

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 24

Durch starkes Denken kann
man ein Kamel zu Fall
bringen.

Ibn Sina

Basiswechsel

Wir wissen bereits, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum je zwei Basen die gleiche Länge haben, also die gleiche Anzahl von Basisvektoren besitzen. Jeder Vektor besitzt bezüglich einer jeden Basis eindeutig bestimmte Koordinaten (oder Koeffizienten). Wie verhalten sich diese Koordinaten zu zwei Basen untereinander? Dies beantwortet die folgende Aussage.

LEMMA 24.1. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum der Dimension n . Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \dots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \dots, w_n$ zwei Basen von V . Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} w_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$ -Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor u , der bezüglich der Basis \mathfrak{v} die Ko-

ordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ besitzt, bezüglich der Basis \mathfrak{w} die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$u = \sum_{j=1}^n s_j v_j = \sum_{j=1}^n s_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_j c_{ij} \right) w_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. \square

Die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$, die den Basiswechsel von \mathfrak{v} nach \mathfrak{w} beschreibt, nennt man auch die *Transformationsmatrix* (oder *Übergangsmatrix*). In der j -ten Spalte der Transformationsmatrix stehen also die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis \mathfrak{w} . Wenn man zu einer Basis \mathfrak{v} und einem Vektor $u \in V$ das zugehörige Koordinatentupel mit $\Psi_{\mathfrak{v}}(u)$ bezeichnet, so kann man den Übergang kurz als

$$\Psi_{\mathfrak{w}}(u) = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\Psi_{\mathfrak{v}}(u))$$

schreiben.

BEISPIEL 24.2. Wir betrachten im \mathbb{R}^2 die Standardbasis

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren von \mathfrak{v} lassen sich direkt mit der Standardbasis ausdrücken, nämlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man sofort

$$M_{\mathbf{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel hat der Vektor, der bezüglich \mathfrak{v} die Koordinaten $(4, -3)$ besitzt, bezüglich der Standardbasis \mathbf{u} die Koordinaten

$$M_{\mathbf{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathbf{u}}$ ist schwieriger zu bestimmen: Dazu müssen wir die Standardvektoren als Linearkombinationen von v_1 und v_2 ausdrücken. Eine direkte Rechnung (dahinter steckt das simultane Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Lineare Abbildungen

DEFINITION 24.3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K . Eine Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
- (2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K -Linearität. Die Identität $\text{Id}_V: V \rightarrow V$, die Nullabbildung $V \rightarrow 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

BEISPIEL 24.4. Es sei K ein Körper und sei K^n der n -dimensionale Standardraum. Dann ist die i -te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \longmapsto x_i,$$

eine K -lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i -te Projektion heißt auch die i -te *Koordinatenfunktion*.

LEMMA 24.5. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K . Es seien*

$$\varphi: U \longrightarrow V \text{ und } \psi: V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi: U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.16. □

LEMMA 24.6. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.17. □

Festlegung auf einer Basis

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

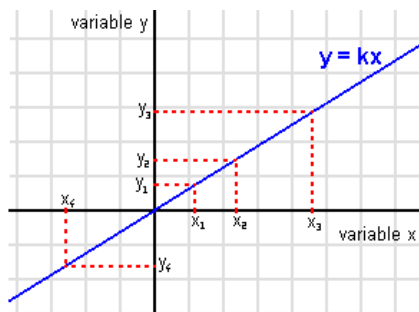
SATZ 24.7. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K . Es sei $v_i, i \in I$, eine endliche Basis von V und es seien $w_i, i \in I$, Elemente in W . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f: V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □



Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

BEISPIEL 24.8. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K . Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi: K \longrightarrow K, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 24.7 bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(t)$ für ein einziges $t \in K, t \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz“ auf.

Lineare Abbildungen und Matrizen



Die Wirkungsweise von verschiedenen linearen Abbildungen des \mathbb{R}^2 in sich, dargestellt an einer Gehirnzelle.

Eine lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

ist nach Satz 24.7 durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \dots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, aus dem Körper festgelegt. Einen solchen Datensatz kann man wieder als eine Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

DEFINITION 24.9. Es sei K ein Körper und sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und sei W ein m -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$ -Matrix

$$M = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i -te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis \mathbf{w} ist, die *beschreibende Matrix* zu φ bezüglich der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 24.7 definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(M)$ die *durch M festgelegte lineare Abbildung*.

Bei einer linearen Abbildung $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ wird, wenn nichts anderes gesagt wird, auf die Standardbasen Bezug genommen. Bei einer linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ eines Vektorraumes in sich selbst, was man einen *Endomorphismus* nennt, nimmt man häufig vorne und hinten die gleiche Basis. Die Identität auf einem Vektorraum der Dimension n wird bezüglich einer beliebigen Basis durch die Einheitsmatrix beschrieben.

SATZ 24.10. *Es sei K ein Körper und sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und sei W ein m -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_m$. Dann sind die in Definition 24.9 festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

BEISPIEL 24.11. Eine lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^m$$

wird zumeist durch die Matrix M bezüglich der Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j -te Spalte von M ist das Bild des j -ten Standardvektors e_j .

Drehungen

Eine Drehung der reellen Ebene \mathbb{R}^2 um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ ab. Daher werden ebene Drehungen folgendermaßen beschrieben.

DEFINITION 24.12. Eine lineare Abbildung

$$D(\alpha): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine *Drehmatrix* $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$) bezüglich der Standardbasis gegeben ist, heißt *Drehung*.

Eine *Raumdrehung* ist eine lineare Abbildung des \mathbb{R}^3 in sich, bei der um eine Drehachse (durch den Nullpunkt) um einen bestimmten Winkel gedreht wird. Wenn der Vektor $v_1 \neq 0$ die Drehachse definiert und u_2 und u_3 auf v_1 und aufeinander senkrecht stehen, so wird die Drehung bezüglich der Basis v_1, u_2, u_3 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Der Kern einer linearen Abbildungen

DEFINITION 24.13. Es sei K ein Körper, V und W seien K -Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

sei eine K -lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\text{kern } \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ .

Der Kern ist ein Untervektorraum von V .

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

LEMMA 24.14. *Es sei K ein Körper, V und W seien K -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

sei eine K -lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn $\text{kern } \varphi = 0$ ist.

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$. Sei umgekehrt $\text{kern } \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Variables proporcionals.png , Autor = Benutzer Coronellian
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4
- Quelle = Some linear maps kpv without eigenspaces.svg , Autor =
Benutzer Dividuum auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9