petersb. 1794). 其成爲通用之符號,則由於高斯(Gauss 見 Disqu arithm., Leipzig 1801, § 337).

故可知其爲實數,且係正數. 祇當其一爲0時(其他於是亦爲0),此乘積乃成爲0.

吾人尚須將複數之除法解決之. 設 $u=a+bi$, $v=c+di$, 則須求一數 $z=x+yi$, 俾

$$uz=v, \text{或} (a+bi)(x+yi)=c+di.$$

因之,必須

$$ax-by=c \quad bx+ay=d,$$

而由此,吾人即可計算得

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

故有

(37) $$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

由之,吾人不難見,a^2+b^2 亦即除數 $a+bi$ 不等於0時,除法恆可施行,亦祇可以一種方法施行. 按**10**.內末後之定理,凡判定式爲負之複數系統,均適用之. 故一次之方程 $uz=v$, 倘 u 非爲0,則必有一根,亦祇有一根. 吾人並可知其餘一切關於除之定律,亦均可用.今試以分數之相加爲例,以證明之. 設 $z=\frac{v}{u}$, $z'=\frac{v'}{u'}$ 爲二分數,其分子分母均爲複數,則

$$uz=v, \ u'z'=v',$$

故用 u' 乘第一方程,用 u 乘第二方程後(用交易律),得

$$uu'z=vu', \ uu'z'=v'u,$$

而按分配律,有

$$uu'(z+z')=vu'+uv',$$

故 $z+z'$ 即 $\frac{v}{u}+\frac{v'}{u'}=\frac{u'v+v'u}{uu'}$, 與實分數相同.

總合以上所得結果,可得一定理如下:

二個單位之複數中,祇有判定式爲負之系統,有此屬性,即實數算術上之一切定律,於此仍均適用.

13. 複數之運算結果,所得仍爲一複數 $A+Bi$. 倘於運算內將一切 i 易爲 $-i$, 換言之,每一數用其共軛數代之,則所得結果亦易爲其共軛數 $A-Bi$.

14. 仿二個單位之法,吾人可作三個,四個,廣之,n 個單位之複數,即數目之形式如下者:

$$u=x_1e_1+x_2e_2+\cdots\cdots+x_ne_n$$

(於此, x_1, x_2, ……, x_n 爲實數),幷研究實數算法上之定律,是否亦可推用於此.[1] 吾人所得結果,知不能全部適用,單位多於二個時,恆須犧牲某種定律,例如乘法上之交易律,或乘積爲 0 時必須有一因子爲 0 之定理.[2] 故吾人有一極重要之定理如下:

除尋常複數之系統(實數作爲特例包於其中)外,無有

---

1. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853. Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862. 參觀 Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867. Stolz und Gmeiner, Theor. Arithm. 2 Bd., Leipzig, 1915. Study, Theorie der komplexen Grössen (Enzykl. d. math. Wiss. 1, 1).

2. 參觀 Weierstrass, Zur Theorie der aus n, Haupteinheiten gebildeten komplexen Grössen, Gött. Nachr. 1884. Dedekind, ebd. 1885, 1887. Study, ebd, 1889, 1898.

其他之數目系統,能適用一切算術定律者[1]但高級複數之理論,尤以不適用乘法交易律之三單位及四單位之複數[2]理論(向量算法及四元法 Quaternionen),因其於幾何力學及物理學上有重要之應用,故亦極關切要.

§45. 複數之幾何表法

1. 猶直線上之點可表實數,平面內之點亦可用以表複數.今於平面內取二垂直之線,並於每一線規定其一方向,爲正方向,其相反之方向則謂之負者.如此二線,名爲坐標軸,其一曰 x 軸,其他則爲 y 軸.二軸之交點 O,謂之零點,亦曰起點.將正的 x 軸旋轉 $90°$ 以達正的 y 軸之旋轉法,吾人規定之爲正的旋轉法.此二坐標軸將平面劃爲四區——象限——吾人按正的旋轉法之方向各編以號.

設 P 爲平面內之任何一點,則可由之作垂線 PP_x 及 PP_y 於軸上,按既定之單位,量取 OP_x 及 OP_y 二段,以 x 及 y 表之,並按其由 O 出發在軸之正方向或負方向內,而予以正號或負號,如是,吾人對於任何之點 P,可得二數目 (x, y),名之爲 P 點之直角坐標.反之,亦可知對於任何一

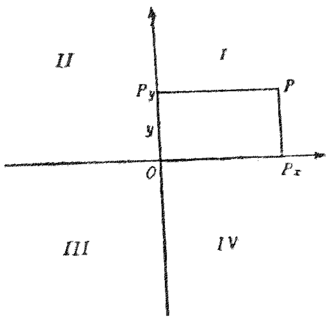

圖　4

3. Gauss 於其著名之 Selbstanzeige zur zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste (1831) 內已述過此定理,但未有證明,見其全集 2, 178.

4. 參觀 Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig 1905. Klein u. Sommerfeld, Theorie d. Kreisels 1, Leipzig 1897.

對實數 (x, y), 有一點[1]與之相當,此點即視之為複數 $z=x+yi$ 之圖,故亦名之為 z 點.如是,對於平面內之任何一點,有一複數與之相對應,而任何一複數,可用平面內之一點表之,亦祇有此一點.因之,數目 z 及 z 點二語之意義,可不加分別.在此種狀況下,平面實為數目之代表者,故亦名為數目平面, x 軸代表實數,故名為實軸, y 軸代表純虛數,故稱為虛軸.按 x 及 y 之號, z 點之分配於四象限內如下:

象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

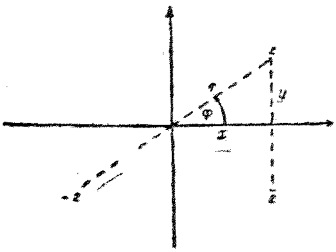

圖 5

z 之相反數之點 $-z$, 對於 O 點而言,與 z 為對稱者,其與共軛數 $\bar{z}=x-yi$ 相屬之點,亦與 z 相對稱,但對於實軸而言,故亦可云為 z 之影點,亦對於實軸而言.

2. 除直角坐標外,吾人亦可用極坐標以決定一點 P,

1. 此為康圖氏直線公理(§24)之結果,蓋按此公理,對於任何一實數 x, x 軸上有一點 p_x 與之相對應,而對於任何一數 y, y 軸上亦有一點 p_y 與之對應也.

其法在取該點與O點間之距離(恆取其正者)$OP=r$,以及OP射線與正的x軸間之角ϕ.此角恆由正的x軸出發,按正的旋轉法用弧度計之.[1]故此角之決定上,可任加若干全旋轉.一已知之點,其角爲$\phi+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$,蓋吾人可取其中之一,在0與$2\pi$間者,隨加若干或減若干$2\pi$之倍數也. 直角坐標與極坐標間,其關係爲下式:

$$(1)\qquad x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,$$

故複數$z=x+yi$成爲下式:

$$(2)\qquad z=r(\cos\phi+i\sin\phi).$$

此項表出複數之法,極有意義.吾人名之爲極式.其極性如下:

複數z之極式,爲一正實數r與一複數之乘積. r表z點與O點間之距離,名爲z之絕對值. 吾人以$|z|$表之,按勾股形定理,有

$$(3)\qquad r=|z|=\underset{+}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按§44,(36),可知一數之絕對值之平方,等於該數與其共軛數之乘積:

---

1. 即此角用其所屬之圓弧之長計之,此圓以1爲半徑. 此項弧長亦稱爲該角之Arcus,故用弧度時,角之量爲

$$\operatorname{arc}\phi=\frac{\pi}{180}\phi^{\circ}=\frac{\phi''}{206264,8}.$$

於此,ϕ°爲角度,ϕ''則用秒表之.

(4) $$r^2 = z \cdot \bar{z}.$$

凡絕對值相等之數,均在以 O 爲心之圓周上.

極式之第二因子,爲一複數,其絕對值爲 1, 蓋按三角學上之基本公式,——吾人亦可直接由 (1) 得之,——有:

(5) $$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

因其祇與方向角[1] ϕ 有關,故名之爲 z 之方向函數. 吾人可寫之作

(6) $$\cos\phi + i\sin\phi = E(\phi),$$

故複數之極式爲

(7) $$z = r \cdot E(\phi).$$

任何一方向函數,可用單位圓(爲 1 爲半徑, O 爲圓心之圓)上之點以表之.

凡方向函數相等之數,在一由 O 點出發之射線上.

按 (1), 可知方向角決定於如次之式:

$$\cos\phi = \frac{x}{r}, \quad \sin\phi = \frac{y}{r},$$

或

(8) $$\mathrm{tg}\phi = \frac{y}{x}.$$

用正切函數以求角時, π 之倍數無關,故欲知 ϕ 所在之象限時,必須注意 $\frac{\cos\phi}{\sin\phi}$ 之號與 $\frac{x}{y}$ 之號相合. 如是,方向角除

1. 此角尚有其他之名稱,如傾角,等等. 同時,亦有用 Argument 一語以表之者,此則更覺不妥,蓋此語用於函數之自變數已習見,其意義與此處殊不相同也.

任意多之全旋轉外,卽除 2π 之倍數外,已完全確定. $\cos\phi$ 與 $\sin\phi$, 亦卽方向函數,對於 ϕ 上增加任何多之全旋轉,不生影響. 卽,對於任何整數 k, 有

(9) $$E(\phi+2k\pi)=E(\phi).$$

對於 z 之共軛數 $\bar{z}$, 有方向函數之共軛值與之相屬 $\overline{E}(\phi)=\cos\phi-i\sin\phi$. 他方面, $\bar{z}$ 之方向角爲 $2\pi-\phi$ 或 $-\phi$; 故 $\overline{E}(\phi)=E(-\phi)$, 而

(10) $$E(-\phi)=\cos\phi-i\sin\phi.$$

按 (4), 並有

(11) $$E(\phi)E(-\phi)=1,$$

與 (5) 之意義相同.

3. 選定 O 點後,平面內之點 P 可用 OP 線之長及方向決定之,故 P 所表之數目 z, 亦可用有方向之線段 $\overrightarrow{OP}$ 以圖表之. 如是之線段名之爲向量 (Vektor), 吾人用其所屬數目之德國字母表之,[1] 故 $\overrightarrow{OP}=\mathfrak{z}$. 向量爲其線段之長及方向所決定,但並不繫着於一點. $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{A'B'}$ 二向量,祇當其長及方向均相等時,乃爲相等者,卽其一經過一平行移動後,可與其他相合. 緣此規定, O 點之偶然的選擇,可

1. 數目與向量間之關係(猶數目與點間之關係然), 爲一種等值性, 如吾人以前 (§33, 3.) 所說明者. 此處僅就複數理論上之需要, 略論向量, 其詳當另論之.

無多關係,吾人可將代表 z 之向量,在平面內任意作平行移動.

設 ρ 爲一正實數,則 $\rho\overrightarrow{AB}$ 所表者爲一向量,其方向與 $\overrightarrow{AB}$ 同,其長爲 $\overrightarrow{AB}$ 之 ρ 倍. 長爲 1 之向量,謂之單位向量. 設 r 爲 $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{z}$ 之長, $\mathfrak{E}$ 爲與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向之單位向量,則

$$\mathfrak{z}=r\mathfrak{E}. \tag{12}$$

此與複數之極式相當. 方向函數即此處與 $\mathfrak{z}$ 同方向之單位向量.

4. 二向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 之和,爲一向量 $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 二向量構成一三角形之之邊,其和即爲其第三邊,如圖所示. 吾人不難知向量之此種加法,與前此所規定複數之加法,完全相當. 二複數

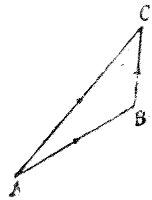

圖 6

$$z_1=z_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2$$

之和,爲

$$z_1+x_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2).$$

以 x_1+x_2, y_1+y_2 爲坐標之點,即圖中 O, z_1, z_2 三點所決定之平行方形內與 O 相對之角點. 試取其 O, z_1, z_1+z_2 三點,則即得以上所確定之向量之相加.

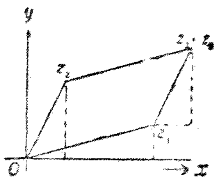

圖 7

5. 將一已知之向量 $\mathfrak{z}=\overrightarrow{AC}$ 分解爲二

向量時,其法有無限多.設 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 爲其中之一種分解,$\mathfrak{e}_1$ 爲 $\overrightarrow{AB}$ 上之單位向量,$\mathfrak{e}_2$ 爲 $\overrightarrow{BC}$ 上之單位向量,又設 a, b 爲二者之長,則 $\overrightarrow{AB}=a\mathfrak{e}_1$, $\overrightarrow{BC}=b\mathfrak{e}_2$, 而

$$\mathfrak{z}=a\mathfrak{e}_1+b\mathfrak{e}_2. \tag{13}$$

由此可知平面內向量之多,與二單位之複數之多相同,故此二羣爲等值者.[1]

6. 二向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BA}$, 其長相同,其方向相反者,謂之相反之向量.其和爲一向量,此向量之長爲 0, 即 0 向量,吾人即以 0 表之:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0. \tag{14}$$

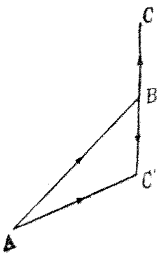

圖　8

二向量之差 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$, 爲一向量,與 $\overrightarrow{BC}$ 相加時,得 $\overrightarrow{AB}$, 減去 $\overrightarrow{BC}$ 之意義,與加上一相反向量 $\overrightarrow{CB}$ 同,而如 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC'}$, 則

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}.$$

---

1. 單位 e_1, e_2 之間,按 §44, (25), 必有齊次的二次方程,其判定式爲負者.設 ω 爲二單位向量間之角,則此方程爲

$$e_1{}^2-2e_1e_2\cos\omega+e_2{}^2=0,$$

其判定式爲 $4(\cos^2\omega-1)=-4\sin^2\omega$. 在尋常複數方面, $e_1=1$, $e_2=i$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, 故 $\cos\omega=0$, 而方程成爲 $i^2+1=0$.

事實上,吾人不難見

$$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AB}.$$

觀以上之圖可知.

7. 欲將任何多之向量相加時,可將其一一如是移動之,使其中任何一向量之始點,與在前者之終點相合.如是,吾人卽得一之曲折之線形,而其自始點至終點之向量,卽爲所求之和.吾人並不難知此向量與原來各向量之移動順序並無關係.

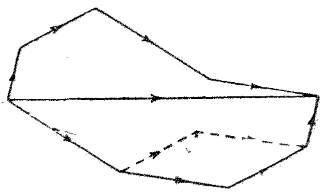

圖 9

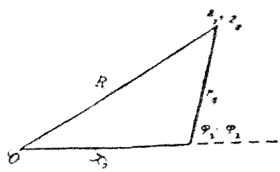

圖 10

8. 設 z_1, z_2 爲二複數,其絕對值爲 r_1, r_2,其方向角爲 ϕ_1, ϕ_2,設 z_1+z_2 之絕對值爲 R,則 r_1, r_2, R 所成之三角形內,$r_1r_2=\pi-(\phi_2-\phi_1)$ 而按餘弦定理,有

$$R^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\phi_2-\phi_1).$$

因餘弦之值恆在 -1 及 $+1$ 之間,故

$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\leqq R^2\leqq r_1^2+r_2^2+2r_1r_2,$$

卽
$$(r_1-r_2)^2\leqq R^2\leqq(r_1+r_2)^2,$$

故有

(15)
$$|r_1-r_2|\leqq R\leqq r_1+r_2.$$

此即是:

和數之絕對値,不能大於被加數之絕對値之和,亦不能小於此項絕對値之正差.

吾人不難知,必須 z_1, z_2 二點與 O 點在同一直線內,(15)內之等號乃可適用.且二點在 O 之同一面時,$R=r_1+r_2$ 而如二點不在 O 之同一面,則 $R=|r_1-r_2|$.在此二種狀況下,其商 $\frac{z_1}{z_2}=\pm\frac{r_1}{r_2}$ 爲實數.

(15)內之第二不等式,較爲重要,可寫之作下式:

$$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|,$$

且不難即推廣之至於任何有限多之被加數(§**14**, **3**.):

(16) $$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots\cdots+|z_n|.$$

此處之等號,祇當其中每二個被加數之比爲實數且爲正數時,乃能適用.

9. 設 z 爲任何一複數,a 爲一固定之複數,則將 z 點按向量 $\mathfrak{A}$ 移動後,即得 $z'=z+a$.倘將此法用於平面內之一切點 z,則每一點於 $\mathfrak{A}$ 之方向內按 $|a|$ 之長被移動,故其結果亦即全平面被移動.如是之全部的移動,名爲換標(Transformation),而此處之換標,則稱爲平行移動.故可云:

下列之換標:

(17) $$z'=z+a,$$

其意義爲平面之平行移動.在此移動方面,凡在有限內之點,無有不變動者.

10. 今再一論複數之乘法.

設 $$z_1=r_1E(\phi_1),\quad z_2=r_2E(\phi_2),$$

則 $$z_1z_2=r_1r_2E(\phi_1)E(\phi_2).$$

二方向函數之積,爲

$$(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$$

$$=\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2+i(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2).$$

按三角函數之相加公式,有

$$\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2=\cos(\phi_1+\phi_2),$$

$$\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2=\sin(\phi_1+\phi_2),$$

故可知

$$(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$$

$$=\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2),$$

卽

(18) $$E(\phi_1)E(\phi_2)=E(\phi_1+\phi_2).$$

吾人因得重要之定理如下:

二方向函數之積,仍爲一方向函數,其角等於二者之和.

故 $z_1=r_1E(\phi_1)$ 與 $z_2=r_2E(\phi_2)$ 之積,爲

$$z_1z_2=r_1r_2E(\phi_1+\phi_2),$$

其形式仍爲極式,而 r_1r_2 卽爲 z_1z_2 之絕對值:

乘積之絕對值,等於其因子之絕對值之乘積,乘積之方向角,等於因子之方向角之和.

11. 由此定理,吾人卽可按如次之方法,以作二數之乘積:

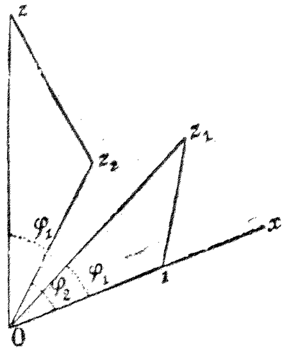

圖 11

於實軸上取一點 $+1$, 作三角形 $O1z_1$, 及與此相似之三角形 Oz_2z. 如是則 z 卽爲 z_1 與 z_2 之乘積. 蓋 z 之方向角爲 $\phi_1+\phi_2$, 其絕對値 r, 則由 $r:r_2=r_1:1$, 可知 $r=r_1r_2$. 簡言之,吾人將向量 $\mathfrak{z}_1$ 旋過一角 ϕ_2, 並將其按 $r_2:1$ 之比放大之卽得.

設 $a=|a|\cdot E(\alpha)$ 爲一固定之數,則 $z'=az$ 之換標用於平面內一切點 z 時,其結果將平面旋轉 α 度,並經過一相似換標,以 O 點爲相似點,一切線段均被放大,其比爲 $|a|:1$. 故吾人稱此爲 O 由點出發之伸長,而此整個之換標,謂之旋轉伸長. 卽:

下列之換標:

(19)
$$z'=az,$$

其意義在將平面按 O 點旋轉而伸長之. 固定數 a 名爲旋轉伸長之變數.

將 (17) 及 (19) 二換標聯結之,吾人得普通的一次整換標

(20)
$$z'=az+b.$$

實施時,吾人亦可先將旋轉伸長 $z_1=az$ 施行,再繼以 $z'=z_1+b$ 之平行移動.設如 a 不等於 1(吾人亦恆可如是假定之),則可設

$$z=\zeta+\frac{b}{1-a},$$

及

$$z'=\zeta'+\frac{b}{1-a},$$

於是(20)即成爲 $\zeta'=a\zeta$,而此則爲以 $\zeta=0$,即 $z=\frac{b}{1-a}$ 爲心之旋轉伸長,故:

普通的一次整換標

$$z'=az+b,$$

其意義爲一旋轉伸長,其變數爲 a,其心爲 $\frac{b}{1-a}$.

經此換標後,任何一圖形易成爲一與之同向而相似之圖形,吾人並可知其爲平面內最普通之相似換標[1]

12. 倘於(18)內將 ϕ_2 易爲 $2\pi-\phi_2$,即 $-\phi_2$,或即將 $E(\phi_2)$ 易爲 $E(-\phi_2)=\frac{1}{E(\phi_2)}$,則得

$$\frac{E(\phi_1)}{E(\phi_2)}=E(\phi_1-\phi_2). \tag{21}$$

從可知二方向函數之商,仍爲一方向函數,其角爲二者之差.

由此,可知二複數 $z_1=r_1E(\phi_1)$, $z_2=r_2E(\phi_2)$ 之商,爲

---

1. 一普通的相似換標,爲二點 z_1, z_2 及換標後所當得之二點 z_1', z_2' 所定.如是則對於一第三點 z_3,有一 z_3' 與之相當,而

$$\Delta(z_1', z_2', z_3')\sim\Delta(z_1, z_2, z_3).$$

由 $z_1'=az_1+b$ 及 $z_2'=az_2+b$ 二式,吾人不難決定換標式內之常數 a, b.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}E(\phi_1-\phi_2),$$

故亦爲一極式,而$\frac{r_1}{r_2}$爲$\frac{z_1}{z_2}$之絕對值.因之:

商數之絕對值,爲二絕對值之商數,其方向爲二者之差.

$z=\frac{z_1}{z_2}$之點與1之關係,猶z_1與z_3之關係,即吾人可使三角形$O1z$與三角形Oz_2z_1同向而相似.

13. $z=r\,E(\phi)$之倒數爲

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}E(-\phi). \tag{22}$$

z'之求法,可換上所明之理爲之.吾人倘分作二步求之,則較便利:先作z'之共軛數$\zeta=\bar{z}'=\frac{1}{r}E(\phi)$,再將此就實軸反映之.此項換標,絕對值爲$r$之點$z$,轉爲$Oz$線上之點$\zeta$,其絕對值爲$\frac{1}{r}$;故吾人稱之爲倒徑之換標法,或亦簡稱

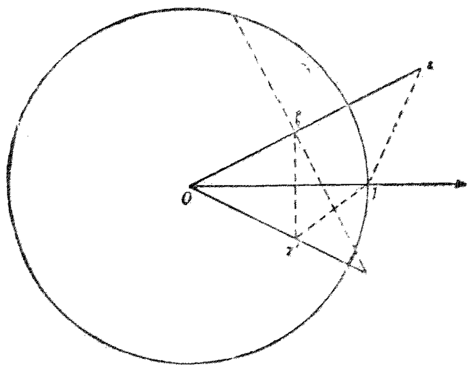

圖 12

爲求倒法. 此法於幾何上,函數論方面,以及數理物理上均極重要. 凡二相當之點,必

$$Oz\cdot O\zeta=1.$$

故不難知 z 與 ζ 間之關係,爲相互者: 將 z 轉爲 ζ 之換標法,亦將 ζ 轉爲 z,故同一換標繼續二次時,各點即仍還其原處.

在此種換標方面,單位圓有根本之意義. 二相當之點 z 與 ζ,爲單位圓所和諧的分開.[1] 故吾人求 ζ 時,可視之爲 Oz 與 z 之極線之交點. 凡圓內之點,經換標後,即成爲圓外之點; 反之亦然. 祇有圓上之點,可以不變.

在圓上之點 $z=x+yi$,其坐標能充適如次形式之方程:

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0,$$

於此, a, b, c, d 均爲實數,因

$$x^2+y^2=z\bar{z},\ 2x=z+\bar{z},$$

$$2y=-i(z-\bar{z}),$$ 故得

$$A z\bar{z}+Bz+\overline{B}\bar{z}+D=0, \tag{23}$$

此中之 A 與 D 爲實數, B 與 $\overline{B}$ 爲共軛複數. 用倒徑法時, z 成爲 $\dfrac{1}{\bar{z}}$, $\bar{z}$ 成爲 $\dfrac{1}{z}$,故(23)成爲

1. 試取一其他之圓,半徑爲 k 者代單位圓,並使其增大,圓心漸入於無限,則 $k\to\infty$ 時,圓即成爲直線,而二相當點 z 與 ζ 間之距離,爲直線所平分. 故倒徑之法即成爲對於直線之反映. 因之,函數論方面,倒徑之換標法,亦稱爲對於圓之反映法.

$$D\bar{z}'z'+\bar{B}z'+B\bar{z}'+A=0, \tag{24}$$

此則仍爲一圓之方程.因之:

用倒徑換標法時,圓仍成爲圓.[1]

在或種狀況下,圓亦可成爲一直線(吾人可視直線爲圓之特例),卽當$D=0$時.但如是則(23)內之圓係經過O點者,故:

經過O點之圓,經倒徑換標易成爲直線,亦祇有此項圓方能成爲直線,反之,直線亦成爲經過O之圓.

$z'=\frac{1}{z}$之換標,由一倒及一反映(就實軸而言)而成,但二者之孰先孰後,並無關係.試將一點先就實軸反映之,再施以倒,亦得$z'=\frac{1}{z}$.於此換標方面,平面內祇有二點,卽$z=+1$及$z=-1$,仍舊不變.

14. 以上所論之換標(17),(19),(20),(22),均爲普通的一次分換標

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \tag{25}$$

之特例,此中之$\alpha,\beta,\gamma,\delta$爲固定之複數.設$\gamma=0$,則卽成爲一次整換標,如(20)內爲形式.故吾人不妨假定γ非爲0.如是,卽不難見

$$z'=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma z+\delta}.$$

---

1. 如是之換標法,Möbius稱之爲圓之關係(見其全集2,213及245頁).吾人不難知任何相似之換標,及對於直線之反映,均爲圓之關係也.

倘$\alpha\delta-\beta\gamma=0$,則$z'$與$z$全無關連,故無所謂換標.[1] 因之,吾人并可假定$\alpha\delta-\beta\gamma=\Delta$不等於0. 於是卽可按以下繼續數次之換標,以由$z$而得$z'$:

$$z_1=z+\frac{\delta}{\gamma},\quad z_2=\frac{1}{z_1},$$

$$z'=-\frac{\Delta}{\gamma}z_2+\frac{\alpha}{\gamma}.$$

故可知:

任何一一次分換標,可由一平行移動,一倒,一對於實軸之反映,以及一普通的相似換標組合而成.

此項換標均係圓之關係,故可知:

在任何一一次分換標方面,一圓仍易成爲一圓.

§46. 複數之方及根

1. 複數之最簡單的方數,爲虛單位之方數:

$$i=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=+1.$$

自此以下,其餘之方數,均爲i, -1, $-i$, $+1$諸數之循環,故普通有

$$(1)\qquad i^{4k}=+1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

此於任何整數k(亦可爲負)均適用,但須如實數方面,設$i^{-n}=\frac{1}{i^n}$. 倘吾人須求任何多複數之乘積$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)\cdots\cdots(a_n+b_ni)$,或求一複數之$n$次方時,吾人卽須應用此項

1. 吾人亦可名之爲非眞正之換標. 如是,對於任何之點z(除$z=-\frac{\delta}{\gamma}$以外),與之相當者爲$z'=\frac{\alpha}{\gamma}$,但對於$z=-\frac{\delta}{\gamma}$,則z'可任意.

i 之方數．例如

(2)
$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2iab$$
$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3).$$

其餘更高次之方數，不難用二項式定理(§ 55)直卽寫出之也．

2. 倘由極式出發，則計算複數之方數時，可極簡單．§ 45. 10. 內關於二方向函數之乘積之定理，不難卽推至於任何多之因子．吾人有

(3)
$$E(\phi_1)E(\phi_2)\cdots\cdots E(\phi_n)=E(\phi_1+\phi_2+\cdots\cdots+\phi_n).$$

今設 $\phi_1=\phi_2=\cdots\cdots=\phi_n=\phi$，則

$$E(\phi)^n=E(n\phi),$$ 卽

(4)
$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$$

此卽著名之莫亞弗定理(Satz von Moivre):[1]

方向函數之 n 次方，仍爲一方向函數，其方向角等於原有者之 n 倍．因之，一複數 $z=rE(\phi)$ 之 n 次方，爲

(5)
$$z^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi),$$

而此則仍爲一極式，故可知:

一複數之 n 次方之絕對值，等於其底數之絕對值之 n 次方．其 n 次方之方向角，則等於底數之方向角之 n 倍．

1. 此定理莫氏當已於 1707 年時知之，但就其內容而論，則首見於其 Miscellanea analytica (1730) 內，至以上之形式，則係 Euler 所發見，見其 Introductio (1748).

3. 試將由莫氏公式所得者與直接計算得者相較,卽可得三角函數之方數與倍角函數間之重要關係.今但以 $n=2$, 及 $n=3$ 爲例,計算出之. 按 (2) 及 (4), 有

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^2=\cos^2\phi-\sin^2\phi+2i\cos\phi\sin\phi$$

$$=\cos 2\phi+i\sin 2\phi,$$

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^3=\cos^3\phi-3\cos\phi\sin^2\phi$$

$$+i(3\cos^2\phi\sin\phi-\sin^3\phi)$$

$$=\cos 3\phi+i\sin 3\phi.$$

因之,

$$\begin{aligned}\cos 2\phi&=\cos^2\phi-\sin^2\phi,\\ \sin 2\phi&=2\sin\phi\cos\phi;\\ \cos 3\phi&=\cos^3\phi-3\cos\phi\sin^2\phi\\ \sin 3\phi&=3\cos^2\phi\sin\phi-\sin^3\phi.\end{aligned}\tag{6}$$

倘將 $\sin^2\phi=1-\cos^2\phi$ 或 $\cos^2\phi=1-\sin^2\phi$ 用入,則有

$$\cos 2\phi=2\cos^2\phi-1=1-2\sin^2\phi,\tag{7}$$

$$\cos 3\phi=4\cos^3\phi-3\cos\phi,\ \sin 3\phi=3\sin\phi-4\sin^3\phi.\tag{8}$$

故得

$$\begin{aligned}\cos^2\phi&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\phi,\\ \sin^2\phi&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\phi,\\ \cos^3\phi&=\frac{3}{4}\cos\phi+\frac{1}{4}\cos 3\phi,\\ \sin^3\phi&=\frac{3}{4}\sin\phi-\frac{1}{4}\sin 3\phi.\end{aligned}\tag{9}$$

4. 試於莫氏公式內將 ϕ 易成爲 $\frac{m}{n}\phi$, 於此, $\frac{m}{n}$ 爲任何一有理數, 且爲正數, 則有

$$E\left(\frac{m}{n}\phi\right)^n=E(m\phi)=E(\phi)^m.$$

今按實數方面之例, 設

$$\sqrt[n]{E(\phi)^m}=E(\phi)^{\frac{m}{n}},$$

則
$$E(\phi)^{\frac{m}{n}}=E\left(\frac{m}{n}\phi\right).$$

又仿實數之法, 設 $z^{-k}=\frac{1}{z^k}$, 則顧及 § **45** 之 (10) 時, 得

$$E(\phi)^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{E(\phi)^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{E\left(\frac{m}{n}\phi\right)}=E\left(-\frac{m}{n}\phi\right).$$

由此可知公式 (4) 對何任何之正或負的有理指數 n 均適用 (倘吾人並規定底數爲複數時, $z^0=1$ 亦適用, 則於 $n=0$ 該式亦仍適用).

5. 今設 $m=1$, 則即得方向函數之 n 次根:

$$\sqrt[n]{\cos\phi+i\sin\phi}=\cos\frac{\phi}{n}+i\sin\frac{\phi}{n}. \tag{10}$$

但 n 次根之値, 非止此一個. 蓋如 k 爲一任意之整數, 於 (4) 內將 ϕ 易以 $\frac{\phi+2k\pi}{n}$, 則按 §**45** 之 (9):

$$E\left(n\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)=E(\phi+2k\pi)=E(\phi),$$

故
$$E(\phi)=\left[E\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right]^n.$$

從可知方向函數$E\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$對於任意之整數$k$,爲$E(\phi)$之$n$次根.故吾人對於$n$次根,得$n$個不同之值.蓋如用$n$以除$k$,設$q$爲其商,$X$爲其餘,則$k=qn+X$,而$X$爲$0, 1, 2, \cdots\cdots$, $n-1$諸數中之一.因之,

$$E\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)=E\left(\frac{\phi+2X\pi}{n}+2q\pi\right)=E\left(\frac{\phi+2X\pi}{n}\right).$$

此卽是,對於k之任何整值,$E\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$除$k=0, 1, 2, \cdots\cdots$, $n-1$外,無有其他之值.至於此項n個值之均不相同,此則可由幾何上見之,極爲明瞭.爲簡單計,吾人設$\frac{2\pi}{n}=\delta$,則方向函數$E\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$於$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$,有

(11) $$E\left(\frac{\phi}{n}\right),\ E\left(\frac{\phi}{n}+\delta\right),\ E\left(\frac{\phi}{n}+2\delta\right),\cdots\cdots E\left(\frac{\phi}{n}+[n-1]\delta\right).$$

與此相當者爲單位圓上之點$E_0, E_1, E_2, \cdots\cdots, E_{n-1}$,其中任何一點經過一角度$\frac{2\pi}{n}=\delta$時,卽得其次之一點,故可知:

$E_0, E_1, \cdots\cdots, E_{n-1}$諸點,將單位圓之周均分爲$n$分.

故事實上(11)內之n方向函數均彼此不相同,而得定理如下:

一方向函數之n次根有n個不同之值:

(12) $$\sqrt[n]{\cos\phi+i\sin\phi}=\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}$$

$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1).$

其與相當之平面內之點,構成內切於單位圓之有法n角形之角.

6. 按方向函數相乘之定理(見§**45, 10.**),可知(12)之右端爲二方向函數之乘積,其角爲$\frac{\phi}{n}$及$\frac{2k\pi}{n}$,故(12)亦可寫作

$$\sqrt[n]{E(\phi)}=E\left(\frac{\phi}{n}\right)E\left(\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{13}$$

此即是:吾人取其根之一值,用n個方向函數

$$\omega_k=E\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \tag{14}$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

一一與之相乘,即得n次根之n個值.設$\phi=0$,則$E(\phi)=1$,而按(13):

$$E\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{1}.$$

即:$\omega_0, \omega_1, \cdots\cdots, \omega_{n-1}$ n個數,有此屬性,其n次方等於1.吾人稱之爲n次單位根,故亦可云:

$\omega_0, \omega_1, \cdots\cdots, \omega_{n-1}$爲$n$次方程

$$x^n=1 \tag{15}$$

之根.

數目平面內與之相當之點,由$\omega_0=1$出發將單位圓分成爲n等分.因之,方程(15)亦稱爲n次之分圓方程.

按莫氏定理,有

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

今設

(16) $$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \omega,$$

即得如次之定理:[1]

n次單位根,爲單位根ω之諸方數

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \cdots\cdots, \omega^{n-1}.$$

由此,又得一定理如下:

諸n次單位根之和爲0.

蓋此和爲(§**20**, **11**.)

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots\cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1},$$

此處之分子爲0,分母則非爲0也.

7. 試以最簡單者爲例,則有

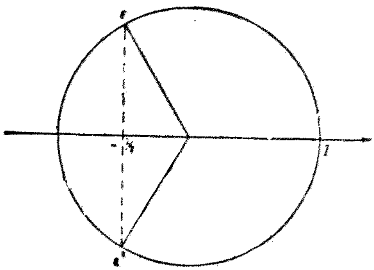

圖 13

$n=2$: $+1$, -1.

$n=4$: $+1$, i,

-1, $-i$.

在三次單位根方面,吾人可用ε以代ω,

即 $$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

1. 倘不用ω時,亦可用其他之單位根,如ω_ν,但須ν與n爲互質者.

由幾何圖形上，不難知 ε 之實部分等於 $-\frac{1}{2}$，其虛部分則等於 $\frac{i}{2}\sqrt{3}$，蓋按已知之值，有

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

也.

故三次單位根如下:

(17) $$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3},\quad \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3},$$

而其間有如次之關係:

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0;\quad \frac{1}{\varepsilon}=\varepsilon^2;\quad \frac{1}{\varepsilon^2}=\varepsilon.$$

8. 今試一觀任何一複數 $z=r\,E(\phi)$ 之 n 次根，並假定其極式爲

$$\sqrt[n]{z}=\rho\,E(\vartheta).$$

如是則必

$$\rho^n E(n\vartheta)=r\,E(\phi)=r\,E(\phi+2k\pi),$$

故可知次根之絕對值爲

$$\rho=(\sqrt[n]{r}),$$

於此，吾人須取其正實數，而

$$\vartheta=\frac{\phi+2k\pi}{n}.$$

按(12)及(13)，卽得

$$E(\vartheta)=\sqrt[n]{E(\phi)}=E\left(\frac{\phi}{n}\right)\omega^k,\quad k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1.$$

因之,

(18) $$\sqrt[n]{z}=(\sqrt[n]{r})\,E\left(\frac{\phi}{n}\right)\omega^k,$$

$$(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1),$$

而得定理如下:

複數之n次根有n個不同之值,吾人可取其中之一,而以n次單位根之一一與之相乘即得.數目平面內與之相當之點,均在一圓上,此圓以O為心,以$(\sqrt[n]{r})$為半徑,被該項點均分為n分.

方向角ϕ恆可假定其在0與2π之間:

$$0\leqq\phi<2\pi$$

如是則$\frac{\phi}{n}$在0與$\frac{2\pi}{n}$之間,而$(\sqrt[n]{r})\,E\left(\frac{\phi}{n}\right)$為$\sqrt[n]{z}$之最小方向角之值,吾人稱之為$n$次根之重要值,寫作

(19) $$(\sqrt[n]{r})\,E\left(\frac{\phi}{n}\right)=(\sqrt[n]{z}).$$

與此相當之點,於圓周上之分點中居首,由正實軸出發按正方向旋行時,首先達到者即此點.$\sqrt[n]{z}$之n個值於是亦可如下寫之:

(20) $$\sqrt[n]{z}=(\sqrt[n]{z})\cdot\omega^k\qquad(k=0,1,\cdots n-1),$$

於此,

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

§47. 第七章史料

1. 複數之來源,實由於求負數之平方根所引起.當1150年時,Bhâskara謂負數無有平方根可求,其後歷數百年之久,數學家均持此見.[1] 但自Cardano(1545)以後,此項平方根多與實數按同法運算之,亦未見有若何矛盾發生.於是向所視爲不可能或幻想的數目,[2] 竟能與實數同其運用,雖在基礎方面尙屬模糊,故不能謂已有確實性,[3] 然其應用漸多,其在數學各部門方面之重要,亦漸以明瞭.蓋非藉複數之用,三次方程之實根,卽已無法用代數法求之(Bombelli, 1572),更無論代數學之根本定理(Girard 1629),及m, n次二曲線之相交定理(Bézout 1779)矣.至於三角函數與指數函數間之關連,如歐拉所發見(1748)者,尤非先有複數之運算不可.惟在事實上.複數理論之基礎,除片斷外,向少系統之建設,故至1831年時,高斯尙謂虛數之確實性少,殊數似於無內容之符號運用.

2. 按康圖氏[4]之意,吾人論數目之實在或存在,亦猶任

1. 此種見解自亦合理,但須較正確言之,卽"在實數中,負數無有平方根可求也."

2. 參觀Euler, Algebra (1770), 1, §143.

3. Cauchy於其Cours d'analyse (1821)內,尙謂複數所成之算式,無有意義可言,然一方面固亦不能不應用之,且以複數爲基礎,建立函數論,卽其單複變數之函數論是.其後來所發表之著作(例如Exercises de mathématique, 1847)內,立場已與高斯相接近,參觀Valson, Vie et travaux de Cauchy 2 partie (1868).

4. Math. Ann. 21 (1883), 562.

何一種概念或理念之實在性,可分為二種意義言之.第一,"吾人可視數目為實在者,因數目有定義,在吾人之理解上,有其固定之位置,得與吾人思想之其他部分相別,且與之有一定之關係." 康圖氏稱此種實在性為內在的實在性.與此相對者有外存的實在性,則因"吾人對於數目,必須視之為代表外界某種歷程及關係者,"故數目尚有此種外存之實在性.按康氏之見解,此二種實在性恆相關連,蓋凡內在實有之概念,在某種關係下恆有其外存的實在性也.[1]

十八世紀之數學家,祇知有外存的實在,故尋常之數目,視為實在者,因其可與直線上之點或線段相關連也.彼時且或將數目與其幾何圖形視為相同之物,[2]故以為數目有客觀上之實在性,但複數似無有客觀上之物與之相當,而所被視為幻想而成之數.高斯曾以幾何圖表法證明

1. 康圖氏蓋得之於斯賓挪莎(Spinoza),見 Ethik II, prop. VII: ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum. 吾人亦可將其與黑格爾(Hegel)之思想相較,黑氏謂凡實在者必合理,合理者亦必實在也.而就某種意義上言之,內在的與外存的實在之對立,實為昔時唯名論與實在論對立之復現.

2. Newton, Arithmetica universalis (1707).

複數之合法,實全爲當時之見解所支配,[1] 蓋彼時所承認之實在性,祇有外存的一種,高氏故欲以此證明複數之亦具有外存的實在性.然高氏對於數目概念之內在性質,且其爲數目之眞義,亦未嘗不知之.吾人讀其書信可見此.其所以僅於致知交之信函中及之,而未有公開之表示者,或以與當時之見解相距甚遠,故不欲宣布也. 例如1830年四月九日致倍塞爾[2]之信內,有云:"吾人必須虛心承認,數目固爲吾人精神之所產,但空間則除吾人之精神外,亦尙有其實在性."歷四十年後,談德金氏復發生與此相同之思想,以爲"數目爲吾人精神所自由創造,"迄至今日,此種數目概念之內在的性質,已成爲公認者矣.康圖氏謂數學[3]構造其觀念材料時,僅以其概念之內在的實在爲

1. 首先用平面內之點及向量以表複數者,爲丹麥之測量家Caspar Wessel氏,但其極有價値之著作(Abh. d. dän. Akad. 1798內),彼時曾無有人知之,直至一百年後,始重再發見,而譯成法文出版(Essai sur la représentation analytique de la direction, Kopenhagen 1897). Argand之著作Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques, Paris, 1806 (1874年重版)亦少人知,故複數之幾何圖表法,經高斯之著作發表後,始爲一般數學家所採用. 就今所可考者,高氏之用此,實始於1811年(見1811年十二月十八日致倍塞據之信),但當其著作Disquisitiones arithm. 及其關於代數根本定理之論文時,早卽有此,時爲1796年也. 參觀A. Fränkel, Zahlbegriff und Algebra bei Gauss. Göttinger Nachr. 1920.

2. 高斯全集8, 201.

3. 康圖氏蓋指數學全部而言,不僅算術之一部分也. 由此所得之思想,自必以幾何概念(同爲純粹數學之對象)亦屬於內在之性質,此則已經希爾伯整理而個別的完成之矣(見其"幾何學之基本,"1899年初版). 在數理物理學方面,今日所盛行之相對論,似亦有此趨向(參觀Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin 1920,第263頁)

根據,故吾人不能就其是否有外存的實在性以證驗之.但"必須顧及者,則該項概念本身間,斷不能有矛盾發生,且須與原有之概念,有固定之關係,而當採用入新數目時,數學須作其定義,俾此項數目有確定性,在或種情形下,並與原有者間有如是之關係,不難使人識別之.倘有一數,能充適此諸條件,則可承認其爲數學上之存在而實在者,且亦必須承認之."康圖氏之意,蓋特置重於新數目之定義.但就吾人今日之目光觀之,欲使此項數目適用,且可將其安插於數學系統內,則必立一公理之系統,[1]使數目之應用法有所規定,因而可建立其理論而不致有矛盾發生.

在複數方面,吾人已有海米爾敦(Hamilton)之理論,內在的概念,已可確定(海氏理論實可用之以確定任何新數目,此於§**44**,**2**.內已論及之),至其公理的構造,則已有適用於實數之公理系統,故無所缺乏矣.

1. 參觀 Schoenflies, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 20 (1911).

第八章

組合論

§48. 錯列

1. 設有元素一羣,其數之多有限,則吾人可將此項元素,以種種方式排列之,或分組之爲部分羣;組合論所從事之對象,亦卽在此,其尤要者,則在決定某種排列或分組法之可能的次數.

就組合論之歷史而言,吾人可溯其源至於古希臘時代.當中世紀時,印度人(如1150年時之Bhâskara)於此方面已頗有研究,惟西方人中,彼時亦已有造詣甚高者,如Levi ben Gerson是.[1] 其後經Pascal, Leibniz, Wallis等諸氏之經營,基礎始漸以確立,成爲今日之形式,惟供獻最多者則爲Jakob Bernoulli氏,其所著Ars conjectandi一書(出版於1713年),迄今猶爲此方面之基本著作.關於此之詳盡的敍述,可閱Netto所著Lehrbuch der Kombinatorik(組合論課本,出版於Leipzig, 1901年)一書.

1. 見Sefer maassei choscheb("算家之實用方法,"出版於1321年),1909年時由G. Lange重訂,出版於Frankfurt. 並參閱J. Carlebach, Levi ben Gerson als Mathematiker, Berlin 1910.

2. n 個事物所成之有限羣,吾人可用種種方法以計點之,卽吾人對於此項事物,可用種種方法予以數字 1, 2, ……, n, 或亦可云,此項元素之排列法可有多種.

倘吾人僅有一個事物,則其排列法自僅能有一種;但二個事物 a, b 之排列法卽有二種,卽 ab, ba 是;三個事物 a, b, c 之排列法則有六種如下:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

欲得此諸種排列法時,吾人可分別將 a, b, c 三元素先後置於第一位,將其餘二者列於其後,並取其二種排列法用之.

此諸種種排列法,名爲 n 元素之錯列 (Permutationen). 由以上所舉諸例,已可知此項錯列之本身,亦構成一有限羣;今試用完全歸納之法以普遍的證明之,同時,並決定 n 元素所可有的錯列之數.

如是,吾人可先假定,$n-1$ 個元素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}$ 之錯列數爲有限者,並以 $\Pi(n-1)$ 表之. 今再添入一第 n 個元素 a_n, 則可知此元素於 $n-1$ 個元素所有之每一錯列內,可處於其第一位,第二位,乃至於第 n 位之處. 如是,吾人可由原有之每一錯列,獲得 n 個錯列,各不相同. 從可知

$$\Pi(n)=n\Pi(n-1).$$

如此,由 $\Pi(1)=1$, $\Pi(2)=2$, 得 $\Pi(3)=2\cdot3$, 廣之,用完全歸納之法,可得

(2) $$\Pi(n)=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n,$$

此即是: n 個元素之錯列數, 等於自 1 至 n 各整數連乘之積.

此種乘積, 亦可如下計之:

$$1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n=n!$$

名爲 n 之連乘 (Fakultät).

以上所得之公式 (1), 不難推廣之. 今設 m 爲一自然數, $m<n$, 則

(3) $$\Pi(n)=(m+1)(m+2)\cdots\cdots n\Pi(m).$$

$\Pi(n)$ 之隨 n 而增大, 至爲迅速. 試列若干於下:

n	$\Pi(n)$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

關於連乘之增大,有一普通定理如下:

3. 設a爲任何一正數,大於1,則吾人可取一m如是大,當$n>m$時,即有$n!>a^n$.

欲證明此定理,可取一整數$p>a$. 如是則$\frac{a}{p}=\mathfrak{d}$爲一正的眞分數. 今如n爲一整數,較p尤大,則$\frac{a}{p+1}$, $\frac{a}{p+2}$, ……, $\frac{a}{n}$諸分數,均小於$\mathfrak{d}$, 因而此$n-p$個分數之積

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\cdots n}<\mathfrak{d}^{n-p}.$$

今以$a^p/p!$乘之,則按(3),得

$$\frac{a^n}{n!}<\frac{a^p\mathfrak{d}^n}{\mathfrak{d}^p p!}. \tag{4}$$

按§**20**之**8**.,可取m如是大,使$n>m$時,有

$$\mathfrak{d}^n<\mathfrak{d}^p a^{-p} p!$$

如是則(4)之右端卽爲一眞分數. 因而其左端亦爲眞分數. 是卽

$$n!>a^n. \tag{5}$$

4. 羣內之n元素,可以1. 2. 3, ……, n等數字表之. 此諸元素之錯列內,有一爲

$$E=1\,2\,3\cdots\cdots n,$$

其中之元素,係按照自然的次序排列者. 此錯列吾人以主要錯列名之. 任何一錯列,可以

$$A=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$$

表之,於此,$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 仍爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ 等諸數字,惟次序則隨便.

例如 $n=3$ 時,吾人可得六個錯列如下:

$$A_1=123 \qquad A_4=132$$
$$A_2=231 \qquad A_5=213$$
$$A_3=312 \qquad A_6=321.$$

如欲由主要錯列 E 以推得一其他錯列 A,可如下爲之:倘 1 與 a_1 不同,則可於 E 內先將 1 與 a_1 互換,如是,a_1 已處於適當之位置,不必再更動之.若 a_1 已與 1 相同,則可仍其舊.a_1 之位置既得,卽可將以上之方法用於第二位之元素,如是,至多經過 $n-1$ 次之此項互換後,卽得所欲之錯列.二元素之此種更換法,謂之對調(Transpositionen),由以上所明,可知任何一個錯列,均可由主要錯列經若干對調以得之.而如吾人任取一錯列爲出發,以代主要錯列,亦不難由之用若干次對調,以獲得一所欲之錯列,惟其法可多至於無數,蓋吾人不妨先盲目的任意作對調,經過相當多之次數後,再有計劃的爲之.

5. 以上所論,均假定羣內之元素爲各不相同者.但有時 n 個元素中,亦可有屬性相同者,[1] 例如有 α 個 a 元素,β 個 b 元素,γ 個 c 元素,等等爲相同者.今設元素之總數爲

1. 此項元素不必爲完全相同者,祇須所論之屬性適相同便可,例如顏色上之相同等.

n，則吾人可先設想，此項元素爲各不相同者，如是則錯列之數共有 $n!$ 個．今其中既有相同之元素 a，其數爲 α 個，則不相同的錯列之數，即少 $\alpha!$ 倍，故尚餘 $\frac{n!}{\alpha!}$ 個．仿此，倘再將相同之 b 元素，乃至於其他各種相同元素均計及之，則所得結果即如下：

n 個元素中有 α 個相同元素 a，β 個相同元素 b，等等時，其錯列數爲

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\cdots}.$$

§49. 偶錯列與奇錯列

1. 用如次之觀點，吾人可將 n 個數字 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 之 $n!$ 個錯列，分成爲二類：

錯列 A 內，有較大的數字在較小的數字之前者，吾人稱之爲一倒置（Inversion）．例如由 A 中取出 a_h，a_k 二元素，$h<k$，則於 $a_h>a_k$ 時，得一倒置，於 $a_h<a_k$ 時無有倒置．因之，除主要錯列完全無有倒置而外，其餘之錯列均有一定數之倒置．例如

$$n, n-1, n-2, \cdots\cdots, 1$$

一錯列，其所有倒置之數，共爲[1]

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

1．此處先將算術級數之公式一用，其詳見 §56；吾人倘將距末端等遠之每二項合之，則即不難得此式．

個,此數亦爲最大之數.以前所舉之例而言($n=3$),各錯列之倒置數如下:

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3. \end{array}$$

吾人今可將錯列,按其所有倒置之數分成爲二類:

錯列所有倒置之數爲偶者(零亦在內),名爲偶錯列.

錯列所有倒置之數爲奇者,謂之奇錯列.

仍以 $n=3$ 爲例,則 A_1, A_2, A_3 三者爲偶錯列,A_4, A_5, A_6 三者爲奇錯列.

2. 經一次對調後,倒置之數以奇數變動.此層可明之如下:設 A 內 a_h 在 a_k 前(卽 $h<k$),今將 a_h 與 a_k 相易,則凡在 a_h 前或 a_k 後之元素,其所有對此之倒置,不受若何影響.

今如 a_l 在 a_h 與 a_k 間,則

$$a_h, a_l;\ a_l, a_k$$

二對元素間,可無有倒置,或有一個倒置,或亦可有二個倒置,而

$$a_k, a_l;\ a_l, a_h$$

間則有二個倒置,一個倒置,或無有倒置.從可知將 a_h 與 a_k 互易後,倒置之數或則增加二個,或則不變,或亦可減少二個,無論如何,所更動者爲一偶數.同時,倘 $a_h\ a_k$ 爲一倒置,則 $a_k\ a_h$ 卽非倒置;反之,如 $a_h\ a_k$ 非爲倒置,則 $a_k\ a_h$ 卽爲倒置,故所變動者爲 1.如是,以上之論斷,卽已證明.

由此卽可知:

3. 偶錯列之多與奇錯列之多相同,爲$\frac{1}{2}n!$個.蓋如吾人於一切錯列内將任何二元數互易之,則偶者成爲奇,奇者成爲偶,不相同之二錯列,決不能成爲相同.

4. 倘由主要錯列用對調之法以獲得n元素之一切錯列,則有如次之定理可以適用:不問運用時之順序如何,由主要錯列得偶錯列時,所用對調之次數,恆爲偶數,得奇錯列時,恆爲奇數.

此其理由所在,吾人不難知之,蓋每一次對調所更變的倒置之數,恆爲奇數也.

5. 今設$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$爲任意之數,但各不相同者.試作其每二數之差,並取其乘積.

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad P_E=(x_1-x_2)(x_1-x_3)&\cdots\cdots(x_1-x_n)\\
(x_2-x_3)&\cdots\cdots(x_2-x_n)\\
&\vdots\\
&(x_{n-1}-x_n).
\end{aligned}
$$

吾人稱此積爲屬於主要錯列的交錯乘積(alternierendes Produkt).如是,屬於錯列A之交錯乘積,爲

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad P_A=(x_{a_1}-x_{a_2})(x_{a_1}-x_{a_3})&\cdots\cdots(x_{a_1}-x_{a_n})\\
(x_{a_2}-x_{a_3})&\cdots\cdots(x_{a_2}-x_{a_n})\\
&\vdots\\
&(x_{a_{n-1}}-x_{a_n})
\end{aligned}
$$

此乘積與P_E至多衹能有符號上之不同,而因P_E經過一次對調後,即改變符號,故可知:

倘A為偶錯列,則P_A與P_E之符號相同,倘A為奇錯列,則P_A與P_E之符號即相異.

§50. 錯列之結合

1. n個元素之錯列,雖非數量,但亦可將運算方法施用於此,俾吾人可用數學方法研究之.此項運算法,與尋常算術上所用者固多相似,但主要處則殊不相同.以其在代數學上極關重要,又極簡易,且為吾人所自由創造,殊堪尋味,故先於此略論之.

2. 如欲由n個元素之主要錯列

$$E=1\,2\,3\cdots\cdots n$$

以獲得一其他錯列

$$A=a_1\,a_2\,a_3\cdots\cdots a_n,$$

則須將1易為a_1, 2易為a_2, ……, n易為a_n.此種方法,謂之置換(Substitution),為醒目計,吾人可將所置換之元素各對照列出之如下:

$$(1)\qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots\cdots n\\ a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ a_\alpha\end{pmatrix},$$

於此,α按1, 2, 3, ……, n諸數之自然的順序取其值.

此置換亦可用一字母以表之,例如$\mathfrak{A}$,並稱(1)為置換$\mathfrak{A}$.用此置換$\mathfrak{A}$時,吾人可由主要錯列E以獲得錯列A.

此處所論,在用某元素以代某元素,故由原來之元素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 轉至於新元素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 時,無論先將 1 易爲 a_1,然後將 2 易爲 a_2,或先將 2 易爲 a_2,然後將 1 易爲 a_1,其結果均同,因而置換 $\mathfrak{A}$ 亦可如次寫出之:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \cdots\cdots n \\ a_2 & a_1 & a_3 \cdots\cdots a_n \end{pmatrix}.$$

廣之,吾人不妨將上下對列之各對數字任意變更其順序,此符號之意義,不致因此而有所改變.

今由 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 內任取一元素 b,則經置換 $\mathfrak{A}$ 後,此元素即易成爲 a_b,故如

$$B = b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots b_n$$

爲任意一錯列,則 $\mathfrak{A}$ 亦可作

(2) $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \cdots\cdots & a_{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha \\ a_{b_\alpha} \end{pmatrix}$$

如是,吾人可云,吾人已將置換 $\mathfrak{A}$ 施於錯列 B. 惟置換 $\mathfrak{A}$ 與錯列 A 間,係有特別關係者,因 A 係經 $\mathfrak{A}$ 得自 E 者也.

3. 設有 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 二置換,則可先後施行之,其法可先用 $\mathfrak{A}$ 由主要錯列以得錯列 A,再將 $\mathfrak{B}$ 施於 A 上.吾人可如下將其表出之:

(3) $$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots & b_{a_n} \end{pmatrix}$$

如是,即得一新錯列

(4) $$M = b_{a_1}\ b_{a_2} \cdots\cdots b_{a_n}.$$

但此錯列亦可經一次置換$\mathfrak{M}$由主要錯列以得之,故有

(5) $$\mathfrak{M}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$$

或

(6) $$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n\\ b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots & b_{a_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots & b_{a_n}\end{pmatrix}$$

按此,吾人已有一確定的方法,可由二置換以得一第三置換,此亦即爲置換範圍内之運算方法.以上雖將其用乘之形式寫出之,但自與乘法不相同.此項置換間之運算法,可以結合稱之.

倘不用置換,則亦可將此法施於錯列,得

(7) $$M=AB,$$

爲由A與B二者所結合成之錯列.

試以$n=4$爲例,設

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad \mathfrak{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

則 $$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

但 $$\mathfrak{B}\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

從可知在結合方面,交易律不能普通適用.

將與之相當的錯列

$$A=1\ 3\ 4\ 2,\qquad B=3\ 2\ 1\ 4$$

結合之,得

$$AB=3\ 1\ 4\ 2,\quad BA=4\ 3\ 1\ 2.$$

將結合法用於置換或用於錯列,其作用相同,故二者間

以後可不再加以分別,用及 $A, B, C, \cdots\cdots$ 時,視之爲錯列或視之爲置換,均無不可.

4. 此種結合法,可重複的爲之.今設 C 爲另一錯列,則可將 C 與 $M=AB$ 結合,卽求 $(AB)C$. 但此與 $A(BC)$ 相同,故在結合方面,可適用聯結律.

欲證知此律之適用,吾人祇須按 **3.** 內之法施行各個之結合,卽不難明白其正確矣.

試設

$$A=a_1a_2\cdots\cdots a_n,\quad B=b_1b_2\cdots\cdots b_n,\quad C=c_1c_2\cdots\cdots c_n,$$

則
$$(AB)C=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ c_1 & c_2 & \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{a_1} & b_{a_2} & \cdots\cdots\\ c_{ba_1} & c_{ba_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ c_{ba_1} & c_{ba_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}.$$

他方面,
$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ c_{b_1} & c_{b_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots\cdots\\ c_{ba_1} & c_{ba_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots\\ c_{ba_1} & c_{ba_2} & \cdots\cdots\end{pmatrix},$$

故
$$(AB)C=A(BC),$$

是卽聯結定律也.如是,吾人不妨將記法中之括號略去,用 ABC 表 A, B, C 三者(在此次序下)所結合成之錯列.仿

此,吾人並可將任何多之錯列結合之,其中亦不妨有相同者.

5. 錯列 A 與主要錯列相結合時,不受影響,無論其順序如何,均無關係,是即

(8) $$EA=AE=A.$$

此理不難直接由(6)知之.從可知在結合方面,E之地位與乘法方面之單位相同,因而數錯列相結合時,其中如有主要錯列,則不妨棄去之.

6. 一個錯列 A 亦可與本身作幾次之結合,並可按乘方之形式將其結果如下記之:

$$A=A^1,\ AA=A^2,\ AAA=A^3,\ \cdots\cdots$$

在此項乘方方面,因聯結定律可以適用,故數目乘方上之關係,亦仍可用,因而有

(9) $$A^{\mu}A^{\nu}=A^{\mu+\nu},$$

於此,μ 及 ν 均為整正數,$A^{\mu}A^{\nu}$ 表 A^{μ} 與 A^{ν} 之結合.倘設

$$A^0=E,$$

則此式於 $\mu=0$ 及 $\nu=0$ 時亦仍適用;因 E 與數目1相似,正不妨如是假定之也.

7. 對於每一錯列 A,有一錯列 A',亦僅有此錯列 A',能適合如次之條件

(10) $$AA'=E.$$

蓋如 $AB=E$,則按3.,必有

$$b_{a_1}=1,\ b_{a_2}=2,\ \cdots\cdots$$

因 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 與 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 在某種排列下係相同者,故 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 已不二的被決定.

錯列 A' 名爲與 A 相反或對 A 爲倒之錯列.

與相反的錯列相當者,爲相反的置換. 對於

$$A=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n\end{pmatrix}$$

一置換爲倒之置換,係 $A'=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n\\ 1 & 2 & \cdots\cdots & n\end{pmatrix}$.

8. 倒錯列之倒錯列仍爲原來之錯列.

由 $AA'=E$, 得 $A'AA'=A'E=A'$. 今設 A'' 與 A' 相反,卽 $A'A''=E$, 則 $A'AA'A''=A'A''=E$, 故於此方程內將第一端之 $A'A''$ 易以 E 時,卽有

$$A'A=E,$$

是卽 A 與 A' 相倒,如所欲證者. 吾人倘仍將 E 視爲單位,則可將 A' 視爲 A 之 (-1) 次方,設 $A'=A^{-1}$. 於是有

(11) $$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

9. 於是吾人並可有負指數之乘方,蓋於方程(9)中設 $\mu=-\nu$ 時,可得

$$A^{-\nu}A^{\nu}=E,$$

因而 $A^{-\nu}$ 與 A^{ν} 爲相倒者,而(9)並可推及於負的 μ 及 ν.

10. 用倒錯列之概念,尙可於錯列範圍內,別闢一新運算法,與除法相似者,蓋如

$$AB=C$$