Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

AUFGABE 8.1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $(c \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)$$

ist.

AUFGABE 8.2.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

ist.

AUFGABE 8.3. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen. Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

AUFGABE 8.4. Es sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

AUFGABE 8.5.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit dem Startwert $y_0 = 1$.

(1) Berechne x_1 und x_2.
(2) Berechne y_1 und y_2.
(3) Berechne $x_0 \cdot y_0$, $x_1 \cdot y_1$ und $x_2 \cdot y_2$.
(4) Konvergiert die Produktfolge $z_n = x_n \cdot y_n$ innerhalb der rationalen Zahlen?

AUFGABE 8.6.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

AUFGABE 8.7. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{6n^3 + 3n^2 - 4n + 5}{7n^3 - 6n^2 - 2}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 8.8. Es seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 8.9. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

AUFGABE 8.10. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

AUFGABE 8.11.*

Zu jeder natürlichen Zahl k sei eine Nullfolge y_k gegeben, das n-te Folgenglied der k-ten Folge sei mit y_{kn} bezeichnet. Ist die Folge z_n, deren n-tes Folgenglied durch

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} y_{kn}$$

gegeben ist, ebenfalls eine Nullfolge?

Kann man in der vorstehenden Aufgabe Lemma 8.1 (1) anwenden?

Aufgabe 8.12.*

Zu jeder natürlichen Zahl k sei eine Nullfolge y_k gegeben, das n-te Folgenglied der k-ten Folge sei mit y_{kn} bezeichnet. Ist die Folge z_n, deren n-tes Folgenglied durch

$$z_n = \prod_{k=1}^{n} y_{kn}$$

gegeben ist, ebenfalls eine Nullfolge?

Kann man in der vorstehenden Aufgabe Lemma 8.1 (3) anwenden?

Aufgabe 8.13. Diskutiere das *Cauchyprinzip der Approximation*: Wenn sich bei einem Approximationsverfahren die Approximationen nicht mehr spürbar verbessern, obwohl man den Aufwand ständig erhöht, so liegt das vermutlich daran, dass man der Wahrheit sehr nahe ist. Betrachte mathematische und nichtmathematische Beispiele und Gegenbeispiele.

Aufgabe 8.14. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 8.15.*

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Aufgabe 8.16. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

Aufgabe 8.17. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 8.18.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 8.19.*

Es sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

(mit $n \in \mathbb{N}_+$).

(1) Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
(2) Zeige, dass sämtliche Folgenglieder ≥ 1 sind.
(3) Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 8.20.*

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 8.21. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 8.22.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

derart an, dass $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$ aus einem einzigen Punkt besteht, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Aufgabe 8.23.*

Zeige unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

wachsend ist.

Mit einem ähnlichen Argument kann man zeigen, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ fallend ist und dass durch $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ eine Intervallschachtelung gegeben ist. Die dadurch festgelegte reelle Zahl ist die eulersche Zahl e. Wir werden im Laufe des Kurses noch eine weitere Beschreibung für diese Zahl kennenlernen.

Aufgabe 8.24. Es sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge x^n, $n \in \mathbb{N}$, bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 8.25. Es sei x eine reelle Zahl mit $|x| < 1$. Zeige, dass die Folge $x_n := x^n$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.26. Man gebe ein Beispiel einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 8.27. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 8.28. Zeige, dass die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞ ist.

Aufgabe 8.29. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.30. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Aufgabe 8.31. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 8.32. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,

(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 8.33. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8.34. (5 Punkte)

Untersuche die durch

$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 8.35. (4 Punkte)

Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 8.36. (4 Punkte)

Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Abbildungsverzeichnis