大學叢書

測量平差法

陳永齡
夏堅白 著
王之卓

商務印書館發行

大學叢書

測量平差法

陳永齡
夏堅白 著
王之卓

商務印書館發行

著 者 序

二十八年秋，著者三人同在昆明，分別任教於同濟大學，西南聯大及中山大學。教學之際，深感國內關於測量課本及參考書籍之缺乏，學者苦之，乃有編輯測量學叢書之決心，而以測量平差法一書爲始。

觀測不能無誤差，此乃盡人皆知之事實，然如何配敷此等誤差，始能獲得最爲合理之結果，乃爲測量學中最基本之問題。解決此種問題之方法，卽名爲測量平差。測量平差之原理係以最小二乘法爲依據。本書所論，因僅限於最小二乘法在解算各種測量問題時之應用，故標以“測量平差法”以期名副其實。

本書編輯之初，首先整理名詞，審訂中譯，歷時半載；繼乃分別起稿，交換修改，研究增損，共歷二載，始告厥成。內容材料之選擇，以適作大學測量系課本爲原則，對於晚近各國採用之較新方法，俱爲詳加闡述，並輔以計算實例，俾使讀者易於領悟。大學土木系採用本書爲“最小二乘法”一科之課本時，若將書中敍述較詳之處，酌加減縮，亦能適用。全書共分十二章，前六章爲基本理論之闡述，後六章則分論各種測量平差問題之計算方法，并舉實測之例以解釋之，足爲各種實用之參考。

著者於編校之際，雖已盡精詳審愼之能事，然遺誤之處，在所難免，尙祈國內賢者，不吝賜教是幸！

三十二年四月

目　次

測量平差法

（最小二乘法）

第一章　誤差分佈定律與最小二乘法之原理

第一節　多餘觀測

觀測時，不論量距離或角度，向同一對象繼續觀測二次以上，則各讀數間定有差異，蓋當時之環境儀器及觀測者之經驗，在在均有影響，致使觀測值與其應得之眞值不符。欲求觀測結果良好，必須謹慎從事。儀器應於工作之前加以校正。環境之變化，更須隨時注意。如在高塔測角而遇颶風，應即停止；空氣溫度突變，觀測亦不宜繼續舉行。舉凡環境變化之擾動，雖屬不易控制，然若能採用適當方法，未嘗不能消除其一部份之影響，使其所發生之誤差，臻於至小。

至觀測者之本身，則在實施工作以前，除注意儀器及環境外，本身之情緒亦不可忽視。工作旣經開始，每一次觀測，不宜繼續過久，俾免疲乏。經驗豐富之觀測者，均能注意及之，故其對於所得之結果有深切之自信。

觀測旣不能免於誤差，爲求結果精密可靠，吾人常用兩法：一爲重複觀測，以視結果是否有誤；譬如欲求某距離之長度，必以測尺往返量之，視其相互差異之是否過大而平均之。如此則所得之結果可較精確，而觀測者且可從而斷判其量測之可靠與否。二爲利用數學關係，以驗核其觀測之結果。例如一三角形之形狀可由兩角度完全確定之，但爲免於誤差起見，常將第三角度同時測出，則三角之和必爲 180°，倘所測結果能完全滿足此條件，或在可能精度之內與此數學條件符合，即可證明所測角度之值已屬精密可靠；否則必有重大誤差存於其間。無論複測或利用數學關係，吾人均須量測較必需更多之值，此種情形，名之曰多餘觀測。

第二節　誤差種類

凡有多餘觀測之時，所得之値，常不能符合無間，蓋因觀測誤差不能完全避免之故也。然誤差之種類甚多，有爲人力所能設法避免者，有非人力所能控制者，亦有爲環境所造成者。普通常按其性質分爲下例各種：

（1）錯誤　錯誤之來源由於觀測者或記錄者之疏忽，如讀測尺而少記一整數或誤記分數爲角度之類。在實際工作時除小心從事外，通常均注意於方法與儀器之選擇，使錯誤不易發生，或使易於發覺之。

（2）系統誤差　此種誤差，對於觀測結果常有同一方向之影響，譬如以測尺量某線之長而測尺之一端落於線外，則不論其位置之或左或右，由此種誤差之結果，將使所量得之値均形過長。又如測尺本身之長度有差，則每用此測尺量一距離，結果必生同樣大小之誤差。兩者俱爲系統誤差，但後者則每段距離所發生之誤差影響相同，故又稱之爲常誤差。系統誤差影響結果至鉅，凡足以發生系統誤差者，應儘量使之臻於至小。常誤差多爲儀器方面之誤差，其影響往往易於計算，或用其他方法避免之。

（3）偶然誤差　偶然誤差，亦有名之曰不規則誤差者，其形成之原因，大半由於儀器構造上之限制，環境之影響及人類覺官所不能免之錯誤，例如以刻至公厘之測尺量一距離，則最多僅能估至 1/10 公厘，而人類覺官對於估計常不能絕對正確，故每次估計未必盡能相同，此種誤差卽爲偶然誤差。如用人工方法，或增加儀器之精度，或改良讀數之設備，此種誤差可以減小至某種程度，但無法完全消除；且其影響可正可負，初無規律，此其與錯誤及系統誤差不同之處也。

第三節　偶然誤差之或是率

或是率之理論及算法爲數學之一部，不擬在此詳論。爲應用計，僅將其要旨簡述如下：

或是率計算乃對偶然事件發生之可能性作預計之法也。所謂偶然事件者，卽該事件之是否發生，不能於事先依據任何原則作確定之結論。最淺近之例，如購獎劵者對於其所購獎劵之能否得中，不能依據任何原則於事先推知，故其所購獎劵如適中獎，卽爲偶然事件；但其中獎之可能性，則可以按照或是率之定理計算求之。

一事件發生之或是率爲該事件能發生情形之數目與所有可能情形數目之比例。設有獎券共售出一萬號，而頭獎僅有一個，今有一人購得獎券一張，若問其中頭獎之或是率爲若干，則依前述定義，能發生之情形僅有一個，卽當搖出頭獎號數適與其所購之號數相符之時也；但搖獎之時，所有一萬號碼俱有搖出之可能，故所有可能之情形共有一萬個，據此則該號中頭獎之或是率爲萬分之一。

或是率如以數學方法表示之，則永遠爲一分數。最大時爲 1，卽該事件必能發生；最小時爲 0，卽該事件決無發生之可能。

前所舉奬券之例，乃極明顯者。然有時不如此明顯之偶然事件亦能以數學方法表示其或是率。其法雖較繁難，而其理則並無二致。觀測時之偶然誤差卽屬此類。偶然誤差之性質，已於第一章第二節詳論，其發生之原因不能確定，其大小更不能循任何方法預爲測定，故其出現，純係偶然之事，亦必合於或是率計算之原則無疑。

誤差定律卽以或是率爲根據，用數學方法表示誤差分佈之定律，首由高斯引證得出。高斯根據此定律❶，始創最小二乘法，以爲平差之用。

偶然誤差初無規律，既如前述，然則何以又能求出其所謂誤差定律？蓋前所云者，乃指某一次之觀測而言，其偶然誤差之發生，初無規律，不能預知。若觀測之次數增加，至於無窮次，每次觀測均使處於同一環境，則所有偶然誤差大小之分佈，卽有定則，此定則係根據於無窮次之觀測數目而導出。事實上固不能作無窮多次之觀測，但依數學原理，如觀測次數漸漸增多，則其結果必愈近於無窮多次。故吾人求誤差定律亦能以較多次數之觀測爲根據。

今試先就某一誤差出現之或是率討論之。依偶然誤差之定義，吾人可知：

(1)同樣大小之正誤差與負誤差，其出現之或是率必相等。

(2)較小誤差之或是率，必高於較大誤差之或是率。

(3)誤差等於零之或是率應爲最大。

上述三特性雖不能用純數學方法作絕對之引證，然依常理之推測及實際之經驗，對於其必然性，均可加以承認。最要者，卽所謂誤差係指純粹

❶高斯於 1794 年求出定律，但於 1809 年始發表。

偶然誤差而言。如有系統誤差在內，則此三特性自不復存在，故吾人亦可用此三特性爲原則，以決定一組誤差之是否爲純粹偶然誤差。

根據上述之三特性或原則，可知一誤差之或是率與其誤差之大小有關。或以數學方法表示之，如一誤差之值爲 ε，則此誤差出現之或是率必爲 ε 之函數。今設以 $f(\varepsilon)$ 表示一誤差發生於 0 與 ε 間之或是率，則一誤差發生於 ε 與 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率必爲：

$$W=f(\varepsilon+d\varepsilon)-f(\varepsilon)=f'(\varepsilon)d\varepsilon=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

因 $d\varepsilon$ 爲一極小之值，故 W 卽代表誤差出現於 ε 與 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率。此函數 $\varphi(\varepsilon)$ 卽謂爲誤差分佈定律，或簡稱爲誤差定律。

一誤差發生於任意兩界數 a 及 b 之間之或是率可以

$$W_a^b=\int_a^b\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

表示之。若 a 及 d 兩界數爲 $-\infty$ 與 $+\infty$，則其或是率必爲 1，因誤差之值必在 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間也。故：

$$W_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=1.$$

欲求此誤差定律，必須作相當之假定。高斯求出此誤差定律時，假定多次觀測結果之數學平均值最近於其眞值。觀測之次數逐漸增加，則其算學平均值卽漸近乎眞值。此外尙有根據不同之假定，求出此同一定律。其最著者爲哈根原子誤差之假定。玆將高斯及哈根引證之法分述於下。

第四節　根據算學平均值之假定以求誤差定律

設吾人量一長度，觀測次數爲 n，而精度相同，n 爲一甚大之數目。今欲由此 n 值求長度之最或是值，此 n 值均由同樣精度之觀測得來，勢不能偏袒任何一値，或放棄任何一値，故數學上最適宜之法乃求此 n 值之算學平均值，而承認此值爲長度之最或是值。若觀測次數 n 漸漸增多而至於無窮，則其算學平均值卽趨近於長度之眞值。現卽根據此假定以求誤差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 之公式。

設一組直接觀測之結果爲 $l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ \cdots\cdots l_n$，其眞值爲 X，則每次觀測之誤差爲：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=X-l_1\\ \varepsilon_2&=X-l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n&=X-l_n\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

今將各次觀測所生誤差 ε_1，ε_2，ε_3，………… ε_n 之或是率以 $\varphi(\varepsilon_1)$，$\varphi(\varepsilon_2)$，$\varphi(\varepsilon_3)$，………… $\varphi(\varepsilon_n)$ 表示之，則按或是率之定律，所有 n 個誤差 ε_1，ε_2，ε_3，………… ε_n 同時出現之或是率，爲各個誤差或是率之乘積，卽：

$$\varphi(\varepsilon_1)\cdot\varphi(\varepsilon_2)\cdot\varphi(\varepsilon_3)\cdots\cdots\varphi(\varepsilon_n).\tag{2}$$

倘 X 爲眞值，則此組誤差同時出現之或是率必應爲最大。茲爲演化之便利計，先化 (2) 爲自然對數式，其關係如下：

$$\log\varphi(\varepsilon_1)+\log\varphi(\varepsilon_2)+\cdots\cdots+\log\varphi(\varepsilon_n)=\text{最大值。}\tag{3}$$

又因 ε_1，ε_2 ……等諸值與 X 值有關係（見❶），故如將(3)依 X 求微分，而使其結果等於零，俾符合(3)爲最大值之條件時，得：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\cdot\frac{d\varepsilon_1}{dX}+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\cdot\frac{d\varepsilon_2}{dX}+\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}\cdot\frac{d\varepsilon_n}{dX}=0\tag{4}$$

由(1)得：

$$\frac{d\varepsilon_1}{dX}=\frac{d\varepsilon_2}{dX}=\cdots\cdots\cdots=\frac{d\varepsilon_n}{dX}=1,$$

故(4)可寫爲：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}=0,$$

亦可作下列寫法：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 d\varepsilon_1}\varepsilon_1+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 d\varepsilon_2}\varepsilon_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n d\varepsilon_n}\varepsilon_n=0.\tag{5}$$

以上係就誤差出現之或是率求出眞誤差 ε_1，ε_2，ε_3，………… ε_n 間之關係。假定觀測值 l_1，l_2，l_3，……… l_n 之算學平均值 x 爲最或是值，且當

n 爲無窮大時，x 趨近於眞値，或用數學公式表示之：

$$x=\frac{[l]}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{❶}X, \tag{6}$$

則(1)内之 X 亦可於此情形下代以算學平均值 x，更將(1)內各式相加得：

$$[\varepsilon]=nx-[l]. \tag{7}$$

聯合（6）（7）兩式，卽得下列之關係：

$$[\varepsilon]=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\cdots\cdots+\varepsilon_n=0 \tag{8}$$

（5）及（8）俱可表示眞誤差 ε_1，ε_2，ε_3，………ε_n間之關係，在任何情形之下，兩者均須完全相符，是以(5)內所有 ε_1，ε_2……等之係數，必須相等，因得：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\epsilon d\epsilon_1}=\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\epsilon d\epsilon_2}=\cdots\cdots\cdots=\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\epsilon d\epsilon_n}=k.$$

k 爲一常數。如對任意一誤差 ϵ 而言，必須

$$\frac{d\log\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}=k\epsilon。 \tag{9}$$

由此條件卽可求得誤差定律 $\varphi(\epsilon)$ 之形式。求(9)之積分，得

$$\log\varphi(\varepsilon)=\frac{1}{2}k\epsilon^2+c,$$

c 爲積分常數，將對數展開，以 e 爲自然對數之底，則

$$\varphi(\varepsilon)=e^c\cdot e^{\frac{1}{2}k\varepsilon^2}。 \tag{10}$$

由此巳可知一誤差或是率之數學表示。其中 k，c 等常數，尙待決定。

根據本章第三節所述之偶然誤差三原則，較小誤差之或是率，必高於較大誤差之或是率。故(10)中之 k 必爲一負數，今以

$$\frac{1}{2}k=-h^2$$

❶ [ ] 表示和數。

表示之,同時令

$$e^{c}=A,$$

A 為一新常數,則(10)即變為

$$\varphi(\epsilon)=Ae^{-h^2\epsilon^2}. \tag{11}$$

常數 A 之值可依本章第三節所論:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\epsilon)\,d\epsilon=1$$

之關係求之,即

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\epsilon^2}\,d\epsilon=1. \tag{12}$$

欲解此定值積分式,吾人設

$$t=h\epsilon,\qquad dt=hd\epsilon,$$

以之代入(12),得

$$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=1.$$

由積分可求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,,$$ [1]

故

$$A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

代入(11),即得誤差定律之公式

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{13}$$

此誤差定律有時亦稱為高斯誤差定律。高斯導出時即用上述之方法。

第五節 根據原子誤差之假定以求誤差定律

哈根[2] 假定每個偶然誤差均係由多數極小之原子誤差所組合而成。

---

[1] 設此定積分之值為 I,則 I^2 亦可書為 $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$. 此乃一旋轉曲面 $Z=e^{-(x^2+y^2)}$ 與 xy 平面間之體積也. 此體積以極坐標表示之,則得 $I^2=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr=\pi$,故 $I=\sqrt{\pi}$.

[2] Hagen: Die Grunnzuge der Wahrscheinlich Keitrechnung. Berlin, 1837.

此種原子誤差彼此均相等，但其符號可正可負。此種假定初視之似覺不甚合理，因原子誤差缺少零値，然若細究原子誤差之各種組合，卽可知零値之誤差亦可出現。如有原子誤差兩個，其値爲 δ，則其正負各種組合已含零値二個，$+2\delta$ 及 -2δ 各一個。如原子誤差之數目增多，則偶然誤差之分佈逐漸合理。表一表示一個乃至六個原子誤差，按所有正負組合構成觀測誤差時，各種誤差之出現次數。

表一　各種誤差之出現次數

n	-6δ	-5δ	-4δ	-3δ	-2δ	$-\delta$	0	$+\delta$	$+2\delta$	$+3\delta$	$+4\delta$	$+5\delta$	$+6\delta$
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

表一所列誤差出現之次數，相當於二項式之係數，故宜由下列開展式求之：

$$(t^{+\delta}+t^{-\delta})^n = t^{n\delta} + (n)_1 t^{(n-2)\delta} + \cdots + (n)_i t^{(n-2i)\delta} + \cdots$$

如一誤差 ε_i 之大小爲 $(n-2i)\delta$，則其出現之次數卽爲式中以 $(n-2i)\delta$ 爲指數一項之係數，卽 $(n)_i$。其中 δ 代表原子誤差，n 代表原子誤差之數目，如所有誤差之總數目——卽全體觀測次數——爲 N，則依或是率定義，誤差 ε_i 之或是率 $\varphi(\varepsilon_i)$ 爲

$$\varphi(\varepsilon_i) = \frac{(n)_i}{N}, \tag{14}$$

同理可得

$$\varphi(\varepsilon_{i+1}) = \frac{(n)_{i+1}}{N}, \tag{15}$$

式中 $\varepsilon_{i+1} = (n-2i-2)\delta$.

由二項式定理：

$$(n)_{i+1} = (n)_i \frac{n-i}{i+1}.$$

故由(15)減去(14)卽得所有 ε_{i+1} 與 ε_i 之間誤差出現之或是率，亦卽代表或是率之變遷 $\Delta\varphi(\varepsilon)$：

$$\Delta\varphi(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon_{i+1})-\varphi(\varepsilon_i)=\frac{(n)_i}{N}\cdot\frac{n-2i-1}{i+1}. \tag{16}$$

今再命

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}}{2}=(n-2i-1)\delta,\Delta\varepsilon=\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i=-2\delta,$$

則

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(\varepsilon_i)+\varphi(\varepsilon_{i+1})\right\}=\frac{(n)_i}{N}\cdot\frac{n+1}{2(i+1)}. \tag{17}$$

以(17)除(16)，則得

$$\frac{\Delta\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}=\frac{2(n-2i-1)}{n+1}=-\frac{\varepsilon\Delta\varepsilon}{(n+1)\delta^2}. \tag{18}$$

如原子誤差 δ 之值爲極小，而其數目 n 爲無窮大，則 $\Delta\varphi(\varepsilon)$ 及 $\Delta\varepsilon$ 可寫成微分式，$(n+1)\delta^2$ 爲一不定數，命之爲 $\frac{1}{2h^2}$，(18)卽變爲

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}=-2h^2\varepsilon d\varepsilon.$$

積分之，卽得誤差定律：

$$\varphi(\varepsilon)=Ae^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{19}$$

A 爲積分常數，其值已於前節中求出，等於 $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

由以上之導出，可見依哈根之假定，如原子誤差之數目爲 ∞，則可得與高斯完全相同之誤差定律。但亦可證明，雖 n 之數目較小，根據原子誤差所得之公式，亦與高斯之誤差定律相差甚微。例如 $n=6$ 時，若按高斯誤差定律計算，因 $\frac{1}{2h^2}=(n+1)\delta^2$,

則

$$h^2=\frac{1}{14\delta^2}, \qquad A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\delta\sqrt{14\pi}}.$$

令 $\varepsilon=0$，$\pm2\delta$，$\pm4\delta$，……代入(19)，而計算或是率

$$W=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon, \qquad (d\varepsilon=-2\delta),$$

則得

$\varepsilon=0$		$\pm 2\delta$	$\pm 4\delta$	$\pm 6\delta$	$\pm 8\delta$
$W=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=0.302$		0.227	0.096	0.023	0.004

若完全按哈根之假定，由六個原子誤差之各種組合數目計算之，則可由表一內查出誤差之出現次數。因誤差總數 $N=64$， $W=\frac{(n)}{N}$，故

$\varepsilon=0$	$\pm 2\delta$	$\pm 4\delta$	$\pm 6\delta$	$\pm 8\delta$
$W=0.313$	0.234	0.094	0.016	0

與按高斯誤差定律所求出之値相差固極微也。

第六節　誤差或是率函數之展開

由前兩節之結果，已知偶然誤差分佈之定律爲：

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{20}$$

$\varphi(\varepsilon)$爲誤差 ε 出現之或是率，h 爲一常數，高斯名之曰"精準率"，因 h 之値隨觀測之精度而異也。玆設有一量，用兩種精度不等之方法觀測之，則在觀測較精準之一組中，其誤差等於零値之或是率，定較觀測欠精準之另一組爲大。今試令公式(20)內之 $\varepsilon=0$，則得

$$\varphi(0)=\frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

卽誤差等於零之或是率與 h 成正比例。易言之，如 h 之値大，則誤差等於零之或是率大，亦卽表示觀測較爲精準。

根據此誤差定律，則一次觀測之誤差，出現於任意兩界數 a 及 b 間之或是率爲

$$W_a^b=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{21}$$

今令 $t=h\varepsilon$ 代入(21)，則 $dt=hd\varepsilon$，a 及 b 兩界數亦應變爲 $t=ah$ 及 $t=bh$，由此卽得

$$W_a^b=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t=ah}^{t=bh}e^{-t^2}dt.$$

此爲任意兩界數 a 及 b 之間之或是率。普通所需要者常爲界於 $-a$ 及 $+a$

間之或是率，亦可書爲

$$W_{-a}^{+a}=2W_0^a=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah}e^{-t^2}dt, \tag{22}$$

因 $\varphi(+\varepsilon)=\varphi(-\varepsilon)$ 也。

欲求此積分式之值，必須將其展爲級數。

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}+\cdots\cdots$$

$$\int e^{-t^2}dt=t-\frac{t^3}{3\cdot1!}+\frac{t^5}{5\cdot2!}-\frac{t^7}{7\cdot3!}+\frac{t^9}{9\cdot4!}-\cdots\cdots$$

$$\int_0^{ah}e^{-t^2}dt=ah-\frac{(ah)^3}{3\cdot1!}+\frac{(ah)^5}{5\cdot2!}-\frac{(ah)^7}{7\cdot3!}+\frac{(ah)^9}{9\cdot4!}\cdots\cdots$$

故

$$W_{-a}^{+a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(ah-\frac{(ah)^3}{3\cdot1!}+\frac{(ah)^5}{5\cdot2!}-\frac{(ah)^7}{7\cdot3!}+\frac{(ah)^9}{9\cdot4!}\cdots\cdots\right), \tag{23}$$

但此式僅能用於 ah 值較小時，否則此級數不能收斂。遇後者之情形時，可改用下列公式求之：

$$\int e^{-t^2}dt=\int-\frac{1}{2t}de^{-t^2}=-\frac{1}{2t}e^{-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2t}e^{-t^2}+\frac{1}{2^2t^3}e^{-t^2}+\frac{1\cdot3}{2^2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^4}dt.$$

如此繼續部分積分，即可求得下列級數：

$$\int e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\left\{1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1\cdot3}{(2t^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2t^2)^2}\cdots\cdots\right\}. \tag{24}$$

欲求定積分 $\int_0^{ah}e^{-t^2}dt$ 之值，可利用

$$\int_0^{ah}e^{-t^2}dt=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt-\int_{ah}^{\infty}e^{-t^2}dt$$

之關係。由(22)令 $a=\infty$，則因誤差介於$\pm\infty$之間之或是率爲 1，故

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由(24)得

$$\int_{ah}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-(ah)^2}}{2ah}\left\{1 - \frac{1}{2(ah)^2} + \frac{1\cdot3}{4(ah)^4} - \frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6} + \cdots\cdots\right\}$$

故

$$\int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-(ah)^2}}{2ah}\left\{1 - \frac{1}{2(ah)^2} + \frac{1\cdot3}{4(ah)^4} - \frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6} + \cdots\cdots\right\}$$

而

$$W_{-a}^{+a} = 1 - \frac{e^{-(ah)^2}}{\sqrt{\pi}\, ah}\left\{1 - \frac{1}{2(ah)^2} + \frac{1\cdot3}{4(ah)^4} - \frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6} + \cdots\cdots\right\} \quad (25)$$

根據(23)及(25)兩式，予 ah 以不同之值，可計算誤差出現於 $\pm a$ 之間之或是率。茲列表於下以明之。

表二　或是率函數之值

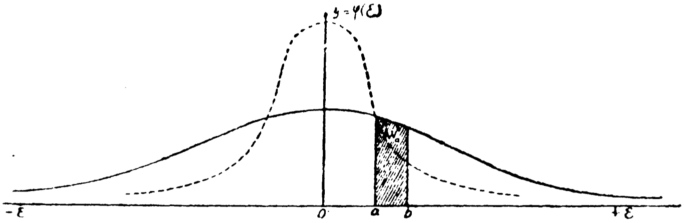
ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}
0.0	0.00000	1.0	0.84270	2.0	0.99532	3.0	0.9999779
0.1	0.11244	1.1	0.88020	2.1	0.99702	3.1	0.9999884
0.2	0.22270	1.2	0.91031	2.2	0.99814	3.2	0.9999940
0.3	0.32863	1.3	0.93401	2.3	0.99886	3.3	0.9999969
0.4	0.42839	1.4	0.95229	2.4	0.99931	3.4	0.9999985
0.47694	0.5						
0.5	0.52050	1.5	0.96611	2.5	0.99959	3.5	0.9999906
0.6	0.60386	1.6	0.97635	2.6	0.99976	3.6	0.9999996
0.7	0.67780	1.7	0.98379	2.7	0.99987	3.7	0.9999998
0.8	0.74210	1.8	0.98909	2.8	0.99992	3.8	0.9999999
0.9	0.79691	1.9	0.99279	2.9	0.99996	∞	1.0

上表中 $ah=0.47694$ 之值，應特別提出。此值正對或是率為 0.5 處。即當 $ah=0.47694$ 時，誤差在 $-a$ 與 $+a$ 間之或是率與在此界外之或是率適為相等。關於此點之意義以後將詳論之。

第七節　誤差分佈曲線

根據誤差定律，吾人可以誤差之大小為橫坐標，以誤差之或是率為縱

坐標，繪一曲線以表示誤差之分佈，此曲線謂之誤差分佈曲線，其形狀如圖一。



第一章　第一圖　誤差分佈曲線

此曲線與 y 軸對稱，當 ε 等於零時，其或是率 y 爲最大，ε 等於 $\pm\infty$ 時，或是率已趨於零。此曲線與 y 軸相交之處爲 $\varphi(0)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$，即誤差零之或是率。倘觀測之精度較高，則 h 大，$\varphi(0)$ 亦大，此曲線之形狀逐漸接近於 y 軸（見圖一之虛線），因曲線與 ε 軸間之面積代表所有誤差或是率之總和，即爲 1，故無論 h 等於何値，曲線與 ε 軸間之面積固應常相等也。

任意兩界數 a 及 b 之間誤差出現之或是率，可以 $\varepsilon=a$，$\varepsilon=b$ 兩縱線間曲線以下至 ε 軸之面積代表之，如圖一所示。

由實際經驗，倘觀測誤差純爲偶然性質，而觀測次數甚多時，則按照誤差大小及其數目所繪之曲線與按照誤差分佈定律所繪製者極爲相似，由是可證明高斯誤差分佈定律與實際情形相符合，其例詳於他節。

第八節　最小二乘法之理論

觀測旣不能免於誤差，故吾人永遠不能測得一量之絕對眞値；如有多餘觀測時，其每次觀測之値亦必不能盡等。欲於此不同之結果中求得其最可能之値，是爲平差問題；解算此種問題之方法名爲平差法。當各觀測値之誤差僅限於偶然誤差時，其平差率用最小二乘法。此法之理論係依偶然誤差之分佈定律所導出者，故其結果即爲由觀測所得之最或是値。

最小二乘法之發明，遠在 1794 年。發明者爲德人高斯(Gauss)，時年僅十七歲，正肄業於戈廷根大學中。發明之後，彼曾應用此法計算 Ceres 行星之軌道(1801)，但迄未爲文發表。迨 1806 年，法人勒戎德爾(Legendre)亦發明此法，並爲文論之，且名其法爲最小二乘法。高斯則繼續研究各方

面應用之問題，迄 1809 年，始作初次發表。此後尚有論文多篇，對於平差方法之理論及實際問題，供獻極多，故論最小二乘法之發明權者，雖多將高斯與勒戎德爾並列，但細查最小二乘法之歷史，則高氏之功獨偉也。

最小二乘法之原理爲：

"解算任意一平差問題時，在相等精度之觀測值上應加之改正數，其平方之和應爲最小。"

今以 v_1，v_2 ……等代表各相等精度觀測值上應加之改正數，則上述原理可以下式表示之：

$$[vv] = \text{最小值} \tag{26}$$

此原理之導出可依不同假定以得之。高斯之假定係以算學平均值爲最或是值。兹將其法述之於下：

設有一組同精度之直接觀測值爲 l_1，l_2，…… l_n，其算學平均值爲 x，則每個觀測值之改正數爲：

$$\begin{aligned} v_1 &= x - l_2 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\cdots\cdots \\ v_n &= x - l_n . \end{aligned}$$

如 x 爲最或是值，則此組改正數 v_1，v_2，…… v_n，必最近於眞誤差 ε_1，ε_2，…… ε_n，且其共同出現之或是率必爲最大，卽

$$\varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\cdots\varphi(v_n) = h^n \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-h^2(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)} \tag{27}$$

必爲最大。因 h 及 π 均爲常數，故欲令(27)爲最大，必須

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots + v_n^2 = [vv] = \text{最小值}$$

此卽最小二乘法之來源也。由此引伸，尚可求出一廣義之法則。凡一組精度不等之觀測，其每個誤差或是函數中之 h 亦必不同。此時(27)變爲：

$$\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\cdots\cdots\varphi_n(v_n) = \pi^{-\frac{n}{2}} \cdot h_1 h_2 \cdots\cdots h_n e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 v_n^2)} \tag{28}$$

如欲令(28)爲最大，必須

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 v_n^2 = [h^2 vv] = \text{最小值} \tag{29}$$

式(29)爲一更普遍之公式，其中 h^2 通常易以 p 表示之，p 名爲權數。

按前節所述 h 之意義，可知某一觀測值之精度愈高，其權數亦必愈大。權之意義在表示相對精度，故僅能作比較之用，任一權數單獨視之，固毫無意義也。換而言之，權之爲數，全屬抽象，並非代表一具體之精度，關於其意義將於第四章第三節申論之。茲僅將其與 h 之關係列出：

$$p \propto h^2 \tag{30}$$

據此則(29)亦可化爲：

$$[pvv] = \text{最小值} \tag{31}$$

此爲最小二乘法原理之基本形式。

以上所引高斯導出最小二乘原理之方法，乃假定觀測誤差之分佈係依照高斯誤差定律，並假定算學平均值爲最或是值。其後高斯又證明❶：卽使誤差之分佈並不完全依照高斯定律，祇須其誤差之中數爲零；且不必假定算學平均值爲最或是值，僅假定誤差之平方中數（卽下章所將申述之中誤差）可代表觀測之精度，亦可導出同樣之最小二乘原理。關於此種導出之方法，本書不擬再加介紹。

此處須特別提出注意者，卽應用最小二乘法時，應確知其觀測誤差純屬偶然性質。如有系統誤差存在，必須先將其消除，始能應用，否則所得結果，並不能代表最或是值。

第九節　平差問題之種類

平差問題可分爲下列三種基本形式：

(1) 直接觀測之平差　所謂直接觀測者卽直接測定一量之值之謂。倘測定次數不僅一次，卽發生平差問題。此種問題僅包括一未知數，最爲簡單。

(2) 間接觀測之平差　所謂間接觀測者，卽不直接測定一量或多量之值，而測定其函數之值，因而間接求此一量或多量之值之謂。易言之：一組觀測值爲另外一組未知數之函數，譬如欲求某塔之高，不直接量測其高，而在其相當之水平距離處安置儀器量其垂直角，則垂直角值及其水平距離爲觀測值，而塔高爲其未知數，由前二者推算，後者是爲間接觀測。在此種問題中，每觀測值觀測之次數，必須多於未知數，始能發生平差問題。倘

❶Gauss: Supplementum theoriae Combinationis erroribus Minimis obnoxiae, 1826.

二者相等，則未知數之值，可由觀測值求出，僅爲一代數問題，而非一平差問題矣！

(3) 條件觀測之平差　當觀測量之眞值間有一定關係存在時，則平差後所求得之值，亦須符合此條件，因之發生所謂條件觀測之平差。此種關係可爲數學的，亦可爲物理的，統名之曰"條件"。倘條件之數目與觀測之數目相等，則爲一代數問題。觀測量大於條件數目時，始需平差之計算。

此外尙有所謂"含有條件方程式之間接觀測"及"含有新未知數之條件觀測"，均可化爲上述(2)或(3)之基本形式。

第二章 觀測精度之衡量

第一節 觀測精度之表示法

何謂精度?此處應加說明。無論何種觀測均不能絕對無誤差。凡觀測結果,因採用儀器及方法之不同,使較大誤差出現之或是率減少者,卽謂之精,反之謂之粗。然精與粗乃比較之詞,必須以數學方法表示之,始能有具體之印象。今設有兩組觀測值,一組較精,一組較粗,凡與較精者有關之值,均於其上加 $'$,較粗者則加 $''$。設此兩組觀測誤差之分佈,均合於高斯定律,則兩誤差曲線於 y 軸之兩方,均必各有一處相交(參考第一章圖一),因兩曲線下之面積皆相等也。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon=1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{1}$$

設兩曲線相交處之 ε 值爲 $\pm\alpha$,則

$$|\varepsilon|<\alpha \text{ 時 } \quad \varphi'(\varepsilon)>\varphi''(\varepsilon)$$
$$|\varepsilon|>\alpha \text{ 時 } \quad \varphi'(\varepsilon)<\varphi''(\varepsilon).$$

如 c 爲大於零之冪數,則:

$$|\varepsilon|<\alpha\text{時}\quad \alpha^c-|\varepsilon^c|\text{ 爲正數,}\quad \varphi'(\varepsilon)-\varphi''(\varepsilon)\quad\text{亦爲正數}$$
$$|\varepsilon|>\alpha\text{時}\quad \alpha^c-|\varepsilon^c|\text{ 爲負數,}\quad \varphi'(\varepsilon)-\varphi''(\varepsilon)\quad\text{亦爲負數}$$

故無論 ε 取何值,$[\varphi'(\varepsilon)-\varphi''(\varepsilon)](\alpha^c-|\varepsilon^c|)$ 必爲正數或零。將此值積分,以$\pm\infty$爲其界,必得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi'(\varepsilon)-\varphi''(\varepsilon)](\alpha^c-|\varepsilon^c|)\,d\varepsilon>0,$$

或

$$\alpha^c\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon\right\}-\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon^c|\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon^c|\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon>0$$

但由(1)可知上式中第一項爲零,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon^c|\varphi''(\varepsilon)\,d\varepsilon>\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon^c|\varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad c>0. \tag{2}$$

此不等式中兩積分式之意義,乃爲所有誤差 ε 之 c 次冪絕對值之平均值也。不等式(2)之意義,卽:較精觀測組誤差 c 次冪絕對值之平均值必小於

較粗觀測組誤差 c 次冪絕對値之平均値。是故誤差之乘積冪平均値，可資以度量精度之用。命 $c=1$ 及 $c=2$，卽得普通常用之平均誤差及中誤差：

$$\text{平均誤差}\qquad t=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{3}$$

$$\text{中誤差}\qquad m^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon^2|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{4}$$

理論上吾人尙可採用三次冪以上之平均値爲精度之衡量，但實際上因計算繁難，故均棄而不用。

第二節　平均誤差

設用同一精度觀測一固定量 n 次，所得之觀測値爲 l_1，l_2，……… l_n，其眞誤差爲 ε_1，ε_2，……… ε_n，則所謂平均誤差者，卽爲 ε_1，ε_2 ……… ε_n 各誤差絕對値（不計正負號）之平均値，可以公式表之如下：

$$t=\frac{[|\varepsilon|]}{n}$$

公式內之[]表示各數之和，| |表示爲絕對値。

所以求平均誤差者，乃欲藉以考驗觀測之精度。如觀測次數極少，則依此所得之平均誤差未必可靠，是以嚴格而論，欲求某種觀測之平均誤差，其觀測次數 n 必須極大。除此以外，吾人尙須注意，此處所指之誤差 ε，乃係眞誤差，卽觀測値與眞値之較。但一般而論，一量之眞値，除可由數學或物理關係推出者外，大都無從知悉，故眞誤差亦多不能求出。所謂數學關係，可由最簡單之三角形解釋之。任意一平面三角形，其三個角度之和必爲 $180°$。如爲球面三角形，則三角之和必爲 $180°+$球面角超。今設觀測三角度之値爲 α,β,γ，其和不等 $180°+$球面角超，則所差之數，卽爲三個角度和之眞誤差。但每個角度之眞誤差則仍無法求出，因三個角度分別而論，並無任何數學關係可以決定其眞値也。故通常所謂之誤差，實際上乃誤差之或是値，名之曰改正數，係觀測値與其最或是値之較。今設有一量，經 n 次觀測之結果，得 l_1 l_2 ……… l_n 等値，此量之最或是値乃 l_1，l_2 ……… l_n 等値之算學平均値，卽

$$x=\frac{l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}. \tag{6}$$

於是 l_1, l_2 ……… l_n 各值之改正數乃爲

$$v_1 = x - l_1$$

$$v_2 = x - l_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = x - l_n$$

按上列二公式之關係，可知所有 v 值之和，必須爲零（但 v_1, v_2 ……… v_n 絕對值之和，並不爲零)。設 x 與眞值極爲接近，則 v 必與眞誤差 ε 相近，於是根據 v 亦可求一近似之平均誤差：

$$t^1 = \frac{[|v|]}{n} \tag{7}$$

式(5)代表平均誤差之定義，式(7)則爲近似之平均誤差。凡此等精度之代表值，因並非實在誤差，故不能帶有正號或負號，通常於其前面置一±號。

例一：

某三角鎖共有二十二個角形，各三角形之內角 α, β, γ，概行測出，內角之和與 $180°+$ 球面角超相比較得下列之差異，求平均誤差。

$$\alpha + \beta + \gamma - (180° + 差球面角超) = \varepsilon$$

號數	眞誤差 ε	號數	眞誤差 ε	號數	眞誤差 ε
1	$+0.36''$	9	$+0.56$	17	$+1.62$
2	$+0.93''$	10	0.00	18	$+1.62$
3	-0.51	11	-0.59	19	$+1.67$
4	-1.46	12	0.00	20	-0.72
5	-0.95	13	-1.36	21	-1.85
6	-1.40	14	$+1.86$	22	-0.48
7	$+1.76$	15	-0.42		7.96
8	$+0.92$	16	$+1.68$		6.47
	8.29		6.47		8.29

和 $= 22.72'' = [|\varepsilon|]$

$$平均誤差 = t = \frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{22.72''}{22} = \pm 1.03''$$

例二：

由下列之距離測量記錄，求其測量之平均誤差，

距離測量記錄	V	$\|V\|$
$l_1=8$ 公尺 4 公分 3.45 公厘	+0.205	0.205
$l_2=$ 〃 〃 4.01	−0.355	0.355
$l_3=$ 〃 〃 3.67	−0.015	0.015
$l_4=$ 〃 〃 3.81	−0.155	0.155
$l_5=$ 〃 〃 3.21	+0.445	0.445
$l_6=$ 〃 〃 3.78	−0.125	0.125
平均值 $x=8$ 公尺 4 公分 3.655 公厘	0	$1.300=[\|v\|]$

$$t=\frac{1.300}{6}=\pm 0.217 \text{ 公厘(近似值)}$$

成果: $x=8$ 公尺 4 公分 3.655 公厘 平均誤差 $t=\pm 0.217$ 公厘。

第三節 中誤差

理論上最適宜於代表觀測之精度者爲中誤差。所謂中誤差者,卽誤差自乘方之平均值經開方後所得之值也。其定義可以下列公式表示之:

$$m^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2}{n}$$

或

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \tag{8}$$

ε 爲眞誤差, n 爲觀測之次數, m 爲中誤差, 定義中假定各觀測值之精度相同,且 n 必須爲較大之數目, m 之值始較可靠。倘眞誤差 ε 不知之時,亦可利用其改正數 v 計算之。其理論之根據,以及公式之推演,將在以下各章就不同情形而分別論之。

據理論,中誤差恆大於平均誤差。茲解證如下:

$$m^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2}{n}=\frac{n\varepsilon_1^2+n\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+n\varepsilon_n^2}{n^2}$$

$$t^2=\left[\frac{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots\cdots+|\varepsilon_n|}{n}\right]^2$$

$$=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots\cdots+2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}{n^2}$$

$$m^2-t^2=\frac{(n-1)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots\varepsilon_n^2)-(2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots\cdots+2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)}{n^2}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2+\cdots\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2}{n^2}$$

$$\therefore m^2-t^2=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{n^2}+\cdots\cdots$$

因 $\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{n^2}$ 等均爲正數，故 $m>t$.

設眞誤差 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots\cdots=\varepsilon_n$，則

$$m=t.$$

例：前節例一中 $[\varepsilon\varepsilon]=30.5014$，$n=22$，故 $m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ $=\pm 1.18$ 較平均誤差爲大。

第四節 或是誤差

前兩節所述之平均誤差及中誤差，均爲誤差乘冪之平均值。此外尙有或是誤差者，其定義與誤差乘冪無關。設或是誤差之値爲 r，則在一組精度相等之觀測中，大於 r 之誤差出現或是率，應與小於 r 之誤差出現或是率相等，二者各爲 1/2，或以公式表示之，卽爲

$$\int_{-r}^{+r}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{2}.$$

由實際觀測誤差値以定或是誤差時，可依照上述特徵，將各誤差不分正負，依其大小之次序排列。在此排列正中間之値，卽應爲或是誤差 r。蓋此時大於 r 之誤差數目，適與小於 r 之誤差數目相等，與定義中或是率相等之意義脗合也。

玆再以第一節例一中之眞誤差，求其或是誤差。將眞誤差依大小次序排列之爲：

0.00 0.00 0.36 0.42 0.51 0.56 0.59 0.72 0.92 0.93 0.95

0.98 1.35 1.36 1.40 1.46 1.62 1.62 1.67 1.68 1.76 1.86

誤差總數爲 22，其中間之二値爲 0.95 及 0.98，故或是誤差應爲

$$r=\pm 0.965$$

或是誤差除可依上法求得外，尙可由中誤差乘一常數以求之，其關係將於下節述明之。

第五節 中誤差、平均誤差、及或是誤差之幾何意義

中誤差,平均誤差及或是誤差之定義,已於前節論及。如觀測誤差之分佈,確如高斯之誤差定律,則此數種精度表示法,均具有幾何意義。今仍自誤差或是率函數 $\varphi(\varepsilon)$ 出發,設有一量經 n 次之觀測,則誤差出現於 ε 至 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之次數,應為 $n\cdot\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$。以其出現之次數,乘以其本值 ε 之平方,而自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 積分之,即可得所有誤差平方之和,除之以 n,即為中誤差 m 之平方 m^2,故

$$m^2=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}n\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon. \tag{9}$$

此定積分式可以下法求之:誤差介於 $-\infty$ 至 $+\infty$ 之或是率為 1, 故

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=1,$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

兩方均依 h 微分之,則得

$$-2h\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon\,dh=-\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}\,dh,$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}. \tag{10}$$

以之代入 (9), 即得

$$m^2=\frac{1}{2h^2},$$

或

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{11}$$

由此可知中誤差與精準率之關係。吾人尚可證明, m 之值,正相當於誤差分佈曲線之轉變點。將誤差函數 $\varphi(\varepsilon)$ 依 ε 微分二次, 令其結果等於零, 即得轉變點 ε 之值:

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2},$$

$$\varphi'(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}(-2h^2\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2},$$

$$\varphi''(\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h^2\varepsilon^2}-\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}\cdot 2h^2\varepsilon\right\}.$$

令括弧內之值爲零，卽得

$$1-2h^2\varepsilon^2=0,$$

或

$$\varepsilon=\frac{1}{h\sqrt{2}}=m.$$

今再求平均誤差之幾何意義。根據(11)同樣之理由，吾人可書寫平均誤差 t 之公式如下：

$$t=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon, \tag{12}$$

或

$$t=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d(-h^2\varepsilon^2)=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{13}$$

平均誤差 t 之幾何意義，爲其縱線通過誤差曲線與 ε 軸間所夾半面積之重心。此處半面積係指以 y 軸平分之對稱面積而言。其證明可由下列重心橫坐標 ε_0 之積分式得之：

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon \tag{14}$$

$\frac{1}{2}$係該面積之值，因誤差曲線與 ε 軸間之總面積爲 1 也。比較 (12) 及 (14) 兩式，卽可知 t 卽相當於 ε_0 之值。

至於或是誤差 r 之值，已於前節中求出。按或是誤差 r 之定義：誤差之絕對值，大於此數之或是率，應與小於此數之或是率相等；易言之，卽：

$$W_{-r}^{+r}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{rh}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$$

當 $rh=0.47694$ 時，$W_{-r}^{+r}=1/2$，故

$$r=\frac{0.47694}{h}. \tag{15}$$

或是誤差 r 幾何意義爲：通過 r 值之縱線，平分以 y 軸爲界，介於誤差曲線與 ε 軸間之面積。因此面積卽代表誤差之或是率也。

綜上所述，吾人可將中誤差 m、平均誤差 t、或是誤差 r，與精準率 h

之數學關係列表於下：

表三

	$1/h$	m	t	r
$1/h$	1	1.4142	1.7726	2.0966
m	0.7071	1	1.2533	1.4826
t	0.5642	0.7979	1	1.1829
r	0.4769	0.6745	0.8453	1

表三中由理論所推得之結果，亦可由實際之經驗證明之。茲試舉例說明之。由同例倘可證明高斯誤差分佈定律與實際情形相符合。

例：

此例係取自德國一部大三角測量之成果，其誤差 ε 得自各三角形三角總和與其應得值（$180°$ + 球面角超）之差。由總共 162 三角形中，將 ε 按大小分爲 $0''.00 \longrightarrow 0''.19$，$0''.20 \longrightarrow 0''.39$，$0''.40 \longrightarrow 0''.59$，……等八組，其各組內之正負值，均各分列於一行。

將表四之結果，與誤差之三特性相比較（參考第一章第三節），均相約略符合。今更求其中誤差 m，則

根據所有之正誤差而得之中誤差爲：

$$\pm\sqrt{\frac{31.3845}{89}}=\pm\sqrt{0.3526}=\pm 0''.59,$$

根據所有之負誤差而得之中誤差爲：

$$\pm\sqrt{\frac{28.7364}{73}}=\pm\sqrt{0.3936}=\pm 0''.63,$$

根據所有之正負誤差而得之中誤差爲：

$$\pm\sqrt{\frac{60.1209}{162}}=\pm\sqrt{0.371116}=\pm 0''.609.$$

由式(11)之關係，可自中誤差 m，求精準率 h，其值爲：

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\,m}=1.161$$

旣得 h 值，則各誤差發生之或是率，均可由誤差定律理論推斷之。

表　四

第一組	
0″.0→0″.19	
ε(+)	ε(−)
+0.00	−0.00
+0.02	−0.01
+0.03	−0.03
+0.04	−0.04
+0.05	−0.04
+0.06	−0.05
+0.06	−0.05
+0.06	−0.05
+0.07	−0.05
+0.07	−0.10
+0.10	−0.10
+0.10	−0.12
+0.12	−0.12
+0.12	−0.13
+0.13	−0.13
+0.13	−0.14
+0.16	−0.14
+0.17	−0.15
+0.18	−0.16
+0.19	−0.18
+0.19	−0.19
三角之總數 21	21

第二組	
0″.20→0″.39	
ε(+)	ε(−)
+0.20	−0.24
+0.20	−0.24
+0.21	−0.24
+0.21	−0.25
+0.22	−0.25
+0.23	−0.26
+0.24	−0.27
+0.24	−0.27
+0.25	−0.28
+0.29	−0.30
+0.30	−0.31
+0.30	−0.32
+0.30	−0.32
+0.32	−0.33
+0.35	−0.34
+0.36	−0.36
+0.37	−0.37
+0.39	−0.37
+0.39	−0.39
三角之總數 19	19

第三組	
0″.40→0″.59	
ε(+)	ε(−)
+0.40	−0.40
+0.41	−0.41
+0.43	−0.48
+0.45	−0.49
+0.46	−0.51
+0.46	−0.52
+0.46	−0.52
+0.48	−0.54
+0.48	−0.58
+0.50	
+0.50	
+0.52	
+0.52	
+0.53	
+0.55	
+0.56	
+0.57	
+0.58	
三角之總數 18	9

第四組	
0″.60→0″.79	
ε(+)	ε(−)
+0.60	−0.61
+0.61	−0.64
+0.61	−0.65
+0.64	−0.67
+0.64	−0.72
+0.67	−0.74
+0.67	−0.77
+0.71	
+0.73	
−0.74	
+0.75	
+0.79	
+0.79	
三角之總數 13	7

第五組	
0″.80→0″.99	
ε(+)	ε(−)
+0.83	−0.86
+0.83	−0.84
+0.84	−0.87
+0.87	−0.89
+0.87	+0.90
+0.88	+0.91
+0.91	
+0.93	
+0.95	
+0.98	
+0.98	
三角之總數 11	6

第六組	
1″.00→1″.19	
ε(+)	ε(−)
+1.00	−1.00
+1.01	−1.01
+1.09	−1.01
+1.11	−1.09
+1.15	−1.10
	−1.12
三角之總數 5	6

第七組	
1″.20→1″.39	
ε(+)	ε(−)
+1.39	−1.27
	−1.37
	−1.37
三角之總數 1	3

第八組	
1″.40→1″.59	
ε(+)	ε(−)
+1.52	−1.49
	−1.54
三角之總數 1	2

表五列其結果，比較最末兩列之數目，可知由誤差理論推算者，與實際情形極相接近。易言之，可以證明誤差分佈定律，與實際情形相脗合。

關於表五最末一列之計算，茲舉第一行 41 爲例，說明之如下：

$$t=ah \qquad a=0.195$$

$$t=0.195\times 1.161=0.2264.$$

表　五

誤　差	正誤差數目	負誤差數目	誤差總數（實際情形）	誤差總數（由誤差定律推算）
0″.0—0.195	21	21	42	41
0.195—0.395	19	19	38	38
0.395—0.595	18	9	27	30
0.595—0.795	13	7	20	22
0.795—0.995	11	6	17	15
0.995—1.195	5	6	11	8
1.195—1.395	1	3	4	5
1.395—1.595	1	2	3	2
1.595—1.795	0	0	0	1
1.795—1.995	0	0	0	0
	總數		162	162

由表二（頁12）用遞較法，求得相當於 $t=0.2264$ 時之：

$$\Pi_{-a}^{+a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau} e^{-t^2}\,dt$$

值爲 0.2507，乘以誤差總數 162 得

$$0.2507\times 162=41.$$

其餘各數之計算，均依此類推。

此外表三中（頁 24）由理論推得之結果，亦可由實際之經驗證明之。今試仍以表四所列之誤差爲例，其平均誤差應爲：

$$t=\pm\frac{[\varepsilon]}{n}=\pm\frac{78.89}{162}=\pm 0''.487=0.800\,m.$$

至於或是誤差，可以誤差表(表四)內所列之誤差，按大小排列之，其居中之誤差，即爲或是誤差。蓋此誤差有一特徵，即其他各誤差之出現，比其值大者，與比其值小者之數目均相等。其值爲：

$$r=\pm 0.40=\pm 0.657\ m$$

此二值與表三內相當之因數 0.7979 及 0.6745 相比較，固頗相近也。

第六節　平均誤差、中誤差、及或是誤差之比較

平均誤差、中誤差、或是誤差雖均可代表觀測精度，但一般則均採用中誤差爲精度之衡量；即偶有採用或是誤差者，亦必先求出中誤差，然後按照表三乘以 0.6745，以得或是誤差之值。其故安在？玆特申述如下：

一般觀測之眞誤差率均不知，所用以衡量精度者，實皆各觀測值之改正數，即本章第二節所述之 v 是也。改正數爲最或是值與觀測值之較，因最或是值未必即與眞值完全符合，是以改正數亦不能與眞誤差相等。按平均誤差、中誤差、及或是誤差之定義，其值均係自眞誤差計算而得，今眞誤差卽無法求得，是以前節所列之公式及方法亦不能直接應用，勢必代以由改正數計算之公式。但此種公式僅能爲中誤差求出(見以下各章論中誤差之各節)，而不能爲平均誤差及或是誤差求出，如欲求知後二者之值，仍必由中誤差按照表三之理論關係改算。此種改算在事實上亦無必要，蓋既已求得中誤差，又何必乘一常數而得一間接求出之值，固莫若直接應用中誤差爲精度衡量之爲愈也。

此外中誤差之值，係由誤差平方得來，故大誤差之影響亦大，較爲合理；且因乘方開方之故，自動有加減號出現，均爲其優點。

有人喜用或是誤差，以爲其值可代表誤差之或是值，其實不然，蓋如專爲偶然誤差，其最或是值固爲零也。且中誤差之計算，與誤差分佈依照何種定律毫無關係，而或是誤差之值，全視誤差分佈依照何種定律而異。如誤差之分佈不依高斯定律，則或是誤差計算，亦不能由中誤差乘一常數轉算求得。高斯曾論及此點，是以不主張用或是誤差代表觀測之精度。更進一步言之，中誤差之意義與最小二乘法最能切合，因改正數 v 之二次冪和，應爲最小。易言之，按照最小二乘法平差後之結果，精度應爲最高也。

根據上列理論之觀察，可知代表精度最佳之法，當推中誤差。但近代世界各國之主張尙未一致，如英美及其殖民地（印度在外）均尙沿用或是誤差以作精度之衡量，此乃習尙使然也。

第七節　由有限數目之眞誤差計算所得 t 及 m 值之中誤差，

本章第一節所述誤差 c 次冪之平均數（命之爲 S_c），乃係由無窮多個眞誤差 ε 所求出之 ε^c 之平均數值。今設誤差之數目有限，則可將 S_c 之公式寫成

$$S_c=\frac{1}{n}\left(|\varepsilon_1{}^c|+|\varepsilon_2{}^c|+\cdots\cdots+|\varepsilon_n{}^c|\right)=\frac{1}{n}[|\varepsilon^c|], \qquad (16)$$

但此時之 S_c 值，並非其眞確值。

茲想像有無窮多組之觀測值，由每組之 n 個觀測值，可求出一 S_c 之值，命之爲 s'_c $s''_c\cdots\cdots$，將此無窮多 s_c 值平均，必可得其確值 S_c，每個 s_c 值之誤差卽爲 (s_c-S_c)，每個 s_c 值之中誤差平方 $m_c{}^2$ 卽爲

$$\left(\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}-S_c\right)\text{之平均值。}$$

$$\text{而}\left(\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}-S_c\right)^2=\frac{[|\varepsilon^{2c}|]}{n^2}+2\frac{[|\varepsilon_i{}^c\varepsilon_k{}^c|]}{n^2}(i\neq k)-2S_c\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}+S_c{}^2. \qquad (17)$$

現擬討論者，卽此式右方各項之平均值。第一項之平均值爲 $\frac{S_{2c}}{n}$，因 $S_{2c}=\frac{[|\varepsilon^{2c}|]}{n}$。第二項中 $[|\varepsilon_i{}^c\varepsilon_k{}^c|]$ 共含 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個乘積，每個乘積之平均值均爲 $S_c{}^2$，故此項之平均值爲：

$$\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}S_c{}^2=S_c{}^2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

第三項內 $\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}$ 之平均值爲 S_c，故第三項之平均值爲 $-2S_c{}^2$。至於公式(17)左方之平均值爲 $m_c{}^2$，故

$$m_c{}^2=\frac{S_{2c}}{n}+S_c{}^2\left(1-\frac{1}{n}\right)-2S_c{}^2+S_c{}^2$$

$$m_c^2=\frac{1}{n}(S_{2c}-S_c^2)$$

不論 c 等於任何值，式(18)均可應用。玆欲求者乃 $c=1$ 及 $c=2$ 時之值。

$$c=1 \quad S_c=t \quad S_{c2}=m^2 \quad m^2{}_t=\frac{1}{n}(m^2-t^2) \tag{19}$$

$$c=2 \quad S_c=m^2 \quad S_{c2}=v^4 \quad m^2{}_{(m^2)}=\frac{1}{n}(v^4-m^4) \tag{20}$$

m_t 及 $m_{(m^2)}$ 爲 t 及 m^2 之中誤差、v^4 爲眞誤差 ε 四次冪之平均值。

由本章第五節求出之結果爲：

$$t=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad t^2=\frac{1}{h^2\pi}. \tag{21}$$

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad m^2=\frac{1}{2h^2}, \qquad m^4=\frac{1}{4h^4}. \tag{22}$$

今所需者爲 v^4 之值，而該式可用積分式求之：

$$v^4=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon.$$

由本章第五節式(10)，將其兩方依 h 微分之，可得

$$-2h\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=-\frac{3\sqrt{\pi}}{2h^4},$$

故

$$v^4=\frac{3}{4h^4} \tag{23}$$

將(21)(22)及(23)各值代入(19)及(20)兩式則得

$$m_t{}^2=\frac{1}{nh^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{\pi-2}{2\pi nh^2}=\frac{\pi-2}{2n}t^2, \tag{24}$$

$$m^2{}_{(m^2)}=\frac{1}{nh^4}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2nh^4}=\frac{2}{n}m^4. \tag{25}$$

(25) 式中之 m_{m^2} 乃爲計算中誤差平方 m^2 之中誤差。如欲得計算中誤差 m 本身之中誤差，可按誤差傳播定律(見下章)，以 m 爲 m^2 之一函數：

$$m=f(m^2)=(m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial m}{\partial m^2}=\frac{1}{2m}$$

故 m 之中誤差 m_m 與 m^2 之中誤差 m_{m^2} 有下列關係。

$$m_m = \frac{1}{2m} m_m. \tag{26}$$

由 (24), (25), (26), 可得計算平均誤差 t 及中誤差 m 時之中誤差 m_t 及 m_m 為

$$m_t = \sqrt{\overline{m_t^2}} = \sqrt{\frac{\pi-2}{2n}}\, t = 0.7555 \frac{t}{\sqrt{n}}, \tag{27}$$

$$m_m = \frac{1}{2m} m_{m^2} = \sqrt{\frac{1}{2n}}\, m = 0.7071 \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{28}$$

由(27) 及 (28) 兩式，可知 t 與 m 計算之精度，均與觀測次數 n 之平方根成反比。若將 m_t m_m 與 t, m 之比較大小，用比例數表示之，則

$$\frac{m_t}{t} = 0.7555 \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{m_m}{m} = 0.7071 \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{29}$$

最後尙須指出：m 之值不僅可直接自 ε^2 算出，亦可間接由 t 定之，由本章第五節之表三，可知：

$$m = 1.2533\, t, \tag{30}$$

故如由 $|\varepsilon|$ 之值，先計算 t，再乘以 1.2533，亦可得 m 之值。一般而論，此值與直接由 ε^2 所算之值，不全相同。究竟何者較為可靠？欲答此問，須令由式(30)所求之 m 為 m'，其中誤差 $m_{m'}$ 為

$$m_{m'} = 1.2533\, m_t = 0.7555 \frac{1.2533\, t}{\sqrt{n}},$$

或

$$m_{m'} = 0.7555 \frac{m'}{\sqrt{n}}. \tag{31}$$

比較(28)及(31) 卽可知：直接用 ε^2 所求之 m 較間接由 t 所求得者為精準可靠。

更廣義論之，則 m 不僅可由一次冪 $|\varepsilon|$ 或二次冪 $|\varepsilon^2|$ 之總和求之，且可由任意次冪之總和求之。按上述相似之步驟，可得下列之結果，卽由 $|\varepsilon^2|$ 計算 m 所得之值，最為可靠也。

$$m = 1.2533 \frac{[|\varepsilon|]}{n} \left(1 \pm \frac{0.7555}{\sqrt{\pi}}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \left(1 \pm \frac{0.7071}{\sqrt{n}}\right)$$

$$m=0.8557\sqrt[3]{\frac{[\varepsilon^3]}{n}}\left(1\pm\frac{0.7371}{\sqrt{n}}\right)$$

$$m=0.7598\sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1\pm\frac{0.8165}{\sqrt{n}}\right)$$

第八節　最大誤差

平差時所言誤差，均指偶然誤差。此偶然誤差，最大時可至何值？易言之，吾人是否可以劃一界線，分淸偶然誤差與錯誤？如承認誤差之分佈係依照高斯定律，則由高斯之誤差或是率函數觀之，誤差大至 $\pm\infty$ 時，其或是率始爲零。除此之外，並無偶然誤差值可能出現之極限。關於此問題，依或是率定理，而設法推求者甚多[1]，然其結果均未爲一般所承認，故不擬在此詳爲介紹。且最大誤差之問題，在平差計算或求觀測精度時，均不十分重要。是以下文僅略述其原理。

今自誤差或是率函數出發，取第(23)及(25)兩式。因 h 與 m 之關係爲 $h=\frac{1}{\sqrt{2}m}$，故該兩式可化爲：

$$W_{-a}^{+a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left(\frac{a}{m}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3+\frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5-\frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7+\cdots\right\} \quad (32)$$

及

$$W_{-a}^{+a}=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{me^{-\frac{a^2}{2m^2}}}{a}\left\{1-\left(\frac{m}{a}\right)^2+3\left(\frac{m}{a}\right)^4-15\left(\frac{m}{a}\right)^6+\right\} \quad (33)$$

W_{-a}^{+a} 爲誤差出現於 $-a$ 與 $+a$ 間之或是率。命 $a=nm$，爲中誤差之倍數，則 W_{-a}^{+a} 亦可讀爲 W_0^{nm}，因 m 本身即已含有 $\pm$ 號之意義也。W_0^{nm} 代表誤差出現於零及 n 倍中誤差值間之或是率。(32)及(33)兩式亦可化爲 n 之函數：

$$W_0^{nm}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n-\frac{n^3}{6}+\frac{n^5}{40}-\frac{n^7}{336}+\frac{n^9}{3456}\cdots\right) \quad (34)$$

及

$$W_0^{nm}=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}\left\{1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}-\frac{15}{n^6}+\cdots\right\} \quad (35)$$

[1] 參閱 Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, 1891 及 S. Newcomb: A generalized Theory of the Combination of observations, so as to obtain the best result. American Journal of Mathmatics 第八卷 1886 年，343 頁。

n 小於 2 時，可用式 (34) 計算 W_0^{nm}，n 大於 2 時，則需用式 (35)，始能計算。茲將 W_0^{nm} 之值，列於下表：

表六　誤差出現於 0 與 nm 間之或是率

n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}
0.0	0.0000	1.0	0.6827	2.0	0.9545	3.0	0.9973	4.0	0.999937
0.1	0.0797	1.1	0.7287	2.1	0.9643	3.1	0.9981	5.0	0.99999943
0.2	0.1585	1.2	0.7699	2.2	0.9722	3.2	0.9986		
0.3	0.2358	1.3	0.8064	2.3	0.9785	3.3	0.9990		
0.4	0.3108	1.4	0.8385	2.4	0.9836	3.4	0.9993		
0.5	0.3829	1.5	0.8664	2.5	0.9876	3.5	0.9995		
0.6	0.4515	1.6	0.8904	2.6	0.9907	3.6	0.9997		
0.7	0.5161	1.7	0.9109	2.7	0.9931	3.7	0.9998		
0.8	0.5763	1.8	0.9281	2.8	0.9949	3.8	0.9999		
0.9	0.6319	1.9	0.9426	2.9	0.9963	3.9	0.9999		

如欲計算大於 n 倍中誤差出現之或是率，可於此表中查出，與 n 值相對之值，以 1 減之卽得。茲命 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$，諸整數，由上表中可以計算超出 nm 之誤差或是率，以及於若干次觀測中始能出現一次。

表　七

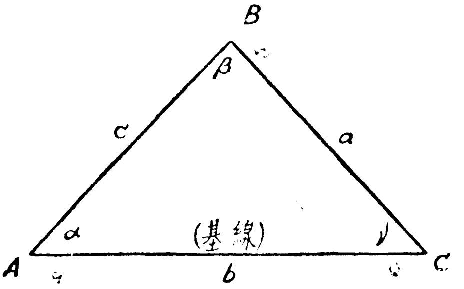
中誤差倍數 n	超出 nm 誤差或是率	若干次觀測中始能出現一次
1	0.32	3
2	0.046	22
3	0.0027	370
4	0.000063	15800
5	0.00000067	1740000

由此觀之，大於中誤差二倍之誤差，已屬不多。就通常觀測之次數而言，最大不至於超出中誤差之三倍，而中誤差之五倍則在任何情形之下，均可作爲偶然誤差之界限矣。

第三章　誤差傳播定律

第一節　誤差傳播

欲解算平差問題中若干重要問題，必須根據誤差傳播定律。設有若干觀測值 $l_1\ l_2$……其中誤差各爲 m_{l_1}，m_{l_2}……，則由此數觀測值所計算而得之任一函數 x，亦必有誤差存在無疑。述明其中誤差 m_x 與觀測值中誤差 m_{l_1}，m_{l_2}……等之關係者，謂之誤差傳播定律。設一三角形內 b 邊及 α，β 兩角已經測定，其中誤差各爲 m_b，m_α，m_β，則可按三角公式：



第三章　第一圖

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

求 a 邊之長 b，α，β 三值內既有誤差，故按上式計算之 a 值，自必受其影響，在平差法內名之爲誤差傳播。傳播之定律可分數種，於下列各節分別論之。

第二節　倍數

設有一數 x 等於觀測值 l 之 a 倍，a 爲一常數，l 之中誤差爲 m_l，試求 x 之中誤差 m_x。以公式表之，

$$x=al. \tag{1}$$

l 之中誤差既爲 m_l，則用 a 乘後，誤差必增大 a 倍，故即可得下列公式：

$$m_x=a\,m_l. \tag{2}$$

例：用視距方法測定在平地上兩點間之距離時，吾人應用下列公式：

$$S=Kl+C.$$

S 爲兩點間之距離，K 爲視距倍常數，C 爲加常數，l 爲視距間隔。設 K 與 C 已經精密測定，認爲毫無誤差，而視距間隔讀數之中誤差爲 m_l，則 S 之中誤差應爲若干？S 之中誤差應爲 l 中誤差之 K 倍，故

$$m_S=Km_l.$$

第三節 和數

某一數值 x 係等於兩觀測值 l' 與 l'' 之和，設此兩數均由相互獨立之觀測求得，其中誤差各為 $m_{l'}$ 及 $m_{l''}$ 求 x 之中誤差 m_x 為若干？以公式表示之：

$$x = l' + l''. \tag{3}$$

今以 ε' 及 ε'' 代表 l' 及 l'' 之眞誤差，則 x 之眞誤差為 $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$。設 l' 及 l'' 各觀測 n 次，則

$$\begin{array}{l|l}
\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 & \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 + \varepsilon''^2_1 + 2\varepsilon'_1\varepsilon''_1 \\
\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 + \varepsilon''_2 & \varepsilon_2^2 = \varepsilon'^2_2 + \varepsilon''^2_2 + 2\varepsilon'_2\varepsilon''_2 \\
\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 + \varepsilon''_3 & \varepsilon_3^2 = \varepsilon'^2_3 + \varepsilon''^2_3 + 2\varepsilon'_3\varepsilon''_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n = \varepsilon'_n + \varepsilon''_n & \varepsilon_n^2 = \varepsilon'^2_n + \varepsilon''^2_n + 2\varepsilon'_n\varepsilon''_n
\end{array}$$

由各誤差之平方求其中誤差，則按第二章第一節公式(8)得

$$m_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots\cdots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon'^2]}{n} + \frac{[\varepsilon''^2]}{n} + \frac{2[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}}$$

因 $\qquad m_{l'}^2 = \dfrac{[\varepsilon'^2]}{n}, \qquad m_{l''}^2 = \dfrac{[\varepsilon''^2]}{n};$

故 $\qquad m_x = \sqrt{m_{l'}^2 + m_{l''}^2 + \dfrac{2[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}}.$

又因 ε'_1, ε'_2 等誤差既均為偶然誤差，則應有正有負，而其各種不同配合之互乘 $\varepsilon'_1\varepsilon''_1$, $\varepsilon'_1\varepsilon''_2\cdots\cdots$ 亦必正負參半。倘 n 之數目極大，吾人可認 $[\varepsilon'\varepsilon'']$ 值之極限為零。故

$$m_x = \sqrt{m_{l'}^2 + m_{l''}^2} \tag{4}$$

或

$$m_x^2 = m_{l'}^2 + m_{l''}^2 \tag{5}$$

若式(3)內之 l 項數增加至 n，且各 l 均係由獨立之觀測所求出時，則

$$m_x^2 = m_{l'}^2 + m_{l''}^2 + m_{l'''}^2 + \cdots\cdots + m_n^2.$$

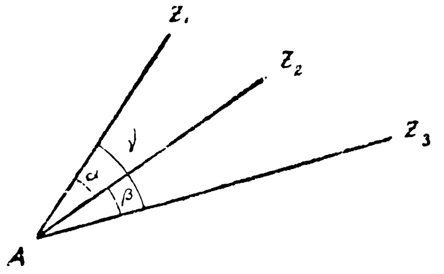
又設 l', l'', l''', ……中各誤差均相等，則得一特別情形。

$$m^2_x = n\, m^2_l, \tag{6}$$

或

$$m_x = m_l\sqrt{n}. \tag{7}$$

例：在 A 點應用經緯儀測量角度 α 及 β，各角及其誤差之值如下：



第三章　第二圖

$\alpha = 36°24'31'' \pm 2.1''$

$\beta = 53°33'28'' \pm 1.7''$

γ 爲 α 及 β 兩角之和，故其中誤差爲：

$$m_\gamma = \sqrt{m_\alpha^2 + m_\beta^2}$$

$$= \sqrt{2.1^2 + 1.7^2} = \pm 2.7'',$$

γ 之值爲 $\gamma = 89°57'59'' \pm 2'.7''$。

第四節　直線函數

引伸上述(3)與(5)兩公式，則任意一組觀測值之直線函數之中誤差亦可求出。設觀測值 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots$ 之中誤差爲 $m_{l_1}, m_{l_2}, m_{l_3} \cdots\cdots$，其直線函數

$$x = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots\cdots + a_n l_n \tag{8}$$

之中誤差應爲：

$$m_x = \sqrt{a_1^2 m_{l_1}^2 + a_2^2 m_{l_2}^2 + \cdots\cdots + a_n^2 m_{l_n}^2} \tag{9}$$

設 $m_l = m_{l_2} = \cdots\cdots m_{l_n} = m$ 時，

則 $m_x = m\sqrt{[aa]}$。 (10)

例：角度觀測時，角度誤差來自對準誤差與讀數誤差兩種，茲就各種不同之觀測方法，推求其誤差之傳播。

(A) 簡單角度測量．先對左方目標讀出兩游標所指之讀數而用其平均值。繼則轉移至右方目標而如上法得第二讀數之平均值，二平均值之差，即應爲其一次角度量測之值。今以 ε_v 代表對準之眞誤差，ε_a 爲讀數之眞誤差，則每方向之眞誤差 ε_r 應爲：

$$\varepsilon_r = \varepsilon_v + \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_{a'}}{2}$$

其中 ε_a, $\varepsilon_{a'}$ 與 ε_v 爲相互獨立而發生之誤差，故可直接應用上述直線函數之定律改化之爲中誤差：

$$m_r = \pm\sqrt{m_v^2 + \frac{m_a^2}{4} + \frac{m_{a'}^2}{4}}.$$

讀數誤差 m_a 與 $m_{a'}$ 普通彼此相等，故

$$m_r = \pm\sqrt{m_v^2 + \frac{m_a^2}{2}}$$

每一角度爲二方向之差,故利用和數定律知角度誤差 m_a 應爲

$$m_a=\sqrt{m_r^2+m_{r'}^2}=\pm\sqrt{2\left(m_v^2+\frac{m_a^2}{2}\right)}.$$

此種簡單角度之測量重複至 n 次,各次之結果設爲 $a_1\,a_2$ ……而取其平均值 a 時,則其公式爲:

$$a=\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)。$$

按直線函數誤差傳播定律,則平均值 a 角之中誤差 m_a 應爲:

$$m_a=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{a_1}^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{a_2}^2+\cdots\cdots\left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{a_n}^2}.$$

當各簡單角度測量之中誤差均相等時,則得

$$m_a=\frac{1}{\sqrt{n}}m_a=\sqrt{\frac{2}{n}\left(m_v^2+\frac{m^2{}_a}{2}\right)}. \tag{11}$$

(B)複測法: 利用複測法求角,設每次讀數仍取二遊標之平均值時,則其眞誤差之關係應爲:

$$\varepsilon_a=\frac{1}{n}\left\{-\frac{\varepsilon'_a+\varepsilon''_a}{2}-\varepsilon'_v+\varepsilon''_v-\varepsilon'''_v+\varepsilon''''_v+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\varepsilon^{(2n-1)}{}_v+\varepsilon^{2n}{}_v+\frac{\varepsilon'''_a+\varepsilon''''_a}{2}\right\}$$

其中誤差之關係爲:

$$m_a=\pm\sqrt{\frac{1}{n^2}(2n\,m_v^2+m_a^2)}=\pm\sqrt{\frac{2}{n}\left(m_v^2+\frac{m_a^2}{2n}\right)} \tag{12}$$

由式(11)與(12)之比較,可以知複測方法測角優點之所在矣。

第五節 任意函數

若 a 爲觀測值 $l_1\,l_2\,l_3\cdots\cdots l_n$ 之任意一直線之函數,則式(8)仍可應用,但必須先將此函數依據泰羅(Taylor)定律化爲直線式,始能計算 x 之中誤差。設

$$x=f(l_1\,l_2\,l_3\cdots\cdots), \tag{13}$$

則函數之眞值應爲:

$$x+\varepsilon=f(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ l_2+\varepsilon_3,\cdots\cdots),$$

因所有誤差均甚微細,其二次及更高次各項可以捨而不論,由是藉泰羅定

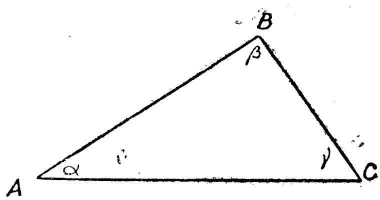
律能定 x 之眞誤差 ε 爲：

$$\varepsilon = f(l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, \cdots\cdots, l_n+\varepsilon_n) - f(l_1 l_2 \cdots\cdots l_n)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial l_4}\varepsilon_4 \tag{14}$$

由此得

$$m_x = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_{l_2}{}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_{l_n}{}^2}. \tag{15}$$

例：三角形 ABC 之 b 邊爲已知基綫，假設其觀測之誤差甚小，可認爲零。α 及 β 兩角之中誤差設爲 m_α 及 m_β，現由 α 及 β 兩角與 b 邊計算 a 邊之長，試求其中誤差 m_a。



第三章　第三圖

解：
$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$d_a = b\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}d\alpha + b\left(-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\right)\sin\alpha d\beta$$
$$= a\cot\alpha d\alpha - a\cot\beta d\beta$$
$$m_a = \pm\sqrt{(a\cot\alpha)^2 m_\alpha{}^2 + (a\cot\beta)^2 m_\beta{}^2}$$

$\therefore$
$$m_a = a\sqrt{\cot^2\alpha^2 m_\alpha{}^2 + \cot^2\beta m_\beta{}^2}$$

設
$$m_\alpha = m_\beta$$

則
$$m_a = am\alpha\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}.$$

以上已將誤差傳播定律在各種不同情形，分別討論，公式 (3) 爲最廣義之形式，所有其他各式均可由此化出。最後尙須聲明者，即誤差傳播定律，僅能用於偶然誤差，倘有系統誤差存在於任一觀測值內，則不能應用此定律。此外各觀測值又必須爲互不相關，否則亦不能用，此讀者應注意者也。

習　　題

1. 用一 30 公尺長之捲尺，量測 A B 間之水平距離，得 2 9.52 公尺。今用精密方法檢定捲尺之長度爲：

30,012m. ±0.006m

問 A B 間之實量距離應爲若干？因捲尺檢定長度之中誤差所影響全長之中誤差應爲若干？

2. 前題中設每次用捲尺銜接測量時，所生之中誤差爲 ±2mm.，則因此影響全長之中誤差爲若干？合計因捲尺本身長度及因測量時所生之中誤差，量得結果之中誤差總數應爲若干？

3. 用視距法測 A B 兩點間之水平距離及高程差，自 A 視 B 之垂直角爲 α，則依公式：

$$E=Kl\cos^2\alpha+C\cos\alpha$$

$$H=\frac{1}{2}Kl\sin 2\alpha+C\sin\alpha$$

可計算水平距離 E 及高程差 H，K 爲視距倍常數，l 爲視距間隔讀數，設 K 及 C 均無誤差，K 爲 100，C 爲 0.5 公尺，l 及 α 之讀數爲：

$$l=1.25\text{m}\pm0.015 \qquad \alpha=2^\circ13'\pm30''$$

求 E 及 H 之值與其中誤差。

4. 在一三角形內實測 a 邊及 β 與 γ 兩角，其值及中誤差爲：

$$a=514.18\text{公尺}\pm0.05\text{公尺}$$

$$\beta=57^\circ8'16''\pm7''$$

$$\gamma=75^\circ28'30''\pm7''$$

求 b 邊之長及中誤差。

第四章　直接觀測之平差

第一節　簡單算學平均值

前已論及，當觀測一定量至若干次，而每次觀測之精度均相等時，則所有觀測值之簡單算學平均值乃此量之最或是值。此種假定，常人不依任何學理即可領會，但實際亦可以最小二乘法之原理證明之。今設觀測一定量 X 之結果爲 $l_1, l_2, l_3 \cdots\cdots l_n$，共爲 n 個觀測值，以 x 爲其最或是值，則每個觀測值均須加一改正數 v，始能等於此值，其關係可由下列公式表示之：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

改正數 v 之符號，恆以最或是值減去觀測值爲準則。按第一章第八節所論之最小二乘法定義，欲使 x 爲最或是值，須令

$$[vv] = \text{最小值}, \tag{2}$$

由公式(1)可求出：

$$[vv] = [(x-l)^2]. \tag{3}$$

今以 x 及 v 爲未知數，將式(3)之右方，依 x 微分而令之爲零，即可求出 x 之值矣。

$$\frac{d[vv]}{dx} = 2[(x-l)] = 0 \tag{4}$$

故
$$(x-l_1) + (x-l_2) + \cdots\cdots + (x-l_n) = 0,$$

或
$$nx = [l]$$

$$x = \frac{[l]}{n}. \tag{5}$$

由式(5)可知所求得之最或是值 x，即爲所有觀測值之簡單算學平均值。

根據式(4)，尚可得出　$[v] = 0,$　(6)

即改正數之代數和應爲零。此式爲算學平均值之基本公式，可資檢核計算之用。

普通觀測值之數目均甚大，而各值之差異則頗微細，故計算平均值時，應儘量應用小值，較為便捷。其法先計平均值之近似值而命為 x_0，最好約之為一整數，以便計算，然後從 l_1，l_2 …… l_n 內分別減去近似值，其相當之差數為 u_1，u_2，u_3 …… u_n，即

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - x_0 = u_1 \\ l_2 - x_0 = u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n - x_0 = u_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

由此得 $$[l] - nx_0 = [u]$$

因 $$x = \frac{[l]}{n}$$

故 $$x = x_0 + \frac{[u]}{n} \qquad (8)$$

例：今以相同精度量測一角度至二十一次，其結果如下表所示，求此角度之最或是值。

觀測值	$u(x_0=22\ 36'07''.0)$		v		vv
22°36′ 7.8	+0.8			−0.4	0.16
7.6	+0.6			−0.2	0.04
8.5	+1.5			−1.1	1.21
7.8	+0.8			−0.4	0.16
5.1		−1.9	+2.3		5.29
6.4		−0.6	+1.0		1.00
6.8		−0.2	+0.6		0.36
6.3		−0.7	+1.1		1.21
5.8		−1.2	+1.6		2.56
8.0	+1.0			−0.6	0.36
7.5	+0.5			−0.1	0.01
7.8	+0.8			−0.4	0.16
9.6	+2.6			−2.2	4.84
6.4		−0.6	+1.0		1.00
6.5		−0.5	+0.9		0.81
8.3	+1.3			−0.9	0.81
7.0	0		+0.4		0.16
6.4		−0.6	+1.0		1.00
7.9	+0.9			−0.5	0.25
9.0	+2.0			−1.6	2.56
9.3	+2.3			−1.9	3.61
	+15.1	−6.3	+9.9	−10.3	27.56

$[u] = +8.8$ $[v] = -0.4$

$$\frac{[u]}{n} = +0.4$$

$$x = 22\ 36'07''.4$$

由上表第一列之諸觀測值，可以任意選一近似值 x_0，設爲 $22°36'07''.0$。更依式(7)計算 u 值列於表內第二列，並將正負分別，以便計算 u 值之和，用式(8)求出：

$$x=x_0+\frac{[u]}{n}=22°36'07''.4$$

卽欲求之角度之最或是值也。爲檢核計算之有無誤差計，須將改正數 v 求出，列於上表之第三列，按式(6)，$[v]$ 應爲 0，此處 $[v]=-0.4$，係因計算$\frac{[u]}{n}$時四捨五入之故，卽

$$\frac{[u]}{n}=\frac{+8.8}{21}=+0.4+\frac{0.4}{21}.$$

吾人僅用上式右方之第一項而捨去其次項$+\frac{0.4}{21}$，故 $[v]$ 應等於捨去一項之分子，卽 -0.4 也，由此可證明上列之計算無訛。

第二節　算學平均值之中誤差

前節關於算學平均值之公式(5)亦可書作

$$x=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}l_n$$

倘所有 l 之觀測精度相同，如前節之所假定者，則所有 l 之中誤差必然相等。今命之爲 m，根據第三章之誤差傳播定律，因 l 均爲相互獨立之觀測值，故 x 之中誤差 M 可以下式表之：

$$M=\frac{1}{n}\sqrt{nm^2}$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{n}}m \qquad (9)$$

但按中誤差之定義，$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$，$\varepsilon$爲各 l 之眞誤差，吾人無從知悉；所知者僅爲前節公式(1)所列之各改正數 v，故此時必須求出 ε 與 v 之關係。今設 x 之眞值爲 X，則眞誤差 ε 與改正數 v 之公式各如下：

$$\varepsilon_1=X-l_1 \qquad v_1=x-l_1$$

$$\varepsilon_2=X-l_2 \qquad v_2=x-l_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_n = X - l_n \qquad v_n = x - l_n$$

由此可得

$$\varepsilon_1 = X - x + v_1$$
$$\varepsilon_2 = X - x + v_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = X - x + v_n$$

但其中 $X-x$ 爲平均値 x 之眞誤差，可以 ε_x 表示之，故

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + v_1 \qquad \varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_x\varepsilon_x + 2\varepsilon_x v_1 + v_1 v_1$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x + v_2 \qquad \varepsilon_2\varepsilon_2 = \varepsilon_x\varepsilon_x + 2\varepsilon_x v_2 + v_2 v_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = \varepsilon_x + v_n \qquad \varepsilon_n\varepsilon_n = \varepsilon_x\varepsilon_x + 2\varepsilon_x v_n + v_n v_n$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = n\varepsilon_x\varepsilon_x + 2\varepsilon_x[v] + [vv] \tag{10}$$

根據前節公式(6)，$[v]=0$，故式(10)可化爲

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - n\varepsilon_x\varepsilon_x \tag{11}$$

ε_x 既爲 x 之眞誤差，其中値應爲 x 之中誤差 M，更根據式(9)可得

$$n\cdot\varepsilon_x\varepsilon_x = n\cdot M^2 = m^2,$$

又按 m 之定義　　　$[\varepsilon\varepsilon] = n\cdot m^2$

故代入(11)後可得

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-1} \quad 或 \quad m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{12}$$

是爲每個觀測值中誤差之公式，再代入(9)卽得

$$M = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \tag{13}$$

是爲算學平均值 x 之中誤差。

例：仍以上節最後所舉之例，試計算每個觀測值及其算學平均值之中誤差，按照該例所附之表。

$$[vv] = 27.56.$$

故每個觀測之中誤差爲

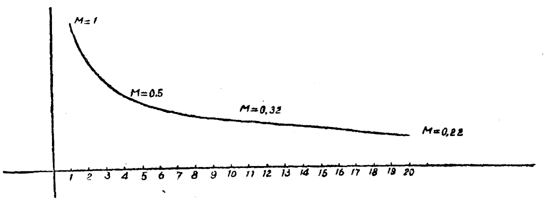
$$m = \pm\sqrt{\frac{27.56}{21-1}} = \pm 1''.17.$$

其算學平均值之中誤差爲

$$M=\pm\frac{1''.17}{\sqrt{21}}=\pm 0''.26.$$

卽該角度平差後之結果應爲 $22°36'07''.4\pm 0''.26$.

由(9)可知算學平均值之中誤差不但與每個觀測值之中誤差有關，亦與觀測次數有關。倘將觀測次數增多，平均值之中誤差可以減小，卽觀測總結果之精度可以增加，但精度之增加與觀測次數之平方根成比例，故至一定限度以外，觀測次數雖增至甚多，精度亦不能大爲增加，此種情形可



第四章　第一圖

用圖解說明之，將 M 與 n 之關係按照式(9)以縱橫坐標表示之，可得曲線如上(設 $m=1$)。

由上圖可以看出觀測增至6次以上時，M 之減少已甚遲緩，是以普通觀測甚少有重複至十次以上者，蓋此時再增加觀測次數，則工作加多而精度增進有限也。

倘欲使結果更加精密時，最經濟而可靠之辦法，乃爲增加儀器本身之精度及改進觀測之方法，而使每個觀測值之中誤差減低。

作精密測量時，各大三角網內角度或方向之觀測，仍須觀測多次，有時多至二十次以上者，此時之目的並非專依公式(6)求精度之改進，其主要作用乃在變換觀測時之一切環境，以減少可能之系統誤差。如測角時每組觀測之後，必更換度數之位置，以免除刻度之誤差，此時增加觀測次數乃另有其意義也。

至於系統誤差對於以上所求各公式之影響，當於另處論之。吾人所須牢記者，卽此處所論之中誤差公式僅能適用於純含偶然誤差之觀測，或已將系統誤差消除後之結果。

第三節　權之意義

權之定義，已於第一章第八節論及之。由式(10)吾人知權與精準數 h 之平方成正比，又按第二章第五節之式(11)，精準數 h 與中誤差 m 成反比，是以權與 m^2 成反比，即 $p\propto\frac{1}{m^2}$；或

$$p_1:p_2=m_2^2:m_1^2$$

茲再申論此式在實際量測情形時之意義。設某一距離用捲尺測量二日，第一日共量二次，其算學平均值為 l'，第二日共量三次，其算學平均值為 l''。問 l' 與 l'' 兩觀測值間權之比數如何？

茲假定兩日測量應用同一捲尺並採用同一方法、其他環境亦均相同，則每次觀測值之權應當相等。今設 m 為每次觀測之中誤差，則根據上節所論，第一日二次之平均值之中誤差應為 $M_1=\frac{m}{\sqrt{2}}$，第二日三次觀測之平均值之中誤差應為 $M_2=\frac{m}{\sqrt{3}}$，是以 M_1 與 M_2 之平方比例為：

$$M_1^2:M_2^2=\frac{m^2}{2}:\frac{m^2}{3}=3:2$$

根據上述權與中誤差之關係，設 l' 之權為 p_1，l'' 之權為 p_2，則其比例應如下：

$$p_1:p_2=M^2_2:M^2_1=2:3$$

吾人可令 l' 之權為 2，l'' 之權為 3，即某日觀測平均值之權逕與其觀測之次數相等，但此數僅示比例，如令 l' 之權為 4，l'' 之權為 6 亦無不可。

由上例可知權與測量次數應成正比例。以一常數乘所有權之數目，則其結果不變。

決定權數之時，並非必需依其觀測之次數而定。依觀測次數而定其權值，僅為方法中之一種。權數固亦可根據觀測情形而定，例如量一角度兩次，每次所用之經緯儀不同，根據經驗，第一次所用之經緯儀可量至 $\pm 10''$ 之精度，第二次所用者可量至 $\pm 4''$ 之精度，於是兩權之比可定為 $4^2:10^2$ 即 $16:100$。又如量一距離，第一次無風力之影響，第二次有風力之影響，根據經驗，第一次之結果應較第二次為可靠，吾人可視其可靠之程度而估計其權之比例。

此外權之決定，亦可按照誤差傳播定律計算之，例如水準測量兩點間高程差之中誤差與其間距離之平方根成正比，故其權應與兩點間之距離成反比。蓋水準測量之誤差傳播與儀器安放次數有關，設每次安放所求得前後視差數之中誤差為 m，則 n 次相加之結果，其中誤差應為 $\sqrt{n}\,m$，設每次前後視距離均約略相等，則 n 與距離必成正比也。

第四節　廣義算數平均值

今仍以上節之距離測量為例，設第一日共量二次，其結果為 l_1, l_2，第二日共量三次；結果為 l_3, l_4, l_5。因 l_1, l_2 …… l_5 之精度完全相等，故根據觀測結果，此距離之最或是值應為 l_1, l_2 …… l_5 之算學平均值：

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5}{5} \tag{14}$$

設將兩日分別平均之，命第一日之平均值為 l'，第二日之平均值為 l''，則

$$l'=\frac{l_1+l_2}{2} \qquad l''=\frac{l_3+l_4+l_5}{3}$$

或

$$l_1+l_2=2l'$$

$$l_3+l_4+l_5=3l''$$

代入(14)應得

$$x=\frac{2l'+3l''}{5}=\frac{2l'+3l''}{2+3} \tag{15}$$

根據上節之論列，吾人可命 l' 之權 p_1 為 2，l''之權 p_2 為 3，故 (15) 亦可書作

$$x=\frac{p_1l'+p_2l''}{p_1+p_2}.$$

此即不等權之算學平均值公式，亦名為廣義算學平均值。普遍言之，設有觀測值 l_1, l_2, l_3 …… l_n 其權各為 p_1, p_2, p_3 …… p_n 則最或是值應為

$$x=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n},$$

$$x=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{16}$$

上列公式亦可根據廣義之最小二乘法公式導出之〔第一章公式(31)〕，茲以 v_i 代表某觀測值 l_i 之改正數，p_i 為此改正數之權，則

$$[pvv]=\text{最小值}$$

而
$$v_i=x-l_i$$

故
$$[pvv]=[p_i\cdot(x-l_i)^2]$$

按最小二乘法原理微分之，以求其最小值，得

$$\frac{d[pvv]}{dx}=2p_1(x-l_1)+2p_2(x-l_2)+\cdots\cdots=0$$

或
$$[p]x-[pl]=0, \tag{17}$$

是以
$$x=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{18}$$

此即廣義算學平均值之公式也。

今更論其改正數方程式，則

$$\begin{array}{ll} v_1=x-l_1 & \text{權 } p_1 \\ v_2=x-l_2 & \text{權 } p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_n=x-l_n & \text{權 } p_n \end{array}$$

將以上各式分別以其權數乘之，即得

$$\begin{array}{l} p_1v_1=p_1x-p_1l_1 \\ p_2v_2=p_2x-p_2l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_nv_n=p_nx-p_nl_n \\ \hline [pv]=[p]x-[pl] \end{array} \tag{19}$$

但根據式(16)，$[p]x=[pl]$，故

$$[pv]=0 \tag{20}$$

此爲不等權直接觀測平差之基本公式，與本章第一節公式(6) $[v]=0$ 之意義相同，蓋式(20)中如各(p)相等，即可化爲式(6)也。

由式(16)及(20)尚可證明權之單個值與計算結果無關，僅須保留其比例即可，設將所有 p 值均用一常數 a 乘之，則

$$x=\frac{[apl]}{[ap]}=\frac{a[pl]}{a[p]}=\frac{[pl]}{[p]}$$

$$[apv]=a[pv]=0\quad\text{即}[pv]=0$$

對於結果並無影響也。

第五節　權單位及廣義算學平均值之中誤差

在等權觀測內，可求出每一觀測值之中誤差，但在不等權觀測時，每個觀測值精度不同，其中誤差亦必不同，是以表示一般精度之方法，以用權單位之中誤差爲宜。所謂權單位者，即一假想之觀測值，其權適爲 1 也。倘權單位之中誤差已知，則根據權與中誤差平方成反比之原理，任何觀測值之中誤差均可求出，設有觀測值 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 共 n 個，其權各爲 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$，倘吾人已知權單位（即 $p=1$ 時）之中誤差爲 m，則

$$1 : p_1 = m_1^2 : m^2$$

或
$$m_1^2 = \frac{m^2}{p_1} \qquad m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}$$

同理可得
$$\left.\begin{array}{ll} m_2^2 = \dfrac{m^2}{p_2} & m_2 = \dfrac{m}{\sqrt{p_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n^2 = \dfrac{m^2}{p_n} & m_n = \dfrac{m}{\sqrt{p_n}} \end{array}\right\} \tag{21}$$

今再將廣義算學平均值之公式(16)分項寫出：

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \cdots + \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{22}$$

因 $l_1, l_2 \cdots\cdots l_n$ 均爲各自獨立之觀測值，其中誤差各爲 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_n$，是以按照誤差傳播定律，$x$ 之中誤差應爲

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} m_1\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} m_2\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{p_n}{[p]} m_n\right)^2, \tag{23}$$

將(21)代入(23)內各項而歸併之，即得

$$M^2 = \frac{m^2}{[p]^2} (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = \frac{m^2}{[p]} \tag{24}$$

或
$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{25}$$

因相當於中誤差 m 之權爲 1，故按(25)知廣義算學平均值 x 之權爲 $[p]$。但 m 之值爲何？則仍可應用第二節類似之方法求之。今命 X 爲 x 之眞值，ε 代表某次觀測之眞誤差，因

$$\varepsilon_i = X - l_i, \quad v_i = x - l_i$$

故 $$\varepsilon_i = v_i + (X - x)$$

$$\varepsilon_i \sqrt{p} = v_i \sqrt{p} + (X - x)\sqrt{p} \tag{26}$$

將(26)兩方平方，令 $i=1, 2, \cdots\cdots n$，而求其和：

$$\varepsilon_1^2 p_1 = v_1^2 p_1 + (X-x)^2 p_1 + 2v_1(X-x)p_1$$
$$\varepsilon_1^2 p_2 = v_2^2 p_2 + (X-x)^2 p_2 + 2v_2(X-x)p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n^2 p_n = v_n^2 p_n + (X-x)^2 p_n + 2v_n(X-x)p_n$$

和 $$[\varepsilon^2 p] = [v^2 p] + (X-x)^2 [p] + 2(X-x)[vp]$$

因 $$[pv] = 0$$

故 $$[\varepsilon^2 p] = [v^2 p] + (X-x)^2 [p] \tag{27}$$

式(27)內之$(X-x)=\varepsilon_r$爲x之眞誤差，其中値應爲x之中誤差M，更按式(25)則得

$$(X-x)^2[p] = M^2[p] = m^2$$

式(29)之左項可改化如下：

$$[\varepsilon^2 p] = [(\sqrt{p}\,\varepsilon)^2]$$

其中$(\sqrt{p_1}\varepsilon_1)^2$，$(\sqrt{p_2}\varepsilon_2)^2$，……等均代表權單位之眞誤差，故按權單位中誤差之定義得：

$$m = \sqrt{\frac{[(\sqrt{p}\,\varepsilon)^2]}{n}}$$

或 $$[p\varepsilon^2] = nm^2$$

代入(27)得 $$nm^2 = [pv^2] + m^2$$

故 $$m^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}$$

或 $$m = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \tag{28}$$

代入(25)得 $$M = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} \tag{29}$$

m 爲權單位之中誤差，而 M 係廣義算學平均值之中誤差。玆將其實際之運用舉下例以說明之。

例一：某一角度曾用複測法量測四次，各次均依其重複之次數而定其權値。得下列之結果，求其最或是値與中誤差。

觀測値 l	p	$u(l_0=78°18'42.00)$		pu		v		pv		pvv
78°18′42″.16	3	+0.16		+0.48			−0.09		−0.27	0.024
41.96	2		−0.04		−0.08	+0.11		+0.22		0.024
41.70	2		−0.30		−0.60	+0.37		+0.74		0.274
42.23	4	+0.23		+0.92			−0.16		−0.64	0.102
合　　計	11			+1.40	−0.68			+0.96	−0.91	0.424

$$[pu]=+0.72 \qquad \frac{[pu]}{[p]}=\frac{+0.72}{11}=+0.07$$

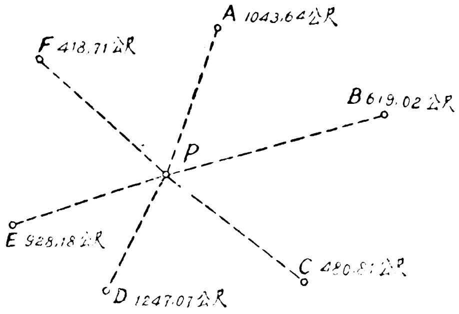
$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.424}{4-1}}=\pm0''.38$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{\pm0.38}{\sqrt{11}}=\pm0''.11$$

平差結果得　　　　　$78°18'42''.07\pm0''.11.$

例二：A, B, C, D, E, F 六點之高程爲已知，自此六點用三角高程測量法定 P 點之高度得下表之結果：

目標距離 (S)	各點高出海面之高程	量得之高程差	算得 P 點之高程
AP=20.10 公尺	A 1043.64 公尺	h_1= −314.73 公尺	728.91 公尺
BP=89.03	B 619.02	h_2= +109.20	728.22
CP=58.20	C 480.81	h_3= +248.24	729.05
DP=30.02	D 1247.01	h_4= −518.43	728.58
EP=61.97	E 928.18	h_5= −199.16	729.02
FP=58.00	F 418.71	h_6= +310.13	728.84



第四章　第二圖

試求 P 點之高程（假設 A, B, …… 等六點之高程均無誤差）。

按三角高程測量原理，高程差 h 之誤差與目標距離 S 爲正比例，故其權 p 應反比於目標距離 S 之平方，即 $p=\frac{1}{S^2}$ 化零爲整，由上表內之 S 約化成下數。

$$S=2.0,\quad 8.9,\quad 5.8,\quad 3.0,\quad 6.2,\quad 5.8 \text{ 公里}$$

$$p=\frac{1}{S^2}=0.25,\ 0.01,\ 0.03,\ 0.11,\ 0.03,\ 0.03.$$

更表列上述結果而計算之，得：

l_0+u	p	pu	$v=0.83-u$	pv	pvv
728+0.91	0.25	0.2275	−0.08	−0.0200	0.0016
+0.22	0.01	0.0022	+0.61	+0.0061	0.0037
+1.05	0.03	0.0315	−0.22	−0.0066	0.0015
+0.58	0.11	0.0638	+0.25	+0.0275	0.0070
+1.02	0.03	0.0306	−0.19	−0.0057	0.0011
+0.84	0.03	0.0252	−0.01	−0.0003	0.0000
和	0.46	0.3808			0.0149

檢核 $[pv]=+0.001$

$$x=x_0+\frac{[pu]}{[p]}=728+\frac{0.3808}{0.46}=728.+0.83$$

權單位之中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{0.0149}{6-1}}=\pm 0.055 \text{ 公尺}$$

平均值之中誤差：

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{0.055}{\sqrt{0.46}}=\pm 0.080 \text{ 公尺}$$

故 P 點之高程爲

$$H = 728.83\text{公尺} \pm 0.080\text{公尺}$$

第六節　根據觀測值之中誤差計算廣義算學平均值之中誤差

權之大小可依各觀測值本身中誤差平方之倒數定之。設有一角度，於不同日期內觀測三次，每次觀測之結果，係用若干組平均所得，故可計算其中誤差，茲以下列方式表示之。

觀測值	中誤差	權數
l_1	m_1	$\frac{1}{m_1^2}$
l_2	m_2	$\frac{1}{m_2^2}$
l_3	m_3	$\frac{1}{m_3^2}$

於是其廣義算學平均值為

$$x = \frac{\frac{l_1}{m_1^2} + \frac{l_2}{m_2^2} + \frac{l_3}{m_3^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}} \tag{30}$$

按第五節 x 之權數應為

$$P = [p] = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2} = \left[\frac{1}{m^2}\right]$$

故 x 之中誤差亦可求出。

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{m^2}\right]}} \tag{31}$$

公式(30)事實上卽為廣義算學平均值公式之另一寫法，然由式(31)所得之結果，並不定與式(29)之結果相等，蓋式(31)全由觀測值原有之中誤差所求得，並未顧及各 l 間之差別，而式(29)則全由 l 間之差別求出，初未計及原有觀測值 l 之精度。是以應用此兩公式所求出之中誤差未必完全符合。此種差別可為偶然者，亦可為必然者，當 l 數目不多時，按照式(29)所求出之中誤差必不能準確，此時與按式(31)所計算之結果可相差甚大，此乃純為偶然性質之差別。但有時 l 之中誤差甚小，而各 l 間之差異則甚大，其結果必致由式(31)算出之中誤差遠較由式(29)得出者為小，

此乃爲必然性質者。蓋各 l 值觀測時尚可有其他因環境不同所發生之誤差存在也。

此種情形，常可於角度觀測時發現。今設量測一角度二三日，每日觀測若干組，而求其平均值及其中誤差，倘每日之天氣情形不同，以致折光影響及照準誤差均不相同，則每日結果，其內部相差極微，而與另一日之結果相比，可能發生甚大之差異，此時觀測者所應注意者，乃設法尋得最適宜之環境，而儘量使觀測結果不受系統誤差之影響。

例：某角度之測量分別於三日完成，每日各測數組，其平均值及中誤差如下，求其最或是值與相當之中誤差。

第一日觀測結果：　$l_1=149°16'51''.48$　$m_1^2=0.44$

第二日觀測結果：　$l_2=149°16'48''.87$　$m_2^2=0.17$

第三日觀測結果：　$l_3=149°16'49''.72$　$m_3^2=0.14$

$$x=149°16'48''.87-\frac{\dfrac{2.61}{0.44}+0+\dfrac{0.85}{0.14}}{\dfrac{1}{0.44}+\dfrac{1}{0.17}+\dfrac{1}{0.14}}=149°16'49''.65$$

A：依各觀測值本身之中誤差計算其最或是值之中誤差〔公式(30)〕

$$M_x=\frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{m^2}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{0.44}+\dfrac{1}{0.17}+\dfrac{1}{0.14}}}=\frac{1}{\sqrt{15.25}}=\pm 0''.26$$

B：依各觀測值間之差異計算其最或是值之中誤差〔公式(29)〕

	l	p	v	pv	pvv
1	149°16'51''.48	2.27	−1.83	+4.05	3.600
2	48''.87	5.89	+0.78	+4.59	7.590
3	49''.72	7.15	−0.07	−0.50	0.035
$x=149°16'49''.65$		15.31		−0.06	11.225

$$M_x=\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}=\sqrt{\frac{11.225}{15.31\times 2}}=\sqrt{\frac{11.225}{30.62}}$$

$$=\pm 0''.61$$

第七節　直接觀測內中誤差計算之精度

直接觀測中由 v 計算中誤差之公式爲

$$m^2=\frac{[vv]}{n-1} \tag{32}$$

今設以中誤差之眞值爲 m，則由 (32) 所求得之值之差誤爲 $\frac{[vv]}{n-1}-m^2$，將其平方展開即得：

$$\left(\frac{[vv]}{n-1}-m^2\right)^2=\frac{[vv]^2}{(n-1)^2}-2m^2\frac{[vv]}{n-1}+m^4 \tag{33}$$

若自無窮多次求左方之平均値，即得計算中誤差 m^2 之中誤差平方，可書作 $m^2_{m^2}$，其値即等於右方各項平均値之和。已知者爲 $\frac{[vv]}{n-1}$ 無窮多次之平均值即爲 m^2，故式(33)右方後二項之和爲 $-m^4$，其右方第一項之平均值可展開求之；因

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[\varepsilon]^2}{n}\text{❶}$$

故
$$[vv]^2=[\varepsilon\varepsilon]^2-2[\varepsilon\varepsilon]\frac{[\varepsilon]^2}{n}+\frac{[\varepsilon]^4}{n^2} \tag{34}$$

式(34)右方第一項之平均值可依下法求之：

$$[\varepsilon\varepsilon]^2=[\varepsilon^4]+2[\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2]$$

$[\varepsilon^4]$ 之平均値爲 v^4〔參考第二章第七節式(20)〕，$[\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2]$ 共含 $\frac{n(n-1)}{1.2}$ 項，每項之平均値爲 $m^2\cdot m^2$，故 $[\varepsilon\varepsilon]^2$ 之平均值爲：

$$n\cdot v^4+n(n-1)m^4 \tag{35}$$

式(34)右方第二項可寫作

$$-\frac{2[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon]^2}{n}=-\frac{2}{n}[\varepsilon\varepsilon]\{[\varepsilon\varepsilon]+2[\varepsilon_i\cdot\varepsilon_k]\}$$

$$=-\frac{2}{n}\{[\varepsilon\varepsilon]^2+2[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon_i\cdot\varepsilon_k]\}$$

❶因 $\varepsilon_i=v_i+(X-x)$，X 爲未知數之眞值，x 爲自觀測值求得之平均值，故 $[v]=0$ $=[\varepsilon]-n(X-x)$，$[\varepsilon\varepsilon]=[vv]+2[v](X-x)+n(X-x)^2=[vv]+\frac{[\varepsilon]^2}{n}$.

$[\varepsilon\varepsilon]^2$ 之平均值，前已求出，而 $[\varepsilon_i\varepsilon_k]$ 之平均值爲零❶，故第二項之平均值爲：

$$-\frac{2}{n}\{nu^4+n(n-1)m^4\}=2u^4-2(n-1)m^4 \tag{36}$$

(34)右方第三項爲：

$$\frac{[\varepsilon]^4}{n^2}=\frac{([\varepsilon]^2)^2}{n^2}=\frac{1}{n}\{[\varepsilon]^4+6[\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2]+\text{含有}\varepsilon\text{一次之乘積和}\}$$

$[\varepsilon^4]$之平均值爲 nu^4，$6[\varepsilon_i^2\,\varepsilon_k^2]$之平均值爲 $3n(n-1)m^4$，所有含 ε 一次乘積和之平均值均爲零❶。故此項之總平均值爲：

$$\frac{1}{n}u^4+\frac{3(n-1)}{n}m^4 \tag{37}$$

由(35)(36)及(37)卽可得(23)之平均值：

$$\left(n-2+\frac{1}{n}\right)u^4+\left(n-2+\frac{3}{n}\right)(n-1)m^4$$

此乃(33)第一項中 $[vv]^2$ 之平均值，(33)右方各項之總平均值爲：

$$m^2_{m^2}=\frac{u^4}{n}+\frac{(n^2-2n+3)}{n(n-1)}m^4-m^4=m^4\left\{\frac{u^4}{nm^4}-\frac{n-3}{n(n-1)}\right\}$$

故

$$m_{m^2}=m^2\sqrt{\frac{u^4}{nm^4}-\frac{n-3}{n(n-1)}} \tag{38}$$

按高斯誤差定律〔見第二章第七節式(22)及(23)〕，則

$$m^4=\frac{1}{4h^4},\qquad u^4=\frac{3}{4h^4}。$$

故(38)可化爲：

$$m_{m^2}=m^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

根據第二章第七節式(26)同一理論，可得

$$m_m=\frac{1}{2m}m_{m^2}=m\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} \tag{39}$$

❶ $\varepsilon_i\varepsilon_k$ 之平均數可如下求之：設令 ε_i 固定，而令 ε_k 變換，因 ε_k 之分佈定律爲對稱，故當 ε_k 爲正數時與 ε_i 之乘積和，必與 ε_k 之負數時之乘積和相抵消，是以 $\varepsilon_i\varepsilon_k$ 之平均值爲零。同理欲求 $\varepsilon_i^p\varepsilon_k^q$ 之平均值，僅須 p 與 q 中之一爲奇數，則 $\varepsilon_i^p\varepsilon_k^q$ 之平均數卽爲零。

此卽爲依(32)計算中誤差之中誤差。以百分率表示之可書作

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right) \tag{40}$$

計算中誤差除用改正數二次冪之和以外，尙可由平均誤差間接求之。下列二式均屬此類。

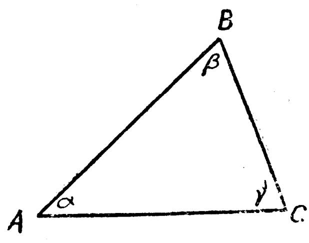
$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{41}$$

$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n\left(n-\frac{4-\pi}{2}\right)}} \qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n\left(n-\frac{4-\pi}{2}\right)}} \tag{42}$$

式(41)普通名爲彼德公式❶。式(42)名爲費煦納公式❷。其導出步驟不於此處贅述。據赫爾默特之研究❸，式(41)計算之精度不如式(32)，當 $n=2$ 時，式(42)之精度與式(32)相同，但 n 之數目增加，則其計算精度逐漸不如式(32)。是以實際計算仍以應用式(32)爲宜，因計算 v 值之平方，有表可查，工作並不過繁也。

第八節　以三角形角值之平差爲例

某三角形之三角如各以不同權之觀測得 α，β，γ，其權之比例爲 p_α，p_β，p_γ。因每平面三角形三內角之和應等於 180°，故在此三觀測之中，有多餘觀測存在，其各角之最或是值可以直接觀測平差法推求之。



第四章　第三圖

今試以 A 角而論，此角一方面可由其角之直接觀測值 α。另方面尙可由 β，γ 二觀測值推算而得，卽 $A=180°-(\beta+\gamma)$。

❶彼德 (Peters) 於 1856 年在 Astronomische Nachrichten 第 44 卷 29 頁發表。

❷費煦納 (Fechner) 於 1874 年在 Poggendorffs "Annalen der Physik" 紀念卷 66—81 頁發表。

❸見 Astronomische Nachrichten, 第 2039 及 2096—2097 號第 85 及 88 卷，1875—1876。

設前者之權爲 p_a 而後者之權爲 p'，則按式(76)可求 A 角值應爲：

$$\angle A=\frac{p_a\alpha+p'[180^\circ-(\beta+\gamma)]}{p_a+p'} \tag{43}$$

今以 m 爲權單位之中誤差，即

$$m^2=m_a{}^2\cdot p_a=m_\beta{}^2p_\beta=m_\gamma{}^2p_\gamma=m'p' \tag{44}$$

其中 m' 爲相當於公式(43)內權爲 p' 時之中誤差，但 m' 由 β 與 γ 二角觀測誤差之和所構成。

$$m'^2=m_\beta{}^2+m_\gamma{}^2=\frac{m^2}{p_\gamma}+\frac{m^2}{p_\beta}=\frac{m^2}{p'}$$

故 $$\frac{1}{p'}=\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma} \quad 或 \quad p'=\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}} \tag{45}$$

而 $$p_a+p'=\frac{1}{\frac{1}{p_a}}+\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_a}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)} \tag{46}$$

又按平面三角公式

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

今以觀測值 α, β, γ, 代入上式，則由觀測誤差關係、不能符合，稱其不符之值爲閉合差 w，即

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+w \tag{47}$$

代之於(43)得

$$\angle A=\frac{p_a\alpha+p'(\alpha-w)}{p_a+p'}=\alpha-\frac{p'}{p_a+p'}w$$

更按(45)及(46)得

$$\angle A=\alpha-\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}\cdot\frac{\frac{1}{p_a}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]}w=\alpha-\frac{\frac{1}{p_a}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w \tag{48}$$

今再論兩觀測值 α 及 $180^\circ-(\beta+\gamma)$ 之改正數 v_1 及 v_2，其值應爲

$$v_1=\angle A-\alpha=-\frac{\frac{1}{p_a}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w;$$

$$v_2=\angle A-\{180^\circ-(\beta+\gamma)\}=\angle A-\alpha+w$$

$$=+\frac{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{49}$$

權單位之中誤差爲:

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{p_\alpha v_1^2+p'v_2^2}{2-1}}=\sqrt{p_\alpha\left(\frac{\frac{1}{p_\alpha}w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)^2w^2}{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)\left[\frac{1}{p}\right]^2}}$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}w^2+\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)w^2}=\pm\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{50}$$

平差前 A 角之中誤差爲:

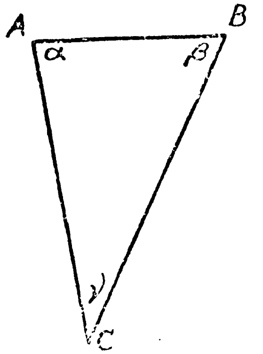
$$m_\alpha=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha}}=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}.$$

平差後 A 角之中誤差爲:

$$M_\alpha=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha+p'}}=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\sqrt{\frac{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{51}$$

B,C 兩角之値及其中誤差亦可以同理求得，玆將各式綜列於下:

$$\left.\begin{aligned}
\angle A&=\alpha-\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w; & M_\alpha&=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\\
\angle B&=\beta-\frac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w; & M_\beta&=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\\
\angle C&=\gamma-\frac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w; & M_\gamma&=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$



第四章 第四圖

例一：三角形之三內角，觀測結果如下，試平差之。

$$\alpha = 72°16'44''.86 \qquad p_\alpha = 27$$
$$\beta = 90°1'56''.46 \qquad p_\beta = 42$$
$$\gamma = 17°41'17''.43 \qquad p_\gamma = 65$$

和 $= 179°59'58''.75$

$180° +$ 球面角超 $= 180°00'00''.29$

三角形閉合差 $w = \qquad -1''.54$

解出：

$$\frac{1}{p_\alpha} = 0.037, \quad \frac{1}{p_\beta} = 0.024; \quad \frac{1}{p_\gamma} = 0.015; \quad \left[\frac{1}{p}\right] = 0.076$$

$$v_\alpha = \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w = \frac{0.037}{0.076} \times 1''.54 = +0''.75$$

$$v_\beta = \frac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w = \frac{0.024}{0.076} \times 1''.54 = +0.49''$$

$$v_\gamma = \frac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w = \frac{0.015}{0.076} \times 1''.54 = +0.30''$$

觀測結果	改正數	平差角值
72°16'44".86	+0.75	72°16'45".61
90°1' 56".46	+0.49	90° 1'56".95
17°40'17".43	+0.30	17°41'17".73
179°59'58".75		180°00'00".29

權單位之中誤差

$$m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} = \frac{1.54}{\sqrt{0.076}} = \pm 5''.59$$

平差後之角中誤差：

$$M_\alpha=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.037}\sqrt{0.039}}{0.076}=\pm0''.77$$

$$M_\beta=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.024}\sqrt{0.052}}{0.076}=\pm0''.72$$

$$M_\gamma=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.015}\sqrt{0.081}}{0.076}=\pm0''.61$$

平差之結果：

$$\alpha=72°16'45''.61\pm0''.77$$
$$\beta=90°\ 1'56''.95\pm0''.72$$
$$\gamma=17°41'17''.73\pm0''.61.$$

觀測各角之權如係相同，則上述各式可以簡化甚多，蓋屬於上式內之一特別情形也。三角之觀測值仍設爲 α，β，γ 而其權各等於1，故

第一角值：α　　　　　權：$p_\alpha=1$

第二角值：$180°-(\beta+\gamma)$　權：$p'=\frac{1}{2}$

平均值爲：

$$\angle A=\frac{1\times\alpha+\frac{1}{2}\{180-(\beta+\gamma)\}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\alpha+(\alpha-w)}{3}=\alpha-\frac{w}{3}\qquad(53)$$

其他兩角 β 及 γ 亦可以同法求之，若以 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 代表三角之平差角值，則

$$\left.\begin{aligned}\angle A&=\alpha-\frac{w}{3}\\ \angle B&=\beta-\frac{w}{3}\\ \angle C&=\gamma-\frac{w}{3}\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

$$\overline{\angle A+\angle B+\angle C=\alpha+\beta+\gamma-w}$$

式(49)中第一角值之改正數爲 $v_1=-\frac{w}{3}$，而第二角值之改正數 v_2 則等於 $-\left(\frac{w}{3}+\frac{w}{3}\right)=-\frac{2}{3}w$，由是求得權單位之中誤差，其式如下：

$$m=\pm\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p'v_2^2}{2-1}}=\sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}w\right)^2}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}} \qquad (55)$$

平差後角度之中誤差：

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{w\sqrt{2}}{3} \qquad (56)$$

就(55)及(56)而比較之，可以考核其角值中誤差由平差結果而低減之比例爲

$$M:m=\frac{w\sqrt{2}}{3}:\frac{w}{\sqrt{3}}=0.816:1$$

第九節 分組與全體平差

本節擬討論者，爲直接觀測之分組與全體平差之區別。根據本章第四節所論，已可證明如將觀測值分組平均，各組之平均值給予相當之權後，再求其總平均值，則其結果與全體平差無異。但在此兩種情形內所求出之總平均值之中誤差，則並不一定相等。

今舉一簡單之例以說明之。設有觀測值四個：l_1，l_2，l_3，l_4 其平均值爲

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{4} \qquad (57)$$

改正數各爲

$$\left.\begin{aligned} v_1&=x-l_1\\ v_2&=x-l_2\\ v_3&=x-l_3\\ v_4&=x-l_4 \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

改正數之平方和爲

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2 \qquad (59)$$

每個觀測值之中誤差爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{4-1}}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(v^2{}_1+v^2{}_2+v^2{}_3+v^2{}_4)} \tag{60}$$

總平均值之中誤差爲

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{4}} \tag{61}$$

今設將此四個觀測值分爲兩組平均，先求 l_2，l_3，l_4 之平均值，命之爲 l'_2。

$$l'_2=\frac{l_2+l_3+l_4}{3} \tag{62}$$

更命 l_1 單爲一組，命之爲 l'_1，則 $l'_1=l_1$。然後再將 l'_1 與 l'_2 按不等權之算學平均值求其平均數，此時 l'_1之權爲 1，l'_2 之權應爲 3。

$$x'=\frac{l'_1+3l'_2}{1+3}=\frac{1}{4}(l'_1+3l'_2) \tag{63}$$

將(62)代入(63)內而與(57)比較，卽可證明 $x'=x$。但此時之改正數已變爲：

$$\left.\begin{aligned} v'_1&=x'-l'_1=x-l_1=v_1 & p_1&=1\\ v'_2&=x'-l'_2=\frac{1}{3}(v_2+v_3+v_4) & p_2&=3\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

故

$$[pv'v']=v_1{}^2+3v_2{}^2=v_1{}^2+3v'_2{}^2 \tag{65}$$

在比較(59)與(65)兩式之前，須先將(59)化爲下列形狀：

$$\begin{aligned}[vv]&=v_1{}^2+(v'_2+v_2-v'_2)^2+(v'_2+v_3-v'_2)^2+v'_2+v_4-v'_2)^2\\ &=v_1{}^2+3v'_2{}^2+\{(v_2-v'_2)^2+(v_3-v'_2)^2+(v_4-v'_2)^2\}\\ &=[pv'v']+\{(v_2-v'_2)^2+(v_3-v'_2)^2+(v_4-v'_2)^2\}\end{aligned} \tag{66}$$

(66)明白表示$[pv'v']$永較$[vv]$爲小，因{　}括弧號內之值永爲正數也。至{　}括號內之值究爲若干？可比較(58)及(64)而得之，蓋

$$\left.\begin{aligned}(v_2-v'_2)^2&=(l'_2-l_2)^2\\ (v_3-v'_2)^2&=(l'_2-l_3)^2\\ (v_4-v'_2)^2&=(l'_2-l_4)^2\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

由此可知$[vv]$乃代表遞次平均所有改正數之總和，因(67)所代表者乃求第一次分組平均值 l'_2 時改正數之平方。公式(66)｛　｝括弧號內之值卽

其總和；$[pv'v']$ 則代表第二次求總平均值時之改正數平方總和，是以公式(66)又可證明，無論分組平差或全體平差，其所有改正數之平方總和必不變易。

但在分組平差時，求權單位及總平均值之中誤差應用下列公式：

$$m' = \pm\sqrt{\frac{[pv'v']}{2-1}} \tag{68}$$

$$M' = \pm\frac{m'}{\sqrt{4}} \tag{69}$$

因權單位之中誤差卽相當於單個觀測值之中誤差，故就理論而言，m' 應當與 m 相等，且無論遞次平差或一次平差，M 必須等於 M'。但實際上 m 與 m' 未必完全符合，二者比較當以 m 之值較爲可靠，蓋分組平差後，組數較原來觀測值爲少，故式(68)不如(60)可靠，此點頗堪注意也。

例：求某水準之水準軸與視軸之夾角時，利用直接觀測法得下列之結果：

第一日	第二日	第三日	
$l_1 = +1''.27$	$l_5 = +0''.08$	$l_9 = -0''.90$	$l_{13} = -0''.60$
$l_2 = -0''.78$	$l_6 = +0''.07$	$l_{10} = +0''.20$	$l_{14} = -0''.90$
$l_3 = +0''.01$	$l_7 = +0''.18$	$l_{11} = +0''.96$	$l_{15} = -0''.17$
$l_4 = -0''.71$	$l_8 = +0''.56$	$l_{12} = +0''.86$	$l_{16} = -0''.08$

第一日觀測值之平均值爲：

$$x_1 = \frac{+1.27+0.01-0.78-0.71}{4} = -0''.05 \qquad [vv] = 2.73$$

第二日及第三日觀測值之平均值各爲：

$$x_2 = +0''.18$$

$$x_3 = -0''.07$$

由全部觀測值求得之總平均值爲：

$$x = +0''.00$$

其改正數之平方總和

$$[vv] = 6.77,$$

於是每一觀測之中誤差爲：

$$m = \sqrt{\frac{6.77}{16-1}} = \pm 0''.67.$$

總平均值之中誤差爲：

$$M=\frac{0.67}{\sqrt{16}}=\pm 0''.17$$

以上係就全體平差法而求得之平均值及其中誤差。茲設將三日所得之結果分成三組平差，其總平均值仍相同，但中誤差則不復相同矣！

$x_1=-0''.03$　觀測次數　4　$[vv]=2.7345$

$x_2=+0''.18$　觀測次數　4　$[vv]=0.1890$

$x_3=-0''.07$　觀測次數　8　$[vv]=3.6690$

令權單位一次之觀測，於是三日所得結果之權數比例爲 4：4：8，由是得：

$$x=\frac{-0.03\times 4+0.18\times 4-0.07\times 8}{16}=+0''.025$$

改正數　$v_1=+0.03$　　$v_2=-0.18$　　$v_3=+0.07$

$$[pvv]=0.17$$

$$m'=\pm\sqrt{\frac{0.17}{3-1}}=\pm 0''.29$$

$$M'=\frac{0.29}{\sqrt{16}}=\pm 0''.07.$$

第十節　觀測值差

測量距離時，通常均往返各測一次而求其平均值，水準測量亦然，兩次之結果既不能相等，其差謂之觀測值差。設有一長距離爲 l，往返觀測之結果爲 l_1 及 l_2，其差爲 $d=l_2-l_1$，而其長之最或是值 x 應爲：

$$x=\frac{l_1+l_2}{2}. \tag{70}$$

相當之改正數爲：

$$v_1=x-l_1=+\frac{d}{2},\qquad v_2=x-l_2=-\frac{d}{2},$$

故每一次觀測之中誤差亦可根據下式求之。

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{4}}{2-1}}=\frac{d}{\sqrt{2}} \tag{71}$$

其平均值 x 之中誤差等於

$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{d}{2} \tag{72}$$

水準測量或距離測量時，以路徑過長而分段施測，在每段內往返各測一次，然後混合平差之。茲令每段之觀測值差爲 $d_1,\ d_2,\ d_3 \cdots\cdots d_n$，而其相當之中誤差等於 $m_1,\ m_2 \cdots\cdots m_n$，於是每次觀測之中誤差當用下式計算之。

$$m=\pm\sqrt{\frac{m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_n{}^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \tag{73}$$

而每對觀測平均值之中誤差爲：

$$M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}} \tag{74}$$

各次觀測精度不能盡同，各水準測量之分段施測時因環境之特殊、分段各有長短，其由不同段所得之觀測值差，應給與相當之權。

令 l 及 l' 爲每對之觀測值，ε 及 ε' 則爲其相當之眞誤差，於是每對觀測所得之關係可以下式表示之。

$$\left.\begin{array}{ll} l_1+\varepsilon_1=l'_1+\varepsilon'_1 & \text{或 } l_1-l'_1=d_1=\varepsilon'_1-\varepsilon_1 \\ l_2+\varepsilon_2=l'_2+\varepsilon'_2 & \quad l_2-l'_2=d_2=\varepsilon'_2-\varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n+\varepsilon_n=l'_n+\varepsilon'_n & \quad l_n-l'_n=d_n=\varepsilon'_n-\varepsilon_n \end{array}\right\} \tag{75}$$

乘上式各以 $\sqrt{p_1},\ \sqrt{p_2},\ \cdots,\ \sqrt{p_n}$ 而求其平方總和，得

$$\frac{[d^2p]}{n}=\frac{[\varepsilon^2p]}{n}+\frac{[\varepsilon'^2p]}{n}-\frac{2[\varepsilon\varepsilon'\sqrt{p}\sqrt{p}]}{n}$$

故 $$\frac{[d^2p]}{n}=\frac{[(\sqrt{p}\,\varepsilon)^2]}{n}+\frac{[(\sqrt{p}\,\varepsilon')^2]}{n}-\frac{2[(\sqrt{p}\,\varepsilon)(\sqrt{p}\,\varepsilon')]}{n}, \tag{76}$$

其中按權與中誤差之關係,可知 $\sqrt{p}\,\varepsilon$ 與 $\sqrt{p}\,\varepsilon'$ 等相當於權單位時之眞誤差，故(76)之末項應爲零,而第一二兩項則均爲 m^2，m 爲權單位之中誤差也，因得

$$\frac{[d^2p]}{n}=2m^2$$

故

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2p]}{2n}} \tag{77}$$

是卽權等於 1 時每次觀測之中誤差，每對觀測平均值之中誤差當以 $\sqrt{2}$

除上式，卽得

$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \tag{78}$$

舉凡長距離或水準測量，中誤差之累積盡與所測路線長度 S 之開方成正比例，故各觀測之權適與 S 成反比，卽 $p\propto\frac{1}{S}$。若以此值代入（77）及(78)則得

$$m=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{S}\right]} \tag{79}$$

$$M=\pm\sqrt{\frac{1}{4n}\left[\frac{d^2}{S}\right]} \tag{80}$$

上述各式之應用，將以下列諸例說明之：

例一：某圖上之距離均各量測兩次，其結果列如下表，試求某一次觀測之中誤差。

次數	觀測值 I	觀測值 II	d	dd
1	20.45 公厘	20.55 公厘	−0.10	0.0100
2	44.00 公厘	40.05 公厘	−0.05	0.0025
3	65.95 公厘	66.00 公厘	−0.05	0.0025
4	99.55 公厘	99.50 公厘	+0.05	0.0025
5	132.45 公厘	132.60 公厘	−0.15	0.0225
6	23.55 公厘	23.60 公厘	−0.05	0.0025
7	45.45 公厘	45.45 公厘	0	0
8	79.05 公厘	79.05 公厘	0	0
9	111.95 公厘	112.00 公厘	−0.05	0.0025
10	21.90 公厘	22.00 公厘	−0.10	0.0100
11	55.45 公厘	55.45 公厘	0	0
12	88.40 公厘	88.40 公厘	0	0
13	33.65 公厘	33.60 公厘	+0.05	0.0025
14	66.45 公厘	66.45 公厘	0	0
15	32.90 公厘	32.95 公厘	−0.05	0.0025
				0.0600

$$m=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}=\sqrt{\frac{0.0600}{2\times15}}=\pm0.045\ 公厘$$

例二：水準點1至6間往返各測一次，其記錄如下，試求一公里內某對觀測之中誤差。

水準點	I	II	I−II=d	dd	S	$\frac{dd}{S}$
1	−0.7853 公尺	−0.1859 公尺	+0.6 公厘	0.36	0.72 公厘	0.50
2	−1.6258 公尺	+1.6262 公尺	−0.4 公厘	0.16	0.42 公厘	0.38
3	+1.4329 公尺	+1.4323 公尺	+0.6 公厘	0.36	0.47 公厘	0.79
4	+0.5106 公尺	+0.5094 公尺	+1.2 公厘	1.44	0.48 公厘	3.00
5	−0.0073 公尺	−0.0049 公尺	−2.4 公厘	5.76	0.51 公厘	11.30
$n=5$	+3.5693	+3.5679	+2.4			15.95
	−0.1926	−0.1908	−2.8			
	+3.3767	+3.3771	−0.4			
	−3.3771					
	−0.0004					

一公里長每次觀測之中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{dd}{S}\right]}=\pm\sqrt{\frac{1}{10}\times 15.95}=\pm 1.26\text{公厘}$$

一公里長每對觀測平均值之中誤差：

$$M=\pm\sqrt{\frac{1}{4n}\left[\frac{dd}{S}\right]}=\pm\sqrt{\frac{1}{20}\times 15.95}=\pm 0.89\text{公厘}$$

習 題

1. 某一角度曾量測10次，其紀錄如下：

1.	45°29'55.4"	6.	45°29'54.8"
2.	55.1"	7.	55.0'
3.	5.37"	8.	53.6'
4.	5.57"	9.	56.6"
5.	58.3"	10.	57.7"

試求其算數平均值及其中誤差

2. 用甲乙兩經緯儀量測某一角度，其結果如下：

甲　24°13'36"±3.1"

乙　24°13'24"±13.8"

求該角度之最或是值及其中誤差。

3．量測某一距離，第一次以能讀一公分之鋼尺量5次，第二次以能讀1公寸之鐵鍊量5次，其結果分列如下：

鋼　　尺	鐵　　鍊
741.17 公尺	741.2 公尺
741.19 公尺	741.4 公尺
741.22 公尺	741.0 公尺
741.12 公尺	741.3 公尺
740.10 公尺	741.1 公尺

求各次之權及其距離之長度。

4．一角度測20次，得中誤差 ±0.42″，問增測若干次，其中誤差方成 ±0″.28。

5．下圖所示 P 點之高程係分別根據四已知高程之水準點 A, B, C 及 D 應用水準測量，測得其結果如下：

121.770 公尺，　121.788 公尺，

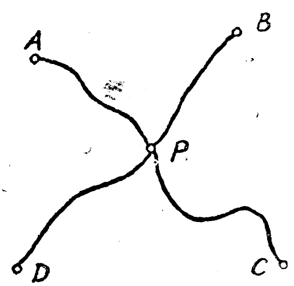
121.750 公尺，　121.766 公尺，

P 點至各點之距離各為：

$AP=2.56$ 公里；　$BP=3.00$ 公里。

$CP=1.78$ 公里；　$DP=0.70$ 公里。

試求 P 點高之平均值與中誤差。



第四章　第五圖

6．某一圖形之面積係用三種面積計求之其結果如下：

$F_1=45.1$ 平方公寸　$m_1=\pm0.30$ 平方公寸

$F_2=45.1$ 平方公寸　$m_2=\pm0.12$ 平方公寸

$F_3=44.9$ 平方公寸　$m_3=\pm0.18$ 平方公寸

問其算學平均值及中誤差為若干？

7．某一導線網共有10角，各角均量測二次，作第二次量測時，儀器放置及目標對準均曾重行處理，觀測結果如下，求所得各導線網角度之中誤差。

	l_1	l_2		l_1	l_2
1.	193°16'33"	8"	6.	110°17'42"	58"
2.	154°28'42"	35"	7.	16[illegible]°[illegible]4'52"	22"
3.	26°2[illegible]'28"	46"	8.	198°14'39"	34"
4	170°48'30"	10"	9.	23[illegible]°41'39"	51"
5.	23[illegible]°35'18"	28"	10.	140°23'45"	25"

8. 某一水準線係沿馬路進行，共分十二段，作水準測量時每段均往返各測一次，二觀測值差及距離列表如下：

	d	S
1.	5 公厘	0.99 公厘
2.	7 公厘	0.69 公厘
3.	6 公厘	0.92 公厘
4.	4 公厘	0.99 公厘
5.	2 公厘	0.59 公厘
6.	3 公厘	0.80 公厘
7.	16 公厘	0.86 公厘
8.	9 公厘	0.41 公厘
9.	20 公厘	1.01 公厘
10.	14 公厘	0.72 公厘
11.	12 公厘	0.76 公厘
12.	6 公厘	0.61 公厘

試求其水準測量一公里之中誤差。

第五章　間接觀測之平差

第一節　間接觀測平差之原理

所謂間接觀測者，乃 n 個觀測量同爲一組 u 個未知數之函數。所有 u 個未知數，必須相互獨立而無關係。易言之，任一未知數均不能由其他未知數用數學方法求得之。同時此 n 個觀測量又必須爲此 u 個未知數不同之函數，且所有 n 個函數僅與此 u 個未知數有關，此外不復含有任何其他未知數。在此種情形之下，必須 $n \geqq u$，始能由此 n 個觀測值定出 u 個未知數之值。當 $n=u$ 時，吾人適能用代數方法解 u 個聯立方程式，而求未知數之值，但無所謂平差；當 $n>u$ 時，遂有多餘觀測，因而產生平差問題。

爲便於下述方法之導出，先假定所有 n 個觀測量均爲 u 個未知數之一次函數，以公式表示之如下：

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} F_1 &= a_1X+b_1Y+\cdots\cdots+k_1 \\ F_2 &= a_2X+b_2Y+\cdots\cdots+k_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n &= a_nX+b_nY+\cdots\cdots+k_n \end{aligned}\right\}}_{u\text{ 個未知數}} n\text{ 個函數} \qquad (1)$$

式中 X, Y …… 代表未知數之眞值，F_1, F_2 …… F_n 代表觀測量之眞值，a, b, …… k 爲已知之係數，均爲實數。任意一組係數 a_i, b_i …… k_i 均不與其他一組係數相等或成比例，且不能同時爲零。

今設 F_1, F_2 …… F_n 之觀測值爲 L_1, L_2, …… L_n，由此 n 個觀測值並不能求出未知數 X, Y …… 之眞值，蓋觀測值 L 均含有觀測誤差也。將 L_1, L_2 …… L_n 等代入(1)內之 F_1, F_2 …… F_n 等，必須加以 L_i 之眞誤差 ε_i，故

$$\left.\begin{aligned} L_1+\varepsilon_1 &= a_1X+b_1Y+\cdots\cdots+k_1 \\ L_2+\varepsilon_2 &= a_2X+b_2Y+\cdots\cdots+k_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n+\varepsilon_n &= a_nX+b_nY+\cdots\cdots+k_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

但眞誤差 ε 之値旣屬不知，故 X, Y 等之眞値，亦無法求定。吾人之目的乃在依最小二乘法之原理，求得 X, Y …… 等之最或是値 x, y …… 等，最小二乘法之原理要求各觀測値之改正數 v 之平方和必須爲最小。將最或是値 x, y …… 代入式(2)而求出各觀測値 L 之改正數 v，吾人可得下列方程式：

$$\left.\begin{array}{l} L_1+v_1=a_1x+b_1y+\cdots\cdots+k_1 \\ L_2+v_2=a_2x+b_2y+\cdots\cdots+k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n+v_n=a_nx+b_ny+\cdots\cdots+k_n \end{array}\right\} \tag{3}$$

將上式左方之 L 項與右方之常數項 k 合併，命 $L_i-k_i=l_i$，卽得

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_1x+b_1y+\cdots\cdots-l_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+\cdots\cdots-l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=a_nx+b_ny+\cdots\cdots-l_n \end{array}\right\} \tag{4}$$

此一組方程式名爲"改正數方程式"。然最小二乘法之原理必須 $[vv]$ 爲最小値時，x, y …… 等始爲最或是値。x, y ……等旣爲互不相關之變數，欲求 $[vv]$ 之最小値，當按微分方法求之。卽

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial[vv]}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots \text{等}$$

將改正數方程式代入(2)內而微分之，得

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=2\left[\frac{v\partial v}{\partial x}\right]=2[av]=0$$

$$\frac{\partial[vv]}{\partial y}=2\left[\frac{v\partial v}{\partial y}\right]=2[bv]=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將式(4)代入，可得一組聯立方程式：

$$\left.\begin{array}{l} [av]=[aa]x+[ab]y+\cdots\cdots-[al]=0 \\ [bv]=[ab]x+[bb]y+\cdots\cdots-[bl]=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\text{共爲 } u \text{ 個} \tag{6}$$

此聯立方程式名爲"法方程式"。法方程式之數目與未知數之數目相等，故解法方程式後，卽可得未知數之最或是値，爲解釋法方程式之性質，茲假

定 $n=4$，$u=3$，其改正數方程式之形式如下：

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2\\ v_3&=a_3x+b_3y+c_3z-l_3\\ v_4&=a_4x+b_4y+c_4z-l_4 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

法方程式之形式如下：

$$\left.\begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]&=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} [aa]&=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+a_4a_4\\ [ab]&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\\ [ac]&=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4\\ [al]&=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+a_4l_4 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

…………………………………………

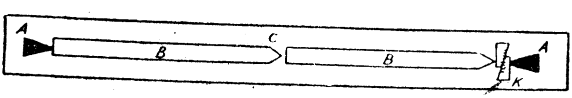
由法方程式(8)可以看出

(1) 法方程式中各未知數之係數，在行與列間互相對稱，而以 $[aa]$，$[bb]$，$[cc]$之對角線爲對稱軸；

(2) 所有對稱軸上各係數，因係平方之和，故永遠爲正數。

因法方程式具有此種特性，使其解算時可以應用特別方法，此點將於第四節中詳論之。

例1　今設有木製測尺四根，長各五公尺左右，欲於一長約十公尺之比長器上，作精密之比較。比長器兩端之距離經用標準尺測定之結果爲 10030.20 公厘。檢定木製測尺時，每次應用測尺兩根，使其相接順放於比長器上，一端緊抵比長器之一端點，另一端則用一金屬測微楔量定與另一端點之間隙，如下圖所示：



第五章　第一圖

C 爲比長器　　B 爲測尺　　A 爲比長器之兩端點，係固定於 C 上。K 爲量微楔。

今命此四測尺之號數為 I, II, III, IV, 比較時將此四個測尺按所有配合各比一次,其結果如下:

觀測號數	應用測尺	測微楔之讀數
1	I　II	27.94 公厘
2	I　III	27.11 公厘
3	IV	27.91 公厘
4	II　III	27.87 公厘
5	II　IV	28.22 公厘
6	III　IV	27.58 公厘

在此問題中,未知數為四個測尺之長度,而觀測量則為比長器兩端點間之長度與每二個尺長之較,故為間接觀測。

設 x, y, z, t 為測尺 I, II, III, IV 之最或是長度,則吾人可立即將改正數方程式列出:

$$\begin{aligned}
27.94+v_1 &= -x-y \qquad\qquad +10030.20\\
27.11+v_2 &= -x \qquad -z \qquad +10030.20\\
27.91+v_3 &= -x \qquad\qquad -t+10030.20\\
27.87+v_4 &= \qquad -y-z \qquad +10030.20\\
28.22+v_5 &= \qquad -y \qquad -t+10030.20\\
27.58+v_6 &= \qquad\qquad -z-t+10030.20
\end{aligned}$$

為計算方便起見,因 x, y, z, t 之值均近於 5000 公厘,故命 $x=5000+\xi$, $y=5000+\eta$, $z=5000+\zeta$, $t=5000+\tau$, 並將上式左方觀測值歸併於右方常數項內,即得

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= -\xi-\eta \qquad\qquad +2.26\\
v_2 &= -\xi \qquad -\zeta \qquad +3.09\\
v_3 &= -\xi \qquad\qquad -\tau+2.29\\
v_4 &= \qquad -\eta-\zeta \qquad +2.83\\
v_5 &= \qquad -\eta \qquad -\tau+1.98\\
v_6 &= \qquad\qquad -\zeta-\tau+2.62
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

按照公式(9)求得法方程式之係數:

$$
\begin{array}{lllll}
[aa]=+3 & [ab]=+1 & [ac]=+1 & [ad]=+1 & [al]=-\ 7.64 \\
 & [bb]=+3 & [bc]=+1 & [bd]=+1 & [bl]=-\ 6.57 \\
 & & [cc]=+3 & [cd]=+1 & [cl]=-\ 8.04 \\
 & & & [dd]=+3 & [dl]=-\ 6.89 \\
 & & & & [ll]=-36.11
\end{array}
$$

故法方程式如下:

$$
\left.\begin{array}{r}
3\xi+\ \eta+\ \zeta+\ \tau-7.64=0 \\
\xi+3\eta+\ \zeta+\ \tau-6.57=0 \\
\xi+\ \eta+3\zeta+\ \tau-8.04=0 \\
\xi+\ \eta+\ \zeta+3\tau-6.89=0
\end{array}\right\} \qquad (11)
$$

欲解此方程式,先求其和爲

$$6\xi+6\eta+6\zeta+6\tau-29.14=0$$

或

$$\xi+\ \eta+\ \zeta+\ \tau-\ 4.68=0 \qquad (12)$$

以式(11)內之各式順次減去(12)卽得

$$
\begin{array}{r}
2\xi-2.78=0 \\
2\eta-1.71=0 \\
2\zeta-3.18=0 \\
2\tau-2.04=0
\end{array}
$$

故

$$
\begin{array}{ll}
\xi=+1.39 & x=5001.39\ 公厘 \\
\eta=+0.86 & y=5000.86\ 公厘 \\
\zeta=+1.59 & z=5001.59\ 公厘 \\
\tau=+1.02 & t=5001.02\ 公厘
\end{array}
$$

至是此問題已經解出。x, y, z, t 卽爲各測尺檢定之値。今將 ξ, η, ζ, τ 各値代入(10)內, 更可求出各次觀測値之改正數:

$$
\begin{array}{llll}
v_1=-0.01 & v_2=-0.11 & v_3=+0.12 & v_4=+0.12 \\
v_5=-0.10 & v_6=-0.01 & [vv]=0.0511 &
\end{array}
$$

此數當爲一切可能$[vv]$之最小値。

第二節　非一次函數

前節於導出間接觀測之平差原理時, 先假定觀測値爲未知數之一次函數。倘此函數並非一次,則必須將其改化,始能應用前節所得之公式。例

如下列函數：

$$l=ax+bxy^2 \tag{13}$$

並非一次，但如命 $z=xy^2$

而代入式(13)，即得一次函數。

$$l=ax+bz. \tag{14}$$

此種辦法並不能應用於任一函數內，是以必須採用下述更普遍之方法。

在任意函數

$$L+v=f(x,y,z\cdots\cdots) \tag{15}$$

內，倘能求得未知數 x, y, z, $\cdots\cdots$等之近似值 x_0, y_0, z_0，而命

$$x=x_0+\xi \qquad y=y_0+\eta \qquad z=z_0+\zeta,$$

使 ξ, η, ζ 僅為極小之改正數，則按照泰羅定律，可將式(15)展成下列級數：

$$L+v=f(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\xi+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\zeta$$

$$+\xi,\eta,\zeta\text{之二次以上各項} \tag{16}$$

當 x_0, y_0, z_0 之值與 x, y, z 相差甚微，即 ξ, η, ζ 為極小之改正數時，二次以上之微分項可以捨去。再命

$$a=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \qquad b=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=y_0} \qquad c=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z_0}$$

$$-l=f(x_0,y_0,z_0)-L \tag{17}$$

則式(13)即變為一次之改正數方程式：

$$v=a\xi+b\eta+c\zeta-l \tag{18}$$

然後即可應用上節所述之方法，列出法方程式，而求 ξ, η, ζ 之值。得出後加之於 x_0, y_0, z_0 上遂得未知 x, y, z 之最或是值矣。

上法可應用於任何種函數（外合或內合函數均可），唯一之條件，為 x_0, y_0, z_0 等近似值應與其最或是值相差甚微，俾吾人於捨去公式(16)內 ξ, η, ζ 之二次以上各項時，不致發生任何影響。至於如何求出近似值，則須按情形而決定之。倘於平差後，發現 ξ, η, ζ 等值尚相當巨大，則必須再以改正後之 x, y, z 作為近似值而將 a, b, c, l 各係數重新計算，再定一新值，直至平差後所得之值與近似值相差無幾為止。

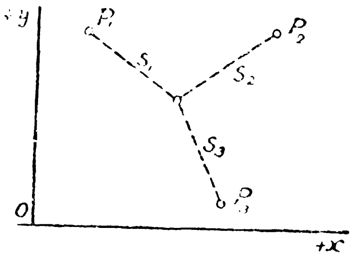
上述應用近似值之方法，亦可施之於一次函數，蓋有時未知數之值大

小懸殊，計算時不易得同等之精度，或常數項過大，解算法方程式至為不便，此時均以代入近似值較為方便，或以一新未知數代一舊未知數，以便將其化簡。此法於上節之例一內已經應用。除此之外，下列之例二更示如何利用未知數之倍數化簡法方程式之方法。

例一：已知：三點 P_1, P_2 及 P_3 之坐標 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 及 (x_3, y_3)

觀測：距離 S_1, S_2, S_3

求：　P 點之坐標。



第五章　第二圖

設新點 P 之坐標為 x, y, 於是得改正數方程式：

$$S_i+V_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

令　$$x=x_0+\xi, \qquad y=y_0+\eta$$

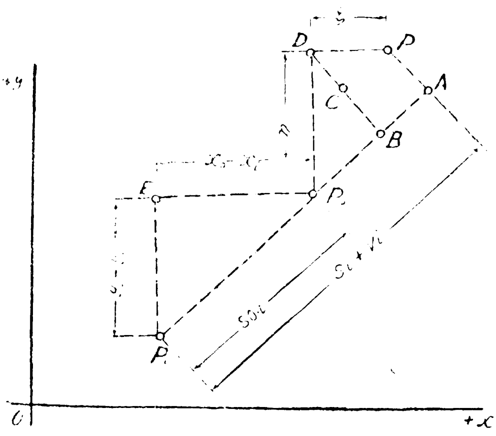
故　$$S_i+V_i=\sqrt{(x_0+\xi-x_i)^2+(y_0+\eta-y_i)^2},$$

依泰羅定理展開後，得

$$S_i+V_i=\sqrt{(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2} + \sqrt{\frac{x_0-x_i}{(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2}}\xi+\sqrt{\frac{y_0-y_i}{(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2}}\eta \tag{19}$$

或　$$V_i=a_i\xi+b_i\eta-L$$

而　$$\left.\begin{aligned} a_i=\frac{x_0-x_i}{S_{0\cdot i}},\quad b_i=\frac{y_0-y_i}{S_{0\cdot i}},\quad \sqrt{(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2}=S_{0\cdot i},\\ -l=S_{0\cdot i}-S_i. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$



第五章　第三圖

式(20)之關係亦可以幾何學證明之，設 P 為一或是點，其與 P_i 之距離為 S_i+V_i，而 P_0 為一相當於近似坐標 x_0, y_0 之近似點，與 P_i 相距 $S_{0\cdot i}$ 經 P 點作 PA 垂直於 P_0P_i 並作 PC 線平行於 AP_0，於是得下列之關係：

$$S_i+V_i=S_{0\cdot i}+P_0A$$

$$P_0A=P_0B+BA=P_0B+CP$$

或　$$S_i+V_i=S_{0\cdot i}+P_0B+CP$$

因兩直角三角形 BDP_0 及 CPD 與三

角形 EP_0P_i 相似，故其間之幾何關係可以坐標差及長距表示之，即

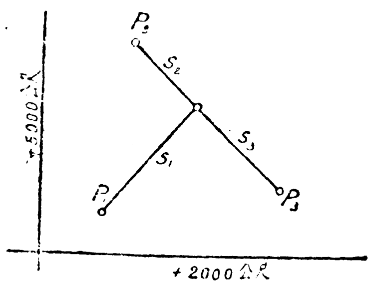
$$P_0B=\frac{x_0-x_i}{S_{0\cdot i}}\xi,\qquad CP=\frac{y_0-y_i}{S_{0\cdot i}}\eta$$

而
$$S_i+V_i=S_{0\cdot i}+\frac{x_0-x_i}{S_{0\cdot i}}\xi+\frac{y_0-y_i}{S_{0\cdot i}}\eta \tag{19}$$

令設 P_1，P_2，P_3 三點之坐標及量得之 S_1，S_2，S_3 諸距離之值如下，求 P 點之坐標 (x,y)：

$$P_1\begin{cases}x_1=+2092.76\text{公尺}\\ y_1=+5132.30\text{公尺}\end{cases}\qquad P_2\begin{cases}x_2=2692.20\text{公尺}\\ y_2=5203.15\text{公尺}\end{cases}\qquad P_3\begin{cases}x_3=2210.59\text{公尺}\\ y_3=5665.42\text{公尺}\end{cases}$$

$$S_1=306.00\ \text{公尺}\qquad S_2=387.36\ \text{公尺}\qquad S_3=354.86\ \text{公尺}$$



第五章　　第四圖

根據 S_1 及 S_2 二值與 P_1 及 P_2 兩點之坐標，求得 P 點坐標之近似值爲：

$$x_0=2326.24\ \text{公尺}$$
$$y_0=5330.10\ \text{公尺}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\xi\\ y&=y_0+\eta\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

茲將 a，b，$-l$ 等係數之計算，列成下表：

	x_0-x_i	y_0-y_i	$(x_0-x_i)^2$	$(y_0-y_i)^2$	$S_{0\cdot i}^2$	$S_{0\cdot i}$	S_i	a $\frac{x_0-x_i}{S_{0\cdot i}}$	b $\frac{y_0-y_i}{S_{0\cdot i}}$	$-l$ $S_{0\cdot i}-S_i$
	公尺	公尺					公尺			公寸
1	+233.48	+197.80	54513	89125	93638	306.00	306.00	+0.76	+0.65	0
2	−365.96	+126.95	133927	16117	150044	387.36	387.36	−0.94	+0.33	0
3	+115.65	−335.32	13375	112439	125814	354.70	354.86	+0.33	−0.95	−1.6

根據上表之數值，可列改正數方程式如下：

$$v_1=+0.76\xi+0.65\eta+0$$
$$v_2=-0.94\xi+0.33\eta+0$$
$$v_3=+0.33\xi-0.95\eta-1.6$$

由是得法方程式：

$$1.57\xi-0.13\eta-0.53=0$$
$$-0.13\xi+1.43\eta+1.52=0$$

解出上式得　$\xi=+0.33,\qquad \eta=-1.04$

代入公式(20)，得未知數之値：

$$x=2326.24+0.33=2326.57$$
$$y=5330.10-1.04=5329.06$$

例二：氣象台對於氣壓之觀測最爲注意，而歷時復悠久，茲以十二年間某九氣象台之平均氣壓平差之。關於氣壓升降，係假定其依高程作有規律之比例。若以 x 表示海平面 $(h=0)$ 上之氣壓讀數，而 y 爲常數，則根據氣壓高程測量之原理，可得計算海拔 h 之方程式如下：

$$h=y\log\frac{x}{B}. \tag{21}$$

B 爲相當於海拔 h 之氣壓讀數。上式內之 h 係用三角高程測量決定，並假定爲無誤差，而各氣壓讀數 B 之精度完全相等。排列方程式以前，觀測值須列爲 x 及 y 之函數。即

$$\frac{h}{y}=\log\frac{x}{B}。\qquad \frac{x}{B}=10^{\frac{h}{y}},$$

或
$$B=x\cdot 10^{-\frac{h}{y}} \tag{22}$$

觀　測　記　錄

	h	B		h	B		h	B
1	120.2 公尺	751.18 公厘	4	347.6 公尺	731.27 公厘	7	708.1 公尺	700.48 公厘
2	225.1 公尺	742.37 公厘	5	406.7 公尺	726.99 公厘	8	733.5 公尺	697.64 公厘
3	270.6 公尺	738.50 公厘	6	492.4 公尺	718.16 公厘	9	768.9 公尺	695.25 公厘

由上列九觀測值求式(22)內二未知數 x 及 y 時，若不於 B_i 上加以改正數 v_i，則所得之結果將不能互相一致，故應將式(22)列成下式：

$$\left.\begin{aligned}
B_1+v_1&=x\cdot 10^{-\frac{h_1}{y}}\\
B_2+v_2&=x\cdot 10^{-\frac{h_2}{y}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_9+v_9&=x\cdot 10^{-\frac{h_9}{y}}
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

依前例，先求未知數之近似值，x_0 及 y_0。此值之決定，係由式(21)求之。茲將該式作下列寫法：

$$\log x_0-\log B=\frac{h}{y} \tag{24}$$

而以第一及第九觀測值代入，於是得：

$$\log x_0-\log 751.18=\frac{120.2}{y_0}$$

$$\log x_0-\log 695.23=\frac{768.9}{y_0}$$

解出以後，得近似值

$$x_0=762.03, \qquad y_0=192.98$$

將近似值代入式(23)而依泰羅定律處理之，因其函數爲：

$$f(x_1y)=x10^{-\frac{h}{y}} \tag{25}$$

故所得之係數及常數可以下式表示之：

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{\partial\left(x10^{-\frac{h}{y}}\right)}{\partial x}=10^{-\frac{h}{y}}\\
b&=\frac{\partial\left(x10^{-\frac{h}{y}}\right)}{\partial y}=x10^{-\frac{h}{y}}\cdot\frac{h}{y^2}\cdot\frac{1}{\mu}\\
-l&=x_010^{-\frac{h}{y_0}}-B \quad 或 \quad =B_0-B
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

實際計算時，所有未知數 x 及 y 均以近似值 x_0 及 y_0 代替之，而將式(26)改成對數式，以其易於計算也。

$$\left.\begin{aligned}
\log a&=-\frac{h}{y_0} \qquad 或 \qquad \log\frac{1}{a}=\frac{h}{y_0}\\
\log b&=-\frac{h}{y_0}+\log\frac{x_0h}{\mu y_0{}^2}=\log a+\frac{x_0h}{\mu y_0{}^2}\\
\log(-l+B)&=\log x_0-\frac{h}{y_0}=\log x_0+\log a
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

x_0 及 y_0 爲已知之近似值，h 爲觀測值，μ 乃對數係數，等於 0.43429，

$\log\mu=9.6377798$。將上述各數代入式(27)，逐次計算即得 a_i，b_i 及 l_i 等值，茲列於下表：

	a	b	$-l$		a	b	$-l$		a	b	$-l$
1	+0.986	+0.00056	0.00	4	+0.959	+0.00157	−0.20	7	+0.919	+0.00307	−0.20
2	+0.973	+0.00103	−0.53	5	+0.953	+0.00182	−1.06	8	+0.916	+0.00317	+0.55
3	+0.963	+0.00123	−0.68	6	+0.943	+0.00219	+0.38	9	+0.912	+0.00331	0.00

由此得改正數方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_1&=0.986\xi+0.00056\eta'+0.00\\ v_2&=0.973\xi+0.00103\eta'-0.53\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\tag{28}$$

第二未知數所以用 η' 代表者，因尚須變更故也。式(28)內兩未知數之係數，位數相差甚大，實際計算不甚便利，故令

$$\frac{\eta'}{100}=\eta,\qquad 或\qquad \eta'=100\eta\tag{29}$$

於是改正數方程式變成：

$$\left.\begin{aligned} v_1&=0.986\xi+0.056\eta+0.000\\ v_2&=0.973\xi+0.103\eta-0.530\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\tag{30}$$

由上式可列法方程式。

$$\left.\begin{aligned} +0.0884\xi+1.6798\eta-1.7160&=0\\ +0.6798\xi+0.4383\eta-0.1725&=0 \end{aligned}\right\}\tag{31}$$

解出：

$$\xi=+0.642,\qquad \eta=-2.07\qquad \eta'=-207$$

$$\therefore\qquad x=x_0+\xi=762.03+0.64=762.67$$

$$y=y_0+\eta=19298-207\quad=19091$$

欲求之公式應爲：

$$h=19091\log\frac{726.67}{B}$$

或

$$\log B=\log 726.67-\frac{h}{19091}\tag{32}$$

第三節　不等權之間接觀測

以上所論，均假定各觀測值之精度相等，今再設各觀測值之權不相等，其法方程式將成何種形式，當於下面導出之：

設下列方程式爲各觀測值之改正數方程式及其權，

$$\left.\begin{array}{ll} v_1=a_1x+b_1y+\cdots\cdots-l_1 & \text{權 } p_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+\cdots\cdots-l_2 & \text{權 } p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_n=a_nx+b_ny+\cdots\cdots-l_n & \text{權 } p_n \end{array}\right\} \qquad (33)$$

不等權觀測之最小二乘法原理爲：

$$[pvv]=\text{最小值} \qquad (34)$$

已於第四章詳論，茲按第一節方法將上式(33)分別依 x, y ……等未知數微分之，於是得：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial[pvv]}{\partial x}=2\left[\dfrac{pv\partial v}{\partial x}\right]=2[pav]=0 \\ \dfrac{\partial[pvv]}{\partial y}=2\left[\dfrac{pv\partial v}{\partial y}\right]=2[pbv]=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (35)$$

將(33)之改正數 v_i 代入上式(35)，卽得不等權之法方程式：

$$\begin{array}{l} [paa]x+[pab]y+[pac]z-[pal]=0 \\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z-[pbl]=0 \\ [pac]x+[pbc]y+[pcc]z-[pcl]=0 \end{array} \qquad (36)$$

將此式或與第一節之(8)相比，可知等權與不等權之法方程式在形式上與性質上完全相同，故以下論法方程式之解出時，將以同一方法處理之。

吾人倘可用另一方法獲得相同之結果，卽將改正數方程式(33)化爲等權。若將式(33)內各式分別以其權之平方根乘之，卽得

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{p_1}v_1=a_1\sqrt{p_1}x+b_1\sqrt{p_1}y+\cdots\cdots-\sqrt{p_1}l_1 \\ \sqrt{p_2}v_2=a_2\sqrt{p_2}x+b_2\sqrt{p_2}y+\cdots\cdots-\sqrt{p_2}l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{p_n}v_n=a_n\sqrt{p_n}x+b_n\sqrt{p_n}y+\cdots\cdots-\sqrt{p_n}l_n \end{array}\right\} \qquad (37)$$

上式(37)內各式之權等於1，故可按等權辦法，命$[(\sqrt{p}v)^2]$＝最小值，亦可得方程式(36)。

第四節　法方程式係數之計算

法方程式係數 $[aa]$，$[ab]$，$[ac]$，$[al]$ 等之計算，必須精準無訛，以免結果之錯誤。欲達到此目的，計算方法必須極有系統，且必須有適當之核算。通常均列成一表，並用其和數檢核之。命

$$a_1+b_1+c_1+\cdots\cdots-l_1=s_1$$
$$a_2+b_2+c_2+\cdots\cdots-l_2=s_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n+b_n+c_n+\cdots\cdots-l_n=s_n$$
$$[aa]+[ab]+[ac]+\cdots\cdots-[al]=[as]$$
$$[ba]+[bb]+[bc]+\cdots\cdots-[bl]=[bs]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表之格式如下：

號數	a	b	c	$-l$	s	aa	ab	ac	$-al$	as
1	a_1	b_1	c_1	$-l_1$	s_1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	$-a_1l_1$	a_1s_1
2	a_2	b_2	c_2	$-l_2$	s_2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	$-a_2l_2$	a_2s_2
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
n	a_n	b_n	c_n	$-l_n$	s_n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	$-a_nl_n$	a_ns_n
[ ]	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$-[l]$	$[s]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$-[al]$	$[as]$

接下表↓

↑續上表

號數	bb	bc	$-bl$	bs	cc	$-cl$	cs	$-ll$	ls
1	b_1b_1	b_1c_1	$-b_1l_1$	b_1s_1	c_1c_1	$-c_1l_1$	c_1s_1	$-l_1l_1$	l_1s_1
2	b_2b_2	b_2c_2	$-b_2l_2$	b_2s_2	c_2c_2	$-c_2l_2$	c_2s_2	$-l_2l_2$	l_2s_2
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
n	b_nb_n	b_nc_n	$-b_nl_n$	b_ns_n	c_nc_n	$-c_nl_n$	c_ns_n	$-l_nl_n$	l_ns_n
[ ]	$[bb]$	$[bc]$	$-[bl]$	$[bs]$	$[cc]$	$-[cl]$	$[cs]$	$-[ll]$	$[ls]$

計算之檢核式爲：

$$[a]+[b]+[c]-[l]=[s]$$
$$[aa]+[ab]+[ac]-[al]=[as]$$
$$[ab]+[bb]+[bc]-[bl]=[bs]$$
$$[ac]+[bc]+[cc]-[cl]=[cs]$$
$$[al]+[bl]+[cl]-[ll]=[ls]$$

至於平方數如 a_1a_1，b_1b_1 等之計算通常均用平方表，如係數 a，b 等不超過三或四位，普通平方表均可敷用，且查表極爲簡便。乘積如 ab，ac，al，as 等，倘位數甚少，可用心算或計算尺；位數較多時，則應用乘積表，或計算機，或對數表。此數種方法內以應用計算機最爲敏捷，但亦應按照一定程序行之。如將 a_1 放於計算機之底數盤內，然後順序分別乘以 a_1，b_1，c_1，l_1，s_1 而得 a_1a_1，a_1b_1，a_1c_1，a_1l_1 a_1s_1 等值，餘類推。應用對數最爲繁雜，因每次仍須由對數化爲眞數，計算時亦應採用有系統之方法，以求簡捷。

此外在應用平方表時，計算乘積 a_1b_1 等尙有一算法，卽將乘積之計算化爲平方及加減。例如：

$$ab=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\right\}$$

吾人可先求 $a+b$，再查出其平方値，然後減去 a^2+b^2，再以 2 除之，卽得 $a\cdot b$，故

$$[ab]=\frac{1}{2}\left\{[(a+b)^2]-([aa]+[bb])\right\}$$

$$[ac]=\frac{1}{2}\left\{[(a+c)^2]-([aa]+[cc])\right\}$$

倘爲不等權觀測，則應於上表內加一權數列，p_1，p_2 …… p_n，各係數均須乘以其相當之權。故較簡捷之方法爲利用上節之式(37)，將不等權觀測化爲等權，卽命

$$\sqrt{p_1}\,a_1=a'_1 \qquad \sqrt{p_1}\,b_1=b'_1 \cdots\cdots \sqrt{p_1}\,l_1=l'_1$$
$$\sqrt{p_2}\,a_2=a'_2 \qquad \sqrt{p_2}\,b_2=b'_2 \cdots\cdots \sqrt{p_2}\,l_2=l'_2$$

……………………………………………………

先求出 a'_1，b'_1，…… a'_2，b'_2，……等，卽可按上表方式計算 $[a'a']$，

$[a'b']$, ……… 等值。

$$[a'a'] = [(\sqrt{p}\,a)^2] = [paa]$$

$$[a'b'] = [(\sqrt{p}\,a)(\sqrt{p}\,b)] = (pab]$$

………………………………………………

例一：茲將第二節例一繼續討論，測量距離之權與長度成反比，在本題內假定 300 公尺之距離爲權單位，故

$$p_i = \frac{300}{s_i} \tag{38}$$

因　　$s_1 = 306.00$公尺　　$s_2 = 387.36$公尺　　$s_3 = 354.86$公尺

乃得　　$p_1 = 0.98$　　$p_2 = 0.78$　　$p_3 = 0.85$

法方程式之係數可列成下表：

法方程式之係數表

a	b	l	s	p	paa	pab	pal	pas	pbb	pbl	pbs
+0.76	+0.65	–	+1.41	0.98	0.57	+0.48	–	+1.05	0.41	–	+0.90
−0.94	+0.33	–	−0.61	0.78	0.69	−0.24	–	+0.45	0.09	–	−0.16
+0.33	−0.95	−1.6	−2.22	0.85	0.09	−0.27	−0.45	−0.62	0.77	+1.29	+1.79
					1.35	−0.03	−0.45	+0.88	1.27	+1.29	+2.53

法方程式爲：

$$1.35\xi - 0.03\eta - 0.45 = 0$$

$$0.03\xi + 1.27\eta + 1.29 = 0$$

解出：　　$\xi = +0.31$公寸，　　$\eta = -1.01$公寸

故　　$x = x_0 + \xi = 2326.24 + 0.03 = 2326.27$公尺

$y = y_0 + \eta = 5330.10 - 0.10 = 5330.00$公尺

改正數：　$v_1 = -0.42$公寸，　$v_2 = -0.62$公寸，　$v_3 = -0.54$公寸

三距離 s_1，s_2 及 s_3 之平差值爲：

$$s'_1 = s_1 + v_1 = 306.00 - 0.04 = 305.96\text{公尺}$$

$$s'_2 = s_2 + v_2 = 387.36 - 0.06 = 387.30\text{公尺}$$

$$s'_3 = s_3 + v_3 = 354.86 - 0.05 = 354.81\text{公尺}$$

此項數值如與由三固定點 P_1，P_2，P_3 及新點 P 之坐標內所求之距離相

比較，應互相等，故可作一檢核。根據坐標求出之距離爲：

$$s'_1=305.96 \text{ 公尺}, \quad s'_2=387.30 \text{ 公尺}, \quad s'_3=354.81 \text{ 公尺}$$

上值適與平差值完全符合。其他之檢核，以改正數試之，即 $[pav]=0$，$[pbv]=0$，如下表：

a	b	p	v	pav	pbv
+0.76	+0.65	0.98	−0.42	−0.31	−0.27
−0.94	+0.33	0.78	−0.62	+0.45	−0.16
+0.33	−0.95	0.85	−0.54	−0.15	+0.44
				−0.01	+0.01

第五節　法方程式之高斯解法

法方程式爲對稱之聯立方程式，其數目與未知數之數目相等，吾人固可應用普通之約化法解算之，但因其對稱之特性，可按一固定之規則與次序逐漸約化，不但計算可以簡捷，且易於檢核。此法之應用始於高斯，故亦名高斯約化法。

爲解釋之方便，吾人可先設有一組包含三個未知數之法方程式：

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=[av]=0 \\
(\mathrm{II}) & [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=[bv]=0 \\
(\mathrm{III}) & [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=[cv]=0 \qquad (39) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(s) & [as]x+[bs]y+[cs]z-[sl]=[sv]=0
\end{array}$$

最後之和數方程式 (s)，乃爲檢核計算錯誤之用。今欲消除此組法方程式內之 x 項，可用 $-\dfrac{[ab]}{[aa]}$ 乘第一方程式(I)而與第二方程式(II)相加，即得

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa[}\right)=0$$

同樣依次以 $-\dfrac{[ac]}{[aa]}$ 及 $-\dfrac{[as]}{[aa]}$ 乘第一法方程式(I)而分別加於 (III) 及 (s) 兩式內，亦可將兩式之 x 項消去，於是吾人可得另外一組聯立方程式，較原來之法方程式(39)少一未知數，亦即少一方程式，其形式如下：

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0$$

$$\left([bc]-\frac{[ac][ab]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)z-\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left([bs]-\frac{[as][ab]}{[aa]}\right)y+\left([cs]-\frac{[as][ac]}{[aa]}\right)z-\left([sl]-\frac{[as][al]}{[aa]}\right)=0 \tag{40}$$

以上之方程式各爲第一次約化之法方程式，由上面形式觀之，可確知其仍爲對稱，即與原來法方程式有同一之性質。此法方程式之係數，如此寫法，甚爲繁長，故高斯應用下列符號表示之：

$$\begin{aligned}
[bb\cdot1]&=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\\
[bc\cdot1]&=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\\
[bl\cdot1]&=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\\
[cc\cdot1]&=[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\\
[cl\cdot1]&=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\\
[bs\cdot1]&=[bs]-\frac{[ab][as]}{[aa]}\\
[cs\cdot1]&=[cs]-\frac{[ac][as]}{[aa]}\\
[ls\cdot1]&=[ls]-\frac{[al][as]}{[aa]}
\end{aligned} \tag{41}$$

將以上之符號代入(40)，即得簡寫之第一次約化法方程式如下：

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{II})' \quad [bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0\\
&(\mathrm{III})' \quad [bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z-[cl\cdot1]=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\ s\ ) \quad [bs\cdot1]y+[cs\cdot1]z-[ls\cdot1]=0
\end{aligned} \tag{42}$$

吾人可證明式(42)之和數方程式$(s)'$仍爲$(\mathrm{II})'$ $(\mathrm{III})'$兩方程式之和，

因

$$
\begin{aligned}
[bs1] &= [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] \\
&= [ab]+[bb]+[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}([aa]+[ab]+[ac]) \\
&= [bb]+[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}([ab]+[ac]) \\
&= \left([bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}\right) + \left([bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right) \\
&= [bb\cdot1]+[bc\cdot1]
\end{aligned}
$$

同樣　$[cs.1] = [bc\cdot1]+[cc\cdot1]$

$[ls.1] = [bl\cdot1]+[cl\cdot1]$

故第一次約化後之和數方程式，仍可檢核第一次約化法方程式計算之有無錯誤。

此外吾人尚可證明 $[bb\cdot1]$，$[cc\cdot1]$ 等係數，與 $[aa]$，$[bb]$，$[cc]$ 等係數亦有同樣之性質，即均爲正數，因

$$
\begin{aligned}
[bb\cdot1] &= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \\
&= [bb] - 2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] + \frac{([ab])^2}{([aa])^2}[aa] \\
&= \left[\left(bb - 2\frac{[ab]}{[aa]}ab + \frac{([ab])^2}{([aa])^2}aa\right)\right] \\
&= \left[\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)^2\right] \qquad (43)
\end{aligned}
$$

故 $[bb\cdot1]$ 乃平方之和也。同樣亦可證明 $[cc\cdot1]$ 爲平方之和，故均必爲正數。由此可知約化後之法方程式，與原有法方程式之性質完全相同，吾人仍可用以前之方法，將(42)再行約化，將第二未知數消除，於是可得

$$[cc\cdot2]z - [cl\cdot2]=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[cs\cdot2]z - [ls\cdot2]=0 \qquad (44)$$

式中之 $[cc\cdot2]$ 等乃以前述方法由 $[cc\cdot1]$ 等約化得來，其意義如下：

$$[cc\cdot2]=[cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$$

$$[cl\cdot2]=[cl\cdot1]-\frac{[bc\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]} \tag{45}$$

餘類推。

上式(44)名為第二次約化之方程式，$[cc\cdot2]$仍為正數，且$[cs\cdot2]=[cc\cdot2]$，$[ls\cdot2]=[cl\cdot2]$，其證明用以前之方法卽可推得，故不再贅述，

原有之法方程式僅含三未知數，經兩次約化之後，僅餘一未知數 z，故此時已可求得 z 之値：

$$z=\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]} \tag{46}$$

將 z 值代入第一次約化法方程式(42)之第一式 (II)′ 內，卽得

$$y=\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z \tag{47}$$

將 (46) 及 (47) 兩式代入原來法方程式 (39) 之第一式 (I) 內，卽得 $x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z$，於是 x, y, z 之値均可求出矣。　(48)

此例僅含三個未知數，如未知數之數目尙多，則約化之次數亦多。當有 n 個未知數時，必須約化 $(n-1)$ 次，由第$(n-1)$次之約化方程式中求出最後一未知數之值，然後代入 $(n-2)$，$(n-3)$ …… 各約化法方程式內之第一式，卽可順序求出其他各未知數之值。

由上述之高斯約化法，可知算求未知數最主要之方程式為：

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]&=0\\
[bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]&=0\\
[cc\cdot2]z-[cl\cdot2]&=0
\end{aligned} \tag{49}$$

倘將各式分別以 $[aa]$，$[bb\cdot1]$，$[cc\cdot1]$ 除之，則可書成

$$\left.\begin{aligned}
x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[al]}{[aa]}&=0\\
y+\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}&=0\\
z-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}&=0
\end{aligned}\right\} \tag{49}^*$$

第六節 改正數平方和之計算

將未知數 x, y, z ……等代入改正數方程式內，即可求得改正數，平方之相加，即得改正數平方和．但亦可於約化法方程式時由 $[ll]$ 求之，並可作整個解算法方程式之檢核計算．玆將其公式導出於下：

改正數方程式爲：

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1x + b_1y + c_1z - l_1 = 0 \\ v_2 = a_2x + b_2y + c_2z - l_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_nx + b_ny + c_nz - l_n = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{權} & p_1 \\ \text{權} & p_2 \\ \cdots & \cdots \\ \text{權} & p_3 \end{array} \tag{50}$$

將(50)內各方程式順次乘以 $v_1, v_2, \cdots\cdots v_n$ 而加之，則得

$$[vv] = [av]x + [bv]y + [cv]z - [lv] \tag{51}$$

但 $$[av] = [bv] = [cv] = 0$$

故 $$[vv] = -[lv] \tag{52}$$

乘(50)內各式以相當之 $-l$ 而加之，於是

$$-[lv] = -[al]x - [bl]y - [cl]z + [ll] \tag{53}$$

故 $$[vv] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z \tag{54}$$

不等權觀測時，可寫成下式：

$$[pvv] = [pll] - [pal]x[pbl]y[- [pcl]z \tag{54}$$

按前節式 49)

$$x = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z \tag{55}$$

將(55)代入(54)，於是

$$[vv] = [ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - \left([bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}\right)y - \left([cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\right)$$

$$= [ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - [bl\cdot1]y - [cl\cdot1]z \tag{56}$$

按前節式(49)第二未知數等於

$$y = \frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]} - \frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z \tag{57}$$

而第三未知數爲：

$$z=\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \tag{58}$$

故式(56)可寫作：

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\left([cl\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1[}\right)z$$

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-[cl\cdot 2]z$$

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \tag{59}$$

上式亦可簡寫如下：

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} \tag{60}$$

$$=[ll\,.1]-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}=[ll\cdot 2]-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}=[ll\cdot 3] \tag{61}$$

不等權觀測時，可寫成下式：

$$[pvv]=[pll\cdot 3] \tag{61)*$$

此式內之 $[ll.1]$ 及 $[ll\cdot 2]$，亦與 $[bb\cdot 1]$，$[cc\cdot 2]$ 等之意義相同，蓋由導出中卽可察出

$$[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]$$

$$[ll\cdot 2]=[ll\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$$

$$[ll\cdot 3]=[ll\cdot 2]-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cl\cdot 2]$$

(61) 既示 $[vv]$ 等於 $[ll\cdot 3]$，故 $[vv]$ 亦可用約化法求之。先計算 $[ll]$，使與其他平方項同列於法方程式之末，並在對角線上，如下式：

$$\begin{array}{rrrr}
\underline{[aa]x}+[ab]y+[ac]z-[al]=0\\
+\underline{[bb]y}+[bc]z-[bl]=0\\
+\underline{[cc]z}-[cl]=0\\
\underline{[ll]}
\end{array}$$

上式爲簡單寫法，凡對角線以下各項因與上面對稱故略去之，而於各對角線項之下劃一橫線以示之。經過第一次約化後，得

$$\underline{[bb\cdot1]y}+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0$$

$$+\underline{[cc\cdot1]z}-[cl\cdot1]=0$$

$$\underline{[ll\cdot1]}$$

再約化一次得

$$\underline{[cc\cdot2]z}-[cl\cdot2]=0$$

$$\underline{[ll\cdot2]}$$

至此未知數已可求出，但爲求 $[ll\cdot3]$ 計，須再行約化一次，此次只餘一項即　　　　$[ll\cdot3]$。

將 $[ll\cdot3]$ 與由未知數代入改正數方程式內直接求得之 $[vv]$ 相比，倘二者互相符合，即可證明計算無誤。此檢核謂之"結果檢核"，蓋 x，y，z 之值是否計算有差，亦可由此驗出之。

第七節　高斯約化法之實際解算步驟

應用高斯約化法解算法方程式之理論已如上述，但 $[bb\cdot1]$，$[cc\cdot1]$ 等符號僅用於理論之演繹，實際計算時並不需要。茲將實際計算之步驟與排列法列於下，並舉例說明之：

今仍以三個未知數爲例，其法方程式爲：

$$\text{(I)}\quad [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0$$

$$\text{(II)}\quad [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=0$$

$$\text{(III)}\quad [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=0$$

計算時先將(I)，(II)，(III)三個方程式列出，但 $[ab]$，$[ac]$，$[bc]$ 等係數均屬對稱者，爲簡省不必要之項目起見，可將其略去，僅寫 $[aa]x$，$[bb]y$，$[cc]z$ 一個對角線上右方之項目，每兩行之間並空一行，以備填入

約化之方程式，其格式如下：

行	說明	x	y	z	l
1	(I) $(\mathrm{I})_a=\frac{1}{[aa]}(\mathrm{I})$	$+[aa]$ $+1$	$+[ab]$ $+\frac{[ab]}{[aa]}$	$+[ac]$ $+\frac{[ac]}{[aa]}$	$-[al]$ $-\frac{[al]}{[aa]}$
2	(II) $(\mathrm{I})_b=-\frac{[ab]}{[aa]}(\mathrm{I})$		$+[bb]$ $-\frac{[ab][ab]}{[aa]}$	$+[bc]$ $-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-[bl]$ $+\frac{[ab][al]}{[aa]}$
3	(III) $(\mathrm{I})_c=-\frac{[ac]}{[aa]}(\mathrm{I})$			$+[cc]$ $-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$-[cl]$ $+\frac{[ac][al]}{[aa]}$
4	(l) $(\mathrm{I})_l=-\frac{-[al]}{[aa]}(\mathrm{I})$				$+[ll]$ $-\frac{[al][al]}{[aa]}$
5	(s) $(\mathrm{I})_s=-\frac{[as]}{[aa]}(\mathrm{I})$	$+[as]$	$+[bs]$ $-\frac{[ab][as]}{[aa]}$	$+[cs]$ $-\frac{[ac][as]}{[aa]}$	$-[ls]$ $-\frac{[al][as]}{[aa]}$

上表計共五橫行，每橫行之內均列兩方程式。法方程式 (I)，(II)，(III)分列於首三橫格之上。第四格內列入 $[ll]$，乃爲計算$[vv]$之用。第五格內列入和數方程式 (s)，在 (1) 式之下，列入 $(\mathrm{I})_a=\frac{1}{[aa]}(\mathrm{I})$，乃爲計算未知數 x 之用。(II)，(III)，(l)，(s) 各式之下，則列入約化部份，$(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$，其意義均於首列內解釋之。$(\mathrm{I})_s$ 之首項，卽 $[as]$ 之下，可以不列，因對於以下計算無用也。

上表中在平方項對角線左下方之各項，因對稱關係，不必寫出，各式內之 x，y，z 等未知數亦經略去，而於列首書明該列係 x 或 y 項之係數。

至於 $(\mathrm{I})_a$，$(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$ 各項之符號均有一定之規則：

1. $(\mathrm{I})_a$ 各項之係數與 (I) 各項係數正負號相同。
2. $(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$ 等式之平方項係數必爲負號。
3 $[ab]$ 之符號倘爲負號，則 $(\mathrm{I})_b$ 各項之符號與(I)式相同，$[ab]$ 之符號如係正號，則 $(\mathrm{I})_b$ 各項之符號與 (I) 式相當項之符號相

反。

4. 同理 $[ac]$ 若為負號，$(\mathrm{I})_c$ 與 (I) 式相當項符號相同，否則相反。

$(\mathrm{I})_l$ 式則視 $-(al)$ 項之符號，$(\mathrm{I})_s$ 式則視 $[as]$ 項之符號。按照上述規則，在計算 $(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$，式內各項之先，即可將各項符號列出，以免錯誤。

將上表內 2，3，4，及 5 各橫行之內之兩式相加，即得第一次約化法方程式 $(\mathrm{II})'$，$(\mathrm{III})'$，$(l)'$ 與其和數方程式 $(s)'$。

行數	說明	y	z	l
1	$(\mathrm{II})'$	$+[bb\cdot1]$	$+[bc\cdot1]$	$-[bl\cdot1]$
	$(\mathrm{II})'_b=\dfrac{(\mathrm{II})'}{[bb\cdot1]}$	$+1$	$+\dfrac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-\dfrac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
2	$(\mathrm{III})'$		$+[cc\cdot1]$	$-[cl\cdot1]$
	$(\mathrm{II})'_c=-\dfrac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$		$-\dfrac{[bc\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$+\dfrac{[bc\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
3	$(l)'$			$+[ll\cdot1]$
	$(\mathrm{II})'_l=-\dfrac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$			$+\dfrac{[bl\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
4	$(s)'$	$+[bs\cdot1]$	$+[cs\cdot1]$	$-[ls\cdot1]$
	$(\mathrm{II})'_s=-\dfrac{[bs\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$		$-\dfrac{[bs\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$+\dfrac{[bs\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$

$(\mathrm{II})'_b$，$(\mathrm{II})'_c$，$(\mathrm{II})'_l$，$(\mathrm{II})'_s$ 之算法與前表相同，不再贅述，由此可得第三次約化法方程式 $(\mathrm{III})''_i$

行數	說明	z	l
1	$(\mathrm{III})''$	$+[cc\cdot2]$	$-[cl\cdot2]$
	$(\mathrm{III})''_c=\dfrac{1}{[cc\cdot2]}(\mathrm{III})''$	$+1$	$-\dfrac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
2	$(l)''$		$+[ll\cdot2]$
	$(\mathrm{III})''_l=-\dfrac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}(\mathrm{III})''$		$+\dfrac{[cl\cdot2][cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
3	$(s)''$	$+[cs\cdot2]$	$-[ls\cdot2]$
	$(\mathrm{III})''_s=-\dfrac{[cs\cdot2]}{[cc\cdot2]}(\mathrm{III})''$		$+\dfrac{[cs\cdot2][cl\cdot2]}{[cc\cdot1]}$

至此未知數 z 已可自 $(\mathrm{III})''_c$ 內求出，法方程式已完全解出，但爲求 $[ll.3]$ 計，尙須約化一次，並作檢核之用，故最後得：

$(l)'''$	$[ll\cdot 3]$
$(s)'''$	$-[ls\cdot 3]$

計算程序及其排列已如上述，計算之工具，則於各係數位數不多時(三位以下)應用計算尺之精度已足。法方程式較多時，宜用乘法表，位數較多時最好應用計算機。至於對數法則僅於無計算機時可以採用，蓋査對數表之工作甚費時間，且易生差誤。

每次之約化法方程式，均應以和數方程式檢核之，以免有差。至最後一次之公式爲：

$$[ll\cdot 3]=-[ls\cdot 3]$$

例 1：應用高斯約化法解算第一節例一之法方程式 11)

	ξ	η	ζ	τ	l	
(I)	+3.00	+1.00	+1.00	+1.00	− 7.64	
$(\mathrm{I})_a$	+1.00	+0.333	+0.333	+0.333	− 2.547	$\xi=+1.392$
(II)		+3.00	+1.00	+1.00	− 6.57	
$(\mathrm{I})_b$		−0.333	−0.333	−0.333	+ 2.547	
(III)			+3.00	+1.00	− 8.04	
$(\mathrm{I})_c$			−0.333	−0.333	+ 2.547	
(IV)				+3.00	− 6.89	
$(\mathrm{I})_d$				−0.333	+ 2.547	
l					+ 36.11	
$(\mathrm{I})_l$					−19.459	
(s)	−1.64	−0.57	−2.04	−0.89	+ 6.97	
$(\mathrm{I})_s$		+0.547	+0.547	+0.547	− 4.179	
$(\mathrm{II})'$		+2.667	+0.667	+0.667	− 4.023	
$(\mathrm{II})'_b$		+1.000	+0.250	+0.250	− 1.509	$\eta=+0.850$
$(\mathrm{III})'$			+2.677	+0.667	− 5.493	
$(\mathrm{II})'_c$			−0.167	−0.167	+ 1.006	
$(\mathrm{IV})'$				+2.667	− 4.343	
$(\mathrm{II})'_d$				−0.167	+ 1.006	
$(l)'$					+16.651	
$(\mathrm{II})'_l$					− 6.071	

$(s)'$		-0.023	-1.493	-0.343	$+2.791$	
$(\mathrm{II})'$			$+0.006$	$+0.006$	-0.034	
$(\mathrm{III})''$			$+2.500$	$+0.500$	-4.487	
$(\mathrm{III})''_c$			$+1.000$	$+0.200$	-1.795	$\zeta=+1.592$
$(\mathrm{IV})''$				$+2.500$	-3.337	
$(\mathrm{III})''_d$				-0.100	$+0.897$	
$(l)''$					$+10.580$	
$(\mathrm{III})''_l$					-8.054	
$(s)''$			-1.487	-0.337	$+2.757$	
$(\mathrm{III})''_s$				$+0.297$	$+2.669$	
$(\mathrm{IV})'''$				$+2.400$	-2.440	
$(\mathrm{IV})'''_d$				$+1.000$	-1.010	$\tau=+1.016$
$(l)'''$					$+2.526$	
$(\mathrm{IV})'''_l$					-2.479	
$(s)'''$				-0.040	$+0.088$	
$(\mathrm{IV})'''_s$					-0.041	
$(l)'''$					$+0.047$	$=[ll\cdot4]$ $=[vv]$
$(s)'''$					$+0.047$	

結果：　$\xi=+1.392$　$\eta=+0.857$　$\zeta=+1.592$　$\tau=+1.016$　$[vv]=0.047$

與第一節例1之結果相比，ξ, η, ζ, τ 之値，除此處多寫一位外，餘均相同，惟彼處 $[vv]=+0.0511$ 與 $+0.047$ 相差較多，此蓋由於約化至 $[ll\cdot4]$ 時中間經過四捨五入，最後一位已不可靠。但爲檢核之用，吾人已可認爲滿意矣。

玆應用對數表解上例，其結果雖較精確，然所費時間甚多，晚近普通均用計算機，卽此故也。

	1	2	3	4	5	6	7
	a]	b]	c]	d]	−l]	s]	檢　核
I　[a	+3.0000	+1.0000	+1.0000	+1.0000	− 7.6400	+1.6400	0
log[a	0.477 1213	0	0	0	0.883 0934	0.214 8483	
$\log\frac{I_2}{I_1}$[a		9.522 8787	9.522 8787	9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log\frac{I_3}{I_1}$[a			9.522 8787	9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log\frac{I_4}{I_1}$[a				9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log\frac{I_5}{I_1}$[a					1.289 0655	0.620 8159	
[b		+3.0000	+1.0000	+1.0000	− 6.5700	+0.5700	0
$\frac{I_2}{I_1}$[a		−0.3333	−0.3333	−0.3333	+ 2.5467	−0.5467	
		b·1]	c·1]	d·1]	−l·1]	s·1]	
II　[b		+2.6667	+0.6667	+0.6667	− 4.0233	+0.0233	−0.0001

log[b		0.425 9742	9.823 9305	9.823 9305	0.604 5824	8.367 3559	
$\log\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}$[$b$			9.221 8868	9.221 8868	0.002 5387	7.765 3122	
$\log\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}$[$b$				9.221 8868	0.002 5387	7.765 3122	
$\log\frac{\mathrm{II}_5}{\mathrm{II}_2}$[$b$					0.783 1906	8.545 9641	
[c			+3.0000	+1.0000	− 8.0400	+2.0400	0
$\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}$[$a$			−0.3333	−0.3333	+ 2.5467	−0.5467	
$\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}$[$b$			−0.1667	−0.1667	+ 1.0059	−0.0058	
			$c\cdot2$]	$d\cdot2$]	$-l\cdot3$]	$s\cdot2$]	
III [c			+2.5000	+0.5000	− 4.4874	+1.4875	−0.0001
log[c			0.397 9400	9.698 9700	0.651 9948	0.172 4570	
$\log\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}$[$c$				9.000 0000	9.953 0248	9.473 4870	
$\log\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_3}$[$c$					0.906 0496	0.126 5118	

[d		$+3.0000$	$-\ 6.8900$	$+0.8900$	0
$\frac{\mathrm{I}_4}{\mathrm{I}_1}[a$		-0.3331	$+\ 2.5467$	-0.5467	
$\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}[b$		-0.1667	$+\ 1.0059$	-0.0058	
$\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}[c$		-0.1000	$+\ 0.8975$	-0.2975	
		$d\cdot 3]$	$-l\cdot 3]$	$s\cdot 3]$	
IV [d		$+2.4002$	$-\ 2.4399$	$+0.0400$	$+0.0003$
log[d		0.380 2474	0.387 3720	8.602 0600	
$\log\frac{\mathrm{IV}_5}{\mathrm{IV}_4}[d$		0.007 1246	0.394 4966	8.609 1846	
[l			$+36.1100$	-6.9700	
$\frac{\mathrm{I}_5}{\mathrm{I}_1}[a$			-19.4564	$+4.1765$	
$\frac{\mathrm{II}_5}{\mathrm{II}_2}[b$			$-\ 6.0701$	$+0.0352$	
$\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_3}[c$			$-\ 8.0547$	$+2.6700$	
$\frac{\mathrm{IV}_5}{\mathrm{IV}_4}[d$			$-\ 2.4840$	$+0.0407$	
V [vv]			$+\ 0.0486$	-0.0476	$+0.0010$
	$\xi=+1.3914$　$\eta=+0.8567$　$\zeta=+1.5916$	$\tau=+1.0165$			

第八節 杜力特爾之解法

由上節所論之高斯解法，可知實際用以求得未知數之方程式爲 (I)，(II)′，(III)″，(IV)‴ 諸法方程式，其他各約化法方程式中之 (III)′，(IV)′，(IV)″ 等僅爲中間之方程式，原可不必寫出。此法在美國稱爲杜力特爾方法，玆將其排列法列出，然後以上節之例解示之。

	1	2	3	4	5	6
(I)	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$-[al]$	$[as]$
(I)$_a$	1	$\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$\frac{[as]}{[aa]}$
(II)		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$-[bl]$	$[bs]$
(I)$_b$		$-\frac{I_2}{I_1}\times I_2$	$-\frac{I_2}{I_1}\times I_3$	$-\frac{I_2}{I_1}\times I_4$	$+\frac{I_2}{I_1}\times I_5$	$-\frac{I_2}{I_1}\times I_6$
(II)′		$[bb\cdot1]$	$[bc\cdot1]$	$[bd\cdot1]$	$-[bl\cdot1]$	$[bs\cdot1]$
(II)′$_b$		1	$\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$\frac{[bs\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
(III)			$[cc]$	$[cd]$	$-[cl]$	$[cs]$
(I)$_c$			$-\frac{I_3}{I_1}\times I_3$	$-\frac{I_3}{I_1}\times I_4$	$+\frac{I_3}{I_1}\times II_5$	$-\frac{I_3}{I_1}\times I_6$
(II)′$_c$			$-\frac{II_3}{II_2}\times II_3$	$-\frac{II_3}{II_2}\times II_4$	$+\frac{II_3}{II_2}\times II_5$	$-\frac{II_3}{II_2}\times II_6$
(III)′			$[cc\cdot2]$	$[cd\cdot2]$	$-[cl\cdot2]$	$[cs\cdot2]$
(III)″$_c$			1	$\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}$	$-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$	$\frac{[cs\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
(IV)				$[dd]$	$-[dl]$	$[ds]$
(I)$_d$				$-\frac{I_4}{I_1}\times I_4$	$+\frac{I_4}{I_1}\times I_5$	$-\frac{I_4}{I_1}\times I_6$
(II)′$_d$				$-\frac{II_4}{II_2}\times II_4$	$+\frac{II_4}{II_2}\times II_5$	$-\frac{II_4}{II_2}\times II_6$
(III)″$_d$				$-\frac{II_4}{II_3}\times II_4$	$+\frac{II_4}{II_3}\times II_5$	$-\frac{II_4}{II_3}\times II_6$
(IV)‴				$[dd\cdot3]$	$-[dl\cdot3]$	$[ds\cdot3]$
(IV)‴$_d$				1	$-\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}$	$\frac{[ds\cdot3]}{[dd\cdot3]}$

l					$[ll]$	$[ls]$
$(\mathrm{I})_l$					$\frac{\mathrm{I}_5}{\mathrm{I}_1}\times \mathrm{I}_5$	$\frac{\mathrm{I}_5}{\mathrm{I}_1}\times \mathrm{I}_6$
$(\mathrm{II})'_l$					$\frac{\mathrm{II}_5}{\mathrm{II}_2}\times \mathrm{II}_5$	$\frac{\mathrm{II}_5}{\mathrm{II}_2}\times \mathrm{II}_6$
$(\mathrm{III})''_l$					$\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_3}\times \mathrm{III}_5$	$\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_3}\times \mathrm{III}_6$
$(\mathrm{IV})'''_l$					$\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_4}\times \mathrm{III}_5$	$\frac{\mathrm{III}_5}{\mathrm{III}_4}\times \mathrm{III}_6$
V					$[ll\cdot 4]$ $[ll\cdot 4]$	$[ls\cdot 4]$ $=-[ls\cdot 4]$

	ξ	η	ζ	τ	l	s	
(I)	+3.000	+1.000	+1.000	+1.000	− 7.640	−1.640	
$(\mathrm{I})_a$	+1.000	+0.333	+0.333	+0.333	− 2.547	−0.547	− 1
(II)		+3.000	+1.000	+1.000	− 6.570	−0.570	
$(\mathrm{I})_b$		−0.333	−0.333	−0.333	+ 2.547	+0.547	
(II)′		+2.667	+0.667	+0.667	− 4.023	−0.023	+ 1
$(\mathrm{II})'_b$		+1.000	+0.250	+0.250	− 1.509	+0.009	0
(III)			+3.000	+1.000	− 8.040	−2.040	
$(\mathrm{I})_c$			−0.333	− .333	+ 2.547	+0.547	
$(\mathrm{II})_c$			−0.167	−0.167	+ 1.006	+0.006	
(III)″			+2.500	+0.500	− 4.487	−1.487	0
$(\mathrm{III})''_c$			+1.000	+0.200	− 1.795	−0.595	0
(IV)				+3.000	− 6.890	−0.890	
$(\mathrm{I})_d$				−0.333	+ 2.547	+0.547	
$(\mathrm{II})'_d$				−0.167	+ 1.006	+0.006	
$(\mathrm{III})'_d$				−0.100	+ 0.897	+0.297	
(IV)‴				+2.400	+ 2.440	−0.040	0
$(\mathrm{IV})'''_d$				+1.000	− 1.016	−0.017	+ 1
(l)					+36.110	+6.970	
$(\mathrm{I})_l$					−19.459	−4.179	
$(\mathrm{II})'_l$					− 6.071	−0.043	
$(\mathrm{III})''_l$					− 8.054	−2.669	
$(\mathrm{IV})'''_l$					− 2.479	−0.041	
$(l)''''$				$[ll\cdot 4]=$	+ 0.047	+0.047	0

將上表與上節例中之表相比，即可證明，杜力特爾法與高斯法僅有排列上之不同，在後者除省去書寫 (III)′ (IV)′ $(l)'$ (IV)″ $(l)''$ $(l)''$ 行式之工作外，計算並無簡省之處。上表中無和數方程式，但加一和數列 s，其意義與和數方程式完全相同，用高斯約化法時，亦可如此排列。

第九節　權單位之中誤差

權單位之中誤差，乃一假想權等於 1 之觀測值之中誤差也。在等權觀測中，每個觀測值之權均假定為 1，故此時權單位之中誤差實即觀測值之中誤差。不等權觀測中，所有觀測值之精度既均不相等，其中誤差自必各異，代表觀測值之精度，以用權單位之中誤差為佳。觀測值之權數中，不必有 1 之值，但任何觀測值之中誤差，均可由權單位之中誤差計算之。設已知權單位之中誤差為 m，則某一觀測值之權數為 p_1 時，其中誤差必為：

$$m' = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \tag{62}$$

蓋中誤差之平方與權成反比也。直接觀測時之權單位之中誤差，已於第三章導出，即

等權觀測：　$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$

不等權觀測：　$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$

間接觀測中，未知數之數目較 1 為多，權單位之中誤差公式應成何種形式？茲當討論之。

今設 X, Y …… 為未知數之眞值，x, y 為按最小二乘法原理求出之最或是值，則觀測值之眞誤差為：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1X + b_1Y + c_1Z - l_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2X + b_2Y + c_2Z - l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= a_nX + b_nY + c_nZ - l_n \end{aligned}\right\}\text{假定為三未知數} \tag{63}$$

觀測值之改正數為：

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_1x+b_1y+c_1z-l_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+c_2z-l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=a_nx+b_ny+c_nz-l_n \end{array}\right\} \tag{64}$$

以(64)內各式減去(63)內之相當式，卽得

$$v_i-\varepsilon_i=a_i(x-X)+b_i(y-Y)+c_i(z-Z) \tag{65}$$

$i=1, 2, \cdots\cdots n$。此式亦可寫爲:

$$v_i=a_i(x-X)+b_i(y-Y)+c_i(z-Z)+\varepsilon_i. \tag{66}$$

將(66)與(64)相比，兩式之形式固相似，其不同者僅在 $-l_i$ 變爲 $+\varepsilon_i$, x, y, z 易以$(x-X)$, $(y-Y)$, $(z-Z)$。應用第六節方法由(66)求(vv)，可得類似第六節內公式(54)之結果，惟其中之 $-l$ 均代以$+\varepsilon$，卽

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}-\frac{[b\varepsilon\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[c\varepsilon\cdot2]^2}{[cc\cdot2]} \tag{67}$$

如係不等權觀測，則式(67)應書爲

$$[pvv]=[p\varepsilon\varepsilon]-\frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]}-\frac{[pb\varepsilon\cdot1]^2}{[pbb\cdot1]}-\frac{[pc\varepsilon\cdot2]^2}{[pcc\cdot2]}. \tag{68}$$

按中誤差之定義，權單位之中誤差爲:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

故 $[p\varepsilon\varepsilon]=n\cdot m^2$

又 $[pa\varepsilon]^2=(p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\cdots\cdots)(p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\cdots\cdots)$

或 $[pa\varepsilon]^2=(p_1{}^2a_1{}^2\varepsilon_1{}^2+p_2{}^2a_2{}^2\varepsilon_2{}^2+\cdots\cdots)+(2p_1p_2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2$
$+2p_2p_3a_2a_3\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots\cdots)$ (70)

公式(70)中右方前一部中之 $p_1\varepsilon_1{}^2$, $p_2\varepsilon_2{}^2\cdots\cdots$ 等可以其中值 m^2 代之，後一部中之 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\cdots$ 等，因 ε 之符號正負變化，故其中值應爲 0，於是

$$[pa\varepsilon]^2=[paa]m^2$$

或

$$\frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]}=m^2 \tag{71}$$

式(68)中之右方第三項

$$[pb\varepsilon\cdot 1]=[pb\varepsilon]-\frac{[pab]}{[paa]}[pa\varepsilon] \tag{72}$$

$$=\left[p\left(b-\frac{[pab]}{[paa]}a\right)\varepsilon\right]$$

命 $$b_i'=b_i-\frac{[pab]}{[paa]}a_i\ ,\quad i=1,2,\cdots\cdots n \tag{73}$$

則 $$[pb\varepsilon\cdot 1]^2=(p_1b'_1\varepsilon_1+p_2b'_2\varepsilon_2+\cdots\cdots)^2$$

$$=(p_1{}^2b'_1{}^2\varepsilon_1{}^2+p_2{}^2b'_2{}^2\varepsilon_2{}^2+\cdots\cdots)$$

$$+(2p_1p_2b'_1b'_2\varepsilon_1\varepsilon_2+2p_2p_3b'_2b'_3\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots\cdots) \tag{74}$$

同理以 $p_1\varepsilon_1{}^2$, $p_2\varepsilon_1{}^2\cdots\cdots p_n\varepsilon_n{}^2$ 等之中值 m^2 代 $p_1\varepsilon_1{}^2$, $p_2\varepsilon_2{}^2\cdots\cdots p_n\varepsilon_n{}^2$ 等，而 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\cdots$ 等之中值係等於零，故

$$[pb\varepsilon\cdot 1]^2=[pb'b']m^2=[pbb\cdot 1]m^2$$

或 $$\frac{[pb\varepsilon\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}=m^2 \tag{75}$$

同理命

$$c'_i=c_i-\frac{[pac]}{[paa]}a_i \tag{76}$$

$$c''_i=c'_i-\frac{[pb'c']}{[pb'b']}b'_i \tag{77}$$

則 $$[pc\varepsilon\cdot 2]=[pc\varepsilon\cdot 1]-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[pb\varepsilon\cdot 1]$$

$$=\left[p\left(c'-\frac{[pb'c']}{[pb'b']}b'\right)\varepsilon\right]$$

$$=[pc''\varepsilon] \tag{78}$$

而 $$[pc\varepsilon\cdot 2]^2=[pc''c'']m^2=[pcc\cdot 2]m^2$$

或 $$\frac{[pc\varepsilon\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}=m^2 \tag{79}$$

將 (69), (71), (75), 及 (79) 諸式代入 (68) 內，即得

$$[pvv]=n\cdot m^2-m^2-m^2-m^2=(n-3)m^2$$

若未知數爲 u 個，則

$$[pvv]=(n-u)m^2$$

或
$$m=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}. \tag{80}$$

此即權單位之中誤差公式。如爲等權觀測，則式(80)變成

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}},$$

是即每個觀測值之中誤差。

第十節　未知數之中誤差

前節所論者爲權單位之中誤差，由之可以推算觀測值之中誤差。但在間接觀測中，未知數係由觀測值間接計算而得，其中誤差必須另行計算。茲將任一未知數與所有觀測值之關係以下列形式表示之：

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\cdots\cdots+\alpha_n l_n\\ y&=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\cdots\cdots+\beta_n l_n\\ z&=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots\cdots+\gamma_n l_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

若各觀測值 l_1，l_2，$\cdots\cdots$ l_n 均爲互不相關之等權觀測，則由誤差傳播定律，可以下式求未知數 x，y，z 等之中誤差：

$$\left.\begin{aligned} m_x&=m\sqrt{[\alpha\alpha]}\\ m_y&=m\sqrt{[\beta\beta]}\\ m_z&=m\sqrt{[\gamma\gamma]} \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

反之，l_1，l_2，$\cdots\cdots$ l_n 如爲不等權觀測，則須先按第三節公式(37)，將其化爲等權，即

$$l'_1=\sqrt{p_1}\,l_1\qquad l'_2=\sqrt{p_2}\,l_2,\ \cdots\cdots\ l'_n=\sqrt{p_n}\,l_n$$

然後列成與式 (82) 相同之方程式如下：

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 l'_1+\alpha_2 l'_2+\cdots\cdots+\alpha_n l'_n\\ y&=\beta_1 l'_1+\beta_2 l'_2+\cdots\cdots+\beta_n l'_n\\ z&=\gamma_1 l'_1+\gamma_2 l'_2+\cdots\cdots+\gamma_n l'_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

此時 l'_1 l'_2 $\cdots\cdots$ l'_n 之權俱爲 1，故式(83)仍可應用，其中 m 應爲權單位

之中誤差。設以 p_x, p_y, p_z 表示未知數 x, y, z 之權，則

$$\frac{1}{p_x}=[\alpha\alpha], \qquad \frac{1}{p_y}=[\beta\beta], \qquad \frac{1}{p_z}=[\gamma\gamma]. \tag{85}$$

是以 α, β, γ 等係數與未知數之權有密切關係，故名之為未知數之權係數。其求法如下：設有三個未知數之間接觀測，其法方程式為

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=0\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

將上列三方程式分別乘以不定係數 $Q_{1\cdot1}$, $Q_{1\cdot2}$, $Q_{1\cdot3}$，即得

$$\left.\begin{aligned}Q_{1\cdot1}[aa]x+Q_{1\cdot1}[ab]y+Q_{1\cdot1}[ac]z-Q_{1\cdot1}[al]=0\\ Q_{1\cdot2}[ab]x+Q_{1\cdot2}[bb]y+Q_{1\cdot2}[bc]z-Q_{1\cdot2}[bl]=0\\ Q_{1\cdot3}[ac]x+Q_{1\cdot3}[bc]y+Q_{1\cdot3}[cc]z-Q_{1\cdot3}[cl]=0\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

將(87)中之三式相加，得

$$\left.\begin{aligned}&(Q_{1\cdot1}[aa]+Q_{1\cdot2}[ab]+Q_{1\cdot3}[ac])x\\ &+(Q_{1\cdot1}[ab]+Q_{1\cdot2}[bb]+Q_{1\cdot3}[bc])y\\ &+(Q_{1\cdot1}[ac]+Q_{1\cdot2}[bc]+Q_{1\cdot3}[cc])z\\ &-(Q_{1\cdot1}[al]+Q_{1\cdot2}[bl]+Q_{1\cdot3}[cl])\quad=0\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

$Q_{1\cdot2}$, $Q_{1\cdot2}$, $Q_{1\cdot3}$ 既為任意係數，吾人可令之合於下列三條件：

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3}=1\\ [ab]Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]Q_{1\cdot3}=0\\ [ac]Q_{1\cdot1}+[bc]Q_{1\cdot2}+[cc]Q_{1\cdot3}=0\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

(88)內未知數 x 之係數既為 1，而 y, z 之係數為零，故

$$x=Q_{1\cdot1}[al]+Q_{1\cdot2}[bl]+Q_{1\cdot3}[cl] \tag{90}$$

將(90)按 l 展開，如 l_1, l_2 ……等為等權觀測，則

$$\left.\begin{aligned}x=\;&(a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})l_1\\ &+(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})l_2\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3})l_n\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

此式即為本節開始時所述及之形式。將(91)與(82)之第一方程式相比，即知

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3}\\ \alpha_2&=a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n&=a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3}\end{aligned}\right\}\tag{92}$$

倘 $l_1\, l_2 \cdots\cdots l_n$ 爲不等權觀測，則式(90)內 $[ab]$，$[bl]$ …… 等項將爲 $[pal]$，$[pbl]$ ……，於是

$$\left.\begin{aligned}x=&\quad(a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})p_1l_1\\ &+(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})p_2l_2\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3})p_nl_n\end{aligned}\right\}\tag{90)*}$$

又因 $l'=\sqrt{p}\,l$，故不等權觀測時

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\sqrt{p_1}\,(a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})\\ \alpha_2&=\sqrt{p_2}\,(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n&=\sqrt{p_n}\,(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3})\end{aligned}\right\}\tag{92)*}$$

順次乘(92)以 α_i，a_i，b_i，c_i，並相加之，即得:

$$[\alpha\alpha]=[a\alpha]Q_{1\cdot1}+[b\alpha]Q_{1\cdot2}+[c\alpha]Q_{1\cdot3}\tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned}[a\alpha]&=[aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3}\\ [b\alpha]&=[ab]Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]Q_{1\cdot3}\\ [c\alpha]&=[ac]Q_{1\cdot1}+[bc]Q_{1\cdot2}+[cc]Q_{1\cdot3}\end{aligned}\right\}\tag{94}$$

按式(89)，$[a\alpha]=1$，　$[b\alpha]=0$，　$[c\alpha]=0$　　(95)

以之代入式(93)得

$$[\alpha\alpha]=Q_{1\cdot1}\tag{96}$$

在不等權觀測時,順序乘(92)*以 α_i，$\sqrt{p_i}\,a_i$，$\sqrt{p_i}\,b_i$，$\sqrt{p_i}\,c_i$ 而相加，即得

$$[\alpha\alpha]=[\sqrt{p}\,a\alpha]\,Q_{1\cdot1}+[\sqrt{p}\,b\alpha]Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}\,c\alpha]Q_{1\cdot3}\tag{93)*}$$

$$\left.\begin{aligned}[\sqrt{p}\,a\alpha]&=[paa]\,Q_{1\cdot1}+[pab]\,Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}\,ac]\,Q_{1\cdot3}\\ [\sqrt{p}\,b\alpha]&=[pab]\,Q_{1\cdot1}+[pbb]\,Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}\,bc]\,Q_{1\cdot3}\\ [\sqrt{p}\,c\alpha]&=[pac]\,Q_{1\cdot1}+[pbc]\,Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}\,cc]\,Q_{1\cdot3}\end{aligned}\right\}\tag{94)*}$$

按式(89)，仍令

$$[\sqrt{p}ca]=1, \qquad [\sqrt{p}ba]=0, \qquad [\sqrt{p}ca]=0 \tag{95}^*$$

代入式(93)*，亦得

$$[aa]=Q_{1\cdot 1} \tag{96}^*$$

(96)* 與 (96) 完全相同，故不論爲等權或不等權觀測，均得相同結果。將(96)代入式(83) 卽得

$$m_x=m\sqrt{Q_{1\cdot 1}} \tag{97}$$

或按(85)求未知數之權爲：

$$p_x=\frac{1}{Q_{1\cdot 1}} \tag{98}$$

是以 $Q_{1\cdot 1}$ 又名爲未知數 x 之"權之倒數"。

應用同一方法求 β 及 $[\beta\beta]$，茲以另三不定係數 $Q_{2\cdot 1}$，$Q_{2\cdot 2}$，$Q_{2\cdot 3}$ 分別乘法方程式(86)內之各式而相加，並命

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]Q_{2\cdot 1}+[ab]Q_{2\cdot 2}+[ac]Q_{2\cdot 3}=0\\
&[ab]Q_{2\cdot 1}+[bb]Q_{2\cdot 2}+[bc]Q_{2\cdot 3}=1\\
&[ac]Q_{2\cdot 1}+[bc]Q_{2\cdot 2}+[cc]Q_{2\cdot 3}=0
\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

遂得

$$y=Q_{2\cdot 1}[al]+Q_{2\cdot 2}[bl]+Q_{2\cdot 3}[cl] \tag{100}$$

是以

$$\beta_i=\sqrt{p_i}\,(a_iQ_{2\cdot 1}+b_iQ_{2\cdot 2}+c_iQ_{2\cdot 3}) \tag{101}$$

此爲不等權觀測之形式，若係等權觀測，則$\sqrt{p_i}=1$，仍用與前相同之方法，可求得

$$[\sqrt{p}\,a\beta]=0, \qquad [\sqrt{p}\,b\beta]=1, \qquad [\sqrt{p}\,c\beta]=0 \tag{102}$$

及

$$[\beta\beta]=Q_{2\cdot 2} \tag{103}$$

故

$$m_y=m\sqrt{Q_{2\cdot 2}} \tag{104}$$

或

$$p_y=\frac{1}{Q_{2\cdot 2}} \tag{105}$$

再以不定係數 $Q_{3\cdot 1}$，$Q_{3\cdot 2}$，$Q_{3\cdot 3}$ 分別乘法方程式(86) 而命

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]Q_{3\cdot 1}+[ab]Q_{3\cdot 2}+[ac]Q_{3\cdot 3}=0\\
&[ab]Q_{3\cdot 1}+[bb]Q_{3\cdot 2}+[bc]Q_{3\cdot 3}=0\\
&[ac]Q_{3\cdot 1}+[bc]Q_{3\cdot 2}+[cc]Q_{3\cdot 3}=1
\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

卽可得

$$z=Q_{3\cdot 1}[al]+Q_{3\cdot 2}[bl]+Q_{3\cdot 3}[cl] \tag{107}$$

又可得　$$m_z=\pm m\sqrt{Q_{3\cdot 3}} \tag{108}$$

及　$$p_z=\frac{1}{Q_{3\cdot 3}} \tag{109}$$

$Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$ 各爲未知數 x, y, z 之權之倒數，可由 (89), (99), (106) 三組聯立方程式分別求得，再應用 (97), (104), (108) 卽可求得未知數 x, y, z 之中誤差。

第十一節　不定係數 Q 及權係數之特性

前節假定未知數爲三個，故不定係數 Q 共有 $3^2=9$ 個；如未知數爲 u 個，則應有不定係數 u^2 個。在此 u^2 個不定係數 Q 中，有 u 個爲平方項，卽 $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$……其値爲：

$$Q_{1\cdot 1}=[\alpha\alpha],\qquad Q_{2\cdot 2}=[\beta\beta],$$

其餘之不定係數亦有一特性，卽

$$Q_{i\cdot h}=Q_{h\cdot i} \tag{110}$$

玆試證明　$$Q_{1\cdot 2}=Q_{2\cdot 1}$$

其餘卽可類推之。將式(89)內之各式，分別以 $Q_{2\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{2\cdot 3}$ 乘之，而相加，並將左方按 $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$ 排項，卽得

$$\left.\begin{aligned}&([aa]Q_{2\cdot 1}+[ab]Q_{2\cdot 2}+[ac]Q_{2\cdot 3})Q_{1\cdot 1}\\&+([ab]Q_{2\cdot 1}+[bb]Q_{2\cdot 2}+[bc]Q_{2\cdot 3})Q_{1\cdot 2}\\&+([ac]Q_{2\cdot 1}+[bc]Q_{2\cdot 2}+[cc]Q_{2\cdot 3})Q_{1\cdot 3}=Q_{2\cdot 1}\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

按(99)，上式 $Q_{1\cdot 1}$ 之係數爲 0，$Q_{1\cdot 2}$ 之係數爲 1，$Q_{1\cdot 3}$ 之係數亦爲 0，故

$$Q_{1\cdot 2}=Q_{2\cdot 1} \tag{112}$$

關於不定係數 $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$……與權係數之關係，已於前節式(96)及(103))論及。玆再申述其餘不定係數與權係數之關係如下：

設以相當之 β 分別乘式(92)*內各式之兩方，而相加之，卽得

$$[\alpha\beta]=[\sqrt{p}a\beta]Q_{1\cdot 1}+[\sqrt{p}b\beta]Q_{1\cdot 2}+[\sqrt{p}c\beta]Q_{1\cdot 3} \tag{113}$$

由(102)與上式，$Q_{1\cdot 1}$ 及 $Q_{1\cdot 3}$ 之係數均爲零，$Q_{1\cdot 2}$ 之係數爲 1，故

$$[\alpha\beta]=Q_{1\cdot 2}=Q_{2\cdot 1}\text{。} \tag{114}$$

同理以 γ 分別乘(92)內各式而相加之，卽得

$$[\alpha\gamma]=Q_{1\cdot 3}=Q_{3\cdot 1} \tag{115}$$

由是可推斷：　$$[\beta\gamma]=Q_{2\cdot 3}=Q_{3\cdot 2} \tag{116}$$

若將 (90)，(100)，(107) 三式列於一處，則成

$$x=Q_{1\cdot1}[al]+Q_{1\cdot2}[bl]+Q_{1\cdot3}[cl]$$
$$y=Q_{2\cdot1}[al]+Q_{2\cdot2}[bl]+Q_{2\cdot3}[cl] \qquad (117)$$
$$z=Q_{3\cdot1}[al]+Q_{3\cdot2}[bl]+Q_{3\cdot3}[cl]$$

$Q_{1\cdot1}$，$Q_{2\cdot2}$，$Q_{3\cdot3}$ 爲平方項，亦成一對角線，與此對角線對稱之各項係數均相等，根據式 (96)，(103)，(114)，(115)，(116)等，亦可將(117)書作

$$\left.\begin{aligned} x&=[\alpha\alpha](al)+[\alpha\beta](bl)+[\alpha\gamma](cl)\\ y&=[\alpha\beta](al)+[\beta\beta](bl)+[\beta\gamma](cl)\\ z&=[\alpha\gamma](al)+[\beta\gamma](bl)+[\gamma\gamma](la)\end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

由(118)可知各式內右方各項之係數 $[\alpha\alpha]$，$[\alpha\beta]$ 等與法方程式中之係數 $[aa]$，$[ab]$ 等均有相同之性質，(118)名爲法方程式之不定式解法。

關於權係數之性質，尚有一特點須提出者，即等權觀測時

$$[\alpha v]=0,\qquad [\beta v]=0,\qquad [\gamma v]=0 \qquad (119)$$

與法方程式

$$[av]=0,\qquad [bv]=0,\qquad [cv]=0$$

適相對照。茲證明之如下：

將改正數方程式

$$v_i=a_ix+b_iy+c_iz-l_i \qquad (120)$$

之兩方乘以相當之 α_i 而相加，即得

$$[\alpha v]=[a\alpha]x+[b\alpha]y+[c\alpha]z-[\alpha l] \qquad (121)$$

因　$[a\alpha]=1$，　$[b\alpha]=0$，　$[c\alpha=0$，　$[\alpha l]=x$

故　$[\alpha v]=0$

同理亦可證明　$[\beta v]=0$

及　$[\gamma v]=0$

如係不等權觀測，則設改正數方程式(120)之權爲 p_i，將其兩端乘以 $\sqrt{p_i}\,\alpha_i$，而相加，即得

$$[\sqrt{p}\alpha v]=[\sqrt{p}a\alpha]x+[\sqrt{p}b\alpha]y+[\sqrt{p}c\alpha]z-[\sqrt{p}\alpha l] \qquad (121)^*$$

由(95)及(84) 知

$$[\sqrt{p}a\alpha]=1,\quad [\sqrt{p}b\alpha=0,\quad [\sqrt{p}c\alpha=0,\quad [\sqrt{p}\alpha l]=x.$$

故代入 (121)* 內，得

同理可證明

$$\left.\begin{array}{l}[\sqrt{p}\,\alpha v]=0\\[\sqrt{p}\,\beta v]=0\\[\sqrt{p}\,\gamma v]=0\end{array}\right\}\qquad(122)$$

第十二節　未知數權倒數之計算

不定係數 $Q_{1\cdot1}$, $Q_{2\cdot2}$, $Q_{3\cdot3}$ 等卽爲未知數 x, y, z 之權倒數，已於第十節式 (98)，(105)，(109) 中證明之。玆再將各該權倒數之計算方法解說之，由第十節之演化，各 Q 之決定公式爲：

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3}=1\\ [ab]\,Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]\,Q_{1\cdot3}=0\\ [ac]\,Q_{1\cdot1}+[bc]\,Q_{1\cdot2}+[cc]\,Q_{1\cdot3}=0\end{array}\right\}\qquad(89)$$

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,Q_{1\cdot2}+[ab]Q_{2\cdot2}+[ac]Q_{2\cdot3}=0\\ [ab]\,Q_{1\cdot2}+[bb]\,Q_{2\cdot2}+[bc]\,Q_{2\cdot3}=1\\ [ac]\,Q_{1\cdot2}+[bc]\,Q_{2\cdot2}+[cc]\,Q_{2\cdot3}=0\end{array}\right\}\qquad(99)$$

$$\left.\begin{array}{l}[aa]Q_{1\cdot3}+[ab]Q_{2\cdot3}+[ac]\,Q_{3\cdot3}=0\\ [ab]Q_{1\cdot3}+[bb]\,Q_{2\cdot3}+[bc]\,Q_{3\cdot3}=0\\ [ac]\,Q_{1\cdot3}+[bc]\,Q_{2\cdot3}+[cc]\,Q_{3\cdot3}=1\end{array}\right\}\qquad(106)$$

以上各組方程式若爲“權方程式”，與法方程式之係數完全相同，其分別僅在常數一項，卽法方程式之常數項爲 $[al]$，$[bl]$，$[cl]$，而在權方程式中則變爲 1 或 0 。

將式(106)依約化法方程式之同樣方法遞次約化，卽得下列之約化權方程式，除常數項外，與第五節式(49)完全相同：

$$\left.\begin{array}{r}[aa]Q_{1\cdot3}+[ab]Q_{2\cdot3}+[ac]\,Q_{3\cdot3}=0\\ [bb\cdot1]Q_{2\cdot3}+[bc\cdot1]\,Q_{3\cdot3}=0\\ [cc\cdot2]\,Q_{3\cdot3}=1\end{array}\right\}\qquad(123)$$

由最後一式可知 $Q_{3\cdot3}$ 卽等於 $[cc\cdot2]$ 之倒數，是以欲求 $Q_{3\cdot3}$，無須另外計算，依次約化法方程式後，自然可得之。至於 $Q_{1\cdot1}$ 與 $Q_{2\cdot2}$ 則不如是簡單。由式(123)可先求出 $Q_{3\cdot3}\,Q_{3\cdot2}\,Q_{3\cdot1}$ 諸値，其計算亦無須另列算式，

蓋式(123)左方之各係數均爲約化法方程式之係數也。其次再將式(99)約化一次，得下列兩式：

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{1\cdot 2}+[ab]Q_{2\cdot 2}+[ac]Q_{2\cdot 3}&=0\\ [bb\cdot 1]Q_{2\cdot 2}+[bc\cdot 1]Q_{2\cdot 3}&=1\end{aligned}\right\}\qquad(124)$$

因 $Q_{2\cdot 3}$ 之值已自(123)中求得，故由(124)之第二式可求 $Q_{2\cdot 2}$，再代入第一式得 $Q_{1\cdot 2}$。最後根據(89)之第一式：

$$[aa]Q_{1\cdot 1}+[ab]Q_{1\cdot 2}+[ac]Q_{1\cdot 3}=1\qquad(125)$$

可解算 $Q_{1\cdot 1}$ 之值。至是所有 Q 值均已求出。此法爲罕生所創，因式(123)(124)(125)除常數項外，其他係數均爲約化法方程式之係數，故計算時無須另列算式，可就約化後之法方程式係數解算之。

高斯所啓示之方法，與此略有不同，蓋(89)(99)(106)三式，可改書爲下列各組方程式：

$$[cc\cdot 2]Q_{3\cdot 3}=1\qquad(126)$$

$$\left.\begin{aligned}[bb\cdot 1]Q_{2\cdot 2}+[bc\cdot 1]Q_{2\cdot 3}&=1\\ [bc\cdot 1]Q_{2\cdot 2}+[cc\cdot 1]Q_{2\cdot 3}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(127)$$

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{1\cdot 1}+[ab]Q_{1\cdot 2}+[ac]Q_{1\cdot 3}&=1\\ [ab]Q_{1\cdot 1}+[bb]Q_{1\cdot 2}+[bc]Q_{1\cdot 3}&=0\\ [ac]Q_{1\cdot 1}+[bc]Q_{1\cdot 2}+[cc]Q_{1\cdot 3}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(128)$$

除(126)無庸再行約化外，將(127)及(128)再行約化，卽可求出所有 Q 值。此時所須約化者僅爲常數項，故依此時求 Q，可於法方程式之右方附加 Q 列，隨同法方程式一同約化。此法之工作雖似較罕生法略多，但其計算步驟完全隨法方程式之約化，故較醒目。

Q 之計算亦可用和方程式檢核之，將(89)(99)(106)各式分別相加，卽得

$$\left.\begin{aligned}[as]Q_{1\cdot 1}+[bs]Q_{1\cdot 2}+[cs]Q_{1\cdot 3}&=1\\ [as]Q_{2\cdot 1}+[bs]Q_{2\cdot 2}+[cs]Q_{2\cdot 3}&=1\\ [as]Q_{3\cdot 1}+[bs]Q_{3\cdot 2}+[cs]Q_{3\cdot 3}&=1\end{aligned}\right\}\qquad(129)$$

此外，如再將(129)內各式相加，更假定未知數爲 u 個，則可得一更普遍之檢核公式：

$$
\begin{aligned}
&[as](Q_{1\cdot1}+Q_{1\cdot2}+\cdots\cdots+Q_{1\cdot u})\\
&+[bs](Q_{2\cdot1}+Q_{2\cdot2}+\cdots\cdots+Q_{2\cdot u})\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+[us](Q_{u\cdot1}+Q_{u\cdot2}+\cdots\cdots+Q_{u\cdot u})=u
\end{aligned}
$$

茲舉例說明如下:

例一: 用高斯法解下列法方程式並求不定係數 Q。

法方程式:

$$
\left.\begin{aligned}
982x+162y-139z-\ \ 98.2=0\\
162x+785y-\ \ 69z+168.5=0\\
-139x-\ \ 69y+851z+241.2=0
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}
$$

解出:

					Q_1	
$982x$	$+162y$	$-139z$	-98.2	$=0$	$=1$	(b)
x	$+0.166$	-0.142	-0.100	$=0$	$+0.00102$	
$162x$	$+785y$	$-69z$	$+168.5$	$=0$	$=0$	
	-27	$+23$	$+16.2$		-0.166	
$-139x$	$-69y$	$+851z$	$+241.2$	$=0$	$=0$	
		-20	-13.9		$+1.023$	
$+1005x$	$+878y$	$+643z$	$+311.5$	$=0$	$=1$	
$-1005x$	-166	$+142$	$+100.5$		-1.023	

由式(b)得第一次約化法方程式:

			Q_1	Q_2	
$758y$	$-46z$	$+184.7=0$	-0.166	$+1$	(c)
$-46y$	$+831z$	$+227.3=0$	$+0.142$	0	
$712y$	$+785z$	$+412.0=0$	-0.025	$+1$	

在上式內增加 Q_2 一項，而其常數為 1 及 0，其理參考公式(126)，茲繼續將上式約化。

			Q_1	Q_2	
$758y$	$-46z$	$+184.7=0$	-0.166	$+1$	(d)
y	-0.061	$+0.246=0$	-0.000216	$+0.00132$	
$-46y$	$+831z$	$+227.3=0$	$+0.142$	0	
	-3	$+11.2$	-0.010	$+0.061$	
$712y$	$+785z$	$+412.0=0$	-0.023	1	
-712	$+43$	-174.0	$+0.154$	-0.940	

於是得第二次約化法方程式:

			Q_1	Q_2	Q_3	
$828z$	$+238.5$	$=0$	$+0.132$	$+0.061$	$+1$	(e)
z	$+0.288$		$+0.000161$	$+0.000074$	$+0.00121$	
$828z$	$+238.0$	$=0$	$+0.131$	$+0.060$	$+1$	

$$\therefore \quad z=-0.288$$

$$Q_{1\cdot 3}=+0.000161 \qquad Q_{2\cdot 3}=+0.000074, \qquad Q_{3\cdot 3}=+0.00121$$

由公式(d)第一方程式內求 y，得

$$y=-0.260$$

$$Q_{1\cdot 2}=-0.000216+0.061\times 0.000161=-0.000208$$

$$Q_{2\cdot 2}=+0.00132\ +0.061\times 0.000074=+0.00133$$

自式(b)第一方程式內求 x， 得

$$x=+0.102$$

$$Q_{1\cdot 1}=+0.00102+0.142\times 0.000161+0.166\times 0.000206=+0.00107$$

計算是否無錯誤，必須檢核。茲先試式(b)之總和項，然後試式(125)，(126)，(127)。

$$\begin{aligned}
+1005x &= 1005\times \quad 0.102 &&= +102.5\\
+\ 878y &= 878\times(-0.260) &&= -228.3\\
+\ 643z &= 643\times(-0.288) &&= \underline{-185.2}\\
& && \quad -311.0\\
& &\text{應} & \quad -311.5
\end{aligned}$$

$$+1005Q_{1\cdot1}=1005\times\ \ 0.000107\ =+1.080$$

$$+\ 878Q_{1\cdot2}=\ 878\times(-0.000206)=-0.183$$

$$+\ 643Q_{1\cdot3}=\ 643\times\ (0.000161)\ =\underline{+0.103}$$

$$+1.000$$

$$\text{應}\quad+1.000$$

$$+1005Q_{3\cdot1}=1005\times0.000161=0.162$$

$$+\ 878Q_{3\cdot2}=\ 878\times0.000074=0.065$$

$$+\ 643Q_{3\cdot3}=\ 643\times0.00121\ =0.776$$

$$\underline{+1.003}$$

$$\text{應}\quad+1.000$$

$$+1005Q_{2\cdot1}=1005\times(-0.00206)=-0.217$$

$$+\ 878Q_{2\cdot2}=\ 878\times\ (0.00133)\ =+1.180$$

$$+\ 643Q_{2\cdot3}=\ 643\ (+0.000074)=\underline{+0.048}$$

$$+1.011$$

$$\text{應}\quad+1.000$$

或用和數方程式檢核 Q 之値

$$Q_{1\cdot1}+Q_{2\cdot1}+Q_{3\cdot1}=+0.001023$$

$$Q_{1\cdot2}+Q_{2\cdot2}+Q_{3\cdot2}=+0.001193$$

$$Q_{1\cdot3}+Q_{2\cdot3}+Q_{3\cdot3}=+0.001445$$

$$[as]\ (Q_{1\cdot1}+Q_{2\cdot1}+Q_{3\cdot1})=+1.030$$

$$[bs]\ (Q_{1\cdot2}+Q_{2\cdot2}+Q_{3\cdot2})=+1.043$$

$$[cs]\ (Q_{1\cdot3}+Q_{2\cdot3}+Q_{3\cdot3})=\underline{+0.925}$$

$$+2.998$$

$$\text{應}\quad+3.000$$

法方程式之解算，數字繁雜，最爲煩人，並易致錯誤，故宜列以清晰之表格，減少不必要之數字，庶使步驟明顯，行列井然。茲特將德人格魯伯所

建議之計算格式列於下頁，以爲參考。此表格內包括(1)法方程式之約化，(2)權方程式之約化，(3)未知數之計算，(4)權係數和之計算。關於(1)(2)兩項，其排列係採第八節杜力特爾之解法，無庸再述；關於(3)(4)兩步計算工作，茲將其應用公式演化於下：

由第五節式(49)*，如假定爲四個未知數，其未知數之計算公式可書如下式：

$$t=\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}$$

$$z=\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}t=\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}-\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}\cdot\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}$$

$$y=\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z-\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}t$$

$$=\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}\cdot\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}\left(\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\cdot\frac{[bc\cdot1]}{[bl\cdot1]}\right)$$

$$x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[ad]}{[aa]}t$$

$$=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}\frac{[ab]}{[aa]}-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\cdot\frac{[ab]}{[aa]}\right)$$

$$-\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}\cdot\left\{\frac{[ad]}{[aa]}-\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}\frac{[ab]}{[aa]}\right.$$

$$\left.-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\cdot\frac{[ab]}{[aa]}\right)\right\}$$

此卽表內所列之計算步驟，讀者不難一一對照。至於 $Q_{1\cdot1}$ $Q_{1\cdot2}$ $Q_{1\cdot3}$ 等數，此處書作 $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\alpha\gamma]$ ……，以與 $[aa]$ $[ab]$ $[ac]$ …… 等對照；實則 $Q_{1\cdot1}$ 與 $[\alpha\alpha]$ 之意義完全相同也。關於 $[\alpha\alpha]$ ……等之計算，其理與未知數之計算同，蓋卽採用本節所述之高斯法也。

行數＼例數	因數 F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I		$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$-[al]$	$[as]$	-1	0	0	0
	$-\frac{I_2}{I_1}$		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$-[bl]$	$[bs]$	0	-1	0	0
			$F \cdot I_2$	$F \cdot I_3$	$F \cdot I_4$	$F \cdot I_5$	$F \cdot I_6$	$-F$			
II			$[bb \cdot 1]$	$[bc \cdot 1]$	$[bd \cdot 1]$	$-[bl \cdot 1]$	$[bs \cdot 1]$	II_7	-1	0	0
	$-\frac{I_3}{I_1}$			$[cc]$	$[cd]$	$-[cl]$	$[cs]$	0	0	-1	0
				$F \cdot I_3$	$F \cdot I_5$	$F \cdot I_5$	$F \cdot I_5$	$-F$	0	0	0
	$-\frac{II_3}{II_1}$			$F \cdot II_3$	$F \cdot II_4$	$F \cdot II_5$	$F \cdot II_6$	$F \cdot II_7$	$-F$	0	0
III				$[cc \cdot 2]$	$[cd \cdot 2]$	$-[cl \cdot 2]$	$[cs \cdot 2]$	III_7	III_8	-1	0
					$[dd]$	$-[dl]$	$[ds]$	0	0	0	-1
	$-\frac{I_4}{I_1}$				$F \cdot I_4$	$F \cdot I_5$	$F \cdot I_6$	$-F$	0	0	0
	$-\frac{II_4}{II_2}$				$F \cdot II_4$	$F \cdot II_5$	$F \cdot II_6$	$F \cdot II_7$	$-F$	0	0
	$-\frac{III_4}{III_3}$				$F \cdot III_4$	$F \cdot III_5$	$F \cdot III_6$	$F \cdot III_7$	$F \cdot III_8$	$-F$	0

IV					[dd·3]	−[dl·3]	[ds·3]	IV_7	IV_8	IV_9	−1
						[ll]	s_l	0	0	0	0
	$-\frac{I_5}{I_1}$					$F\cdot I_5$	$F\cdot I_6$	−F	0	0	0
	$-\frac{II_5}{II_2}$					$F\cdot II_5$	$F\cdot II_6$	$F\cdot II_7$	−F	0	0
	$-\frac{III_5}{III_3}$					$F\cdot III_5$	$F\cdot III_6$	$F\cdot III_7$	$F\cdot III_8$	−F	0
	$-\frac{IV_5}{IV_4}$					$F\cdot IV_5$	$F\cdot IV_6$	$F\cdot IV_7$	$F\cdot IV_8$	$F\cdot IV_9$	−F
V						[vv]		−x	−y	−z	−t
	$-\frac{I_7}{I_1}$							−F	0	0	0
	$-\frac{II_7}{II_2}$							$F\cdot II_7$	−F	0	0
	$-\frac{III_7}{III_3}$							$F\cdot III_7$	$F\cdot III_8$	−F	0
	$-\frac{IV_7}{IV_4}$							$F\cdot IV_7$	$F\cdot IV_8$	$F\cdot IV_9$	−F
I′								−[αα]	−[αβ]	−[αγ]	−[αδ]

	$-\frac{II_8}{II_2}$							$[F\cdot II_7]$	$-F$	0	0
	$-\frac{III_8}{III_3}$							$[F\cdot III_7]$	$F\cdot III_8$	$-F$	0
	$-\frac{IV_8}{IV_4}$							$[F\cdot IV_7]$	$F\cdot IV_8$	$F\cdot IV_9$	$-F$
II'								$(-[\alpha\beta])$	$-[\beta\beta]$	$-[\beta\gamma]$	$-[\beta\delta]$
	$-\frac{III_9}{III_3}$							$[F\cdot III_7]$	$(F\cdot III_8)$	$-F$	0
	$-\frac{IV_9}{IV_4}$							$[F\cdot IV]$	$(F\cdot IV_8)$	$(F\cdot IV_9)$	$-F$
III'								$(-[\alpha\gamma])$	$(-[\beta\gamma])$	$-[\gamma\gamma]$	$-[\gamma\delta]$
	$-\frac{IV_{10}}{IV_4}$							$[F\cdot IV_7]$	$(F\cdot IV_8)$	$(F\cdot IV_9)$	$-F$
IV'								$(-[\alpha\delta])$	$(-[\beta\delta])$	$(-[\gamma\delta])$	$-[\delta\delta]$

關於表內所列計算步驟有須解釋者如下：I，II，……等代表行數，1，2，3，……等代表列數，故 II_4 卽代表第 II 行第4列之係數，例如此處爲 $[bd\cdot 1]$，餘可類推。又因數 F 一列係標明各項所乘之因數，每行內之 F 均係指該行左端 F 列內所示之値。例如第 V 行上之一行，其 F 列內爲 $-\frac{\mathrm{IV}_5}{\mathrm{IV}_4}$，卽 $\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$，故該行內之 $\mathrm{F}\cdot\mathrm{IV}_5$，$\mathrm{F}\cdot\mathrm{IV}_6$ ……等卽爲 $-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dl\cdot 3]$，$\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[ds\cdot 3]$，……等。所有 I II III IV V 及 I′ II′ III′ IV′ 各行均爲其上數行之和。例如 III_3 爲 $[cc\cdot 2]$，係 $[cc]+\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_3+\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_3$，餘可類推。

爲節省紙幅，計算時可將 7 8 9 10 各列與 1 2 3 4 各列並書，但對於初算者，此種列法，頗不省目，易致錯誤。茲舉一四個未知數之例於下，以資說明。

例：須解之法方程式如下，求未知數及其權係數。

	檢核和數
$+8.5736x+0.4212y-0.0087z-1.2254t-4.3808=0$	-3.3804
$+0.4212x+6.3260y+0.6861z-0.1134t-3.6269=0$	-3.8930
$-0.0087x+0.6861y+0.4036z+0.0194t-0.3744=0$	-0.7260
$-1.2254x-0.1134y+0.0194z+0.2331t+0.7219=0$	$+3.3644$
$-4.3803x-3.6269y-0.3744z+0.7219t+4.4210=(vv)$	$+3.2387$
$(-[al])\quad(-[bl])\quad(-[cl])\quad(-[dl])\quad([ll])$	

行＼列	因數	1 (7)	2 (8)	3 (9)	4 (10)	5	6
I		+8.5736 (−1)	+0.4242 (0)	−0.0087 (0)	−1.2254 (0)	−4.3803	−3.3803
		0	+0.3360	+0.6861	−0.1134	−3.6269	−3.6930
	$-\frac{I_2}{I_1}$	+0.0491	−0.0207	+0.0004	+0.0602	+0.2152	+0.1661
II		+0.0491	+6.3053 (−1)	+0.6865 (0)	−0.0532 (0)	−3.4117	−3.5269
		0	0	+0.4036	+0.0194	−0.3744	−0.7260
	$-\frac{I_3}{I_1}$	−0.0010	0	−0.0000	−0.0012	−0.0044	−0.0034
	$-\frac{II_3}{II_2}$	−0.0053	+0.1089	−0.0747	+0.0058	+0.3715	+0.3840
III		−0.0063	+0.108	+0.3289 (−1)	+0.0249 (0)	−0.0069	−0.3454
		0	0	0	+0.2231	+0.7219	+0.3644
	$-\frac{I_4}{I_1}$	−0.1429	0	0	−0.1751	−0.6261	−0.4832
	$-\frac{II_4}{II_2}$	+0.0004	−0.0008	0	−0.0004	−0.0288	−0.0298
	$-\frac{IV_4}{IV_3}$	+0.0005	−0.0079	+0.0739	−0.0018	+0.0005	+0.0252
IV		−0.1420	−0.0169	+0.0739	+0.0558 (−1)	+0.0675	−0.1231
		0	0	0	0	+4.4210	+3.2387
	$-\frac{I_5}{I_1}$	−0.5109	0	0	0	−2.2379	−1.7271
	$-\frac{II_5}{II_2}$	+0.0266	−0.5411	0	0	−1.8460	−1.9883
	$-\frac{III_5}{III_3}$	−0.0001	+0.0023	−0.0210	0	−0.0001	−0.0072
	$-\frac{IV_5}{IV_4}$	+0.1718	+0.0198	−0.0883	+1.2097	−0.0817	+0.7493
V		$-x$ −0.3126	$-y$ −0.5190	$-z$ −0.1093	$-t$ +1.2097	$[vv]$ +0.2553	$-[vv]$ −[0.2546]

	$-\frac{\mathrm{I}_7}{\mathrm{I}_1}$	-0.1166	0	0	0	
	$-\frac{\mathrm{II}_7}{\mathrm{II}_2}$	-0.0004	$+0.0078$	0	0	
	$-\frac{\mathrm{III}_7}{\mathrm{III}_3}$	-0.0001	$+0.0021$	-0.0193	0	
	$-\frac{\mathrm{IV}_7}{\mathrm{IV}_4}$	-0.3616	-0.0417	$+0.1857$	-2.5457	檢 核
		$-[\alpha\alpha]$	$-[\alpha\beta]$	$-[\alpha\gamma]$	$-[\alpha\delta]$	$+x=+0.3124$
I′		-0.4787	-0.0318	$+0.1660$	-2.5457	
	$-\frac{\mathrm{II}_8}{\mathrm{II}_2}$		-0.1586	0	0	
	$-\frac{\mathrm{III}_8}{\mathrm{III}_3}$		-0.0360	$+0.3310$	0	
	$-\frac{\mathrm{IV}_8}{\mathrm{IV}_4}$		-0.0048	$+0.0214$	-0.2936	
			$-[\beta\beta]$	$-[\beta\gamma]$	$-[\beta\delta]$	$+y=+0.5188$
II′			-0.1994	-0.3524	-0.2936	
	$-\frac{\mathrm{III}_9}{\mathrm{III}_3}$			-3.0404	0	
	$-\frac{\mathrm{IV}_9}{\mathrm{IV}_4}$			-0.0954	$+1.3077$	
				$-[\gamma\gamma]$	$-[\gamma\delta]$	$+z=+0.1104$
III′				-3.1358	$+1.3077$	
					$-[\delta\delta]$	$+t=-1.2112$
IV′	$-\frac{\mathrm{IV}_{10}}{\mathrm{IV}_4}$				-17.9211	

第十三節　未知數函數之中誤差

設有未知數之函數 $F(X, Y, Z, \cdots\cdots)$ 係由平差後所得之 x, y, z ……等值計算之,則其中誤差應爲若干,茲將申論之。x, y, z ……等既均由同一組之觀測值求得,自非互相獨立,故不能直接應用

$$m_F^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\cdots\cdots$$

公式以計算 F 之中誤差,而必須依第十節公式(84)

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 l'_1+\alpha_2 l'_2+\cdots\cdots+\alpha_n l'_n \\ y&=\beta_1 l'_1+\beta_2 l'_2+\cdots\cdots+\beta_n l'_n \\ z&=\gamma_1 l'_1+\gamma_2 l'_2+\cdots\cdots+\gamma_n l'_n \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

化 F 爲 $l'_1\ l'_2\cdots\cdots l_n'$ 之函數，然後計算中誤差。因 $l'_1\ l'_2\cdots\cdots l'_n$ 爲互不相關，且爲等權之觀測值，故可應用

$$m_F^2=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial l'_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial l'_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial l'_n}\right)^2\right\}m^2 \tag{132}$$

公式以求 F 之中誤差 m_F，式中之 m 爲權單位之中誤差。

今命 $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial x}=F_1,\qquad \dfrac{\partial F}{\partial y}=F_2,\qquad \dfrac{\partial F}{\partial z}=F_3 \qquad (133)$

則

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l'_1}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial l'_1}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial l'_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial l'_1}=F_1\alpha_1+F_2\beta_1+F_3\gamma_1 \\ \frac{\partial F}{dl'_2}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{dl'_2}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dl'_2}+\frac{\partial F}{dz}\cdot\frac{dz}{dl'_2}=F_1\alpha_2+F_2\beta_2+F_3\gamma_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{dl'_n}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{dl'_n}+\frac{\partial F}{dy}\cdot\frac{dy}{dl'_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial l'_n}=F_1\alpha_n+F_2\beta_n+F_3\gamma_n \end{aligned} \tag{134}$$

將式 (133) (134) 代入 (132) 內，卽得

$$\begin{aligned} m_F^2=\{&(F_1\alpha_1+F_2\beta_1+F_3\gamma_1)^2+(F_1\alpha_2+F_2\beta_2+F_3\gamma_2)^2+\cdots\cdots \\ &+(F_1\alpha_n+F_2\beta_n+F_3\gamma_n)^2\}m^2 \end{aligned} \tag{135}$$

將上式展開，依 F_1，$F_2\cdots\cdots$ 併項，乃得：

$$m_F^2=\left\{\begin{array}{llll} [\alpha\alpha]F_1^2 & +2[\alpha\beta]F_1F_2 & +2[\alpha\gamma]F_1F_3 \\ & +\ [\beta\beta]F_2^2 & +2[\beta\gamma]F_2F_3 \\ & & +\ [\gamma\gamma]F_3^2 \end{array}\right\}m^2 \tag{136}$$

根據第十節結果，亦可書作

$$m_F^2=\left\{\begin{array}{lll} F_1^2Q_{1\cdot1} & +2F_1F_2Q_{1\cdot2} & +2F_1F_3Q_{1\cdot3} \\ & +\ F_2^2Q_{2\cdot2} & +2F_2F_3Q_{2\cdot3} \\ & & +\ F_3^2Q_{3\cdot3} \end{array}\right\}m^2 \tag{137}$$

上式已可應用之計算 m_F，但須先求出所有 Q 之值。事實上尙可化成另一形式，不需 Q 之值，而可逕行計算 m_F。

設命

$$\left.\begin{aligned}L_1&=Q_{1\cdot1}F_1+Q_{1\cdot2}F_2+Q_{1\cdot3}F_3\\L_2&=Q_{1\cdot2}F_1+Q_{2\cdot2}F_2+Q_{2\cdot3}F_3\\L_3&=Q_{1\cdot3}F_1+Q_{2\cdot3}F_2+Q_{3\cdot3}F_3\end{aligned}\right\}\tag{138}$$

則 (137) 可化簡為

$$m_F{}^2=(F_1L_1+F_2L_2+F_3L_3)m^2\tag{139}$$

若將(138)與第十一節之(117)相比，可見兩組方程式之係數完全相等，而 L_1，L_2，L_3 相當於 x，y，z；F_1，F_2，F_3 則相當於 $[al]$，$[bl]$，$[cl]$，故 $(F_1L_1+F_2L_2+F_3L_3)$ 相當於

$$[al]x+[bl]y+[cl]z。$$

此式可按照第六節(54)至(59)之演化步驟而約化之，該處

$$[al]x+[bl]y+[cl]=\frac{[al]^2}{[aa]}+\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\tag{140}$$

依同理，(139)亦可約化為

$$m_F{}^2=\left(\frac{F_1{}^2}{[aa]}+\frac{[F_2\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[F_3\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\right)m^2\tag{141}$$

$(F_2.1)$之意義與$[bl\cdot1]$相當，即

$$[F_2\cdot1]=F_2-\frac{[ab]}{[aa]}F_1\tag{142}$$

同理

$$\begin{aligned}[F_3\cdot2]&=[F_3\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[F_2\cdot1]\\&=F_3-\frac{[ac]}{[aa]}F_1-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[F_2\cdot1]\end{aligned}\tag{143}$$

上法係按照高斯約化法將 F_2 F_3 之值順次約化，由之得 $(F_2\cdot1)$，$(F_3\cdot2)$ 等值，故可附於法方程式之後，與解算法方程式同時求定之。

不等權觀測時，上列之 (141) 將變成下式，其導出盡如前法，不再贅述。

$$m_F{}^2=\left(\frac{F_1{}^2}{[paa]}+\frac{[F_2\cdot1]^2}{[pbb\cdot1]}+\frac{[F_3\cdot2]^2}{[pcc\cdot2]}\right)m^2\tag{144}$$

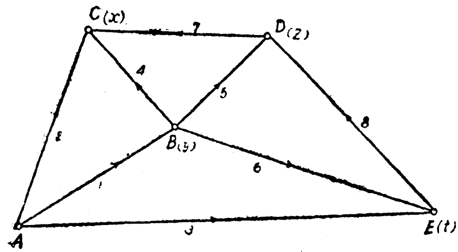
關於求未知數函數之中誤差計算法，茲舉例以說明之：

例：水準測量達到之水準點為 A，B，C，D 及 E 五點，茲平差其結

果，並定由 A 至 B，C，D，E 各點高程差之中誤差，以及由 C 至 E 間高程差之中誤差。

觀測結果：

$(BA)L_1$	$=189.404$	兩點間之距離	3.1公里
$(CA)L_2$	$=736.677$	兩點間之距離	9.3公里
$(EA)L_3$	$=376.607$	兩點間之距離	59.7公里
$(CB)L_4$	$=547.576$	兩點間之距離	6.2公里
$(DB)L_5$	$=273.528$	兩點間之距離	16.1公里
$(EB)L_6$	$=187.274$	兩點間之距離	35.1公里
$(CD)L_7$	$=274.082$	兩點間之距離	12.1公里
$(DE)L_8$	$=86.261$	兩點間之距離	9.3公里



第五章　　第　五　圖

選最低一點 A 爲參考面經過之點，而以 x，y，z 及 t 表示 B,C,D 及 E 各點超出於參考面之高度，於是可列改正數方程式如下：

$$\left.\begin{array}{l} L_1+v_1= \qquad +y \\ L_2+v_2=+x \\ L_3+v_3= \qquad\qquad\qquad +t \\ L_4+v_4=+x\ -y \\ L_5+v_5= \qquad -y\ +z \\ L_6+v_6= \qquad -y \qquad +t \\ L_7+v_7=+x \qquad -z \\ L_8+v_8= \qquad\qquad +z-t \end{array}\right\} \qquad (a)$$

水準測量之誤差傳播，多假定中誤差與距離 (s) 之平方根成比例，故吾人如命一公里之中誤差爲 m 而其權爲 1，則 $\frac{1}{p}=s$，是以距離 s_i 即爲權之倒數 $\frac{1}{p_i}$。

權單位之距離，普通均為一公里。如欲避免計算時之小數，可乘權以某一整數。若令該數為 1000，則

$$權=\frac{1000}{距離(公里)}, \tag{b}$$

是即表示權單位之距離易為 1000 公里矣。由是求得之權如下：

$$P_1=323,\ P_2=108,\ P_3=17,\ P_4=161,\quad P_5=62,\ P_6=28,$$
$$P_7=83,\quad P_8=108。$$

復設未知數 x, y, z 及 t 等於

$$\left.\begin{aligned} x&=736.977+\xi\\ y&=189.404+\eta\\ z&=462.932+\zeta\\ t&=376.607+\tau \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

將(c)代入(a)內，得改正數方程式：

$v_1=$	0	—	$+\eta$	—	—	權：	323
$v_2=$	0	$+\xi$	—	—	—	權：	108
$v_3=$	0	—	—	—	$+\tau$	權：	17
$v_4=$	-3	$+\xi$	$-\eta$	—	—	權：	161
$v_5=$	0	—	$-\eta$	$+\zeta$	—	權：	62
$v_6=$	-71	—	$-\eta$	—	$+\tau$	權：	28
$v_7=$	-37	$+\xi$	—	$-\zeta$	—	權：	83
$v_8=$	$+64$	—	—	$+\zeta$	$-\tau$	權：	108

法方程式：

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$F_{(x-t)}$
$352\xi-161\eta-83\zeta\qquad -3543=0$	1	0	0	0	1
$-161\xi+574\eta-62\zeta-28\tau+2471=0$	0	1	0	0	0
$-83\xi-62\eta+253\zeta-108\tau+9983=0$	0	0	1	0	0
$-28\eta-108\zeta+153\tau-8900=0$	0	0	0	1	-1
$+108\xi+323\eta+0\zeta+17\tau+0=0$	1	1	1	1	0

上式內 $Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$ 各列乃為計算未知數 x, y, z, t 之中誤差，$F_{(x-t)}$ 一

列則計算 CE 兩點高程差之中誤差。蓋 CE 兩點間之高程差等於 $x-t$，爲未知數之函數，在此函數内 x 之係數爲 $+1$，而 t 之係數則等於 -1，故分別列於上式之末列。第一次約化上式以後，得：

	Q_1	Q_2	$F_{(x-t)}$
$500\eta-100\zeta-28\tau+845=0$	$+0.4574$	1	$+0.4574$
$-100\eta-233\zeta-108\tau+9145=0$	$+0.2358$	0	$+0.2358$
$-28\eta-108\zeta+153\tau-8900=0$	$+0$	0	-1.0000
$+372\eta+25\zeta+17\tau+1096=0$	$+0.6932$	1	-0.3068

第二次約化後之結果：

	Q_1	Q_2	Q_3	$F_{(x-t)}$
$213\zeta-114\tau+9314=0$	$+0.3273$	$+0.2001$	$+1$	$+0.3273$
$-114\zeta+151\tau-8853=0$	$+0.0256$	$+0.0560$	0	-0.9744
$+99\zeta+37\tau-461=0$	$+0.3529$	$+0.2561$	$+1$	-0.6471

最後約化之結果爲：

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$F_{(x-t)}$
$90\tau-3869=0$	$+0.2007$	$+0.1630$	$+0.5352$	1	-0.7992
$90\tau-3869=0$	$+0.2008$	$+0.1632$	$+0.5352$	1	-0.7992

$$\therefore \quad \xi=+3.659, \qquad \eta=-3.424$$

$$\zeta=-20.71, \qquad \tau=+42.99$$

$$Q_{1\cdot1}=+0.004209, \qquad Q_{2\cdot2}=+0.002483$$

$$Q_{3\cdot3}=+0.007878, \qquad Q_{4\cdot4}=+0.01111$$

$$Q_{1\cdot2}=+0.001515, \quad Q_{2\cdot3}=+0.001908, \quad Q_{3\cdot4}=+0.005947$$

$$Q_{1\cdot3}=+0.002727, \quad Q_{2\cdot4}=+0.001811, \quad Q_{1\cdot4}=+0.002230$$

根據不定係數作計算之檢核，完全符合。故將未知數引入改正數方程式而求改正數：

$$v_1=-3.4,\quad v_2=+3.6\quad v_3=+43.0\quad v_4=+4.1\quad v_5=-17.3$$
$$v_6=-24.6\quad v_7=-12.6\quad v_8=+0.3\quad [pvv]=87960.23。$$

另以別式計算 $[pvv]$，以作檢核：

$$[pvv]=[pll]-[pal]\xi-[pbl]\eta-[pcl]\zeta-[pdl]\tau$$
$$=698592-12964.99-8460.74-206747.93-382611.00=87807.34$$

相差 52.9，此乃由於數字過巨所致，非計算之錯誤；故卽可由之求每 1000 公里之中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{87960.23}{8-4}}=\pm 148.3\text{公厘}$$

每一公里之中誤差爲：

$$m_{(1\text{ 公里})}=\frac{148.3}{\sqrt{1000}}=\pm 4.7\text{公厘}$$

各未知數之中誤差：

$$m_{(x)}=\pm m\sqrt{Q_{1\cdot 1}}=\pm\ 9.6\text{公厘}$$
$$m_{(y)}=\pm m\sqrt{Q_{2\cdot 2}}=\pm\ 7.4\text{公厘}$$
$$m_{(z)}=\pm m\sqrt{Q_{3\cdot 3}}=\pm 13.1\text{公厘}$$
$$m_{(t)}=\pm m\sqrt{Q_{4\cdot 4}}=\pm 15.6\text{公厘}$$

故　　$x=736.981$ 公尺 ± 9.6 公厘，$z=462.911$ 公尺 ± 13.1 公厘

　　　$y=189.401$ 公尺 ± 7.4 公厘，$t=376.650$ 公尺 ± 15.6 公厘

至於 CE 兩點間高程差之中誤差當從下式求之

$$m_{(F)}^2=\left(\frac{F_1^2}{[paa]}+\frac{[F_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[F_3\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}+\frac{[F_4\cdot 3]^2}{[pdd\cdot 3]}\right)m^2。$$

$$m_{(F)}^2=(148.3)^2\left\{\frac{1}{352}+\frac{(10.4574)^2}{500}+\frac{(0.3273)^2}{213}+\frac{(0.7992)^2}{90}\right\}$$
$$=21990(0.002841+0.000418+0.000515+0.007099)$$
$$m_{(F)}=\pm 15.4\text{公厘}$$

最後之檢核，亦得滿意之結果：

$L_1+v_1=y$　　應：$189.401=189.401$

$L_2+v_2=x$　　應：$736.981=936.981$

$L_3+v_3=t$　　應：$376.650=376.650$

$L_4+v_4=x-y$　　應：$547.580=547.580$

第十四節 按最小二乘法所得未知數值之中誤差爲最小

以前均根據最小二乘法之原理，命改正數之平方和爲最小，而求未知數值。今試證明，由此所得未知數之値，其中誤差亦爲最小。易言之，卽由此所得之未知數値係屬最爲可靠，亦可云最爲精準。此說可以反證法證明之，是卽以未知數之中誤差應爲最小之條件而行平差，其結果應與最小二乘法之結果殊途同歸。

設以 $X, Y, Z\cdots\cdots$ 爲未知數之眞值，$l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 爲間接之觀測値，$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\cdots\cdots\varepsilon_n$ 爲其眞誤差，則

$$\left.\begin{array}{l} l_1+\varepsilon_1=a_1X+b_1Y+c_1Z+\cdots\cdots \\ l_2+\varepsilon_2=a_2X+b_2Y+c_2Z+\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n+\varepsilon_n=a_nX+b_nY+c_nZ+\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{145}$$

暫以不定係數 $\alpha_1, \alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$ 按次乘(145)之各式，而相加，乃得

$$[\alpha l]+[\alpha\varepsilon]=[a\alpha]X+[b\alpha]Y+[c\alpha]Z+\cdots\cdots \tag{146}$$

α 共有 n 個，爲任意之數値，今設加以下列 u 個條件，（u 爲未知數之數目，小於 n）

$$[a\alpha]=1, \qquad [b\alpha]=0, \qquad [c\alpha]=0,\cdots\cdots \tag{147}$$

則(146)卽變爲

$$X=[\alpha l]+[\alpha\varepsilon] \tag{148}$$

上式(148)右方之兩項，第一項爲 X 之一任意假定值，第二項則爲此假定値之眞誤差。命此假定値爲 x，則

$$x=[\alpha l]=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots\cdots+\alpha_nl_n \tag{149}$$

此時 α 雖受(147) u 個條件之限制，但並未完全確定，予 $\alpha_1\ \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ 以不同之値，可得不同之 x 値，每次不同之 x 値之中誤差均可用下列公式

$$m_x=m\sqrt{[\alpha\alpha]} \tag{150}$$

求得之。欲使 x 之中誤差爲最小，$[\alpha\alpha]$ 必須亦爲最小。此處尙須注意，除 $[\alpha\alpha]$ 應爲最小之條件外，同時必須滿足(147)之 u 個條件，故須以繫數(在數學中名爲拉格讓乘數)乘(147)之各式，附於$(\alpha\alpha)$之後，而整個部分微分之，以定各 α 之値，卽將

$$[\alpha\alpha]-2k_1([a\alpha]-1)-2k_2[b\alpha]-2k_3[c\alpha]-\cdots\cdots$$

按照 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 部分微分之，得

$$\begin{aligned}
&2\alpha_1-2k_1a_1-2k_2b_1-2k_3c_1-\cdots\cdots=0\\
&2\alpha_2-2k_1a_2-2k_2b_2-2k_3c_2-\cdots\cdots=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2\alpha_n-2k_1a_n-2k_2b_n-2k_3c_n-\cdots\cdots=0
\end{aligned}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\cdots\cdots\\
&\alpha_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_n=a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

k 之數目共爲 u 個，其值甚易求得，將(151)代入式(147)內，即得

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+\cdots\cdots=1\\
&[ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+\cdots\cdots=0\\
&[ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3+\cdots\cdots=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}$$

試將此式與第十節之(89)比較，即知 $k_1\ k_2\ k_3 \cdots\cdots$ 等相當於該處之權係數 $Q_{1\cdot1}, Q_{1\cdot2}, Q_{1\cdot3}, \cdots\cdots$ 故(151)可書成：

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3}+\cdots\cdots\\
&\alpha_2=a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_n=a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3}+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

由此所定之 α 值，與最小二乘法平差所得之 α 值盡屬相同，故按照 x 之中誤差應爲最小之條件所得之 x 值，與由最小二乘法求得之 x 值自將相等。此種情形，亦可於未知數 y 證明之。至此可以證明：最小二乘法平差所得未知數之值，其中誤差爲最小。

第十五節　間接觀測內中誤差計算之精度

自間接觀測內求中誤差之公式爲：

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \tag{153}$$

n 爲觀測值之數目，u 爲未知數之數目，依第四章第七節相似之步驟〔參

考該章公式 (39)〕，卽可求得以上式計算中誤差 m 之中誤差如下❶：

$$m_m=m\sqrt{\frac{1}{2(n-u)}} \tag{154}$$

此式與第四章第七節式(39)相似。

間接觀測內中誤差亦可由平均誤差間接求之，其公式如下：

$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n(u-m)}},\qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n(u-m)}} \tag{155}$$

此式名爲呂柔公式❷，其導出並不絕對嚴正，由此公式所得之中誤差，亦不若公式 (154) 之精準，故平常甚少用之。

第十六節　法方程式之逐步接近解算法

法方程式數目較多時，應用高斯約化法解算，工作至爲繁巨，故有時不如採用逐步接近法較爲簡捷。但逐步接近法不能同時計算權係數，如須計算未知數及其函數之權，應用此法反不如按高斯約化法可以同時求出，是其缺點。

逐步接近法之主要根據，係假定法方程式之平方項係數$[aa]$，$[bb]$……等一般均較非平方項係數爲大。於是在下列法方程式中

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]&=0\\
[ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]&=0\\
[ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]&=0
\end{aligned} \tag{156}$$

可命

$$x_1=\frac{[al]}{[aa]},\qquad y_1=\frac{[bl]}{[bb]},\qquad z_1=\frac{[cl]}{[cc]} \tag{157}$$

爲 x，y，z 之第一次近似值。將此代入(156)後，各式之右方不能適得零，玆設爲 r'_1，r'_2，r'_3，則第二次卽可命

$$x_2=\frac{r'_1}{[aa]},\qquad y_2=\frac{r'_2}{[bb]},\qquad z_2=\frac{r'_3}{[cc]}。 \tag{158}$$

---

❶參閱 Helmert: Ausgleichungsrechnung 第二版 1924 139--144 頁。

❷呂柔 (Lüroth) 於 1889 年 Astronomische Nachrichten 第 73 卷 187 頁發表。

爲近似值。將 x_1+x_2，y_1+y_2，z_1+z_2 代入(156)，又得 r''_1，r''_2，r''_3 諸值。r''_i 之值應均較 r' 爲小，始有逐步接近之可能。繼續仍按上法以 r''_1，r''_2，r''_3 計算第三次近似值，迄 r 值趨近於零爲止。於是未知數之值即爲

$$
\begin{aligned}
x&=x_1+x_2+\cdots\cdots\\
y&=y_1+y_2+\cdots\cdots\\
z&=z_1+z_2+\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{159}
$$

上法爲雅科俾(Jacobi)所創，高斯改良此法，使之更爲簡捷，每次僅將 r 最大一項之未知數改善其近似值，如此計算可較簡易。除此之外，更利用一輔助未知數，使逐步接近之收斂較速，茲申論之如下：

命 $x=\xi-\sigma$，$y=\eta-\sigma$，$z=\zeta-\sigma$，$\cdots\cdots$ (160)

σ 爲輔助未知數，於是改正數方程式遂成下列形式：

$$v_i=-l_i+a_i\xi+b_i\eta+c_i\zeta+\cdots\cdots-s_i\sigma$$

$$s_i=a_i+b_i+c_i+\cdots\cdots$$

由此列成之法方程式爲：

$$
\left.
\begin{array}{l}
[aa]\xi+[ab]\eta+[ac]\zeta+\cdots\cdots-[as]\sigma-[al]=0\\
[ab]\xi+[bb]\eta+[bc]\zeta+\cdots\cdots-[bs]\sigma-[bl]=0\\
[ac]\xi+[bc]\eta+[cc]\zeta+\cdots\cdots-[cs]\sigma-[cl]=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-[as]\xi-[bs]\eta-[cs]\zeta-\cdots\cdots+[ss]\sigma+[sl]=0
\end{array}
\right\}
\tag{161}
$$

法方程式(161)之和，各項均爲零，用高斯約化法自不能解出。因 σ 可取任意一值，故 ξ，η，ζ 均將隨之而變〔參考公式(160)〕。但用逐步接近法時，ξ，η，ζ，σ 等值雖視計算程序而異，而由此求得之 x，y，z 等值則均正確。茲舉例說明之如下：

例：用逐步接近法解算第十二節例一之法方程式：

$$
\begin{aligned}
982x+162y-139z-98.2&=0\\
162x+785y-69z+168.5&=0\\
-139x-69y+851z+241.2&=0
\end{aligned}
$$

命 $x=\xi-\sigma$　　$y=\eta-\sigma$　　$z=\zeta-\sigma$

按式(161)列成新法方程式：

$$982\xi+162\eta-139\zeta-1005\sigma-\ 98.2=0$$
$$162\xi+785\eta-\ 69\zeta-\ 878\sigma+168.5=0$$
$$-139\xi-\ 69\eta+851\zeta-\ 643\sigma+241.2=0$$
$$-1005\xi-878\eta-643\zeta+2526\sigma-311.5=0$$

逐步接近之計算列表於下：

常數項	$\zeta_1=-0.283$	餘數	$\eta_1=-0.240$	餘數
− 98.2	+ 39.3	− 58.9	− 38.8	− 97.7
+186.5	+ 19.5	+188.0	−188.5	− 0.5
+241.2	−240.8	+ 0.4	+ 16.6	+ 17.0
−311.5	+182.0	−129.5	+210.7	+ 81.2
0	0	0	0	0
常數項	$\xi_1=+0.100$	餘數	$\sigma_1=+0.006$	餘數
− 98.2	+ 98.2	+ 0.5	− 6.0	− 5.5
+186.5	+ 16.2	+ 15.7	− 5.3	+ 10.4
+241.2	− 13.9	+ 3.1	− 3.9	− 0.8
−311.5	−100.5	− 19.3	+ 15.2	− 4.1
0	0	0	0	0
常數項	$\eta_2=-0.013$	餘數	$\xi_2=+0.008$	餘數
− 98.2	− 2.1	− 7.6	+ 7.8	+ 0.2
+186.5	− 10.2	+ 0.2	+ 1.3	+ 1.5
+241.2	+ 0.9	+ 0.1	− 1.1	− 1.0
−311.5	+ 11.4	+ 7.3	− 8.0	− 0.7
0	0	0	0	
常數項	$\eta_3=-0.002$	餘數	$\zeta_2=+0.001$	餘數
− 98.2	− 0.3	− 0.1	− 0.1	− 0.2
+186.5	− 1.6	− 0.1	− 0.1	− 0.2
+241.2	+ 0.2	− 0.8	+ 0.8	0.0
−311.5	+ 1.7	+ 1.0	− 0.6	+ 0.4
0	0	0	0	0

由此得：

$$\xi=\xi_1+\xi_2=+0.108 \qquad x=\xi-\sigma=+0.102$$
$$\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3=-0.255 \qquad y=\eta-\sigma=-0.261$$
$$\zeta=\zeta_1+\zeta_2=-0.282 \qquad z=\zeta-\sigma=-0.288$$
$$\sigma=\sigma_1=+0.006$$

此結果與第十二節按高斯約化法所得者，除 y 差至最後一單位外，其餘完全相同。

第十七節　約化之改正數方程式

以上各節，均係概論一般間接觀測之平差及法方程式之解算。若干平差問題具有特殊性質，欲謀法方程式解算之簡捷，則以用特殊方法爲佳，以下數節將分別討論之。

前文已曾論及，未知數可用約化法方程式之方法逐步消除之，茲試更證明未知數亦可逕由改正數方程式中消除之。設有改正數方程式

$$v_i=a_ix+b_iy+c_iz-l_i \tag{162}$$

由此組成之第一法方程式爲：

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0 \tag{163}$$

或
$$x=-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[al]}{[aa]} \tag{164}$$

將(164)代入(162)內，將 x 消去，即得

$$v_i=\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)y+\left(c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)z-\left(l_i-\frac{[al]}{[aa]}a_i\right) \tag{165}$$

此式名爲約化之改正數方程式，亦可簡書爲：

$$v_i=b'_iy+c'_iz-l'_i \tag{166}$$

由此所得之法方程式爲：

$$\left.\begin{aligned}[b'b']y+[b'c']z-[b'l']=0\\ [b'c']y+[c'c']z-[c'l']=0\end{aligned}\right\} \tag{167}$$

公式(167)即第一次約化之法方程式：

$$\left.\begin{aligned}[bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0\\ [bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z-[cl\cdot1]=0\end{aligned}\right\} \tag{168}$$

蓋
$$b'_i=b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i$$

$$b'_ib'_i=b'_ib'_i-2a_ib_i\frac{[ab]}{[ab]}+\frac{[ab]^2}{[aa]}a_ia_i$$

故
$$[b'b']=[bb]-2[ab]\frac{[ab]}{[aa]}+\frac{[ab]^2}{[aa]}[aa]$$

或 $$[b'b'] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb\cdot 1] \tag{169}$$

故同理亦可證明　$[b'c'] = [bc\cdot 1]$，　$[b'l'] = [bl\cdot 1]$ 等

故由約化之改正數方程式(165)或(166)所列成之法方程式，與消除未知數 x 後之第一次約化之法方程式，完全相同。由(167)所求得之未知數 y，z 之值，亦必與由原法方程式中所求得者相同。

設繼續消除(166)內之 y 項，亦可由(168)中得

$$y = -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z + \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \tag{170}$$

代入(167)內，卽得再度約化之改正數之法方程式

$$v_i = \left(c'_i - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b'_i\right)z - \left(l'_i - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b'_i\right) \tag{171}$$

或簡寫爲： $$v_i = c''_i z - l''_i \tag{172}$$

由此可得法方程式

$$[c''c'']z - [c''l''] = 0 \tag{173}$$

根據(169)之同一原理，此式卽爲第二次約化之法方程式

$$[cc\cdot 2]z - [cl\cdot 2] = 0。 \tag{174}$$

設有更多之未知數，仍可應用同理於改正數方程式中約化之。

由以上之理論，已可證明：約化工作無論於改正數方程式中或法方程式中施行，其結果初無二致。惟就一般而言，於改正數方程式內實行約化，計算工作反較複雜，蓋必須將每個改正數方程式加以約化，而於法方程式中約化，則僅約化較少數目之法方程式；且被消除之未知數 x，不能於(167)內求得，仍須利用(164)，故普通殊無採用約化改正數方程式之必要。但如某一未知數在各改正數方程式內之係數極爲簡單，如盡爲 $+1$ 或 -1，同時該未知數僅爲輔助性質，結果中並不需知其中誤差值，則此時可應用約化改正數方程式之方法，使法方程式之數目自始卽少去一個。

設有改正數方程式

$$v_i = -x + b_i y + c_i z - l_i \tag{175}$$

卽所有改正數方程式中 x 項之係數均爲 -1，而 x 之中誤差值亦不需要，

因 $$[aa] = +n \quad [ab] = -[b] \quad [ac] = -[c] \quad [al] = -[l]$$

$$b'_i = b_i - \frac{[b]}{n}, \quad c'_i = c_i - \frac{[c]}{n}, \quad l'_i = l_i - \frac{[l]}{n} \tag{176}$$

故約化之改正數方程式係數 b'_i, c'_i, l'_i 等之計算甚屬簡易。計算之檢核為

$$[b']=0 \qquad [c']=0 \qquad [l']=0 \tag{177}$$

由此得約化之改正數方程式:

$$v_i=b'_i y+c'_i z-l'_i \tag{178}$$

根據(178)可列出法方程式:

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)^2\right]y+\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]z-\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0$$

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]y+\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)^2\right]z-\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0$$

(179)

而解算 y, z 之值。

此處須注意者,即計算中誤差時,$[vv]$ 未嘗變易,約化後之改正數方程式雖少一未知數,然在計算 m 時,仍須以原有之未知數數目為準則。

第十八節　分部約化法

上節所論,係於一組觀測中,將改正數方程式先消去一未知數,再列法方程式。本節擬討論者,若有二組或多組觀測,除共同含有一部未知數外,每組各有一特殊未知數時,亦可利用約化改正數方程式之方法,先將各組之特殊未知數分別消去,然後以約化後之改正數方程式合併列成一組法方程式,僅含有共同未知數。如此則所得之法方程式,應與由未經約化之改正數方程式所列成之法方程式,先約化各組特殊未知數後所得之約化法方程式相同;但有時後法之計算工作,不如逕於改正數方程式中消除特殊未知數,然後再列法方程式之簡便。茲將此種關係證明於下,暫以二組觀測各含一個特殊未知數為例:

第一組改正數方程式:

$$\left.\begin{aligned} v_1&=c_1z+a_1x+b_1y-l_1\\ v_2&=c_2z+a_2x+b_2y-l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=c_nz+a_nx+b_ny-l_n \end{aligned}\right\}\text{共 } n \text{ 個} \tag{180}$$

第二組改正數方程式:

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}&=d_{n+1}t+a_{n+1}x+b_{n+1}y-l_{n+1}\\ v_{n+2}&=d_{n+2}t+a_{n+2}x+b_{n+2}y-l_{n+2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{n+q}&=d_{n+q}t+a_{n+q}x+b_{n+q}y-l_{n+q}\end{aligned}\right\}\text{共 } q \text{ 個} \qquad (181)$$

以上兩組改正數方程式內，x，y 爲共同未知數，z 爲第一組特有之未知數，t 爲第二組特有之未知數。如自(180)內消去未知數 z，自 (181) 內消去未知數 t，即得下列兩組約化改正數方程式：

第一組約化改正數方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a'_1x+b'_1y-l'_1\\ v_2&=a'_2x+b'_2y-l'_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=a'_nx+b'_ny-l'_n\end{aligned}\right\} \qquad (180)^*$$

第二組約化改正數方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}&=a'_{n+1}x+b'_{n+1}y-l'_{n+1}\\ v_{n+2}&=a'_{n+2}x+b'_{n+2}y-l'_{n+2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{n+q}&=a'_{n+q}x+b'_{n+q}y-l'_{n+q}\end{aligned}\right\} \qquad (181)^*$$

式中 a'，b'，l' 之意義，與前節所用者相同。

由約化改正數方程式(180)*及(181)*聯合而列成之法方程式如下：

$$\begin{aligned} [a'a']_{n+q}x+[a'b']_{n+q}y-[a'l']_{n+q}&=0\\ +[b'b']_{n+q}y-[b'l']_{n+q}&=0\end{aligned} \qquad (182)$$

式中 $[a'a']_{n+q}$ 等之意義如下：

$$\begin{aligned}[a'a']_{n+q}&=a'_1a'_1+a'_2a'_2+\cdots+a'_na'_n+a'_{n+1}a'_{n+1}+\cdots+a'_{n+q}a'_{n+q}\\ &=[a'a']_n+[a'a']_q\end{aligned}$$

餘類推。

茲再證明，由原改正數列成之法方程式：

$$\left.\begin{aligned} [cc]_nz\qquad\quad +[ca]_nx+[cb]_ny-[cl]_n&=0\\ +[dd]_qt+[da]_qx+[db]_qy-[dl]_q&=0\\ +[aa]_{n+q}x+[ab]_{n+q}y-[al]_{n+q}&=0\\ [bb]_{n+q}y-[ll]_{n+q}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

約化兩次，消去未知數 z 及 t 後，則結果仍應得(182)

第一次約化法方程式:

$$\left.\begin{aligned} [dd]_q t+[da]_q x+[db]_q y\quad -[dl]_q &=0\\ [aa\cdot 1]_{n+q}x+[ab\cdot 1]_{n+q}y-[al]_{n+q} &=0\\ [bb\cdot 1]_{n+q}y-[bl\cdot 1]_{n+q} &=0 \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

其中

$$[aa\cdot 1]_{n+q}=[aa]_{n+q}-\frac{[ca]_n^{\,2}}{[cc]_n}=[aa]_n+[aa]_q-\frac{[ca]_n^{\,2}}{[cc]_n}=[aa\cdot 1]_n+[aa]_q$$

同理　$[ab\cdot 1]_{n+q}=[ab\cdot 1]_n+[ab]_q$,

……………………………………

第二次約化法方程式:

$$\begin{aligned} [aa\cdot 2]_{n+q}x+[ab\cdot 2]_{n+q}y-[al\cdot 2]_{n+q} &=0\\ [bb\cdot 2]_{n+q}y-[bl\cdot 2]_{n+q} &=0 \end{aligned} \tag{185}$$

$$\begin{aligned}[aa]\cdot 2_{n+q} &=[aa\cdot 1]_{n+q}-\frac{[da]_q^{\,2}}{[dd]_q}=[aa\cdot 1]_q+[aa]_q-\frac{[da]_q^{\,2}}{[dd]_q}\\ &=[aa\cdot 1]_n+[aa\cdot 1]_q\end{aligned}$$

由上節已知:

$$[aa\cdot 1]_n=[a'a']_n,\qquad [aa\cdot 1]_q=[a'a']_q$$

故　$[aa\cdot 2]_{n+q}=[a'a']_n+[a'a']_q=[a'a']_{n+q}$

同理　$[ab\cdot 2]_{n+q}=[a'b']_{n+q}$,　　$[al\cdot 2]_{n+q}=[a'l']_{n+q}$

…………………………………………………………

故(182)與(185)完全相同。易言之，分部約化與合併約化之結果盡屬相同，此法之主要應用限於方向觀測，以後再行詳論之。

第十九節　士賴伯約化法

此法係德國士賴伯所創，用於方向觀測之平差，至今德國測量總局仍沿用之。設有改正數方程式:

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=a_nx+b_ny+c_nz-l_n \end{aligned}\right\}. \tag{186}$$

在此 n 個方程式之外，可增一虛構之改正數方程式：

$$v'_{n+1}=[ab]y+[ac]z-[al] \quad 令其權爲 -\frac{1}{[aa]} \tag{187}$$

將原有改正數方程式內之未知數 x 項取消，再加方程式(187)總列之，則得

$$\left.\begin{array}{llll} v'_1 & =+b_1y+c_1z-l_1 & 權 & 1 \\ v'_2 & =+b_2y+c_2z-l_2 & 權 & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ v'_n & =+b_ny+c_nz-l_n & 權 & 1 \\ v'_{n+1} & =[ab]y+[ac]z-[al] & 權 & -\frac{1}{[aa]} \end{array}\right\} \tag{188}$$

式(188)名爲虛構之改正數方程式。由此按照不等權觀測列成下列法方程式：

$$\begin{aligned} &\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0 \\ &\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)z-\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)=0 \end{aligned} \tag{189}$$

或

$$\left.\begin{array}{l} [bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0 \\ [bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z-[cl\cdot1]=0 \end{array}\right\} \tag{190}$$

此式與由式(186)列成之法方程式經約化 x 後所得之第一次約化法方程式相同。由此可以證明：按照上法列成之虛構改正數方程式(188)，在求定 y，z 之值而言，與原改正數方程式(186)相較，其值相等。繼用此法消去未知數 y，則虛構改正數方程式如下：

$$\left.\begin{array}{llll} v''_1 & =c_1z-l_1 & 權 & 1 \\ v''_2 & =c_2z-l_2 & 權 & 1 \\ v''_3 & =c_3z-l_3 & 權 & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ v''_n & =c_nz-l_n & 權 & 1 \\ v''_{n+1} & =[ac]z-[al] & 權 & -\frac{1}{[aa]} \\ v''_{n+2} & =[bc\cdot1]z-[bl\cdot1] & 權 & -\frac{1}{[bb\cdot1]} \end{array}\right\} \tag{191}$$

由(191)可列成法方程式:

$$\left([cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}\right)z-\left([cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)=0$$

或 $$[cc\cdot 2]z-[cl\cdot 2]=0 \tag{192}$$

是與由(190)消去 y 所得之結果相同。倘再繼續應用,則 z 亦可消去,應用下列虛構改正數方程式:

$$\left.\begin{array}{llll}
v'''_1 &= -l_1 & 權 & 1\\
v'''_2 &= -l_2 & 權 & 1\\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
v'''_n &= -l_n & 權 & 1\\
v'''_{n+1} &= -[al] & 權 & -\dfrac{1}{[aa]}\\
v'''_{n+2} &= -[bl\cdot 1] & 權 & -\dfrac{1}{[bb\cdot 1]}\\
v'''_{n+3} &= -[cl\cdot 2] & 權 & -\dfrac{1}{[cc\cdot 2]}
\end{array}\right\} \tag{193}$$

其總數爲 $n+3$,各方程式內均無未知數,由此可求改正數平方和,即

$$[pv'''v''']=[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} \tag{194}$$

與第六節式(59)相同。

上述係士賴伯約化法之理論。其應用最適於方向觀測之平差,此時所有改正數方程式內之 x 項係數均爲 -1,其形式如下:

$$v_i=-x+b_iy+c_iz-l_i \tag{195}$$

應用士賴伯約化法,其第1至第 n 個虛構改正數方程式,係將式(195)內之 $-x$ 項取消,各授以權1;另加一式:

$$v'_{n+1}=[b]y+[c]z-[l] \qquad 權 \quad -\frac{1}{n}$$

由此列成法方程式:

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)^2\right]y+\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]z-\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0$$

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]y+\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)^2\right]z-\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0$$

(196)

此式與第十七節之公式(179)完全相同，故不論用約化改正數方程式或用士賴伯約化法，其結果均相同也。

習　　題

1. 試解下列法方程式：

$$0.55x+0.18y-0.23z-4.78=0$$
$$0.18x+0.75y-0.40z-4.33=0$$
$$-0.23x-0.40y+0.68z+6.17=0$$

2. 試求下列法方程式：

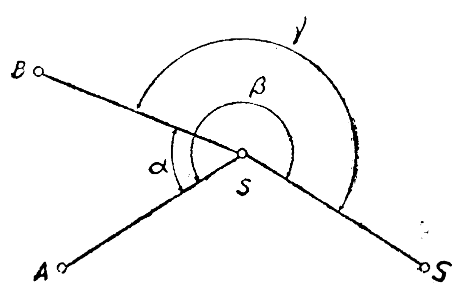
$$459x-308y-389z+244t-507=0$$
$$-308x+464y+408z-269t+695=0$$
$$-389x+408y+679z-331t+653=0$$
$$244x-269y-331z+469t-283=0$$

之未知數值及其權。

3. 由下列改正數方程式：

$$\begin{array}{llr}
v_1= x & & \text{權}\ p_1=0.29\\
v_2=-x+y & +2.3 & p_1=0.37\\
v_3= y & & p_1=0.25\\
v_4= y-z & -1.4 & p_1=0.33\\
v_5= z & & p_1=0.50
\end{array}$$

試列相當之法方程式並解算其未知數值並求其中誤差：



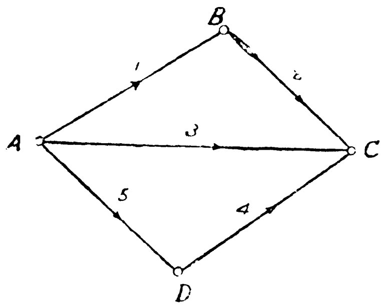
第五章　第六圖

4. 在測站 S 對準 A, B, C 三點共測三角，其值爲：

$$\alpha_1=43°37'15'',$$
$$\beta=248°12'34'',$$
$$\gamma=201°34'55''$$

設觀測之精度相等，試平差之。

5. 測站 A 之海拔爲 237.483，茲擬根據之求 B, C, D 三測站之高程，故先應用水準測量定出其間之高程差，所得之結果如下：



第五章　　第七圖

$h_1=5.835$ 公尺，　$h_2=3.782$ 公尺

$h_3=9.640$ 公尺，　$h_4=7.384$ 公尺

$h_5=2.270$ 公尺。

各測站間之距離為：

$S_1=3.5$ 公里，　$S_2=2.7$ 公里，

$S_3=4.0$ 公里，　$S_4=3.0$ 公里，

$S_5=2.5$ 公里。

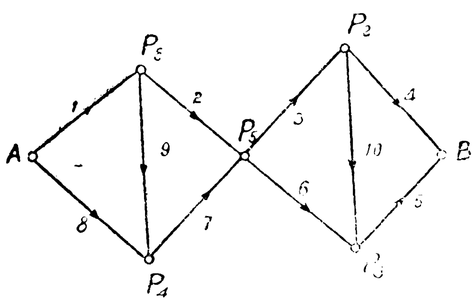
試求 B, C, D 三測站之平差海拔及其中誤差。

6. 設 A, B, C 三點之坐標及其至新點 D 之三距離均已測定如下：

A:	$x=-\ 732.540$ 公尺	$y=+1700.840$ 公尺
B:	-2386.087 公尺	$+\ 140.916$ 公尺
C:	$+\ 889.055$ 公尺	$-\ 661.723$ 公尺

$AD=1.89$ 公里，　$BD=0.49$ 公里　$CD=2.87$ 公里

試求 D 點之坐標及其中誤差。



第五章　　第八圖

7. 下列水準網內 A 及 B 兩點之海拔 H_a 及 H_b 係於事前測定，水準測量共測絡線 10 條，其高程差為 h_1、h_2 …… h_{10}，由之求 P_1，P_2 …… P_5 等之海拔，試按平差法原理列出其改正數方程式。

8. 試應用士賴伯約化法求下列改正數方程式內之未知數及 $[vv]$：

$$v_1=-\ 0.83+\zeta+\ 44.71\xi-\ 77.84\eta$$

$$v_2=+\ 5.37+\zeta-\ 42.71\xi+\ 63.56\eta$$

$$v_3=+16.96+\zeta-222.79\xi+259.79\eta$$

$$v_4=+\ 3.48+\zeta-\ 34.63\xi-\ 29.65\eta$$

$$v_5=+\ 1.53+\zeta-\ 31.01\xi-\ 99.31\eta$$

第六章　條件觀測之平差

第一節　條件方程式

所謂條件觀測之平差者，乃在一組未知數之眞値間，有固定物理或幾何之條件存在，平差時必須顧及，使平差後所得之最或是値能滿足之謂也。茲試以最簡單之例說明之：在地面上量一三角形之三內角 α, β, γ，由幾何學之定理知一球面三角形之內角和將等於 $180°$＋球面角超，而球面角超係由三角形之面積求之。設球面角超爲 ε，則在 α, β, γ，三角度之眞値間，當有下列條件：

$$\alpha+\beta+\gamma=180°+\varepsilon$$

或
$$\alpha+\beta+\gamma-(180°+\varepsilon)=0 \tag{1}$$

若上述三角之觀測値爲 α', β', γ'，則得

$$\alpha'+\beta'+\gamma'-(180^0+\varepsilon)=w \tag{2}$$

w 爲將觀測値代入原方程式(1)後所得之値，普通名爲"不符値"，在前例中，又名爲三角形閉合差。

方程式(1)或(2)名爲條件方程式。在一組觀測量中，可有多個條件存在，其形式可爲一次或多次。設有觀測量之眞値爲 x_1, x_2, ……x_n，其間有一條件爲：

$$F(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)=0 \tag{3}$$

而 x_1, x_2……x_n 之觀測値爲 l_1, l_2……l_n，其平差所得之改正數爲 v_1, v_2……v_n，則

$$x_i=l_i+v_i$$

代入(3)即得：

$$F(l_1+v_1,l_2+v_2\cdots l_n+v_n)=F(l_1,l_2\cdots l_n)+\frac{\partial F}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial F}{\partial l_2}v_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial l_n}v_n$$

$$+(\text{二次以上各項})=0 \tag{4}$$

命
$$F(l_1,l_2\cdots\cdots l_n)=w_1 \tag{5}$$

并以 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ 代表微分係數 $\frac{\partial F}{\partial l_1}, \frac{\partial F}{\partial l_2}, \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial l_n}$，捨去二次以上各項(因 v 之值均甚小)不論，則式(4)可化爲一次方程式如下：

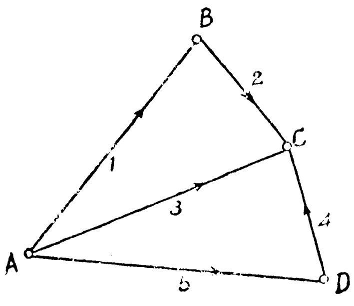
$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w=0 \tag{6}$$

式(6)係由條件方程式(3)所演化而得之條件，卽平差後各改正數間必須滿足之關係也。在 n 個觀測量間，設有 r 個如式(6)之條件方程式，則 r 之數目必須較 n 爲小，始發生平差問題。利用 r 個條件方程式，可將 n 個未知數之改正數 $v_1, v_2 \cdots\cdots v_n$ 消去任意 r 個，而僅餘 $n-r$ 個互相獨立之改正數。觀測量旣爲 n 個，故多餘之觀測爲 r 個。

倘 $r=n$，則 n 個如式(6)之方程式，適足以決定 n 個未知數之值，不但無平差問題，卽觀測亦無意義，蓋僅憑數學之條件已能求出未知數値，固無需觀測矣。

至於 $r>n$ 時，卽條件之數目多於未知數時，則問題不能解算，蓋少數之觀測值實不能滿足多數之條件也。故在條件觀測中，條件方程式之數目必須少於未知數之數目，且卽等於多餘觀測之數目。解算任一條件平差問題時，首須研究若干獨立觀測量卽足以解算該問題，設觀測量多於最低數目，卽有條件方程式之存在，而其數目卽等於多餘觀測之數目。

例一：設 A 點之高程爲已知，觀測之高程差共有5個，卽 h_1 至 h_5 求 B, C, D 三點之高。



第六章　第一圖

作此項計算時，三個觀測，已能定三點之高程，在本例內事實上多作觀測二個，故得二條件方程式：

$$(h_1+v_1)+(h_2+v_2)-(h_3+v_3)=0$$
$$(h_3+v_3)-(h_4+v_4)-(h_5+v_5)=0$$

令
$$h_1+h_2-h_3=w_1$$
$$h_3-h_4-h_5=w_2$$

於是
$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2-v_3+w_1=0 \\ v_3-v_4-v_5+w_2=0 \end{aligned}\right\} r=2$$

上述之 v_i 爲各高程差 h_i 上應加之改正數。

第二節　條件觀測化爲間接觀測

條件方程式如不繁多，而其係數又復簡單，則可應用直接法解算。所

謂直接法者,即將條件觀測化成間接觀測而解出之謂也。

今設有 n 個未知數 $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$, 其間有 r 個條件:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=0 \\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_0+r_1x_1+r_2x_2+\cdots\cdots+r_nx_n=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

如利用此 r 個條件方程式,消去任意 r 個未知數,則僅餘 $n-r$ 個未知數。茲假定消去 $x_1, x_2\cdots\cdots x_r$, 令 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_r$ 均以 $x_{r+1}, x_{r+2}\cdots\cdots x_n$ 表示之, 則

$$\left.\begin{array}{l} x_1=A_1x_{r+1}+B_1x_{r+2}+\cdots\cdots+H_1x_n \\ x_2=A_2x_{r+1}+B_2x_{r+2}+\cdots\cdots+H_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=A_rx_{r+1}+B_rx_{r+r}+\cdots\cdots+H_rx_n \end{array}\right\} \tag{8}$$

如觀測 $x_1, x_2\cdots\cdots x_n$ 之結果為 $l_1, l_2\cdots\cdots l_n$, 於是可得下列 n 個改正數方程式:

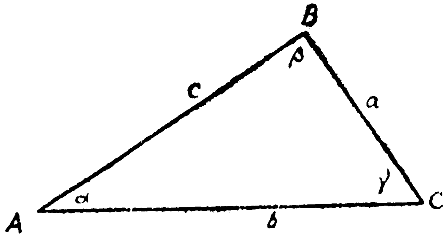
$$\left.\begin{array}{l} l_1\ \ +v_1=A_1x_{r+1}+B_1x_{r+2}+\cdots\cdots+H_1x_n \\ l_2\ \ +v_2=A_2x_{r+1}+B_2x_{r+2}+\cdots\cdots+H_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_r\ \ +v_r=A_rx_{r+1}=B_rx_{r+2}+\cdots\cdots+H_rx_n \\ l_{r+1}+v_{r+1}=x_{r+1} \\ l_{r+2}+v_{r+2}=\qquad\qquad x_{r+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n+v_n=\qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{array}\right\} n\text{ 個} \tag{9}$$

方程式 (9) 之形式係為間接觀測中之改正數方程式,由此可以解算 x_{r+1}, $x_{r+2}\cdots\cdots x_n$ 之值,代入(8)內,又能求出 $x_1, x_2\cdots\cdots x_r$ 等值,且所有 x 值必能滿足(7)之條件,因式(8)係因(7)所演化而出者。

方程式(9)內共有 n 個觀測值, $n-r$ 個未知數。設各觀測值之權數為 $p_1, p_2\cdots\cdots p_n$, 則按照間接觀測之公式,權單位之中誤差應為:

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-(n-r)}}=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}。\tag{10}$$

例: 茲有一平面三角形 ABC, 其間之三內角 α, β, γ 必須滿足下列



第六章　第二圖

之條件。

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \tag{a}$$

顧事實上三內角 α,β,γ 之觀測值 L_1, L_2, L_3 往往不能適合預期之結果，而得

$$L_1+L_2+L_3-180^\circ=w \tag{b}$$

在觀測值上加以改正數後，始能滿足必須之條件：

$$(L_1+V_1)+(L_2+V_2)+(L_3+V_3)=180^\circ \tag{c}$$

由(b)及(c)二式中可得

$$V_1+V_2+V_3+w=0 \tag{d}$$

茲將內角 γ 以其他二角表示之，即

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=L_1+V_1\\ \beta&=L_2+V_2\\ \gamma&=L_3+V_3=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-(L_1+V_1+L_2+V_2)\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

復命 x 及 y 為二新未知數，而以 L_1 及 L_2 之值為 α 及 β 之近似值，於是得

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=L_1+x\\ \beta&=L_2+y\\ \gamma&=180^\circ-(\alpha+\beta)\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

由是可得改正數方程式：

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\alpha-L_1\\ V_2&=\beta-L_2\\ V_3&=\gamma-L_3=180^0-(L_1+V_1+L_2+V_2)-L_3\\ &=180^0-(L_1+L_2+L_3)-V_1-V_2=-x-y-w\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

法方程式：

$$\left.\begin{aligned}+2x+y+w&=0\\ x+2y+w&=0\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

解出：

$$y=\frac{-\frac{w}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{w}{3}$$

故

$$\beta=L_2-\frac{w}{3}.$$

該角之權爲:

$$P_y=P_\beta=\frac{3}{2}.$$

每一角觀測值之中誤差爲:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[ll\cdot 2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{w^2}{3}}{1}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}.$$

角度平差後之中誤差爲:

$$M_y=M_\beta=\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{w}{3}\sqrt{2}.$$

與第四章第八節用直接觀測平差法所求得之結果完全相同。

第三節　繫數解法

前節所論之方法利用 r 個條件方程式消除 r 個未知數，然後用間接觀測方法平差之。若條件方程式爲數較多，且形式複雜，則前項消除工作甚屬繁巨，計算頗爲不便，故高斯創用"繫數解法"，未知數不必消除，即可直接求得其最或是值。茲論述如下:

設有未知數 n 個; $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$，其間有條件方程式 r 個:

$$r\text{ 個}\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=0\\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_0+r_1x_1+r_2x_2+\cdots\cdots+r_nx_n=0\end{array}\right\} \qquad (11)$$

以觀測值 $l_1, l_2 \cdots\cdots l_n$ 代未知數 x_i 之位置後，上列方程式將不復滿足必要之條件，而形成下式:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1l_1+a_2l_2+\cdots\cdots+a_nl_n=w_1\\ b_0+b_1l_1+b_2l_2+\cdots\cdots+b_nl_n=w_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_0+r_1l_1+r_2l_2+\cdots\cdots+r_nl_n=w_r\end{array}\right\} \qquad (12)$$

今以 $x_1=l_1+v_1$, $x_2=l_2+v_2$, ……$x_n=l_n+v_n$, 代入條件方程式(11), 則得

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1(l_1+v_1)+a_2(l_2+v_2)+\cdots\cdots+a_n(l_n+v_n)=0 \\ b_0+b_1(l_1+v_1)+b_2(l_2+v_2)+\cdots\cdots+b_n(l_n+v_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_0+r_1(l_1+v_1)+r_2(l_2+v_2)+\cdots\cdots+r_n(l_n+v_n)=0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

比較(13)與(12)得

$$r\text{ 個}\left\{\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+w_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1v_1+r_2v_2+\cdots\cdots+r_nv_n+w_n=0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

式(12)及(14)可作下列寫法:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0+[al]=w_1, & [av]=-w_1 \\ b_0+[bl]=w_2, & [bv]=-w_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_0+[rl]=w_r, & [cv]=-w_r \end{array}\right\} \quad (15)$$

式(14)爲平差後必須滿足之條件方程式。平差時除此以外,尙須顧及最小二乘法之原理, 卽

$$[pvv]=p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+\cdots\cdots+p_nv_nv_n=\text{最小值} \quad (16)$$

欲使(16)與(15)同時滿足,須將式(14)分別乘以不定係數, $-2k_1$, $-2k_2$, ……$2k_r$ 併附於$[pvv]$之後,而令整個函數爲最小值:

$$[pvv]-2k([av]-w_1)-2k_2([bv]-w_2)\cdots\cdots2k_r([rv]-w_r)=\text{最小值} \quad (17)$$

將上式展開,再按 v_1, v_2…… 集項, 乃得

$$\left.\begin{array}{l} p_1v_1v_1-2(a_1k_1+b_1k_2+\cdots\cdots+r_1k_r)v_1 \\ +p_2v_2v_2-2(a_2k_1+b_2k_2+\cdots\cdots+r_2k_r)v_2 \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +p_nv_nv_n-2(a_nk_1+b_nk_n+\cdots\cdots+r_nk_r)v_n \\ \quad +2(w_1k_1+w_2k_2+\cdots\cdots+w_rk_r)=\text{最小值} \end{array}\right. \quad (18)$$

按微分法求最小值之原理,將上式分別依 v_1, v_2……v_n 微分之,而令其結果爲零, 於是得

$$\left.\begin{aligned}p_1v_1&=a_1k_1+b_1k_2+\cdots\cdots+r_1k_r\\p_2v_2&=a_2k_1+b_2k_2+\cdots\cdots+r_2k_r\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\p_nv_n&=a_nk_1+b_nk_1+\cdots\cdots+r_nk_r\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

或

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{1}{p_1}(a_1k_1+b_1k_2+\cdots\cdots+r_1k_r)\\v_2&=\frac{1}{p_2}(a_2k_1+b_2k_2+\cdots\cdots+r_2k_r)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\v_n&=\frac{1}{p_n}(a_nk_1+b_nk_2+\cdots\cdots+r_nk_r)\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

上式名爲繫數方程式。$k_1, k_2\cdots\cdots k_r$ 名爲繫數。繫數之數目與條件方程式之數目相等。若知 $k_1, k_2\cdots\cdots k_r$ 等之數值，則可應用繫數方程式求改正數 v_i。將繫數方程式 (20) 代入條件方程式 (14) 內，並按 k 集項，卽得：

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1&=0\\\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2&=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r&=0\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

上式(21)與間接觀測中之法方程式完全類似，所有係數均與平方係數對角線對稱，故亦名爲法方程式。此處之未知數 $k_1\ k_2\cdots\cdots k_r$ 共有 r 個，方程式亦爲 r 個，故解算此法方程式後，卽可得各繫數之值。再將其值代入式(20)內，得各觀測値之改正數，平差問題於是解決。至於法方程式(21)之解算，仍可用前章所論之高斯或杜力特爾約化法，玆不贅論。以上係假定不等權觀測，在等權觀測時，則各 p 均爲 1，而式(20)及式(21)內之 p 均可略去。

至於 $[vv]$ 之求法，可直接以改正數之平方計算之，并可用另一公式檢核之。檢核之公式可如下法求之：將式(20)兩邊平方並乘以相當之權數卽得：

$$\left.\begin{aligned} p_iv_iv_i=\frac{1}{p_i}(a_ia_ikk_1^2+a_ib_ik_1k_2)+\cdots\cdots+a_ir_ik_1k_r \\ +a_ib_ik_1k_2+b_ib_ik_2^2+\cdots\cdots+b_ir_ik_2k_r \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_ir_ik_1k_r+b_ir_ik_2k_r+\cdots\cdots+r_ir_ik_r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

故

$$\left.\begin{aligned} [pvv]=\left[\frac{aa}{p}\right]k_1^2+\left[\frac{ab}{p}\right]k_1k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_1k_r \\ +\left[\frac{ab}{p}\right]k_1k_2+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2^2+\cdots\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_1k_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\left[\frac{ar}{p}\right]k_1k_2+\left[\frac{br}{p}\right]k_2k_r+\cdots\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

試將此式與(21)相比較，則上式可簡書如下：

$$[pvv=-k_1w_1-k_2w_2\cdots\cdots k_rw_r=-[kw]。 \qquad (24)$$

此外(pvv)尚有另一表示方法，將式(23)列成下形：

$$\left.\begin{aligned} [pvv]=\left[\frac{aa}{p}\right]k_1^2+2\left[\frac{ab}{p}\right]k_1k_2+\cdots\cdots+2\left[\frac{ar}{p}\right]k_1k_2 \\ +\left[\frac{bb}{p}\right]k_2^2+\cdots\cdots+2\left[\frac{br}{p}\right]k_rk_r \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\left[\frac{rr}{p}\right]k_r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

前已論及條件觀測中之法方程式與間接觀測者完全類似，例如式(21)中之$\left[\frac{aa}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]\cdots\cdots$及$w_1, w_2\cdots\cdots w_r$相當於第五章第三節內式(36)中之$[paa][pab]\cdots\cdots$及$-[pab]$，$-[pbl]\cdots\cdots[pnl]$，而$k_1\ k_2\cdots\cdots k_r$則相當於彼處之$x, y\cdots\cdots t$；由此則式(25)之右方，相當於彼處之

$$\left.\begin{aligned} [paa]x^2+2[pab]xy+2[pac]xz+\cdots\cdots \\ +[pbb]y^2+2[pbc]yz+\cdots\cdots \\ +[pcc]z^2+\cdots\cdots \\ +\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

但前章第六節中式(54)*至(61)*曾證明：

$$
\begin{aligned}
[pvv] = [paa]\,x^2 &+ 2[pab]xy + 2[pac]xz \\
&+ [pbb]y^2 + 2[pbc]yz \\
&+ [pcc]z^2 \\
= \frac{[pal]^2}{[paa]} &+ \frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} + \frac{[pcl\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}
\end{aligned} \tag{27}
$$

同理可自式(25)內導出相當之公式如下:

$$
[pvv] = \frac{[w_1]^2}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]} + \frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]} + \frac{[w_3\cdot 2]^2}{\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]} + \cdots\cdots \tag{28}
$$

$\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]$ $\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]$ 之意義與$[pbb\cdot 1]$ $[pcc\cdot 2]$ 相同，因 w_1, w_2 ……相當於$-[pal]$，$-[pbl]$等，故$[w_2\cdot 1]$相當於$[pbl\cdot 1]$，$[w_3\cdot 2]$相當於$[pcl\cdot 2]$，其求法亦與間接觀測中求$[pvv]$之約化步驟完全相同。惟該處$[pll]$一項，此處爲零，故約化之步驟如下:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\left[\dfrac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\dfrac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\dfrac{ac}{p}\right]k_3 + w_1 = 0 & \\
\left[\dfrac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\dfrac{bc}{p}\right]k_3 + w_2 = 0 & \left[\dfrac{bb\cdot 1}{p}\right]k_2 + \left[\dfrac{bc\cdot 1}{p}\right]k_3 + [w_2\cdot 1] = 0 \\
\left[\dfrac{cc}{p}\right]k_3 + w_3 = 0 & \left[\dfrac{cc\cdot 1}{p}\right]k_3 + [w_3\cdot 1] = 0 \\
0 & [0\cdot 1] \\
 & \left[\dfrac{cc\cdot 2}{p}\right]k_3 + [w_3\cdot 2] = 0 \\
 & [0\cdot 2] \\
 & [0\cdot 3]
\end{array}
\right\} \tag{29}
$$

式(29)之左面爲法方程式，其下附有0，係相當於間接觀測中之$[pll]$; $[0\cdot 1]$，$[0\cdot 2]$，$[0\cdot 3]$即相當於$[pll\cdot 1]$，$[pll\cdot 2]$，$[pll\cdot 3]$，因

$$
[0.3] = \frac{w^2{}_1}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]} - \frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{[w_3\cdot 2]^2}{\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]},
$$

故按照式(28)

$$
[0.3] = [pvv] \tag{30}
$$

綜合以上所述，$[pvv]$ 之計算共有三法：一爲直接由改正數計算；二爲用式(24)；三則用式(28)，而以式(29)之約化法求之。若三法所求之結果盡相同，是卽證明法方程式之解算無誤。應用繫數解法求得 $[pvv]$ 後，卽可按照下列公式：

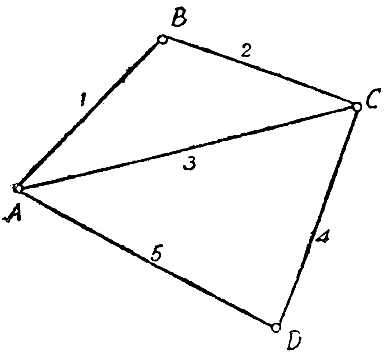
$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

計算權單位之中誤差，r 爲條件數目。

例一：設 A 站之海拔 $H_a=237.483$ 公尺，茲爲求 B, C 及 D 三點之海拔計，分五路作水準測量求 A 站與 B, C 及 D 三點間之高程差 h_1, h_2 ……h_5。其結果如下：

$h_1=5.835$ 公尺，　$h_2=3.782$ 公尺，　$h_3=9.640$ 公尺

$h_4=7.384$ 公尺，　$h_5=2.270$ 公尺。



第六章　第三圖

$S_1=3.5$ 公里，　$S_2=2.7$ 公里，

$S_3=4.0$ 公里，　$S_4=3.0$ 公里，

$S_5=2.5$ 公里。

按第一節例題，知此題平差之二條件方程式爲：

$$(h_1+V_1)+(h_2+V_2)-(h_3+V_3)=0$$
$$(h_3+V_3)-(h_4+V_4)-(h_5+V_5)=0$$

或

$$V_1+V_2-V_2+w_1=0$$
$$V_3-V_4-V_5+w_2=0$$

令

$$w_1=h_1+h_2-h_3=-23 \text{ 公厘}$$
$$w_2=h_3-h_4-h_5=-14 \text{ 公厘}$$

根據前章第十二節，知水準測量之權乃與距離成反比例。茲以一公里爲單位，令其權與距離之關係爲：

$$p_i=\frac{1}{S_i}$$

於是可求各高程差之權倒數如下：

$$\frac{1}{p_1}=3.5,\quad \frac{1}{p_2}=2.7,\quad \frac{1}{p_3}=4.0,\quad \frac{1}{p_4}=3.0,\quad \frac{1}{p_5}=2.5,$$

其條件方程式及法方程式各項係數之計算，列成下表：

	a	b	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{bb}{p}$
1	+1		3.5	3.5		
2	+1		2.7	2.7		
3	−1	+1	4.0	4.0	−4.0	4.0
4		−1	3.0			3.0
5		−1	2.5			2.5
和				10.2	−4.0	9.5

法方程式爲：

$$\underline{10.2}k_1-4.0k_2-23=0$$
$$\underline{+9.5}k_2-14=0$$

解出

$$k_1=3.40,\quad k_2=2.90。$$

根據式(20)求各改正數 v_i：

$$V_1=\frac{a_1}{p_1}k_1+\frac{b_1}{p_1}k_2=+12\text{公厘}$$

$$V_2=\frac{a_2}{p_2}k_1+\frac{b_2}{p_2}k_2=+\ 9\text{公厘}$$

$$V_3=\frac{a_3}{p_3}k_1+\frac{b_3}{p_3}k_2=-\ 2\text{公厘}$$

$$V_4=\frac{a_4}{p_4}k_1+\frac{b_4}{p_4}k_2=-\ 9\text{公厘}$$

$$V_5=\frac{a_5}{p_5}k_1+\frac{b_5}{p_5}k_2=-\ 7\text{公厘}$$

由改正數 v_i 計算 $[pvv]$，得

$$[pvv]=118.74$$

由式(24)求之，則得

$$[pvv]=-[pw]=118.8$$

$$\therefore m=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}=\sqrt{\frac{118.74}{2}}=\pm 7.7\text{公厘}$$，是卽每一公里之中誤差。

高程差之平差值各為：

$h'_1=h_1+v_1=5.847$ 公尺， $h'_4=h_4+v_4=7.375$ 公尺，

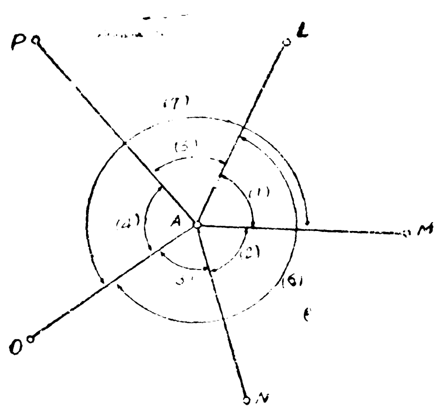
$h'_2=h_2+v_2=3.791$ 公尺， $h'_5=h_5+v_5=2.263$ 公尺。

$h'_3=h_3+v_3=9.638$ 公尺，

故所求三點之海拔為：

$$H_b=243.330 \text{ 公尺}$$
$$H_c=247.121 \text{ 公尺}$$
$$H_d=239.746 \text{ 公尺}$$

例二：在測站 A 向 L,M,N,O,P 五測標觀測，計得七角度



第六章 第四圖

$$L_1=\ 85°14'24.5''$$
$$L_2=\ 83°45'32.0''$$
$$L_3=\ 41°35'24.0''$$
$$L_4=\ 99°01'14.1''$$
$$L_5=\ 50°23'26.7''$$
$$L_6=210°35'17.5''$$
$$L_7=234°39'08.2''$$

五個方向之間僅有四個獨立角度，故多餘觀測之數目為 3，亦即應有三個條件存在於此七個觀測值之間。茲按第四圖所示，列出此三個條件方程如下：

$$(1)+(2)+(3)-(6)=0$$
$$(4)+(5)+(6)-360°=0$$
$$-(1)+(6)+(7)-360°=0$$

茲以 $(L+V)_i$ 代替 (1)，(2)……於是可得條件方程如下表：

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
1	+1	+1	+1			−1		+3.0=0
2				+1	+1	+1		−1.7=0
3	−1					+1	+1	+1.2=0
4	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

由此得法方程式：

$$
\begin{aligned}
\underline{+4k_1} - k_2 - 2k_3 + 3.0 &= 0 \\
\underline{+3k_2} + k_3 + 1.3 &= 0 \\
\underline{+3k_3} + 3.2 &= 0
\end{aligned}
$$

解出

$$k_1 = -1.347,\quad k_2 = +0.619,\quad k_3 = -1.503$$

改正數爲

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
$+0.16''$	$-1.35''$	$-1.35''$	$+0.62''$	$+0.62''$	$+0.46''$	$-1.50''$

平差後之角度值

$$
\begin{aligned}
(1) &= L_1 + V_1 = 85^\circ 14' 24.66'' \\
(2) &= L_2 + V_2 = 83^\circ 45' 30.65'' \\
(3) &= L_3 + V_3 = 41^\circ 35' 22.65'' \\
(4) &= L_4 + V_4 = 99^\circ 01' 14.72'' \\
(5) &= L_5 + V_5 = 50^\circ 23' 27.32'' \\
(6) &= L_6 + V_6 = 210^\circ 35' 17.96'' \\
(7) &= L_7 + V_7 = 234^\circ 39' 06.70''
\end{aligned}
$$

將此值代入上述三條件方程式，適能滿足，足證平差計算無誤。

第四節　未知數函數之中誤差

平差之目的，除在求未知數之值以外，尙須求平差後各未知數或其函數之中誤差。在平差以前如以觀測值 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 計算其函數

$$f = f(l_1, l_2, \cdots\cdots l_n) \tag{31}$$

之值，則求此未平差之 f 值之中誤差，其法甚爲簡單，蓋各觀測值 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 之間，均互相獨立，故可按照誤差傳播定律求之：

$$m_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2 \tag{32}$$

m_f 爲 f 之中誤差，$m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ 等爲 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 之中誤差。今命

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial l_1},\quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial l_2},\quad \cdots\cdots f_n = \frac{\partial f}{\partial l_n} \tag{33}$$

而以 m 爲權單位之中誤差，則由

$$p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = \cdots\cdots = p_n m_n^2 = m^2$$

之關係，可將式(32)改書爲：

$$m_f^2 = \left[\frac{ff}{p}\right] m^2 \tag{34}$$

但如以平差後未知數之值 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 求此同一函數之值，設得 F，則此時

$$F = f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) = f(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \cdots\cdots l_n + v_n) \tag{35}$$

其中每個改正數 v 均爲所有觀測值之函數，即

$$v_i = \varphi_i(l_1, l_2, \cdots\cdots l_n) \tag{36}$$

蓋所有改正數均由整組觀測值經平差計算而得，故此時各 v 並非互相獨立。如命

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial l_1}, \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial l_2}, \cdots\cdots F_n = \frac{\partial F}{\partial l_n} \tag{37}$$

則 F 之中誤差爲：

$$m_F^2 = \left[\frac{FF}{p}\right] m^2 \tag{38}$$

$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 之值，並不與 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$ 之值相同，蓋由式(35)並注意各 v 均爲 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 之函數，故微分係數 F_i 之公式應爲：

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial l_i} = \frac{\partial f}{\partial l_i} + \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial l_i} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial l_i} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial l_i} \tag{39}$$

由函數(35)可知

$$\frac{\partial f}{\partial l_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i} \tag{40}$$

更按式(33)之關係可化式(39)爲：

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial l_i} = f_i + f_1 \frac{\partial v_1}{\partial l_i} + f_2 \frac{\partial v_2}{\partial l_i} + \cdots\cdots + f_n \frac{\partial v_n}{\partial l_i} \tag{41}$$

所有上式之 $\frac{\partial v}{\partial l_i}$ 必須間接求之。蓋 v 爲各繫數 k 之函數，而 k 又爲各觀測值之函數，故

$$\frac{\partial v_h}{\partial l_i}=\frac{\partial v_h}{\partial k_1}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\frac{\partial v_h}{\partial k_2}\cdot\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots\cdots+\frac{\partial v_h}{\partial k_r}\cdot\frac{\partial k_r}{\partial l_i} \tag{42}$$

h為自1至n（觀測量之數目）間之任意一個，k_1，k_2，……k_r為繫數，共有r個。關於$\frac{\partial v_h}{\partial k_1}$，$\frac{\partial v_h}{\partial k_2}$，……等，可自本章第三節式(20)經部分微分而求之，即

$$\frac{\partial v_h}{\partial k_1}=\frac{a_h}{p_h},\frac{\partial v_h}{\partial k_2}=\frac{b_h}{p_h},\quad\cdots\cdots\frac{\partial v_h}{\partial k_r}=\frac{r_h}{p_h} \tag{43}$$

故式(41)又可書為：

$$F_i=f_i+\left[\frac{af}{p}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\left[\frac{bf}{p}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]\frac{\partial k_r}{\partial l_i} \tag{44}$$

上式右方之各項，可自前節之法方程式內求之：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1=0\\&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0\end{aligned} \tag{45}$$

如以暫時不定之係數L_1，L_2……L_r分別順次乘上列各式，而相加之，並按k_1，k_2……k_r集項，即得

$$\begin{aligned}&\left(\left[\frac{aa}{p}\right]L_1+\left[\frac{ab}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]L_r\right)k_1\\&+\left(\left[\frac{ab}{p}\right]L_1+\left[\frac{bb}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]L_r\right)k_2\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left(\left[\frac{ar}{p}\right]L_1+\left[\frac{br}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]L_r\right)k_r\\&+w_1L_1+w_2L_2+\cdots\cdots+w_rL_r=0\end{aligned} \tag{46}$$

L之數目共為r個，為任意之係數，名為傳遞係數，吾人可以下列r個傳遞方程式決定其值：

$$\left[\frac{aa}{p}\right]L_1+\left[\frac{ab}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]L_r=\left[\frac{af}{p}\right]$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right]L_1+\left[\frac{bb}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]L_r=\left[\frac{bf}{p}\right] \tag{47}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{ar}{p}\right]L_1+\left[\frac{br}{p}\right]L_2+\cdots\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]L_r=\left[\frac{rf}{p}\right]$$

於是式(46)可改化為:

$$\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r+w_1L_1+w_2L_2+\cdots+w_rL_r=0 \tag{48}$$

依前節式(15),w 係以 l 表示之,於是得

$$\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r=-(a_0+[al])L_1-(b_0+[bl])L_2\cdots\cdots$$
$$(r_0+[rl])L_r \tag{48}$$

將式(48)*依 l_i 微分之,即得

$$\left[\frac{af}{p}\right]\cdot\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\left[\frac{bf}{p}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]\frac{\partial k_r}{\partial l_i}=-a_iL_1-b_iL_2\cdots r_iL_r \tag{49}$$

以式(49)代入式(44)內,可化簡之為

$$F_i=f_i-a_iL_1-b_iL_2\cdots\cdots r_iL_r \tag{50}$$

是以計算函數 F 之中誤差時,當先求微分係數 f_1, f_2 $\cdots\cdots$ f_n, 然後求 $\left[\frac{af}{p}\right]$, $\left[\frac{bf}{p}\right]$$\cdots\cdots$$\left[\frac{rf}{p}\right]$ 等和數,附於法方程式之後以求傳遞係數 L_1、$L_2$$\cdots\cdots$ L_r 等值,再由式(50)定 F_1, F_2 $\cdots\cdots$ F_n,最後以式(38)求 m_F。

上述之法固可計算 m_F 之值,然尚嫌繁瑣。此外尚有一法不需計算 F_1, F_2 $\cdots\cdots$ F_n 等值而直接算求之。其法以 $\frac{a_i}{p_i}$ 乘式(50)而求和數,乃得

$$\left[\frac{aF}{p}\right]=\left[\frac{af}{p}\right]-\left[\frac{aa}{p}\right]L_1-\left[\frac{ab}{p}\right]L_2\cdots\cdots-\left[\frac{ar}{p}\right]L_r$$

由式(47)之第一式,可知

$$\left[\frac{aF}{p}\right]=0 \tag{51}$$

同理，以$\frac{b_i}{p_i}$，……$\frac{r_i}{p_i}$乘式(50)，又得

$$\left[\frac{bF}{p}\right]=0,\cdots\cdots\left[\frac{rF}{p}\right]=0。\tag{52}$$

若以$\frac{F_i}{p_i}$乘式(50)之兩方，而求其和，即得

$$\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{fF}{p}\right]-\left[\frac{aF}{p}\right]L_1-\left[\frac{bF}{p}\right]L_2\cdots\cdots-\left[\frac{rF}{p}\right]L_r$$

由式(51)及(52)可以證明：

$$\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{fF}{p}\right]\tag{53}$$

再以$\frac{f_i}{p_i}$乘式(50)之兩方，於是

$$\left[\frac{fF}{p}\right]=\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\left[\frac{af}{p}\right]L_1-\left[\frac{bf}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]L_r\right\}\tag{54}$$

$$m_F^2=\left[\frac{FF}{p}\right]m^2=m^2\left\{\left[\frac{ff}{p}\right]-\left(\left[\frac{af}{p}\right]L_1+\left[\frac{bf}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]L_r\right)\right\}\tag{55}$$

應用上式時，可不必計算F_i，而直接求m_F。式(55)括弧(　　)內之值，可依式(47)用高斯約化法化簡之，其步驟與第五章間接觀測中第六節內式(54)至式(61)定全相同，結果為：

$$m^2_F=m^2\left\{\left[\frac{ff}{p}\right]-\left(\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot1\right]}+\cdots\cdots\right)\right\}\tag{56}$$

$$m_F^2=m^2(\mathrm{I}-\mathrm{II})\tag{56*}$$

式(56)與間接觀測中求$[vv]$之公式完全相似，其計算之步驟亦同，即於法方程式之後另附一列，$\left[\frac{af}{p}\right]$，$\left[\frac{bf}{p}\right]$……$\left[\frac{ff}{p}\right]$，然後隨同方程式進行約化，結果即得所求之$\left[\frac{FF}{p}\right]$，是為函數$F$之權倒數，因

$$m_F^2=m^2\left[\frac{FF}{p}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p_F}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \tag{57}$$

其中$\frac{ff}{p}$代表平差前之權倒數，而其後各項則為由平差結果所增進之精度也。

應用此法較傳遞係數法為簡捷，但傳遞係數亦可作計算函數值之用。設函數 F 之值先以未經平差之觀測值 l_1，$l_2\cdots\cdots l_n$ 等作一初步之計算，則平差之後應加何種改正，可以傳遞係數計算之，其公式如下：

$$f(x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n)=f(l_1+v_1,l_2+v_2\cdots\cdots l_n+v_n)=f(l_1,l_2\cdots l_n)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial f}{\partial l_2}v_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial l_n}v_n+(\text{二次以上各項}) \tag{58}$$

因假定改正數之值甚小，故二次以上各項均可略去，式(58)簡書之為：

$$f(x)=f(l)+df \tag{59}$$

$$df=f_1v_1+f_2v_2+\cdots\cdots+f_nv_n=[fv] \tag{60}$$

乘前節繫數方程式(20)以相當之 f 而相加，即得

$$[fv]=\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r$$

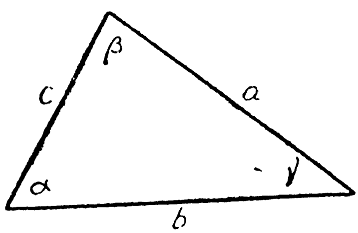
根據本節式(48)，上式可化為：

$$[fv]=-w_1L-w_2L_2\cdots\cdots w_rL_r$$

或　$$[fv]=-[wL] \tag{61}$$

故　$$f(x)=f(l)-[wL]$$

在條件觀測中，因各未知數並非互相獨立，故一函數 f 可有不同之表示法。茲以最簡單之例言之，設一三角形內，觀測其三內角 α，β，γ（圖一），則有一條件方程式：



第六章　第五圖

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+\varepsilon \tag{62}$$

今設欲求 a b 兩邊之比例及其中誤差，命

$$f=\frac{a}{b}$$

將 f 化爲觀測量 α, β, γ 之函數，應用洛讓(Legendre)定理

$$f=\frac{a}{b}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(\beta-\frac{1}{3}\varepsilon\right)} \tag{63}$$

即以 α, β 兩角度表示之，但根據(62)亦可化爲 α, γ 兩角度之函數，即

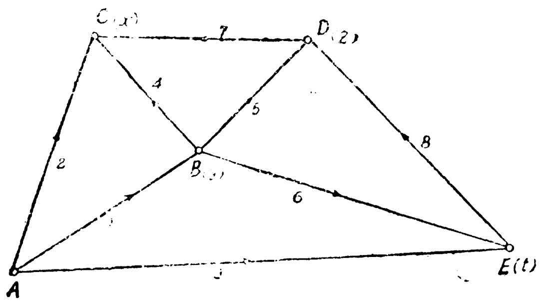
$$f=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left\{180^\circ-\left(\alpha+\gamma-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\right\}} \tag{64}$$

或用 β, γ 兩角度表示之

$$f=\frac{\sin\left\{180^\circ-\left(\beta+\gamma-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\right\}}{\sin\left(\beta-\frac{1}{3}\varepsilon\right)} \tag{65}$$

若以觀測值 α', β', γ' 代入(63)(64)(65)各式內計算 f，因 α', β', γ' 未必滿足條件方程式(62)，故由(63)(64)(65)各式所得之 f 值未必相同。然應用平差後之 α, β, γ 值計算 f，則不啻將函數改化爲式(35)之 F 函數，無論應用任何 f 公式，其結果均得相等之值；即中誤差之計算，無論用(63)(64)(65)之任何一式求 f，然後根據本節之公式定 $\frac{1}{p_F}$，其計算進程雖不同，然結果必均一致。蓋有多餘觀測時，不僅觀測值不能盡相符合，即其函數之值亦必有差異，而平差後所得之結果，則必僅有一個，此乃最小二乘法之特徵也。

例一：茲以前章第十三節之例題重用條件觀測法平差之，並求 AE 與 EC 間高程差之中誤差。水準測量之記錄爲：



第六章　第六圖

$(BA)=l_1=$	189.404	距離	3.1 公里
$(CA)=l_2=$	736.977	距離	9.3 公里
$(EA)=l_3=$	376.607	距離	59.7 公里
$(CB)=l_4=$	547.576	距離	6.2 公里
$(DB)=l_5=$	273.528	距離	16.1 公里
$(EB)=l_6=$	187.274	距離	35.1 公里
$(CD)=l_7=$	274.082	距離	12.1 公里
$(DE)=l_8=$	86.261	距離	9.3 公里

本題之解算，首列條件方程式。A 站爲始點，若觀測無誤差，則藉觀測值 l_1, l_2, l_3 及 l_5 可決定 B, C, D 及 E 四點之高程。每增一觀測即增一條件方程式。茲共多測四次，故共得四條件方程式。例如 B 與 C 間之高程差，由 $-l_1+l_2$ 求之，亦可由 $+l_4$ 求之，而兩路所得結果必相同，以公式表示之爲：

$$-(l_1+V_1)+(l_2+V_2)-(l_4+V_4)=0 \tag{a}$$

將觀測值 l 代入上式，而令常數項之單位爲公厘，於是得第一條件方程式：

$$-V_1+V_2-V_4-3=0 \tag{b}$$

第二條件方程式係由三角形(BCD)內求得：

$$+V_4-V_5-V_7-34=0 \tag{c}$$

從三角形(BDE)及(ABE)內得第三及第四條件方程式：

$$+V_5-V_6-V_8-\ 7=0 \tag{d}$$

$$+V_1-V_3+V_6+71=0 \tag{e}$$

命 AE 間之高程差爲 F, EC 間之高程差爲 F'，則

$$F=l_3+V_3$$

$$F'=(l_4+V_4)-(l_6+V_6)$$

於是 $f_3=+1$，其他 f 均爲零。

$f'_4=+1$，$f'_6=-1$ 其他 f' 均爲零，故條件方程式之係數可列表於下：

$1/p$	3.1	9.3	50.7	6.2	16.1	35.1	12.1	9.3		
號　數	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	W	$=0$
1	-1	$+1$		-1					$-\ 3$	$=0$
2				$+1$	-1		-1		-34	$=0$
3					$+1$	-1		-1	$-\ 7$	$=0$
4	$+1$		-1			$+1$			$+71$	$=0$
S		$+1$	-1				-1	-1	$+27$	$=0$
f			$+1$							
f'				$+1$		-1				

由此列出法方程式及其附項$\left[\dfrac{af}{p}\right]$，$\left[\dfrac{af'}{p}\right]$，等列於 f 及 f' 之下：

法方程式	f	f'
$18.6k_1-6.2k_2+0\ k_3-3.1k_4-3=0$	0	-6.2
$-6.2k_1+34.4k_2-16.1k_3+0\ k_4-34=0$	0	$+6.2$
$-0\ k_1-16.1k_2+60.5k_3-35.1k_4-7=0$	0	$+35.1$
$-3.1k_1+0\ k_2-35.1k_3+97.9k_4+71=0$	-59.7	-35.1
$+9.3k_1+12.1k_2+9.3k_3+59.7k_4+27=0$	-59.7	0

最末之行用以檢核計算之有無錯誤。法方程式之解算，用高斯約化法，列表如下：

k_1	k_2	k_3	k_4		f	f	
$+18.6k_1$	$-6.2\ k_2$	$+0.\ k_3$	$-3.1\ k_4$	$-3=0$	0	-6.2	
1	-0.33333		-0.16667	$-0.16129=0$		-0.33333	
	$+34.4\ k_2$	$-16.1k_3$	$+0\ k_4$	$-34=0$	0	$+6.2$	
	-2.0666		-1.0333	$-1=0$		-2.0667	(A)
		$+60.5k_3$	$-35.1\ k_4$	$-7=0$	0	$+35.1$	
			$+97.9\ k_4$	$+71=0$	-59.7	-35.1	
			-0.5167	-0.5	0	-1.0333	
$+9.3k_1$	$+12.1\ k_2$	$+9.3k_3$	$+59.7\ k_4$	$+27=0$	-59.7	0	
-9.3	$+3.1000$		$+1.5500$	$+1.5$	0	$+3.1$	

k_2	k_3	k_4		f	f'	
$+32.3334k_2$	$-16.1k_3$	$-1.0333k_4$	$-35.0000=0$	0	$+4.1333$	
	-0.49794	-0.03196	$-1.08247=0$		$+0.12784$	
	$+60.5k_3$	$-35.1\ k_4$	$-7.0000=0$	0	$+35.1$	(B)
	-8.0108	-0.5145	$-17.4278=0$		$+2.0582$	
		$+97.3833k_4$	$+70.5=0$	-59.7	-36.1333	
		-0.0330	-1.1185	0	$+0.1321$	
$+15.2000k_2$	$+9.3k_3$	$+61.2500k_4$	$+28.5=0$	-59.7	$+3.1$	
-15.2000	$+7.5687$	$+0.4858$	$+16.4535=0$	0	-1.9432	

k_3	k_4		f	f'	
$+52.4832\,k_3$	$-35.6145\;k_4$	$-24.4278\;=0$	0	$+37.1582$	
1	$-\;0.67859$	$-\;0.46544=0$	0	$+\;0.70802$	
	$+97.3503\;k_4$	$+69.3815\;=0$	-59.7	-36.0012	(C)
	-24.1676	-16.5764	0	$+25.2150$	
$+16.8687\,k_3$	$+61.7358\;k_4$	$+44.9535\;=0$	-59.7	$+\;1.1568$	
-16.8687	$+11.4469$	$+\;7.8514\;=0$	0	-11.9430	

		f	f'	
$+73.1827\,k_4$	$+52.8051=0$	-59.7	-10.7862	
1	$+\;0.7222=0$	$-\;0.81576$	$-\;0.14739$	(D)
$+73.1827\,k_4$	$+52.8051=0$	-59.7	-10.7862	

於是求得各繫數之值：

$$k_1=+0.3900 \qquad k_3=-0.0246$$
$$k_2=+1.0471 \qquad k_4=-0.7222$$

以所得結果代入 (A) 式之總和式內，若計算無誤，則 $9.3k_1+12.1k_2+9.3k_3+59.7k_4$ 應等於-27；現得 27.05，已足證明計算無誤矣。由 k 計算改正數 V_i，尚可利用條件方程式係數表，於各行乘以相當之 k，列成下表：

繫數 \ 改正數	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
k_1	-0.3900	$+0.3900$		-0.3900				
k_2				$+1.0471$	-1.0471		-0.0471	
k_3					-0.0246	$+0.0246$		$+0.0246$
k_4	-0.7222		$+0.7222$			-0.7222		
和	-1.1122	$+0.3900$	$+0.7222$	$+0.6571$	-1.0717	-0.6976	-1.0471	$+0.0246$
$\frac{1}{p}$	3.1	9.3	59.7	6.2	16.1	35.1	12.1	9.3
改正數值	-3.45	$+3.63$	$+43.12$	$+4.07$	-17.25	-24.49	-12.67	$+0.23$

由此得

$$[pvv]=87.98$$

檢核之計算爲：

$$(pvv) = -[wk] = +87.88$$

兩相符合，故每公里之中誤差爲：

$$m = \pm\sqrt{\frac{87.88}{4}} = \pm 4.7\text{公厘}$$

茲加改正數於觀測值，得平差值如下：

$$l_1+v_1=189.4005 \qquad l_5+v_5=273.5107$$

$$l_2+v_2=736.9806 \qquad l_6+v_6=187.2495$$

$$l_3+v_3=376.6501 \qquad l_7+v_7=294.0693$$

$$l_4+v_4=547.5801 \qquad l_8+v_8=\ 86.2612$$

最後將平差值代入上述之條件方程式，其結果必須符合所需之條件，是爲整個平差計算之檢核。

$$-189.4005-547.5801+736.9806=\ 0$$

$$+547.5801-273.5107-274.0693=\ 0.1$$

$$+273.5107-187.2495-\ 86.2612=\ 0$$

$$+189.4005-376.6501+187.2495=-0.1\ \text{公厘}$$

第二及第四條件方程式內之小差異 0.1 公厘，乃由於計算時四捨五入所致，此項結果與用間接觀測法平差所得之結果相符。

至於 F 及 F' 之中誤差，乃由公式 (56) 計算之，式內分 I 及 II 兩部，茲分別求之，然後計算權之倒數。

$$\mathrm{I}=\left[\frac{ff}{p}\right]=\left\{(+1)\cdot(+1)\right\}59.7=59.7$$

$$\mathrm{I}'=\left[\frac{ff'}{p}\right]=\left\{(+1)^2\cdot 6.2+(-1)^2\cdot 35.1\right\}=41.3$$

$$\mathrm{II}=\frac{(-59.7)^2}{73.1827}=59.7\times 0.81576=48.7$$

$$\mathrm{II}'=\frac{(-6.2)^2}{18.6}+\frac{(1.1333)^2}{32.3354}+\frac{(37.1582)^2}{52.4832}+\frac{(-10.7862)^2}{73.1827}$$

$$=6.2\times0.3333+4.1333\times0.12784+37.1582\times0.70862$$
$$+10.7862\times0.14739=30.49$$

故 $\left[\frac{FF}{p}\right]=59.7-48.7=11.0$, $\left[\frac{F'F'}{p}\right]=41.3-30.5=10.8$,

此二值亦可以附加$\left[\frac{ff}{p}\right]$及$\left[\frac{f'f'}{p}\right]$於法方程式之後，而直接約化求得之。

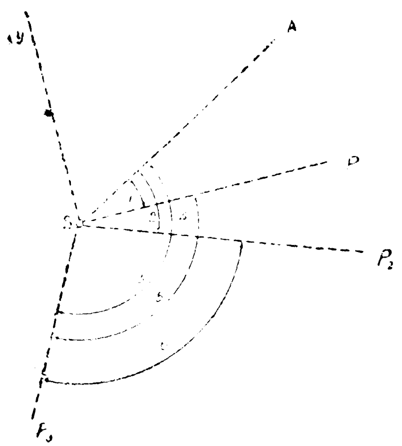
$$m_F{}^2=m^2\cdot 11.0$$
$$m_F=\pm 4.7\sqrt{11.0}=\pm 15.6 \text{ 公厘}$$
$$m_{F'}{}^2=m^2\cdot 10.8$$
$$m_{F'}=\pm 4.7\times\sqrt{10.8}=\pm 15.5 \text{ 公厘}$$

上得之中誤差與前章十三節之結果15.6公厘及15.4公厘亦相符合。

第五節　應用問題舉例

1　測站平差

此項問題之條件方程式原係一次函數，故其約化方法不再詳論。所應注意者，在如何列出條件方程式，蓋此式成立之後，其他不難循法而行之。



第六章　第七圖

例一：

已知：方向角(SA)

觀測角度：$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \cdots\cdots \alpha'_6$

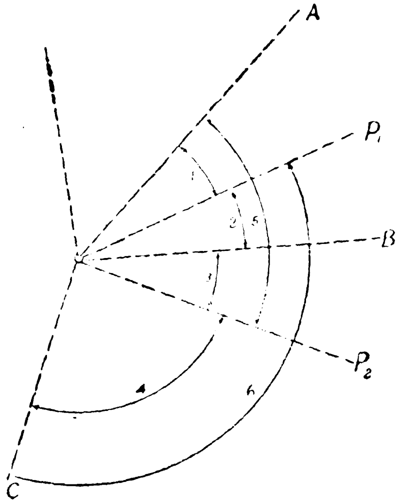
求：方向角(Sp_1)，(Sp_2)及(Sp_3)

解出：$n=6$，$u=3$。

條件方程式數目$=6-3=3$

設$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_6$為諸角度之平差值，於是得三條件方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_4&=\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_5&=\alpha_3\\ \alpha_2+\alpha_6&=\alpha_3\end{aligned}\right\}\text{或}\qquad \begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2\qquad+\alpha_4\qquad\qquad&=0\\ \alpha_1\qquad-\alpha_3\qquad+\alpha_5\qquad&=0\\ \alpha_2-\alpha_3\qquad\qquad+\alpha_6&=0\end{aligned}$$



第六章　第八圖

例二：

已知：方向角(SA)，(SB)，及(SC)

觀測角度：$\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots\cdots \alpha'_6$

求：方向角(Sp_1)及(Sp_2)

解出：$n=6$，$u=2$

條件方程式數目$=6-2=4$

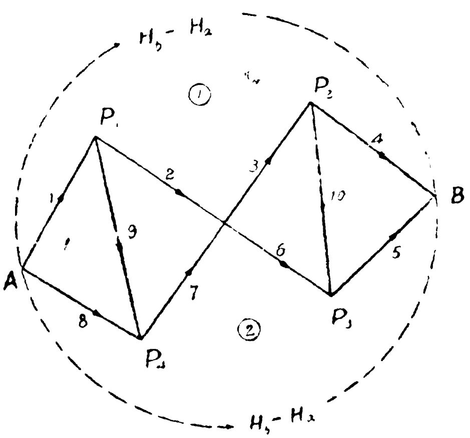
設 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_6$ 爲諸角度之平差值，於是得下列四條件方程式：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= \alpha_5 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &= \alpha_6 \\ \alpha_1+\alpha_2 \qquad &= (SB)-(SA) \\ \alpha_3+\alpha_4 \qquad &= (SC)-(SB) \end{aligned}\right\}$$

或

$$\begin{aligned} &\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \qquad +\alpha_5 = 0 \\ &\quad \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \qquad -\alpha_6 = 0 \\ &\alpha_1+\alpha_2 \qquad\qquad -\{(SB)-(SA)\} = 0 \\ &\qquad\quad +\alpha_3+\alpha_4 \quad -\{(SC)-(SB)\} = 0 \end{aligned}$$

2　高程網平差



第六章　第九圖

例一：

已知：A 及 B 二點之海拔 H_a 及 H_b

觀測之高程差：$h'_1, h'_2 \cdots\cdots h'_{10}$

求：$P_1, P_2 \cdots\cdots P_5$ 五點之海拔

解出：$n=10$，$u=5$

條件方程式之數目$=10-5=5$

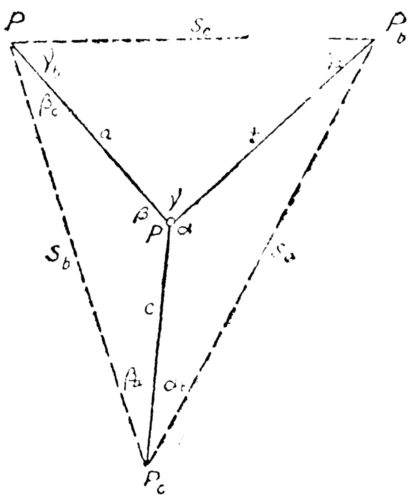
設 $h_1, h_2 \cdots\cdots h_{10}$ 爲平差後之高程差，於是得下列五條件方程式：

$$\left.\begin{array}{ll} h_1+h_2+h_3+h_4-(H_b-H_a) & =0 \\ h_5+h_6+h_7+h_8-(H_b-H_a) & =0 \\ h_1+h_9-h_8 & =0 \\ h_2-h_7-h_9 & =0 \\ h_2+h_{10}-h_6 & =0 \end{array}\right\}$$

或

$$\begin{array}{lllllllllllll} h_1+h_2+h_3+h_4 & & & & & & & & & & -(H_b-H_a) & = & 0 \\ & & & & +h_5 & +h_6 & +h_7 & +h_8 & & & -(H_b-H_a) & = & 0 \\ h_1 & & & & & & & -h_8 & +h_9 & & & = & 0 \\ & h_2 & & & & & -h_7 & & -h_9 & & & = & 0 \\ & & h_3 & & & -h_6 & & & & +h_{10} & & = & 0 \end{array}$$

3 三距離定點法



第六章 第十圖

例一：

已知：P_a, P_b, P_c 三點之坐標 (x_a,y_a), (x_b,y_b) 及 (x_c,y_c)

觀測之距離：a', b' 及 c'

求：P 點之坐標

解出：$n=3$, $u=2$。

條件方程式之數目 $=3-2=1$

三角形 PP_bP_c, PP_cP_a, 及 PP_aP_b 之平差面積為 F''_a, F''_b 及 F''_c 而已知三角形 $P_aP_bP_c$ 之面積為 F, 故條件方程式為：

$$F''_a+F''_b+F''_c-F=0 \qquad \text{(a)}$$

上式內之 F 等於

$$F=\sqrt{S(S-S_a)(S-S_b)(S-S_c)} \qquad S=\frac{S_a+S_b+S_c}{2}$$

S_a, S_b 及 S_c 係由 P_a, P_b 及 P_c 之坐標求之。設 a, b 及 c 與 α, β 及 γ 為平差後之距離及角度。

$$2F''_a=bc\sin\alpha,\ 2F''_b=ca\sin\beta,\ 及\ 2F''_c=ab\sin\gamma$$

以之代入(a)，乃得

$$bc\sin\alpha+ca\sin\beta+ab\sin\gamma-2F=0 \qquad \text{(b)}$$

復令 V_a, V_b, V_c 與 V_α, V_β V_γ 爲距離 a'_1, b', c' 及 α, β, γ 之改正數，於是

$$a=a'+V_a,\quad b=b'+V_b,\quad c=c'+V_c$$

$$\alpha=\alpha'+V_\alpha,\quad \beta=\beta'+V_\beta,\quad \gamma=\gamma'+V_\gamma$$

故公式(b)變成

$$(b'+V_b)(c'+V_c)\sin(\alpha'+V_\alpha)+(c'+V_c)(a'+V_a)\sin(\beta'+V_\beta)$$
$$+(a'+V_a)(b'+V_b)\sin(\gamma'+V_\gamma)-2F=0$$

依泰羅定理展開，捨去高次因數項而不論，得

$$(b'c'\sin\alpha'+c'a'\sin\beta'+a'b'\sin\gamma'-2F)+(b'\sin\gamma+c'\sin\beta')V_a$$
$$+(c'\sin\alpha'+a'\sin\gamma')V_b+(a'\sin\beta'+b'\sin\alpha')V_c+b'c'\cos\alpha'\frac{V_\alpha}{\rho}$$
$$+c'a'\cos\beta'\frac{V_\beta}{\rho}+a'b'\cos\gamma'\frac{V_\gamma}{\rho}=0 \qquad \text{(c)}$$

因擬以 V_a, V_b, V_c 表示 V_α, V_β, V_γ, 故令

$$S_a{}^2=b'^2+c'^2-2b'c'\cos\alpha',\qquad \cos\alpha'=\frac{b'^2+c'^2-S_a^2}{2b'c'}$$

經過相當約化後得：

$$-\sin\alpha'\frac{V_\alpha}{\rho}=\frac{b'^2-c'^2+S_a^2}{2b'^2c'}V_b+\frac{c'^2-b'^2+S_a^2}{2b'c'^2}V_c$$

或
$$\frac{V_\alpha}{\rho}=\frac{c'\cos\alpha'-b'}{b'c'\sin\alpha'}V_b+\frac{b'\cos\alpha'-c'}{b'c'\sin\alpha'}V_c$$

同理可得

$$\frac{V_\beta}{\rho}=\frac{a'\cos\beta'-c'}{c'a'\sin\beta'}V_c+\frac{c'\cos\beta'-a'}{c'a'\sin\beta'}V_a$$

及
$$\frac{V_\gamma}{\rho}=\frac{b'\cos\gamma'-a'}{a'b'\sin\gamma}V_a+\frac{a'\cos\gamma'-b'}{a'b'\sin\gamma'}V_b$$

公式(c)尚須簡化，α 由 S_a, b' 及 c' 計算，β 由 S_b, c' 及 a' 計算，γ 則由 S_c, a' 及 b' 計算，故三角形三部之觀測面積爲：

$$b'c'\sin\alpha'=2\sqrt{S_1(S_1-S_a)(S_1-b)(S_1-c)}=2F_a,\quad S_1=\frac{S_a+b'+c'}{2}.$$

$$c'a'\sin\beta' = 2\sqrt{S_2(S_2-S_b)(S_2-c)(S_2-a)} = 2F_b,\ S_2 = \frac{S_b+c'+a'}{2}。$$

$$a'b'\sin\gamma' = 2\sqrt{S_3(S_3-S_c)(S_3-a)(S_3-b)} = 2F_c,\ S_3 = \frac{S_c+a'+b'}{2}。$$

於是得最後之簡方程式:

$$AV_a + BV_b + CV_c + w = 0 \qquad (d)$$

公式(d)中之

$$w = 2\{(F_a+F_b+F_c) - F\}$$

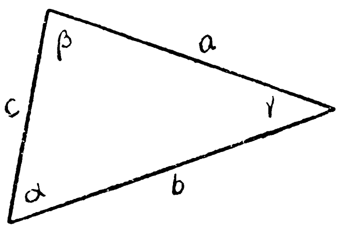
$$A = b'\sin\gamma' + c'\sin\beta' + (c'\cos\beta - a')\operatorname{ctg}\beta' + (b'\cos\gamma' - a')\operatorname{ctg}\gamma'$$

$$B = c'\sin\alpha' + a'\sin\gamma' + (a'\cos\gamma - b')\operatorname{ctg}\gamma' + (c'\cos\alpha' - b')\operatorname{ctg}\alpha'$$

$$C = a'\sin\beta' + b'\sin\alpha' + (b'\cos\alpha' - c')\operatorname{ctg}\alpha' + (a'\cos\beta' - c')\operatorname{ctg}\beta'$$

4　三角形條件平差

三角形之平差前曾論及，本節所擬研究者爲條件平差。設三角形之三角均曾觀測其權相等，而觀測之結果各爲 l_1, l_2 及 l_3。



第六章　第十一圖

更設三角之未知數爲 x_1, x_2, x_3，於是得條件方程式:

$$-180° + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (a)$$

以觀測值 l 代替 x 以後，上式將不復等於 0，而得差 w，是即

$$-180° + l_1 + l_2 + l_3 = w, \qquad (b)$$

故以改正數 v 表示之條件方程式當爲:

$$V_1 + V_2 + V_3 + w = 0 \qquad (c)$$

由是所得法方程式之係數爲:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = 3$$

其他各係數均爲零，其法方程式爲:

$$3k + w = 0$$

解之，得

$$k = -\frac{w}{3}$$

於是得改正數:

$$V_1 = -\frac{w}{3},\qquad V_2 = -\frac{w}{3},\qquad V_3 = -\frac{w}{3}.$$

平差角值

$$x_1=l_1-\frac{w}{3},\quad x_2=l_2-\frac{w}{3},\quad x_3=l_3-\frac{w}{3}.$$

每一觀測權單位之中誤差，卽平差前之中誤差爲：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{1}}=\sqrt{\frac{3w^2}{9}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}},$$

函數 $F=l_1+v_1$ 之權卽三角平差後之權，因其係數甚屬簡單，卽

$$f_1=1,\qquad f_2=0,\qquad f_3=0。$$

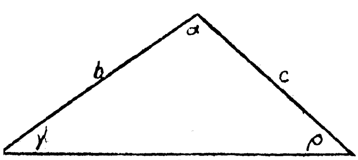
故
$$\left[\frac{af}{p}\right]=1,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=0,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=0,\quad \left[\frac{ff}{p}\right]=1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{p}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right\}$$

$$=1-\frac{1^2}{3}=\frac{2}{3},\quad p=\frac{3}{2}$$

故經過平差後之改正後，每個角度之值其權由 1 增至 $\frac{3}{2}$，其意義可解釋如下：倘僅觀測兩角度，第三角度由已觀測兩角度計算之，則觀測之角度每個權爲 1，推算之角度根據誤差傳播定律應爲 $\frac{1}{2}$，倘三角度均用同樣精度觀測而施以平差，則平差後三角度之權均爲 $\frac{3}{2}$，此爲多餘觀測對於結果精度增加之影響。

以上所論者僅觀測三角形內之三角，若於三角之外尙測三邊長度，則平差情形將與上述者不同。玆設其邊長之觀測値爲 a', b', c'，角度之觀則値各爲 α', β', γ，而命相當之平差値各爲 a, b, c 與 α, β, γ，則



第六章　第十二圖

$$a=a'+V_a\qquad \alpha=\alpha'+V_\alpha$$
$$b=b'+V_b\qquad \beta=\beta'+V_\beta$$
$$c=c'+V_c\qquad \gamma=\gamma'+V_\gamma$$

按一三角形可由一邊長與二角完全決定，今共量六次，故其條件有三，卽

$$(\mathrm{I})\quad \frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$(\mathrm{III})\quad \alpha+\beta+\gamma=180°$$

上式內之(I)及(II)係非一次函數，解出以前，須化成一次函數，即

$$a\sin\beta-b\sin\alpha=0$$

$$(a'+V_a)\sin(\beta'+V_\beta)-(b'+V_b)\sin(\alpha'+V_\alpha)=0$$

$$(a'+V_a)(\sin\beta'+V_\beta\cos\beta')-(b'+V_b)(\sin\alpha'+V_\alpha\cos\alpha')=0$$

$$(a'\sin\beta'-b'\sin\alpha')+\sin\beta' V_a-\sin\alpha' V_b+a'\cos\beta' V_\beta-b'\cos\alpha' V_\alpha=0\ (\mathrm{d})$$

此處之改正數乘積均係二次小值，故捨去不論。公式(d)化成一次方程式後，得

$$-\frac{b'}{\rho}\cos\alpha' V_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\beta' V_\beta+\sin\beta' V_a-\sin\alpha' V_\beta+w_1=0$$

同理得條件(II)演化之結果爲：

$$-\frac{c'}{\rho}\cos\alpha' V_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\gamma' V_\gamma+\sin\gamma' V_a-\sin\alpha' V_c+w_2=0$$

至於其他條件方程式爲：

$$V_\alpha+V_\beta+V_\gamma+w_3=0$$

各邊長改正數之單位爲公厘，故上述條件方程式之計算，亦用同一單位。茲舉實例說明之。

設觀測值爲：

$$\alpha'=\ 28°12'52''\qquad a'=\ 99.806$$

$$\beta'=136°03'05''\qquad b'=116.406$$

$$\gamma'=\ 14°43'55''\qquad c'=\ 45.501$$

而其中誤差爲：

$$m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=\pm7''$$

$m_a=\pm8$ 公厘，$m_b=\pm12$ 公厘，$m_c=\pm5$ 公厘

各觀測值之權乃與中誤差之平方成反比，故可逕行求之。爲謀計算之便利，假定各中誤差之平方均成一整數。

$$m_\alpha^2=m_\beta^2=m_\gamma^2=50$$

$$m_a{}^2=75,\ m_b{}^2=150,\ m_c{}^2=25_{\circ}$$

$$p_a=\frac{1}{3},\quad p_b=\frac{1}{6},\ p_c=1,\ p_\alpha=p_\beta=p_\gamma=\frac{1}{2}.$$

條件方程式：

$$-\frac{b}{\rho}\cos\alpha' V_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\beta' V_\beta+\sin\beta' V_a-\sin\alpha' V_b+w_1=0$$

$$-\frac{c'}{\rho}\cos\alpha' V_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\gamma' V_\gamma+\sin\gamma' V_a-\sin\alpha' V_c+w_2=0$$

$$V_\alpha+V_\beta+V_\gamma+w_3=0$$

其中：

$a'=4.899306$	$b'=5.065975$	$a'=4.8993$	$b'=5.0660$
$\sin\beta'=9.841368$	$\sin\alpha'=9.674653$	$\cos\beta'=9.8575(n)$	$\cos\alpha'=9.9451$
4.740674	4.740628	$1/\rho=4.6856$	$1/\rho=4.6856$
$+55039.4$ 公厘	-55033.6 公厘	$9.4422(n)$	9.6767
		-0.277	$+0.497$

$$\sin\alpha'=+0.473$$

$$\sin\beta'=+0.694$$

$$w_1=+5.8\ \text{公厘}$$

第一條件方程式爲：

$$-0.50V_\alpha-0.28V_\beta+0.69V_a-0.47V_b+5.8=0$$

類似方法可求第二條件方程式，得

$$-0.19V_\alpha+0.37V_\gamma+0.27V_a-0.47V_c-8.8=0$$

第三條件方程式甚爲簡單,各係數均等於1,故

$$+1.00V_\alpha+1.00V_\beta+1.00V_\gamma-8.0=0$$

三條件方程式之係數可列成一表：

	V_α	V_β	V_γ	V_a	V_b	V_c	w
$\frac{1}{p}$	2	2	2	3	6	1	
a	+1.00	+1.00	+1.00				−8.0
b	−0.50	−0.28		+0.69	−0.47		+5.8
c	−0.19		+0.37	+0.27		−0.47	−8.8

繫數方程式之係數乃由上表內求出，其結果如下：

$$
\begin{array}{r}
6.00k_1-1.56k_2+0.36k_3-\ \ 8.0=0\\
-1.56k_1+3.42k_2+0.75k_3+\ \ 5.8=0\\
+0.36k_1+0.75k_2+0.78k_3-\ \ 8.8=0\\
\hline
4.80k_1+2.61k_2+1.89k_3+11.0=0
\end{array}
$$

解出：

$$k_1=-1.333,\quad k_2=-6.17,\quad k_3=+17.67。$$

改正數：

$$V_\alpha=-3.22'',\qquad V_\beta=+0.80'',\qquad V_\gamma=+10.42''$$

$$V_a=+1.54\text{ 公厘},\quad V_b=+17.40\text{ 公厘},\quad V_c=-8.30\text{ 公厘}。$$

各平差值爲：

$$
\begin{array}{ll}
\alpha'+V_\alpha=\ \ 28°12'48.78'' & a+V_a=\ \ 79.3075\text{ 公尺}\\
\beta'+V_\beta=136°03'05.80'' & b+V_b=116.4234\text{ 公尺}\\
\gamma'+V_\gamma=\ \ \underline{15°44'05.42''} & c+V_c=\ \ 45.4927\text{ 公尺}\\
\qquad\quad 180°00'00.00'' &
\end{array}
$$

計算是否無誤，必須檢核，將平差值代入條件方程式，其結果應無差數存在，如

$$
\begin{array}{rr}
a'=4.899314 & b'=5.066041\\
\sin\beta'=\underline{9.841366} & \sin\alpha'=\underline{9.674640}\\
4.740680 & 4.740681\\
a'=4.899314 & c'=4.657942\\
\sin\gamma'=\underline{9.436266} & \sin\alpha'=\underline{9.674640}\\
4.332580 & 4.332582
\end{array}
$$

差數均在小數第六位，而最大者爲 2，故其結果可稱準確。改正數之平方和係直接由 v 求出得 $[pvv]=179.93$ 而檢核則用公式 $[pvv]=-[wk]$。

$$[pvv]=-[wk]=180.65$$

權單位之中誤差爲：

$$m=\pm\sqrt{\frac{179.93}{3}}=\pm7.75$$

函數 $F=a+V_a$ 之權亦可求出，因

$$f_1=1,\ f_2=f_3=0$$

故
$$\left[\frac{af}{p}\right]=2,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=-1,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=-0.38$$

於是按公式:

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bf\cdot1}{p}\right]^2}{\left[\frac{bb\cdot1}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{cf\cdot2}{p}\right]^2}{\frac{cc\cdot2}{p}}\right\}$$

因解算法方程式時曾順帶求出$\left[\frac{af}{p}\right]=2,\left[\frac{bf\cdot1}{p}\right]=0.48,\ \left[\frac{cf\cdot2}{p}\right]=0.38$,

故

$$\frac{1}{P}=2-\left\{\frac{2^2}{6}+\frac{0.48^2}{3}+\frac{0.37^2}{0.52}\right\}=2-(0.66+0.07+0.26)$$

$$\doteq2-0.99=1.01$$

$$\therefore\quad P=0.99$$

上值係平差後之權,若與平差前之權 $p_a=\frac{1}{2}$相比,適增一倍。

第六節　分組平差法

條件觀測之平差,有時可用分組法行之。設有條件方程式多個,先取其中之一部獨自計算,由此求得相當之繫數值 k',及各觀測值改正數 v。將此初步改正後之觀測值代入各條件方程式內,再度求繫數值 k'',及各改正數 v'',則就一般而論,可以證明下列關係:

$$k'_i+k''_i=k_i\qquad v'_i+v''_i=v_i$$

k_i 與 v_i 爲全體平差時之繫數值及改正數值。玆推演如下:設有條件方程式三個如下:

$$\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_1&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_2&=0\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+w_3&=0\end{aligned}\tag{66}$$

其法方程式爲:

$$
\begin{aligned}
&[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+w_1=0\\
&[ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+w_2=0\\
&[ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3+w_3=0
\end{aligned}
\tag{67}
$$

第一次約化之法方程式為:

$$
\begin{aligned}
&[bb\cdot 1]k_2+[bc\cdot 1]k_3+[w_2\cdot 1]=0\\
&[bc\cdot 1]k_2+[cc\cdot 1]k_3+[w_3\cdot 1]=0
\end{aligned}
\tag{68}
$$

各改正數為:

$$
\begin{aligned}
v_1&=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3\\
v_2&=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3\\
v_3&=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3\\
v_4&=a_4k_1+b_4k_2+c_4k_3
\end{aligned}
\tag{69}
$$

以上無庸解釋。今設用分組平差法，先取出第一條件方程式獨自列成法方程式如下:

$$[aa]k'_1+w_1=0,\quad k'_1=-\frac{w_1}{[aa]} \tag{70}$$

及 $$v'_1=a_1k'_1,\quad v'_2=a_2k'_1,\quad v'_3=a_3k'_1,\quad v'_4=a_4k'_1 \tag{71}$$

將(70)及(71)代入原有之條件方程式內，並命

$$v_1=v'_1+v''_1,\quad v_2=v'_2+v''_2,\ \cdots\cdots \tag{72}$$

即得

$$
\begin{aligned}
&[av'']=[av]-[av']=[av]+w'_1=0\\
&[bv'']=[vb]-[bv']=-\left(w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1\right)=-[w_2\cdot 1]\\
&[cv'']=[cv]-[cv']=-\left(w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1\right)=-[w_3\cdot 1]
\end{aligned}
\tag{73}
$$

由(73)組成法方程式，即為

$$
\begin{aligned}
&[aa]k''_1+[ab]k''_2+[ac]k''_3=0\\
&[ab]k''_1+[bb]k''_2+[bc]k''_3+[w_2\cdot 1]=0\\
&[ac]k''_1+[bc]k''_2+[cc]k''_3+[w_3\cdot 1]=0
\end{aligned}
\tag{74}
$$

一次約化之後為:

$$
\begin{aligned}
&[bb\cdot 1]k''_2+[bc\cdot 1]k''_3+[w_2\cdot 1]=0\\
&[bc\cdot 1]k''_2+[cc\cdot 2]k''_3+[w_3\cdot 1]=0
\end{aligned}
\tag{75}
$$

將(75)與(68)比較，卽知

$$k''_2=k_2, \qquad k''_3=k_3$$

由(68)之第一式與(74)之第一式比較，又可得

$$k'_1+k''_1=k_1$$

是以由分組作兩次平差所得之結果，與一次全體平差之結果無異。

根據上述之理論，可更進一步設想將條件方程約化，由此第一法方程式卽可獨立。今設將(66)之第一式用$\frac{[ab]}{[aa]}$及$-\frac{[ac]}{[aa]}$乘之，分別加於第二第三兩式內，卽得約化之條件方程如下：

$$\begin{aligned}
&a_1 v_1+a_2 v_2+a_3 v_3+a_4 v_4+\quad w_1 \quad =0\\
&b'_1v_1+b'_2v_2+b'_3v_3+b'_4v_4+[w_2\cdot 1]=0\\
&c'_1v_1+c'_2 v_2+c'_3v_3+c'_4v_4+[w_3\cdot 1]=0
\end{aligned} \tag{76}$$

其中

$$\begin{aligned}
b'&=b-\frac{[ab]}{[aa]}a, & c'&=c-\frac{[ca]}{[aa]}a\\
[w_2\cdot 1]&=w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1 & [w_3\cdot 1]&=w_3-\frac{[ac]}{[aa]}w_1
\end{aligned} \tag{77}$$

由約化條件方程可組成之法方程式，遂爲

$$\begin{aligned}
&[aa]k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad +w_1 \quad =0\\
&\qquad [b'b']k_2+[b'c']k_3+[w_2\cdot 1]=0\\
&\qquad [b'c']k_2+[c'c']k_3+[w_3\cdot 1]=0
\end{aligned} \tag{78}$$

是以第一法方程式已與第二法方程式分開，改正數之公式爲：

$$v_1=a_1k_1+b'_1k_2+c'_1k_3$$
$$v_2=a_2k_1+b'_2k+c'_2k_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

約化條件方程式，與間接觀測中之約化改正數方程式相當，故其應用亦以第一條件方程式內各係數均爲1時爲最便利。在普通情形下，並無使計算工作減少之處。設

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=1$$

則(77)各式變爲：

$$b'=b-\frac{[b]}{n}, \qquad c'=c-\frac{[c]}{n}$$
$$[w_2\cdot 1]=w_2-\frac{[b]}{n}w_1, \quad [w_3\cdot 1]=w_3-\frac{[b]}{n}w_1 \tag{77}^*$$

n 爲觀測値之數目,計算甚爲簡單也。此種情形見於導線平差時,其第一條件爲折角和之方程,二三兩條件爲坐標閉合之條件。

除上述之分組平差法外,尙有克里格爾之分組平差法,利用所謂改組之條件方程式,其理論將於第十二章中詳述之,因其爲博爾兹擴展式之導源也。

第七節 最適當之權分配

此問題之起源,始於史賴伯,當其測哥廷根基線網時,欲將各測站上角度觀測之次數,作最合理之分配,以期求得最適當之擴大邊長。按其理論可用於各種觀測,非僅限於三角測量,故於此處用普遍形式證明之。

普遍之"最適當之權分配"問題可如下述之:設以觀測之方法,求定多個觀測値之一函數値,在此多個觀測量之間,有條件方程存在,今欲給予不同之觀測量以不同之觀測次數或權,以期所得函數之權爲最大,但同時觀測次數或權之總和應等於一固定値,問題卽在各觀測之權應作如何分配,始能達到此目的也。

如以基線網爲例,此問題可具體言之如下:由觀測基線網中之角度以求基線擴大邊之長度,設所有角度總共觀測之組數爲一定數時,則每個角度各應觀測若干組,始能達到所得基線擴大邊之權數爲最大之目的?

今自普遍之公式解此問題,根據第四節之式 (38),一函數 F 之權倒數爲:

$$\frac{1}{P_F}=\left[\frac{FF}{p}\right]$$

今命之爲 y,其値應爲:

$$y=\frac{1}{P_F}=\frac{F_1^2}{p_1}+\frac{F_2^2}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{F_n^2}{p_n} \tag{79}$$

此權之倒數 y 應爲最小,則函數之權爲最大。但除此之外,尙須顧及另一條件,卽各觀測値之權之和應爲一定量:

$$[p]=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=S=\text{常數} \tag{80}$$

因各 p 必須爲正數，故最好以某數之平方代之，今稱之爲 x^2，則

$$p_1=x_1{}^2 \quad p_2=x_2{}^2\cdots\cdots p_n=x_n{}^2$$

欲解此問題，可將最小條件列出：

$$\left[\frac{FF}{x^2}\right]+\lambda([x^2]-S)=\text{最小值} \tag{81}$$

λ 爲一尙屬未定之常數。將(81)依 x_1，x_2 …… 微分，卽得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{F_1{}^2}{x_1{}^4}-\lambda\right)x_1=0\\ \left(\frac{F_2{}^2}{x_2{}^4}-\lambda\right)x_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\frac{F_n{}^2}{x_n{}^4}-\lambda\right)x_n=0\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

欲滿足式(82)之關係，可有兩途，

卽　(1) $\dfrac{F^2}{x^4}=\lambda$，　或　(2) $x=0$

仍以 p 代 x^2，則爲

$$\frac{F_i}{p_i}=\sqrt{\lambda}\ \text{或}\ p_i=0. \tag{83}$$

初視之，至此則各 p_i 之値似已可由前一式決定，然實際並非如此簡單。蓋各 F_i 之値與各 p_i 之値有關係，由第四節中 F_i 公式之導出卽可明悉。此處可將第四節之(51)及(52)兩式展開如下：

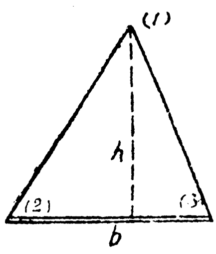
$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}a_1+\frac{F_2}{p_2}a_2+\cdots\cdots+\frac{F_n}{p_n}a_n=0\\ \left[\frac{bF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}b_1+\frac{F_2}{p_2}b_2+\cdots\cdots+\frac{F_n}{p_n}b_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{rF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}r_1+\frac{F_2}{p_2}r_2+\cdots\cdots+\frac{F_n}{p_n}r_n=0\end{aligned}\right\}\text{共 } r \text{ 個} \tag{84}$$

此式示吾人以另一事實：卽 n 個 $\dfrac{F_i}{p_i}$ 中，最多僅能有 $n-r$ 個取任意之

值，而其餘之 r 個則可由此聯立方程式求出。根據式 (83) 之兩種情形，可以想像假定 $n-r$ 個 $\frac{F_i}{p_i}$ 值爲 $\sqrt{\lambda}$，代 λ 式 (84) 後，求得其他 r 個 $\frac{F_i}{p_i}$ 之值，此後求出之 $\frac{F_i}{p_i}$ 值定不能等於 $\sqrt{\lambda}$。此時可取式 (82) 之第二種情形，即 $p_i=0$。蓋 $p_i=0$ 時，F_i 亦等於零，$\frac{F_i}{p_i}=\frac{0}{0}$，爲一不定數，固可視之與由式 (84) 求出之值相等。所謂 $p=0$ 者 即不觀測該量之謂也。是以在可能觀測之 n 個觀測量中，如欲求得最適當之權分配，應僅觀測其中之 $n-r$ 個量，其權數照 $p_i=\frac{F_i}{\sqrt{\lambda}}$ 之律以分配之。至於此外之 r 個量，則根本可不必觀測。r 既爲條件方程之數目，是以 $n-r$ 適爲足以解決此問題所必需之最少觀測量數目。故上述結果亦可云，欲求得最適當之權分配，應僅觀測適足以解決此問題之各量，而無需多餘觀測。

以上僅爲史賴伯"最適當之權分配定律"之一部，蓋問題至此尚未解決，因由可能觀測之 n 個量中，選出 $n-r$ 個實際觀測之量，可有多種不同之方法，而此處所須知者，即爲如何始能選出最適宜之 $n-r$ 個量。關於此點，尙無簡捷確定之法，僅能用逐漸接近法求之。先假定一權之分配，由此求出各 F 值，根據式 (83) p 應與 F 成比例，故按照此 F 值，再定一與之約成比例之權之分配。若 F 有接近零之傾向，即可選命其相當之 p 爲零，如此經過數次接近，即可求得最適宜之權分配，今舉例以明之：

例：第十一圖之三角形，b 爲基線，今欲觀測 (1) (2) (3) 三角度以求三角形之高 h，三個角度之近似值爲：



第六章 第十三圖

$(1)=34°$ $\cot 34°=c_1=1.483$

$(2)=68°$ $\cot 68°=c_2=0.404$

$(3)=78°$ $\cot 78°=c_3=0.213$

條件方程式：

$$v_1+v_2+v_3+w=0$$

三角形之高爲

$$h=\frac{b}{\sin(1)}\sin(2)\sin(3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial(1)}=-h\cot(1),\frac{\partial h}{\partial(2)}=+h\cot(2),\frac{\partial h}{\partial(3)}=+h\cot(3)$$

令 $\qquad \cot(1)=c_1,\quad \cot(2)=c_2,\quad \cot(3)=c_3$

則 $\qquad h=h_0+h_0(-c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)$

h_0 爲 h 之近似值，可視爲一常數，故吾人可以上式括號內之各項爲函數，即

$$f(v)=-c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=F[(1),(2),(3)]$$

由此得

$$f_1=-c_1,\quad f_2=+c_2,\quad f_3=+c_3$$

根據第四節之式(47)得傳遞方程式：

$$\left[\frac{1}{p}\right]L=-\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\frac{c_3}{p_3}$$

或傳遞係數 L 爲：

$$L=\left(-\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\frac{c_3}{p_3}\right):\left[\frac{1}{p}\right]=\frac{-c_1p_2p_3+c_2p_1p_3+c_3p_1p_2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}$$

又按第四節之公式(50)，

$$F_1=-C_1-L,\quad F_2=+C_2-L,\quad F_3=+C_3-L$$

權倒數爲：

$$\frac{1}{p}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{p_1[(C_3-C_2)^2+p_2(C_1+C_3)^2+p_3(C_1+C_2)^2]}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}$$

根據以上各公式，茲先命 $p_1=p_2=p_3=1$，　$[p]=3.0$，求出

$$L=-0.289,\quad F_1=-1.194,\quad F_2=+0.693,\quad F_3=+0.502$$

$$\frac{1}{p}=2.1578\qquad [|F|]=2.389$$

今再根據式(83)，因 p 不能爲負數，故命 $\frac{|F|}{p}=$ 常數，同時 $[p]$ 仍須等於 3.0，由上述之各 F 值之比例，求得各 p 值如下：

$$p_1=1.50,\quad p_2=0.87,\quad p_3=0.63,\quad [p]=3.00$$

以此爲第二次假定之權分配代入 L 式內，得

$$L=0.059,\quad F_1=-1.424,\quad F_2=+0.463,\quad F_3=+0.272$$

$$\frac{1}{p}=1.715$$

由此已可看出 F_3 之值漸近於零，是以爲減省工作起見，卽於第三次逕命之爲零，而得第三次之權之分配：

$$p_1=2.26,\quad p_2=0.74,\quad p_3=0$$

由上列之傳遞係數公式，可知當 $p_3=0$ 時，$L=+C_3$，故 $F_3=+C_3-C_3=0$，與前文所述符合。此時求出之 F 値爲：

$$F_1=-1.696,\quad F_2=0.191,\quad [|F|]=1.887$$

是以最後之權之分配應爲：

$$p_1=\frac{1.696}{1.887}\times 3.0=2.696,\quad p_2=\frac{0.191}{1.887}\times 3.0=0.304$$

此乃最適當之權之分配：

理論上之結果雖如上述，但實際上多餘觀測仍有其價値，故在較複雜之圖形時，應儘量避免過多之觀測量，而可有少數之多餘觀測，以資檢核。例如在上例中，可令角度(1)觀測24組，角度(2)(3)各觀測4組。

第八節　等值觀測

所謂等値觀測者，卽一組觀測値，如以另外一組虛擬觀測値代之，由此求出之未知數以及其任意一函數之値與權，均與由原來觀測値所求出者無異，於是卽謂此組虛擬之觀測値，與原有一組之觀測値"完全等値"。

此種情形於間接觀測時有之，蓋無論改正數方程式之形式若何，僅須由兩組觀測所列出之法方程式完全相同，此兩組觀測値卽爲等値，因未知數之値與權，均可由法方程式完全決定也。又虛擬觀測値之數目不必多於未知數數目，與之相等卽可。

最普通之例，卽間接觀測時，以各約化方程式視作虛擬觀測値，卽與原有之觀測値等値，設以三個未知數爲例，將約化法方程式列出並附以權：

$$\begin{aligned}
x-\frac{[pab]}{[paa]}y-\frac{[pac]}{[paa]}z&=\frac{[pal]}{[paa]} & &\text{權 } [paa]\\
y-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}z&=\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & &\text{權 } [pbb\cdot 1]\qquad (85)\\
z&=\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & &\text{權 } [pcc\cdot 2]
\end{aligned}$$

如將式(85)視作改正數方程式，以$\frac{[paL]}{[aap]}$，$\frac{[pbL\cdot1]}{[pbb\cdot1]}$，$\frac{[pcL\cdot2]}{[pcc\cdot2]}$視作觀測值，$[paa]$，$[pbb\cdot1]$，$[pcc\cdot2]$ 爲其權，則由此所得之法方程式遂爲：

$$\begin{aligned}[paa]x+[pab]y+[pac]z&=[paL]\\ [pbb\cdot1]y+[pbc\cdot1]z&=[pbL\cdot1]\\ [pcc\cdot2]z&=[pcL\cdot2]\end{aligned}\tag{86}$$

其結果固仍爲原有之法方程式。是以式(85)與原有之觀測值完全等值。

但等值觀測，亦不限於間接觀測，設由條件觀測求出任意三個函數 x，y，z，之權倒數$\frac{1}{p_x}$，$\frac{1}{p_y}$，$\frac{1}{p_z}$，按第四節之式(57)，設爲等權觀測，並僅有三個條件方程式，其式爲：

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_x}&=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\\ \frac{1}{p_y}&=[f'f']-\frac{[af']^2}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf'\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\\ \frac{1}{p_z}&=[f''f'']-\frac{[af'']^2}{[aa]}-\frac{[bf''\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf''\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\end{aligned}\tag{87}$$

其中f，f' 及 f'' 各爲其相當函數 x，y 及 z 依觀測值之微分係數，按照高斯約化法之寫法，式(87)亦可書作

$$\frac{1}{p_x}=[ff\cdot3]\,;\ \frac{1}{p_y}=[f'f'\cdot3]\,,\ \frac{1}{p_z}=[f''f''\cdot3]\tag{88}$$

此外尚可想像 x，y，z，化成原有各觀測值 l_1，$l_2\cdots\cdots l_n$ 之一次擴展式，即

$$\begin{aligned}x&=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots\cdots+\alpha_nl_n=[\alpha l]\\ y&=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\cdots\cdots+\beta_nl_n=[\beta l]\\ z&=\gamma_1l_1+\gamma_2l_2+\cdots\cdots+\gamma_nl_n=[\gamma l]\end{aligned}\tag{89}$$

由此可知 $\frac{1}{p_x}$，$\frac{1}{p_y}$，$\frac{1}{z}$，亦可以$[\alpha\alpha]$，$[\beta\beta]$，$[\gamma\gamma]$ 表示之，同時 $[\alpha\beta]$，$[\alpha\gamma]$，$[\beta\gamma]$ 等非平方係數亦可比較式(88)之關係而引出：

$$\begin{aligned}&[\alpha\alpha]=[ff\cdot3],[\beta\beta]=[f'f'\cdot3],[\gamma\gamma]=[f''f''\cdot3]\\ &[\alpha\beta]=[ff'\cdot3],[\alpha\gamma]=[ff''\cdot3],[\beta\gamma]=[f'f''\cdot3]\end{aligned}\tag{90}$$

今再設想函數 x, y, z 有另一組虛擬觀測値 r_1, r_2, r_3, 其關係如次:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3 \\ y &= \eta_1 r_1 + \eta_2 r_2 + \eta_3 r_3 \\ z &= \zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 \end{aligned} \tag{91}$$

若欲使由式 (90) 所得之 x, y, z 各函數之權倒數與由原來所求者完全相等,必須令 ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 九個係數有下列之關係:

$$\begin{aligned} &[\xi\xi]=[\alpha\alpha],[\eta\eta]=[\beta\beta],[\zeta\zeta]=[\gamma\gamma] \\ &[\xi\eta]=[\alpha\beta],[\xi\zeta]=[\alpha\gamma],[\eta\zeta]=[\beta\gamma] \end{aligned} \tag{92}$$

此六個方程式即爲使虛擬觀測値 r_1, r_2, r_3, 與原來觀測値 $l_1, l_2 \cdots\cdots l_n$ 完全等値之必需條件,因 $\xi\,\eta\,\zeta$ 諸値本爲任意者,其數目共爲九個,而只有六個條件, 故可使其中之任意三個爲零, 最好使 η_1, ζ_1, ζ_2 爲零, 即可由 $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$……等値確定其他 ξ, η, ζ 之値。關於此法之應用,將於大規模三角網平差一章述及之。

除去完全等値之外, 尙可有部分等値之虛擬觀測。如由 r 個虛擬觀測値所求出之 r 個函數,其値與權均與由原來觀測値所求出者完全相等。此 r 個虛觀測値對此 r 個函數而論, 即與原有之觀測値等値。r 之數目少於未知數之數目 n, 故此時謂之部分等値。$r=n$ 時即爲完全等値。

第九節 附有條件方程之間接觀測

在平差問題中,有時於一組間接觀測之未知數中,尙有條件存在。通常此種問題可利用條件方程消去一部未知數, 而用間接觀測之平差法解算。但當條件方程之係數較爲複雜時, 消去一部未知數之工作至爲繁雜, 故亦可用直接方法平差。設有 u 個未知數 x, y, z……, 而有 n 個間接觀測量,其改正數方程式爲:

$$n\text{ 個}\begin{cases} v_1 = a_1x + b_1y + c_1z + \cdots\cdots l_1 \\ v_2 = a_2x + b_2y + c_2z + \cdots\cdots l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_nx + b_ny + c_nz + \cdots\cdots l_n \end{cases} \tag{93}$$

此外於未知數 x, y, z……之間,又有 r 個條件:

$$
r\text{ 個}\begin{cases} p_0+p_1x+p_2y+p_3z+\cdots\cdots=0 \\ q_0+q_1x+q_2y+q_3z+\cdots\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_0+r_1x+r_2y+r_3z+\cdots\cdots=0 \end{cases} \tag{94}
$$

如用間接方法平差，可利用 r 個條件方程，消去觀測方程式中 r 個未知數，使 n 個觀測方程式中僅含有 $u-r$ 個未知數，然後再以普通間接觀測之平差法解算之。

今如欲用直接解法，須令式(93)之 $[vv]$ 爲最小值，而同時須顧及式(94)之條件，是故必須令

$$
\begin{aligned} &[vv]+2k_1(p_0+p_1x+p_2y+p_3z+\cdots\cdots) \\ &\quad+2k_2(q_0+q_1x+q_2y+q_3z+\cdots\cdots) \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad+2k_r(r_0+r_1x+r_2y+r_3z+\cdots\cdots)=\text{最小值} \end{aligned} \tag{95}
$$

將式(95)按 $x, y, z\cdots\cdots$ 微分，得

$$
\begin{aligned} &[av]+k_1p_1+k_2q_2+\cdots\cdots=0 \\ &[bv]+k_1p_2+k_2q_2+\cdots\cdots=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{96}
$$

將式(93)之 v 代入式(96)內，並於其下加入式(94)之 r 個條件，即得

$$
\begin{aligned} &[aa]x+[ab]y+[ac]z+\cdots\cdots+p_1k_1+q_1k_2+\cdots\cdots[al]=0 \\ &[ab]x+[bb]y+[bc]z+\cdots\cdots+p_2k_1+q_2k_2+\cdots\cdots[bl]=0 \\ &[ac]x+[bc]y+[cc]z+\cdots\cdots+p_3k_1+q_3k_2+\cdots\cdots[cl]=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &p_1x\quad+p_2y\quad+p_3z\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+p_0=0 \\ &q_1x\quad+q_2y\quad+q_3z\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+q_0=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{97}
$$

式(97)亦爲對稱方程式，唯 $k_1\ k_2$ 等無平方項，今仍名之爲法方程式。此式亦可用高斯約化法解算之，而求未知數 $x, y, z\cdots\cdots$ 之值（$k_1\ k_2$ 等值在此處並無用處）。倘各觀測值之權不等，上述方法亦可按普通方法顧及其權。

此外尚有一法，將此種問題分爲兩部平差，第一部專由間接觀測定

$x\ y\ z$ 各未知數之初步值，然後再用等值觀測之原理，將第一部結果代入條件方程式內作第二部平差。茲將其步驟述之於下：

首由式(93)之改正數方程式求得未知數之初步值 x_0，y_0，z_0……今以三個未知數爲例，其法方程式爲：

$$
\begin{aligned}
&[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0-[al]=0\\
&[ab]x_0+[bb]y_0+[bc]z_0-[bl]=0\\
&[ac]x_0+[bc]y_0+[cc]z_0-[cl]=0
\end{aligned}
\tag{98}
$$

將未知數之初步值 x_0，y_0，z_0 代入式(94)之條件方程式內，設爲兩個條件($r=2$)，則得條件不符值：

$$
\begin{aligned}
w_1&=p_0+p_1x_0+p_2y_0+p_3z_0\\
w_2&=q_0+q_1x_0+q_2y_0+q_3z_0
\end{aligned}
\tag{99}
$$

命 x_0，y_0，z_0 之第二部改正數爲 ξ、η，ζ，即

$$x=x_0+\xi,\quad y=y_0+\eta,\quad z=z_0+\zeta \tag{100}$$

代入式(94)內得

$$
\begin{aligned}
p_1\xi+p_2\eta+p_3\zeta+w_1=0\\
q_1\xi+q_2\eta+q_3\zeta+w_2=0
\end{aligned}
\tag{101}
$$

由法方程式(98)按第八節之公式(85)，可將其化爲三個等值觀測方程式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{[al]}{[aa]}=x_0+\frac{[ab]}{[aa]}y_0+\frac{[ac]}{[aa]}z_0 &&\text{權：}[aa]=P_1\\
&\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}=\qquad y_0+\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z_0 &&\text{權：}[bb\cdot1]=P_2\\
&\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}=\qquad\qquad z_0 &&\text{權：}[cc\cdot2]=P_3
\end{aligned}
\tag{102}
$$

式(102)之左方爲虛擬觀測值，因與原來之觀測方程式(93)完全等值，故此處可視之爲獨立觀測之結果。再設此虛擬觀測值因第二部平差所得之改正數爲 λ_1，λ_2，λ_3，則因(100)之關係，式(102)可化爲：

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1=\xi+\frac{[ab]}{[aa]}\eta+\frac{[ac]}{[aa]}\zeta &&\text{權：}[aa]=P_1\\
&\lambda_2=\qquad\eta+\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\zeta &&\text{權：}[bb\cdot1]=P_2\\
&\lambda_3=\qquad\qquad\zeta &&\text{權：}[cc\cdot2]=P_3
\end{aligned}
\tag{102}^*
$$

由此式可將 ξ, η, ζ, 分別以改正數 λ_1, λ_2, λ_3 表示之:

$$\begin{aligned}
\xi &= \lambda_1 - \frac{[ab]}{[aa]}\lambda_2 - \left(\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab][bc\cdot 1]}{[aa][bb\cdot 1]}\right)\lambda_3 \\
\eta &= \lambda_2 - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\lambda_2 \\
\zeta &= \lambda_3
\end{aligned} \tag{103}$$

將式(103)代入(101)之條件方程式內，使其化爲改正數 λ_1, λ_2, λ_3 之條件，因 λ_1, λ_2, λ_3 可視作獨立之改正數，故可按普通之條件觀測法平差，但須顧及 λ_1 λ_2 λ_3 之權爲 $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$。

實際計算時之佈置可無須經過如許多之步驟，因將(103)代入(101)內後，可得

$$\left.\begin{aligned}
p_1\lambda_1 + \left(p_2 - \frac{[ab]}{[aa]}p_1\right)\lambda_2 + \left\{\left(p_3 - \frac{[ac]}{[aa]}p_1\right) - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(p_2 - \frac{[ab]}{[aa]}p_1\right)\right\}\lambda_3 + w_1 = 0 \\
q_1\lambda_1 + \left(q_2 - \frac{[ab]}{[aa]}q_2\right)\lambda_1 + \left\{\left(q_3 - \frac{[ac]}{[aa]}q_1\right) - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(q_2 - \frac{[ab]}{[aa]}q_1\right)\right\}\lambda_3 + w_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

此處 λ_2 λ_3 之係數實即

$$[p_2\cdot 1] = \left(p_2 - \frac{[ab]}{[aa]}p_1\right);\quad [p_3\cdot 2] = \left(p_3 - \frac{[ac]}{[aa]}p_1\right) - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(p_2 - \frac{[ab]}{[aa]}p_1\right)$$

$$[q_2\cdot 1] = \left(q_2 - \frac{[ab]}{[aa]}q_1\right),\quad [q_3\cdot 2] = \left(q_3 - \frac{[ac]}{[aa]}q_1\right) - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(q_2 - \frac{[ab]}{[aa]}q_1\right)$$

故可由解算法方程式(98)時順便求出。茲爲簡單之故，命式(104)內之係數爲 A_1, A_2, A_3 及 B_1, B_2, B_3, 並設 λ_1 λ_2 λ_3 之權爲 P_1 P_2 P_3, 則由條件(104)可列出法方程式

$$\begin{aligned}
\left[\frac{AA}{P}\right]k_1 + \left[\frac{AB}{P}\right]k_2 + w_1 = 0 \\
\left[\frac{AB}{P}\right]k_1 + \left[\frac{BB}{P}\right]k_2 + w_2 = 0
\end{aligned} \tag{105}$$

改正數 λ_1 λ_2 λ_3 之公式爲:

$$
\begin{aligned}
[a\,a]\lambda_1 &= A_1k_1+B_1k_2 \\
[bb\cdot 1]\lambda_2 &= A_2k_1+B_2k_2 \\
[cc\cdot 2]\lambda_3 &= A_3k_1+B_3k_2
\end{aligned}
\tag{106}
$$

根據上述之理論，可歸納其計算步驟如下．解法方程式(98)，並將 p_1 p_2 ……… q_1 q_2 ……… 等附於其後、由此求得 x_0 y_0 z_0 及 A_2 B_2 ……… P_1 P_2 P_3 諸值，將 x_0 y_0 z_0 代入式(99)求 w_1 w_2，然後組成法方程式(105)，解算之得 k_1 k_2 諸繫數之值，再按式(106)求改正數 λ_1 λ_2 ……代入式(103)，又得 ξ，η，ζ。最後由式(100)得未知數 x，y，z ……… 之值。

關於[vv]之計算，將與前述者稍異。改正數分二部，卽 v'_i 及 λ_i，最後之改正數應爲：

$$V_i = V_i' + \lambda_i \tag{107}$$

平方之，乃得

$$[vv] = [v'v'] + [\lambda\lambda] + 2[v'\lambda] \tag{108}$$

因
$$[v'\lambda] = 0$$

故
$$[vv] = [v'v'] + [\lambda\lambda] \tag{109}$$

玆證明 $[v'\lambda]=0$ 如下：自式(98)求出 x_0，y_0，z_0 後，卽可由

$$
\left.
\begin{aligned}
V'_1 &= a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0-l_1 \\
V'_2 &= a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0-l_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}
\tag{110}
$$

計算改正數 v'_i，至於最後之改正數應爲：

$$
\left.
\begin{aligned}
V_1 &= a_1(x_0+\xi)+b_1(y_0+\eta)+c_1(z_0+\zeta)-l_1 = V'_1+\lambda_1 \\
V_2 &= a_2(x_0+\xi)+b_2(y_0+\eta)+c_2(z_0+\zeta)-l_2 = V'_2+\lambda_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}
\tag{111}
$$

故

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda_1 &= a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta \\
\lambda_2 &= a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}
\tag{112}
$$

乘式(112)以 v'_i 並相加，卽得

$$[v'\lambda]=[av']\xi+[bv']\eta+[cv']\zeta \tag{113}$$

自式(98)及(110)內可得下列之關係，

$$[av']=[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0-[al]=0 \tag{114}$$

同理　$[bv']=0,\quad [cv']=0,$

故　$[v'\lambda]=0$

權單位中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v'v']+[\lambda\lambda]}{n-(u-r)}}=\pm\sqrt{\frac{[v'v']+[\lambda\lambda]}{n-u+r}} \tag{115}$$

第十節　附有未知數之條件觀測

設有下列各條件方程式：

$$\begin{aligned}&p_0+p_1L_1+p_2L_2+\cdots\cdots+p_nL_n+a_1x+b_1y+\cdots\cdots=0\\&q_0+q_1L_1+q_2L_2+\cdots\cdots+q_nL_n+a_2x+b_2y+\cdots\cdots=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{116}$$

其中 L_1, L_2 ……為觀測之量，x, y ……等為未觀測而欲求得之未知數。設 L_1 L_2 ……之觀測值為 l_1, l_2 ……，其誤差為 v_1, v_2 ……又 x, y ……之近似值為 x_0, y_0 ……，則式(116)可化為下列形式：

$$\begin{aligned}&p_1v_1+p_2v_2+\cdots\cdots+p_nv_n+a_1\xi+b_1\eta+\cdots\cdots+w_1=0\\&q_1v_1+q_2v_2+\cdots\cdots+q_nv_n+a_2\xi+b_2\eta+\cdots\cdots+w_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{116*}$$

其中　$x=x_0+\xi,\quad y=y_0+\eta,\cdots\cdots$

$$\begin{aligned}&w_1=p_0+p_1l_1+p_2l_2+\cdots\cdots+p_nl_n+a_1x_0+b_1y_0+\cdots\cdots\\&w_2=q_0+q_1l_1+q_2l_2+\cdots\cdots+q_nl_n+a_2x_0+b_2y_0+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{117}$$

此問題解法之一為自式(116)*之條件方程式內消去 ξ, η ……等，而用普通之條件觀測法計算。設式(116)*之條件方程式共有 r 個，未知數為 u 個，則消去 ζ, η ……之後，尙餘條件方程 $r-u$ 個。

另一方法為將此問題化為間接觀測。設觀測值之數目為 n 個，式(116)*之條件為 r 個，故可利用此條件方程將其中之 r 個改正數用其餘之 $n-r$ 個改正數及所有未知數表示之。因此列出 n 個改正數方程式：

$$
\left.
\begin{array}{l}
r\text{ 個}\left\{
\begin{array}{l}
v_1=-l'_1+a'_1\xi+b'_1\eta+\cdots+p'_1v_{r+1}+q'_1v_{r+2}+\cdots\\
v_2=-l'_2+a'_2\xi+b'_2\eta+\cdots+p'_2v_{r+1}+q'_2v_{r+2}+\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.\\
n-r\text{ 個}\left\{
\begin{array}{l}
v_{r+1}= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +v_{r+1}\\
v_{r+2}= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +v_{r+2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +v_n
\end{array}\right.
\end{array}
\right\}\text{共 } n \text{ 個} \qquad (118)
$$

$$\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{u\text{ 個}}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-r\text{ 個}}}_{\text{共 } u+n-r \text{ 個未知數}}$$

此時將 v_{r+1}，v_{r+2} …… v_n 亦視如未知數，按間接觀測方法解算，多餘觀測之數目爲 $n-(u+n-r)=r-u$，與用條件觀測法解算時之約化後條件數目相等。

顧此種問題亦可用直接之解法，以下式爲最小條件：

$$
\begin{aligned}
&[vv]-2k_1(p_1v_1+p_1v_2+\cdots\cdots+a_1\xi+b_1\eta+\cdots\cdots+w_1)\\
&\qquad-2k_1(q_1v_1+q_2v_2+\cdots\cdots+a_2\xi+b_2\eta+\cdots\cdots+w_2)\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad=\text{最小值}
\end{aligned}
\qquad (119)
$$

將此式微分，得繫數方程式：

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
v_1=p_1k_1+q_1k_2+\cdots\cdots\\
v_2=p_2k_1+q_2k_2+\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n=p_nk_1+q_nk_2+\cdots\cdots
\end{array}\right\}n\text{ 個}\\
\left.\begin{array}{l}
0=a_1k_1+a_2k_2+\cdots\cdots\\
0=b_1k_1+b_2k_2+\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}u\text{ 個}
\end{array}
\right. \qquad (120)
$$

代入條件方程式(116)*內，得法方程式：

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
[pp]k_1+[pq]k_2+\cdots\cdots+a_1\xi+b_1\eta+\cdots\cdots+w_1=0\\
[pq]k_1+[qq]k_2+\cdots\cdots+a_2\xi+b_2\eta+\cdots\cdots+w_2=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}r\text{ 個}\\
\left.\begin{array}{l}
a_1k_1+a_2k_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0\\
b_1k_1+b_2k_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}u\text{ 個}
\end{array}
\right. \qquad (121)
$$

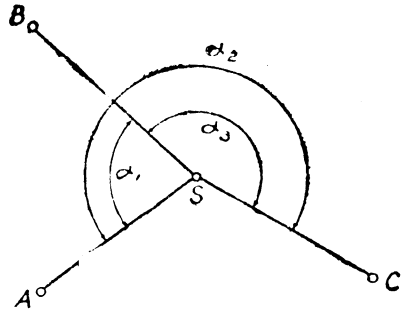
由此式可解算得 $k_1\ k_2$ ……… 之值及未知數 ξ, η, ζ ……… 之值，再由式(120)得各觀測值之改正數 v。

習　　題

1. 在測站 S 向目標 A, B 及 C 觀測其間之角度 a_1, a_2 及 a_3，結果如下：

1. $a_1 = 48°37'15''$
2. $a_2 = 248°12'34''$
3. $a_3 = 204°34'55''$

若觀測之精度相等，試用條件觀測法平差之。



第五章　第十四圖

2. 水準點 A 及 E 之海拔為 $H_a = 278.354$，$H_E = 292.380$ 公尺，在其間作分段之水準測量，結果如下：

間　段	量得高程差	權$\left(\frac{1}{d}\right)$	$\frac{1}{p}$
1.　$A-1$	$+18.402$	2	0.50
2.　$1-2$	$-\ 9.706$	3	0.33
3.　$2-3$	$-\ 1.204$	4	0.25
4.　$3-E$	$+\ 6.514$	1	1.00

$[\Delta h] = +14.006$　　$[p] = 10$　　$\left[\frac{1}{p}\right] = 2.08$

試求各段間平差後之高程差及其相當之中誤差：

3. 方向角(SA)及(SB)為已知，即

$(SA) = 10°35'45''$

$(SB) = 294°28'13''$

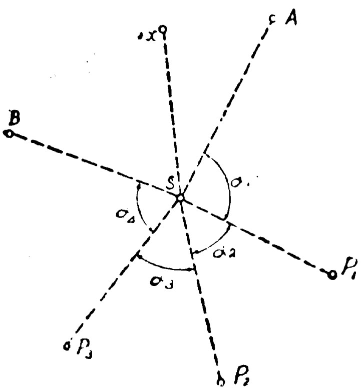
茲為求三方向角(Sp_1)，(Sp_2)及(Sp_3)起見，觀測下列四角：

$a_1 = 112°17'40''$

$a_2 = 67°25'42''$

$a_3 = 86°36'18''$

$a_4 = 17°33'32''$

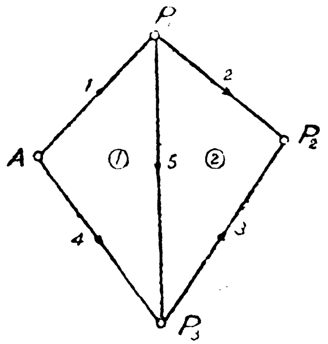


第六章　第十五圖

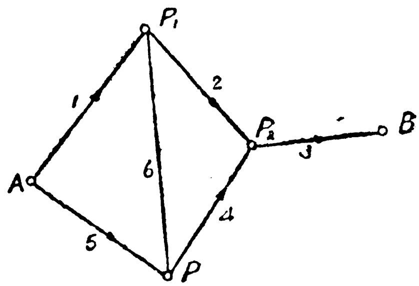
若精度相等，試求各觀測角在平差前後之中誤差。

4. 根據水準測量定出 A, B, C, D 及 E 五間之高程差如下:

間段號數	自	至	高程差 Δh	間段之長度	測量次數
1	D	E	+10.194	3.5 公里	1
2	E	B	+10.659	2.6 公里	1
3	D	B	+20.871	1.7 公里	1
4	D	C	+40.791	1.0 公里	1
5	B	C	+19.930	2.3 公里	1
6	A	E	+38.460	4.2 公里	2
7	A	D	+28.248	1.9 公里	2
8	A	C	+69.076	2.8 公里	2



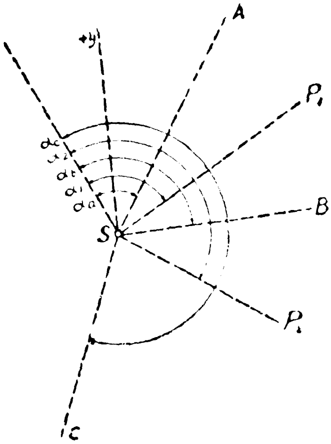
第六章　第十六圖



第六章　第十七圖

A 點之海拔爲 201.754 公尺，試用條件平差法求其他各點之海拔。

5. 設 A 點之海拔 H_a 爲已知，所觀測者爲五高程差 h_1, h_2 $\cdots\cdots$ h_5。試列爲求 p_1, p_2 及 p_3 三點海拔必需之條件方程式。

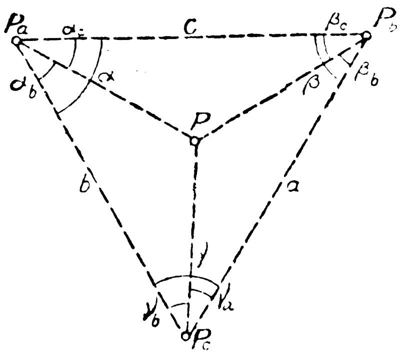


第六章　第十八圖

6. 已知 A 及 B 二點之海拔爲 H_a 及 H_b，觀測之高程差爲 h_1, h_2 $\cdots\cdots$ h_6，求 p_1, p_2, p_3 等三點之海拔，共有若干條件方程式？試列出之。

在測站 S 對於目標 A, B 及 C 之方向角 (SA), (SB) 及 (SC) 均已知悉，觀測之方向爲 α'_a, α'_1, α_b', α'_2 及 α_c。求方向角 (SP_1) 及 (SP_2) 時共需若干條件方程式？試排列之。

P_a P_b 及 P_c 三點之坐標 (x_a, y_a)，(x_b, y_b)



第六章　第十九圖

及(x_c, y_c)爲已知，所觀測者爲三水平角：

1. $PP_aP_b=\alpha_c$

2. $PP_bP_c=\beta_a$

3. $PP_cP_a=\gamma_b$

試列求 P 點坐標時必需之條件方程式。

第七章 三角網測站平差

第一節 三角網平差概論

三角網平差爲平差法最重要應用之一，1826 年高斯所發表之"Supplementum theoriae Combinationis"首次討論最小二乘法在此方面之應用，此後最小二乘法之發展，亦與三角網之平差有極密切之關係，習測量者如不知平差法，則不但不能獲得滿意之結果，且欲求得符合無差之閉合亦不可能矣。

三角網之所以需要平差，可分爲數部論之：

(一)在一三角點上（普通名爲測站）作水平角度或方向觀測，爲增加觀測結果之精度，常作多餘之觀測，因此而有平差之必要，以使所得結果互相符合，並求得最可靠之角度及方向值，是爲測站平差。

(二)任何一圖形內（如三角形，四邊形或中心形）不必觀測所有角度，始能確定其形狀，但觀測時則常將各測站所有之角度或方向盡皆測量，蓋所以增加全網之精度，於是卽有幾何條件發生，而須加以平差。例如一三角形內，僅須測兩個內角，卽可確定其形狀，若盡測三個內角，則根據幾何之定理，三個內角和應等於 180° 加球面角超，此條件名爲角度條件。此外尙因圖形之複雜，由三角網之任意一邊計算至其他一邊，常有一個以上不同之路線，但無論由任何一路線計算，必須得同樣之結果，於是又有一種條件名爲邊長條件，所有此種條件——角度及邊長條件——統名之爲圖形條件，欲使所有三角網內之圖形條件盡皆滿足，必須舉行所謂圖形平差。

(三)倘於一個三角網內，測量一條以上之基線，則各邊長可由任意一基線推算之，而其結果必須完全符合，此種條件名爲基線條件。或於一個網內測有一個以上之天文點，則由三角網推算及直接觀測之經緯度及方位角，必須符合或合於拉伯拉斯方程式，此種條件名爲經緯度條件，方位角條件，及拉伯拉斯條件，亦需於三角網平差中顧及之。

(四)若一三角網附合於一已經平差之固定三角網，謂爲強制附合。蓋

原有三角網之邊長，方位角以及經緯度均不能再事變更，而新測之三角網必須強行使與附合，以使其銜接處無任何差異存在，此種條件謂爲強制附合條件，平差時不可不列入。

（五）當三角網爲環形時，本身必須閉合，於是有所謂環形條件。

根據以上之分析，三角網平差之條件相當複雜，其中（一）（二）兩種爲每個三角網必有之條件，（三）（四）（五）三種雖非必有，但亦爲大三角網中常遇之條件，吾人倘不應用最小二乘法，卽使完全任意加以改正數，欲使其盡合此種複雜之條件，其工作亦將極爲繁巨。三角網愈大，條件愈多，則其困難亦必愈嚴重。最後不但不能求得最合理之結果，而其任意拼揍所費之計算工作，或將較應用最小二乘法所需者超而過之，是以最小二乘法對於三角網計算之關係，不僅在使其求得最合理最精確之結果，而尤在能使其計算循一定之步驟，不致耗費時日於拼揍之工作。實際上當三角網甚大，條件複雜之時，此種拼揍工作，根本難以同時滿足所有之條件，例如十九世紀上半世紀時，德國威登伯（Wüttemburg）及巴登（Baden）兩邦之三角網，最初卽因缺乏適當之平差法，始終未能完全拼合，後經採用最小二乘法，始將計算工作完成。

就理論上言，三角網中之觀測值，不爲角度，卽爲方向，而所有上述五種條件均與觀測值直接發生關係，故若將所有條件列於一處而作整個之平差，實爲最合理之辦法。但事實上因此種平差計算至爲複雜，對於實際應用諸多不便，故一般之習慣均將測站平差與圖形平差分開。其他如基線、經緯度、方位角、強制附合、及環形條件，因爲數較少，且與圖形有關，故亦附於圖形平差之內，一併解算，或逐步計算。本章所擬討論者，爲測站平差之方法。茲依各種不同情形，分別敍述於下：

第二節　角度觀測與方向觀測

就平差理論上及方法上觀察之，角度觀測與方向觀測，有相當之分別，在測站平差時爲尤甚，故吾人必須先對之有明晰之概念，在論各種不同情形之測站平差以前，先將其分別分析之。至於兩種觀測方法在三角測量上之利弊，則非本書之範圍，此處暫不加以討論。

倘在一測站 A 上，有 n 個目標 P_1, P_2, …… P_n，吾人可自任意一目標起，順次對準各目標，而讀每個目標之方向，是爲方向觀測；如每次觀

測，只取兩個目標，於是每次得此兩個目標之方向差，是即爲角度觀測。由方向觀測之結果，自然亦可推算任意兩目標間之角度，但由此所得之各角度，彼此互相關連而不盡相獨立。茲試以三個目標爲例解釋之。第一圖示自 A 站至 P_1，P_2，P_3，P_4 四方向，設命 P_1AP_2 爲 x，P_1AP_3 爲 y，則作角度觀測時，先對準 P_1，再對準 P_2，是爲一組，求得 x 值。同樣再對準 P_1 然後對準 P_3，得 y 值，如此則此兩角值互不相關。倘吾人順次對準 P_1，P_2，P_3 三方向，並其讀數爲 r_1，r_2，r_3，則由 $r_2-r_1=x$，$r_3-r_1=y$，亦可求得 x 及 y 之值，但此時 r_1 之值如有誤差，將影響 x 及 y 兩角度，故 x 及 y 之值並非互不相關者。

但由以下第四節之理論，吾人可知由角度觀測亦可化爲方向觀測，關於其間之關係，當於該處詳述之。

欲求一測站各角度之值，應用方向法與角度法觀測均可達到目的，但任意一單獨方向則並無意義。對於三角測量之應用，仍須將方向化爲角度；但就平差或誤差之理論言，方向觀測與角度觀測，必須分清。普通可將角度化爲二個方向之差，按照誤差傳播定律，如一個方向之中誤差爲 m，則由兩個等權方向所成之角度，其中誤差應爲 $\sqrt{2}\cdot m$；或以權表示之，如一方向之權爲 1，一角度之權即爲 1/2。

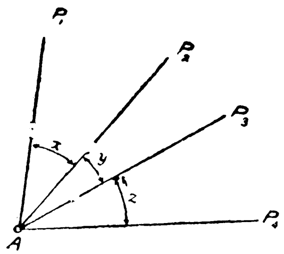
平差之原理必須用直接觀測之值，故若作方向觀測時，雖可算出各方向間之角度，但不能直接以之爲觀測值而用於平差計算中，故角度平差與方向平差有別。

方向平差之一特徵，即在一組觀測中於每個方向值上可加一任意常數，對於結果毫無影響，在不同組觀測時，每組均有一不同之“定向未知數”。此點將於以後申述之。

第三節　角度觀測之測站平差

設在一測站上共有 n 個目標，則觀測 $(n-1)$ 個互不相關之角度。即可求得所有角度之值。倘觀測角度之數目，超過 $n-1$ 個，即發生平差問題。此種平差，可用間接平差法，亦可用條件平差法解算之。茲舉數例以明之：

例1. 自測站 A 觀測 P_1,P_2,P_3,P_4 四個目標，共測 P_1AP_2，P_2AP_3，P_3AP_4，P_1AP_3，P_2AP_4 各角度，其值如下：



第七章　第一圖

號數	角度	觀測值 l
1	P_1AP_2	36° 21′ 36″.2
2	P_2AP_3	28° 15′ 13″.7
3	P_3AP_4	39° 22′ 14″.3
4	P_1AP_3	64° 36′ 52″.6
5	P_2AP_4	67° 37′ 24″.9

在測站 A 上共有 4 個方向,故互不相關之角度值爲 3,今以 $P_1AP_2=x$, $P_2AP_3=y$, $P_3AP_4=z$ 三個角度爲未知數,按間接觀測法解算如下:

$$
\begin{aligned}
l_1+v_1&=+x\\
l_2+v_2&=\quad +y\\
l_3+v_3&=\qquad +z\\
l_4+v_4&=x+y\\
l_5+v_5&=\quad y+z
\end{aligned}
\tag{1}
$$

命 x, y, z 之近似值爲:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_0&=36°21'30'' & x&=x_0+\xi\\
y_0&=28°15'10'' & y&=y_0+\eta\\
z_0&=39°22'10'' & z&=z_0+\zeta
\end{aligned}
\right\}
\tag{2}
$$

將(2)代入(1)內,卽得改正數方程式:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_1&=+\xi\qquad\qquad -6.2\\
v_2&=\quad +\eta\qquad -3.1\\
v_3&=\qquad\quad +\zeta-4.3\\
v_4&=+\xi+\eta\quad -12.6\\
v_5&=\quad +\eta+\zeta-4.9
\end{aligned}
\right\}
\tag{3}
$$

法方程式:

$$
\left.
\begin{aligned}
2\xi+\eta\qquad -18.8&=0\\
\xi+3\eta+\zeta-21.2&=0\\
+\eta+2\zeta-9.2&=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

解法方程式(4)得

$$\left.\begin{array}{ll}\xi=+7''.6 & x=36^\circ21'37''.6\\ \eta=+3''.6 & y=28^\circ15'13''.6\\ \zeta=+2''.8 & z=39^\circ22'12''.8\end{array}\right\}\qquad(5)$$

各改正數之値如下:

$$v_1=+1.4\quad v_2=-0.1\quad v_3=-1.5\quad v_4=-1.4\quad v_5=+1.5$$

$$[vv]=8.43\qquad\therefore m=\sqrt{\frac{8.43}{5-3}}=\pm2''.05\qquad(6)$$

卽觀測値之中誤差爲±2″.05。

此問題亦可按條件平差法解之,命觀測之五個角度之最或是値爲 x_1, x_2,……x_5, 則其間共有條件兩個, 卽

$$x_1+x_2-x_4=0$$

$$x_2+x_3-x_5=0$$

以觀測値代入,得條件方程式:

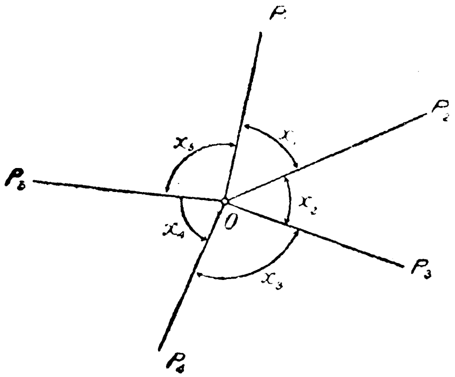
$$\left.\begin{array}{l}v_1+v_2\qquad-v_4\qquad-2.7=0\\ \qquad+v_2+v_3\qquad-v_5+3.1=0\end{array}\right\}\qquad(7)$$

列成法方程式爲:

$$\left.\begin{array}{r}3k_1+\ k_2-2.7=0\\ k_1+3k_2+3.1=0\end{array}\right\}\qquad(8)$$

解出得 $\qquad k_1=+1.4\qquad k_2=-1.5$

由此可算出改正數之値與由 (6) 求出者無異, x_1 x_2 x_3 三角度値亦與(5)相符。



第七章 第二圖

例 2. 水平角之總和控制

在普通三角測量中, 如完全採用角度平差法, 多利用水平角總和之控制,如在一測站共有 n 個方向,每次測兩相鄰方向間之角度, 則共爲 n 個角度,此 n 個角度之和應適爲 360°, 謂爲水平角總和控制。如第二圖所示,自測站 0 共有五個目標, 如依次觀測 x_1 x_2 …… x_5 五個角度,卽有一條件方程式:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-360°=0$$

如將觀測值 $l_1\ l_2 \cdots\cdots l_5$ 代入，得

$$l_1+l_2+l_3+l_4+l_5-360°=w$$

則
$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+w=0 \tag{9}$$

按照條件平差法得

$$v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=-\frac{w}{5}$$

如在一測站上共有 n 個角度，其水平角總和控制之改正數卽爲：

$$v_i=\frac{w}{n}. \tag{10}$$

易言之，卽在一測站上之水平角總和如不等於 360°，可將其差異平均分配於各角度上。

倘各角度之觀測精度不等，命其權爲 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$，則依式(9)得法方程式：

$$\left[\frac{1}{p}\right]k+w=0,$$

或
$$k=-\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{11}$$

各改正數爲
$$v_i=-\frac{1}{p_i}\cdot k=-\frac{1}{p_i}\cdot\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \tag{12}$$

卽各角度之改正數値與其觀測値之權之倒數成比例。

欲求各角度平差値之權，可想像每個角度觀測兩次，一次爲其本身，一次爲 360° 減去所有其他角度，此兩觀測値之權爲：

$$p_i \text{ 及 } p'_i$$

因中誤差平方與權之倒數成比例，故按照誤差傳播定律

$$\frac{1}{p'_i}=\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i},$$

是故平差後之權爲：

$$P_i=p_i+p'_i=p_i+\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}}=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}} \tag{13}$$

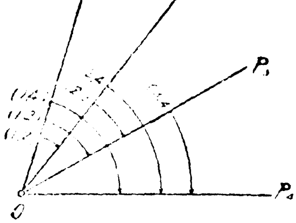
當等權觀測時，
$$P_i=\frac{n}{n-1} \tag{14}$$

因觀測值之權爲 1 ，故由水平角總和控制所得之權之增進，爲數並不大，與觀測值權之比例爲 $n:n-1$。

第四節　士賴伯全組合測角法之理論

三角測量之初期，因儀器刻度之簡陋，各國率多採用複測法，以使精度增加，是爲角度觀測。迨後刻度及讀數設備均漸改進，又因複測法之結果常含有系統誤差，故方向觀測法遂超而上之。但方向法之缺點在不易同時看清所有目標，因而耗費觀測時間至多；且因高台受日光直射後有旋轉之虞，致使較多目標之方向觀測，亦易有系統誤差存在，故 1870 年以後，德國普魯士大地測量局士賴伯試用全組合測角法，自 1880 年以後，遂爲德國三角測量之圭臬，至今不變。其法平差後之結果可使角度觀測化爲完全方向組，各方向之權相等，對於三角網平差至爲便利。茲將其理論扼要述之於下：

設在測站上有 s 個方向，則任意兩方向卽可成爲一角度，故所有組合之角度總數爲 $\frac{1}{2}s(s-1)$ 個。第三圖所示 $s=4$ 之情形，所有可能角度之總數爲 6 。按照士賴伯之觀測法，應將所有六個角度均作同樣多次數之觀測，設命其觀測值爲：



第七章　第三圖

(1.2)	(1.3)	(1.4)
	(2.3)	(2.4)
		(3.4)

此六個角度並非互不相關，故吾人取第一方向與其他各方向分別組成之角度爲互不相關之未知數，而以 [1.2]，[1.3]，[1.4] 表示各角之平差值。如此可得改正數方程式如下：

未知數	觀測值	
$v_1 = +[1.2]$	$-(1.2)$	
$v_2 = +[1.3]$	$-(1.3)$	(15)
$v_3 = +[1.4]$	$-(1.4)$	
$v_4 = -[1.2]+[1.3]$	$-(2.3)$	
$v_5 = -[1.2]+[1.4]$	$-(2.4)$	
$v_6 = -[1.3]+[1.4]$	$-(3.4)$	

由此得法方程式：

未知數	常數項	
$3[1.2]-[1.3]-[1.4]$	$-(1.2)+(2.3)+(2.4)=0$	
$-[1.2]+3[1.3]-[1.4]$	$-(1.3)-(2.3)+(3.4)=0$	(16)
$-[1.2]-[1.3]+3[1.4]$	$-(1.4)-(2.4)-(3.4)=0$	

欲解此法方程式，可求其和方程式：

$$[1.2]+[1.3]+[1.4]-(1.2)-(1.3)-(1.4)=0 \tag{17}$$

將(17)分別加於(16)之各式，卽可求得各未知數：

$$\begin{aligned}
[1.2] &= \frac{1}{4}\left\{2(1.2)+(1.3)-(2.3)+(1.4)-(2.4)\right\} \\
[1.3] &= \frac{1}{4}\left\{2(1.3)+(1.4)-(3.4)+(1.2)+(2.3)\right\} \\
[1.4] &= \frac{1}{4}\left\{2(1.4)+(1.2)+(2.4)+(1.3)+(3.4)\right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

公式(18)可以文字表示之：欲求任意一角度 $[i,k]$ 之平差值，取直接觀測値 (i,k) 命其權爲 2，又將所有可能之間接計算值列出，其權各等於 1，而取其中數，卽得 $[i,k]$ 之值。

公式(18)之結果，亦可化爲方向値，命 [1]，[2]，[3]，[4] 爲自測站 0 至目標 $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ 之方向値，則 $[1.2]=[2]-[1]$，$[1.3]=[3]-[1]$……。更命 $[2.1]=-(1.2)$，$(3.1)=-(1.3)$ ……，則 [18] 可書成下

式:

$$[1.2]=-[1]+[2]=\frac{1}{4}\left\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\right\}-\frac{1}{4}\left\{(2.1)+(2.3)+(2.4)\right\}$$

$$[1.3]=-[1]+[3]=\frac{1}{4}\left\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\right\}-\frac{1}{4}\left\{(3.1)+(3.2)+(3.4)\right\}$$

$$[1.4]=-[1]+[4]=\frac{1}{4}\left\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\right\}-\frac{1}{4}\left\{(4.1)+(4.2)+(4.3)\right\} \tag{19}$$

由(19)可知各方向值爲:

$$\begin{aligned}
[1]&=-\frac{1}{4}\left\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\right\}\\
[2]&=-\frac{1}{4}\left\{(2.1)+(2.3)+(2.4)\right\}\\
[3]&=-\frac{1}{4}\left\{(3.1)+(3.2)+(3.4)\right\}\\
[4]&=-\frac{1}{4}\left\{(4.1)+(4.2)+(4.3)\right\}
\end{aligned} \tag{20}$$

式(20)乃專爲四個方向之公式,如普通有 s 個方向 1, 2, 3 …… s, 其公式如下:

$$\begin{aligned}
[1]&=-\frac{1}{s}\left\{(1.2)+(1.3)+\cdots\cdots+(1.s)\right\}\\
[2]&=-\frac{1}{s}\left\{(2.1)+(2.3)+\cdots\cdots+(2.s)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[s]&=-\frac{1}{s}\left\{(s.1)+(s.2)+\cdots\cdots+(s.s-1)\right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

由此公式可直接自角度值計算方向值。茲舉例如下:

觀測值	$(1.2)=48°\ 17'\ 1''.4$	$(1.3)=96°\ 52'\ 16''.8$
	$(1.4)=152°\ 54'\ 6''.8$	$(2.3)=48°\ 35'\ 14''.3$
	$(2.4)=104°\ 37'\ 7''.8$	$(3.4)=56°\ 1'\ 48''.9$

欲求 [1] [2] [3] [4] 各方向值爲免度數分數之加減，可將上列角度化爲近似方向值 (1)，(2)，(3)，(4) 如下表：

(1)	(2)	(3)	(4)
0° 00′ 00″.0	48° 17′ 1″.4	96° 52′ 16″.8	152° 54′ 6″.8
	48° 17′ 1″.0	96° 52′ 15″.3	152° 54′ 8″.8
		16″.0	152° 54′ 4″.9

由此可計算方向值 [1] [2] [3] [4] 如下表：

	[1]= 0° 00′ 0″	[2]= 48° 17′1″.0	[3]= 96° 52′ 16″.0	[4]= 152° 54′ 6″.0
	0.0	+ 0.4	+ 0.8	+ 0.8
	− 0.4	0.0	− 0.7	+ 2.8
	− 0.8	+ 0.7	0.0	− 1.1
	− 0.8	− 2.8	+ 1.1	0.0
Σ	− 2.5	− 1.7	+ 1.2	+ 2.5
$\frac{1}{4}\Sigma$	− 0.500	− 0.425	+ 0.300	+ 0.625
化數	0.000	+ 0.075	+ 0.800	+ 1.125

最後一行之化數，係將方向 [1] 化爲零，故其他方向亦均加 +0.500，由此得平差值：

$$
\begin{aligned}
[1] &= \ \ \ 0^\circ\, 00'\ \ 0''.000\\
[2] &= \ 48^\circ\, 17'\ \ 1''.075\\
[3] &= \ 96^\circ\, 52'\, 16''.800\\
[4] &= 152^\circ\, 54'\ \ 7''.125
\end{aligned}
$$

以上所論係如何計算士賴伯之全組合測角法，而最重要之一點乃在證明由此所得之方向值 [1] [2]……等其權相等，蓋如所得各方向之權數不等，對於以後之圖形平差至爲不便也。最簡單之證明法，可自公式(21)出發，因所有(1.2)，(1.3) …… 諸值均爲互不相關之觀測值，設令每個觀測方向之權爲 1，卽每個觀測角度之權爲 1/2，則平差後每個方向之權 p 可按誤差傳播定律求之

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{s^2}\underbrace{(2+2+\cdots\cdots+2)}_{s\text{ 項}}$$

或

$$\frac{1}{p}=\frac{2}{s},\qquad p=\frac{s}{2} \tag{22}$$

是爲每個角度觀測一組時,每個方向之權。若觀測 n 組, 則

$$P=\frac{s\cdot n}{2}$$

爲平差後方向之權。由此可知當測站上方向數目不同時,亦必觀測不同之組數, 以使各測站上之方向盡爲等權, 否則以後之圖形平差將爲不等權者,勢必異常不便也。

以上所論係關於士賴伯測角法之理論, 今更以之與完全方向組觀測比較。在完全方向組內,設仍以每組每個方向觀測值之權爲權單位, 欲令平差後每方向之權爲 P, 必須作 P 組觀測。設該測站上有 s 個目標, 必須照準 $Ps=\frac{ns^2}{2}$ 次。用士賴伯測角法時如目標有s個,角度之全組合數遂爲 $\frac{1}{2}s(s-1)$。如欲得方向之權爲 P, 必須每角觀測 n 組,因每角含有兩個方向,是以必須照準目標 $ns(s-1)$ 次。故以觀測工作而論,二法之比例爲:

$$\frac{n\cdot s^2}{2}:ns(s-1)\qquad\text{或}\quad\frac{s}{2}:(s-1) \tag{23}$$

當一測站上方向數目 s 甚大時, 應用士賴伯法之工作幾爲完全方向組觀測之 2 倍。此乃純就觀測工作而言,但實際所需之觀測時間並不與工作成比例,蓋完全方向組觀測,必須等候所有目標均能觀測之時施行, 常因某一方向回照偶然受阻而不得不停止工作,用士賴伯法時,則每次僅須選擇最清楚之兩目標卽可。據實際經驗,後者所費之時間,常較前者爲少。

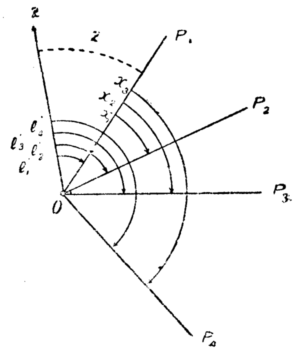
第五節　完全方向組之平差

自一測站上,順次觀測所有方向,正鏡時自左向右,倒鏡時自右向左,是爲一完全方向組。通常爲精度之增進,在一測站上常觀測數組,而求其

平均值。例如在大三角測量中，一等點之方向觀測多為十六組。因欲消除儀器水平盤之刻度誤差，每組測畢後，均將刻度盤移動，使任何一方向之讀數平均分配於刻度盤上。每次刻度盤移動之角度，以讀數測微器數目與組數之乘積除全盤圓周 360° 得之。例如儀器上共有兩個測微器，欲測十六組，則每組刻度盤位置移動$\frac{360^\circ}{2\cdot 16}=11^\circ 15'$。

倘在一測站上僅觀測一個完全方向組，吾人取其正倒鏡所得之中數，即可求得各方向之值，此時無所謂平差問題。但若在刻度盤不同位置觀測多組，則必須將其平差，並可由此求得每方向之中誤差。關於完全方向組之平差理論，茲述之於下：

第四圖中示自測站 O 出發共有 P_1，P_2，P_3，P_4 四個方向，Oz 為在此刻度盤位置時，刻度零所對之方向（此方向並非由觀測而得）。當望遠鏡照準 P_1，P_2，P_3，P_4 各目標時，吾人得 l_1，l_2，l_3，l_4 各讀數，如圖所示。在四個目標之間，吾人僅有三個獨立之未知數，今取自 P_1（稱為零方向）至 P_2，P_3，P_4 各角度為此未知數，即圖中所示之 x_1，x_2，x_3。



第七章　第四圖

倘僅觀測一組，可由圖看出下列關係：

$$l'_1=z' \quad l'_2=z'+x_1 \quad l'_3=z'+x_2 \quad l'_4=z'+x_3 \tag{24}$$

z' 為"定向未知數"。欲求 $x_1\, x_2\, x_3$ 各值，可用下列各式：

$$x_1=l'_2-l'_1 \qquad x_2=l'_3-l'_1 \qquad x_3=l'_4-l'_1$$

此乃吾人所熟習者。但如觀測多組，每組之刻度盤位置不同，則其計算方法推演如下：今命第一組之觀測值為 $l'_1\, l'_2\, l'_3\, l'_4$，其定向未知數為 z'；第二組之觀測值為 $l''_1\, l''_2\, l''_3\, l''_4$，其定向未知數為 z''，餘類推。顧及各方向值之觀測誤差後，須將式(24)化成下列各改正數方程式：

第一組：$l'_1\ +v'_1\ =z' \qquad l'_2\ +v'_2\ =z'\ +x_1$

第二組：$l''_1\ +v''_1\ =z'' \qquad l''_2\ +v''_2\ =z''\ +x_1$

……………………………　……………………………

第 n 組：$l_1^{(n)}+v_1^{(n)}=z^{(n)} \qquad l_2^{(n)}+v_2^{(n)}=z^{(n)}+x_1$

$$\left.\begin{array}{llll} l'_3+v'_3=z'+x_2 & & l'_4+v'_4=z'+x_3 \\ l''_3+v''_3=z''+x_2 & & l''_4+v''_4=z''+x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_3^{(n)}+v_3^{(n)}=z^{(n)}+x_2 & & l_4^{(n)}+v_4^{(n)}=z^{(n)}+x_3 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

一般而論，如在一測站上共有 s 個方向，則每組觀測即有 s 個改正數方程式，n 組內共有 $n\cdot s$ 個方程式，其中有定向未知數 n 個，角度未知數 $s-1$ 個，共有未知數 $n+s-1$ 個。

由(25)可列出法方程式如下（設 $n=4, s=4$）：

$$\left.\begin{array}{lllllll} sz' & & & & +x_1 & +x_2 & +x_3 & -[\,l'\,]=0 \\ & +sz'' & & & +x_1 & +x_2 & +x_3 & -[\,l''\,]=0 \\ & & +sz''' & & +x_1 & +x_2 & +x_3 & -[\,l'''\,]=0 \\ & & & +sz'''' & +x_1 & +x_2 & +x_3 & -[\,l''''\,]=0 \end{array}\right\} n\text{個} \qquad (26)$$

$$\left.\begin{array}{llll} z'+z''+z'''+z'''' & +nx_1 & & & -[\,l_2\,]=0 \\ z'+z''+z'''+z'''' & & +nx_2 & & -[\,l_3\,]=0 \\ z'+z''+z'''+z'''' & & & +nx_3 & -[\,l_4\,]=0 \end{array}\right\}(s-1)\text{個}$$

將式(26)內之前 n 個方程式相加，而以 s 除之，即得

$$z'+z''+z'''+z''''=\frac{1}{s}[\,l\,]-\frac{n}{s}(x_1+x_2+x_3) \qquad (27)$$

$$[l]=[l']+[l'']+\cdots\cdots+[l^{(n)}]=[l_1]+[l_2]+\cdots\cdots[l_s]$$

將 [27] 代入(26)內之後 $(s-1)$ 個方程式中，即得

$$(s-1)\text{個}\begin{cases} \left(n-\frac{n}{s}\right)x_1-\frac{n}{s}x_2-\frac{n}{s}x_3-\left([\,l_2\,]-\frac{1}{s}[l]\right)=0 \\ -\frac{n}{s}x_1+\left(n-\frac{n}{s}\right)x_2-\frac{n}{s}x_3-\left([\,l_3\,]-\frac{1}{s}[l]\right)=0 \\ -\frac{n}{s}x_1-\frac{n}{s}x_2-\left(n-\frac{n}{s}\right)x_3-\left([\,l_4\,]-\frac{1}{s}[l]\right)=0 \end{cases} \qquad (28)$$

蓋吾人所欲求得者，乃 $x_1\ x_2\ x_3$ 諸值，而非 $z'\ z''\cdots\cdots$ 等，故(28)內已將所

有定向未知數消去。將(28)之$(s-1)$個方程式相加，卽得

$$\frac{n}{s}x_1+\frac{n}{s}x_2+\frac{n}{s}x_3=\left(\frac{1}{s}[l]-[l_1]\right) \tag{29}$$

以(29)分別加於(28)內之各式中，卽得

$$\begin{aligned}
&nx_1-([l_2]-[l_1])=0 \qquad && x_1=\frac{1}{n}([l_2]-[l_1])\\
&nx_2-([l_3]-[l_1])=0 \qquad && x_2=\frac{1}{n}([l_3]-[l_1])\\
&nx_3-([l_4]-[l_1])=0 \qquad && x_3=\frac{1}{n}([l_4]-[l_1])
\end{aligned} \tag{30}$$

通常計算時，均將各組之零方向 l_1', l_1'', l_1''' 等化爲零，故 $[l_1]=0$，由是(30)可化爲：

$$x_1=\frac{1}{n}[l_2] \qquad x_2=\frac{1}{n}[l_3] \qquad x_3=\frac{1}{n}[l_4] \tag{31}$$

或以 [1] [2] [3] [4] 示 P_1，P_2，P_3，P_4 之方向値，卽得

$$[1]=0 \quad [2]=\frac{1}{n}[l_2] \quad [3]=\frac{1}{n}[l_3] \quad [4]=\frac{1}{n}[l_4] \tag{32}$$

至於 z' z'' z''' ……之値，自(26)之前 n 個方程式內求之：

$$\begin{aligned}
z'&=\frac{1}{s}\left\{[l']-(x_1+x_2+x_3)\right\}\\
z''&=\frac{1}{s}\left\{[l'']-(x_1+x_2+x_3)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{33}$$

求出 z' z'' ……等之後，卽可根據(25)求改正數 v，卽

$$\begin{aligned}
&v'_1=\quad -(l'_1-z') \qquad && v''_1=\quad -(l''_1-z'') \qquad && \cdots\cdots\\
&v'_2=x_1-(l'_2-z') \qquad && v''_2=x_1-(l''_2-z'') \qquad && \cdots\cdots\\
&v'_3=x_2-(l'_3-z') \qquad && v''_3=x_2-(l''_3-z'') \qquad && \cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned} \tag{34}$$

故吾人須先算出每組內加上定向未知數之方向值（l'_1-z'）等，使全組內所有方向值均作相同之移動，是名爲組移動。每組之組移動值 $-z'$, $-z''$, ……等均不相等。(l'_1-z')等，謂之移動後之方向值。以 x_1, x_2 ……等分別減去其相當之移動後之方向值，即得改正數。

因觀測方向總數爲 $n\cdot s$，未知數總數爲 $n+s-1$，故每觀測方向之中誤差爲：

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{ns-n-(s-1)}}=\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}} \tag{35}$$

至於平差後各方向之中誤差，可由(32)直接寫出，因按誤差傳播定律：

$$M^2=m^2_{(1)}=m^2_{(2)}=\cdots\cdots=\frac{1}{n^2}(\underbrace{m^2+m^2+\cdots\cdots+m^2}_{\text{共 } n \text{ 項}})$$

故平差後各方向之中誤差爲：

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}} \tag{36}$$

即平差後每方向之權爲觀測方向值權之 n 倍，故任意兩方向間所作成之角度，其權爲 $n/2$。

由上所述，可知完全方向組之計算按(32)極爲簡單，中誤差之計算可按(34)(35)(36)行之，今舉例如下以明之：

例一：方向觀測中誤差之計算

測站：寶華寺　儀器：Wild 3349　觀測日期：三十年七月十日

組　　數 度盤位置		1 0	2 22°30′	3 45°	4 67°30′	5 90°	6 112°30′	7 135°	8 157°30′	總和	方向中數 A
視準點	方向 P	″	″	″	″	″	″	″	″		
(I) 大寶頂	0°0′	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00
歌樂山	159°42′	36.48	36.90	36.09	38.98	37.52	35.10	35.80	33.86	290.64	36.33
小啞口	216°14′	36.58	38.08	35.64	35.57	37.78	36.68	36.10	36.32	292.75	36.59
雷家山	252°46′	18.29	19.30	17.75	18.27	19.24	17.98	17.34	16.16	143.35	17.92
天台寺	313°34′	2.50	2.44	0.42	1.92	3.34	3.82	1.42	−0.78	15.08	1.88
和　　數		93.85	96.72	88.81	94.74	97.88	93.58	90.66	85.56	741.80	92.72
中　　數 B		18.77	19.34	17.76	68.95	19.58	18.72	18.13	17.11	148.36	$18.54=A_0$
整組移動值 A_0-B		−0.23	−0.80	+0.78	−0.41	−1.04	−0.18	+0.41	+1.43	−0.04	
$\mathrm{II}=\mathrm{I}+(A_0-B)$	大寶頂	−0.23	−0.80	+0.78	−0.41	−1.04	−0.18	+0.41	+1.43	−0.04	
	歌樂山	36.25	36.10	36.78	38.57	36.48	34.92	36.21	35.29	290.60	
	小啞口	36.35	37.28	36.42	35.16	36.74	36.50	36.51	37.75	292.71	
	雷家山	18.06	18.50	17.53	17.86	18.20	17.80	17.75	17.59	143.29	
	天台寺	2.27	1.64	1.20	1.51	2.30	3.64	1.83	0.65	15.04	

和　數	92.79	92.72	92.71	92.69	92.68	92.68	92.71	92.71	741.60
中　數 B'	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	148.32

$v = A - H$

	+0.23	+0.80	−0.78	+0.41	+1.04	+0.18	−0.41	−1.43	+0.04
	+0.08	+0.23	−0.45	−2.24	−0.15	+1.41	+0.12	+1.04	+0.04
	+0.24	−0.69	+0.17	+1.43	−0.15	+0.09	+0.08	−1.16	+0.01
	−0.14	−0.58	+0.39	+0.06	−0.28	+0.12	+0.17	+0.36	+0.07
	−0.39	+0.24	+0.68	+0.37	−0.42	−1.76	+0.05	+1.23	0
和	+0.02	0	+0.01	+0.03	+0.04	+0.04	+0.01	+0.01	+0.16

vv

	0.053	0.640	0.608	0.168	1.082	0.032	0.168	2.045	4.796
	0.006	0.052	0.203	5.018	0.023	1.988	0.014	1.082	8.387
	0.058	0.476	0.029	2.045	0.023	0.008	0.006	1.346	3.991
	0.020	0.336	0.152	0.004	0.078	0.014	0.029	0.011	0.644
	0.152	0.058	0.462	0.137	0.176	3.098	0.003	1.513	5.599
和	0.289	1.563	1.454	7.372	1.382	5.140	0.220	5.997	23.417

23.417

每一組每一方向之中誤差 $m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}=\sqrt{\dfrac{23.417}{7\times4}}=\pm0''.92$

關於$[vv]$之計算，吾人亦可不必求出z', z'', ……諸值，而直接由每方向中數與每組讀數之差異d求之。命

$$\begin{array}{llll} \text{方向} & \text{第1組} & \text{第2組} \quad \cdots\cdots & \text{第}n\text{組} \\ P_1 & d'_1 = 0 \quad -l'_1 & d''_1 = 0 \quad -l''_1 \cdots\cdots & d_1^{(n)} = 0 \quad -l_1^{(n)} \\ P_2 & d'_2 = x_1 \quad -l'_2 & d''_2 = x_1 \quad -l''_2 \cdots\cdots & d_2^{(n)} = x_1 \quad -l_2^{(n)} \\ \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_s & d_s = x_{(s-1)} - l'_s & d''_s = x_{(s-1)} - l''_s \cdots\cdots & d_s^{(n)} = x_{(s-1)} - l_s^{(n)} \end{array} \tag{37}$$

將各組之d相加而與(33)比較，即得

$$[d'] = -s \cdot z' \quad [d''] = -s \cdot z'' \cdots\cdots [d^{(n)}] = -s \cdot z^{(n)} \tag{38}$$

又由(34)知

$$\begin{aligned} v'_1 &= d'_1 + z' = d'_1 - \frac{[d']}{s} \\ v'_2 &= d'_2 + z' = d'_2 - \frac{[d']}{s} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v'_s &= d'_s + z' = d'_s - \frac{[d']}{s} \end{aligned} \tag{39}$$

其餘各組類推。由(39)各式之平方和得：

$$[v'v'] = [d'd'] - 2\frac{[d']^2}{s} + \frac{[d']^2}{s} = [d'd'] - \frac{[d']^2}{s} \tag{40}$$

其餘各組亦得同樣之公式，如

$$[v''v''] = [d''d''] - \frac{[d'']^2}{s}$$

將各組所得之$[v'v']$相加，即得

$$[vv] = [dd] - \frac{[[d]^2]}{s} \tag{41}$$

$[[d]^2]$係以每組爲單位，求得各差異值d之和，而平方之，然後將各組之結果相加即得。故應用式(37)求d，可不必先求組移動及移動後之方向值，而可直接用式(41)求改正數平方和。茲將前例按此方法重算之如下：

例：方向觀測中誤差之計算

組數			1	2	3	4	5	6	7	8	總和	方向中數
度盤位置			0	22°30′	45°	67°30′	90°	112°30′	135°	157°30′		A
視準點		方向 P	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
(I)	大寶頂	0°0′	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00
	歌樂山	155°42′	36.48	36.90	36.00	38.98	37.52	35.10	35.80	33.86	290.64	36.33
	小啞口	216°14′	36.58	38.08	35.64	35.57	37.78	36.68	36.10	36.32	292.75	36.59
	雷家山	252°46′	18.29	19.30	16.75	18.27	19.24	17.98	17.34	16.16	143.33	17.92
	天台寺	313°34′	2.50	2.44	0.42	1.92	3.34	3.82	1.42	−0.78	15.08	1.88
		視準點	$d=A-P$									
		大寶頂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		歌樂山	−0.15	−0.57	+0.33	−2.65	−1.19	+1.23	+0.53	+2.47	0	
		小啞口	+0.01	−1.49	+0.95	−1.02	−1.19	−0.09	+0.49	+0.27	−0.03	
		雷家山	−0.37	−1.38	+1.17	−0.35	−1.32	−0.06	+0.58	+1.76	+0.03	
		天台寺	−0.62	−0.56	+1.46	−0.04	−1.46	−1.94	+0.46	+2.60	−0.04	

和數 $[d]$	−1.13	−4.00	+3.91	−2.02	−5.16	−0.86	+2.06	+7.16	−0.040	
零方向改正數 $\frac{[d]}{s}$	−0.226	−0.800	+0.782	−0.404	−1.032	−1.172	+0.412	+1.432	−0.008	
$[d][d]$	1.275	16.00	15.250	4.080	26.600	0.740	4.240	51.300	119.485	$=([d]^2)$
視準點	dd								總　和	
大寶頂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
歌樂山	0.023	0.325	0.108	7.000	1.415	1.510	0.281	6.100	16.762	
小啞口	0.000	2.220	0.905	1.040	1.415	0.008	0.240	0.073	5.901	
雷家山	0.136	1.900	1.365	0.123	1.740	0.004	0.336	3.100	8.703	
天合寺	0.384	0.313	2.130	0.002	2.130	3.750	0.212	7.080	16.001	
和　數	0.543	4.758	4.508	8.164	6.700	5.272	1.069	16.353	47.367	$=[dd]$

$$[vv]=[dd]-\frac{1}{s}[[d]^2]=47.367-\frac{119.485}{5}=23.470$$

每一組每一方向之中誤差$m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}=\pm 0''.92$

方向中數之中誤差$M=\dfrac{m}{\sqrt{n}}=\pm 0''.3$

上述之$s=$觀測方向之數目，$n=$組之數目。此法所得之結果，與前法完全相同。

第六節　不完全方向組之平差

觀夫上節所論，可知完全方向組不但計算簡單，且經過測站平差後每個方向之權數相等，對於此後之圖形平差甚爲方便。不完全方向組則適反是。計算至爲繁雜，且平差後各方向之權不能盡等，對於以後圖形平差亦極不便，且刻度誤差亦不能完全消除，故大三角測量中甚少用之。在三四等三角測量中，如遇萬不得已時，觀測不完全方向組，亦多按下節之簡略法計算。本節僅將白塞爾於東普魯士弧度測量時所創用之嚴格方法作簡單之介紹。

計算不完全方向組時，先將觀測方向相同之各組歸併於一處，按前節所述之完全方向組計算，其權等於所測組數。然後列出改正數方程式與前節之式(25)完全相同。但此時之組，乃爲大組，即可包括數組之中數，故每組均有一不同之權，命之爲p'，p''，……$p^{(n)}$。每組內各方向之權均相等。由是可組成法方程式如下：

$$
\begin{array}{l}
n\text{個}\left\{\begin{array}{l}
[p']z' \qquad\qquad\qquad +p'x_1+p'x_2+p'x_3-p'[l']=0\\
\quad +[p'']z'' \qquad\qquad +p''x_1+p''x_2+p''x_3-p''[l'']=0\\
\qquad +[p''']z''' \qquad +p'''x_1+p'''x_2+p'''x_3-p'''[l''']=0\\
\qquad\quad +[p'''']z''''+p''''x_1+p''''x_2+p''''x_3-p''''[l'''']=0
\end{array}\right.\\
(s-1)\text{個}\left\{\begin{array}{l}
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z''''+[p_2]x_1 \qquad\qquad -[pl_2]=0\\
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z'''' \qquad +[p_3]x_2 \qquad -[pl_3]=0\\
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z'''' \qquad\qquad +[p_4]x_3-[pl_4]=0
\end{array}\right.
\end{array}
\qquad (42)
$$

公式(42)與(26)完全相似，但因各組中並非將每個方向盡行觀測，故

式中亦有若干項可能並不存在，且因不等權之關係，不能將 x_1, x_2, x_3 之值化成一般之公式。但由式(42)內之前 n 個方程式中，吾人可求得各組之定向未知數 z 如下式：

$$z' = \frac{p'}{[p']}\Big\{[l'] - (x_1 + x_2 + x_3)\Big\}$$

$$z'' = \frac{p''}{[p'']}\Big\{[l''] - (x_1 + x_2 + x_3)\Big\} \tag{43}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將式(43)代入(42)內之後 $(s-1)$ 個方程式內，即可求得約化後僅含未知數 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 之法方程式。解此法方程式，即可求得 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 諸值。

每個觀測方向之中誤差，可由下式求之：

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{R - n - (s-1)}} \tag{44}$$

R 爲總共觀測方向之數目。

茲舉例如下：

自測站 O 觀測 $P_1\ P_2\ P_3$ 三方向，其結果如下：

第一組	P_1	0°	00′	00″.000	
	P_2	26	14	51.646	$p' = 12$
	P_3	87	04	52.792	
第二組	P_1	0	00	00.000	$p'' = 19$
	P_2	26	14	52.553	
第三組	P_1	0	00	00.000	$p''' = 12$
	P_3	87	04	53.104	

命 $P_1\ P_2$ 間之角度爲 x_1，其近似值爲　$x^0{}_1 = 26°14'50''$，$x_1 = x^0{}_1 + \xi_1$

$P_1\ P_3$ 間之角度爲 x_2，其近似值爲　$x^0{}_2 = 87\ 04\ 50$，　$x_2 = x^0{}_2 + \xi_2$

於是得改正數方程式：

$$\left.\begin{aligned}
v'_1 &= z_1 \\
v'_2 &= z_1 \quad +\xi_1 \qquad -1.646 \\
v'_3 &= z_1 \qquad\qquad +\xi_2-2.792
\end{aligned}\right\} p' = 12$$

$$\left.\begin{aligned}
v''_1 &= \quad z_2 \\
v''_2 &= \quad z_2 \quad +\xi_1 \qquad -2.553
\end{aligned}\right\} p'' = 19 \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned}
v'''_1 &= \qquad z_3 \\
v'''_3 &= \qquad z_3 \qquad +\xi_2-3.104
\end{aligned}\right\} p''' = 12$$

由此組成法方程式：

$$\begin{array}{llllll}
36z_1 & \text{——} & \text{——} & +12\xi_1 & +12\xi_2 & -53.256=0 \\
\text{——} & +38z_2 & \text{——} & +19\xi_1 & \text{——} & -48.507=0 \\
\text{——} & \text{——} & +24z_3 & \text{——} & +12\xi_2 & -37.248=0 \\
12z_1 & +19z_2 & \text{——} & +31\xi_1 & \text{——} & -68.259=0 \\
12z_1 & \text{——} & +12z_3 & \text{——} & +24\xi_2 & -70.752=0
\end{array} \tag{46}$$

由前三方程式中得：

$$\begin{aligned}
12z_1 &= -\;\;4\xi_1-6\xi_2+17.752 \\
19z_2 &= -9.5\xi_1 \qquad +24.254 \\
12z_3 &= \qquad\qquad -6\xi_2+18.624
\end{aligned} \tag{47}$$

代入(46)之後二方程式內得：

$$\begin{aligned}
17.5\xi_1-\;\;4.0\xi_2-26.253&=0 \\
-4.0\xi_1+14.0\xi_2-34.376&=0
\end{aligned} \tag{48}$$

解式(48)得 ξ_1 及 ξ_2 之值：

$$\xi_1=+2''.205 \qquad \xi_2=+3''.086 \tag{49}$$

加入近似值 $x^0{}_1$ 及 $x^0{}_2$，遂得

P_1P_2 間之角度：　$x_1=26°14'52''.205$

P_1P_3 間之角度：　$x_2=87°04'53''.086$

又將(49)之 ξ_1 與 ξ_2 值代入式(47)內，即得

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\,0''.284 \\
z_2 &= +0''.174 \\
z_3 &= +0''.009
\end{aligned} \tag{50}$$

將(49)(50)各值代入(45)內，即得改正數：

$$v'_1=-0''.284\quad v'_2=+0''.275\quad v_3'=+0''.010$$
$$v''_1=+0''.174\quad v''_2=-0''.174$$
$$v'''_1=+0.\ 009\qquad\qquad v'''_3=-0''.009$$

由此得 $[pvv]=3.03$

總共觀測方向數目爲 $R=7$, $n=3$, $s=3$, 代入式(44)即求出權單位之中誤差:

$$m=\sqrt{\frac{3.03}{2}}=\pm''1.23$$

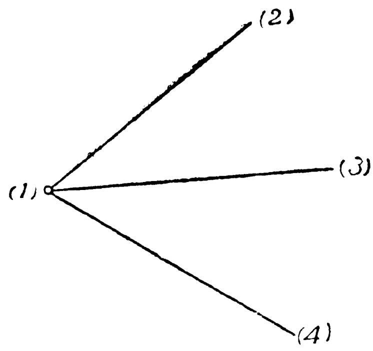
例二: 在測站 (1) 觀測 (2), (3) 及(4)各目標之方向，得下列之結果:

測　　點	(2)	(3)	(4)
第　一　組	0°00′00″	45°0′0″.3	90°0′0″.9
第　二　組	0	1.0	–
第　三　組	–	0.0	89 59 59.8

今以∠(3)(1)(2)及∠(4)(1)(2)二角爲未知數，並假設其近似值及改正數之關係爲:

$$\angle(3)(1)(2)=45°00'00''+x_3$$
$$\angle(4)(1)(2)=90°00'00''+x_4$$

更命各組之觀測之定向值爲 z_1, z_2, z_3。由此得誤差方程式:



第七章　　第五圖

第一組	第二組	第三組
$v_1=Z_1\qquad +0$	$v_4=Z_2\qquad 0$	$v_6=\varphi_3+x_3\qquad +0$
$v_2=Z_1+x_3\qquad -0.3$	$v_5=Z_2+x_3\qquad -1.0$	$v_7=\varphi_3\qquad +x_4\quad +0.1$
$v_3=Z_1\qquad +x_4\quad -0.9$		
$\frac{[v]}{3}=0=Z_1+\frac{1}{3}\times x_3+\frac{1}{3}x_4+-0.4$	$\frac{[v]}{3}=0=Z_2+\frac{1}{2}x_3-0.5$	$\frac{[v]}{2}=0=Z_3+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\quad +0.1$

消除各定向值於各誤差方程式，而列其法方程式，則得:

$$\frac{5}{3}x_3-\frac{5}{6}x_4=+0.5$$
$$-\frac{5}{6}x_3+\frac{7}{6}x_4=+0.4$$

約化之，卽得　$3/4\ x_4=+0.65$

測站(1)之測站平差結果，得　$x_3=0.7333$，　$x_4=+0.8667$

玆更求各觀測値之測站平差改正數 v 及其權單位之中誤差 m，演算如下表：

組	(2)	(3)	(4)	和	數目	平均値(Z)
1	0	+0.4333	+0.0333	+0.4000	3	+0.1333
2	0	−0.2667	——	−0.2667	2	−0.1333
3	0	+0.7333	+1.0667	+1.8000	2	+0.9000

各觀測値之改正數 v

組	(2)	(3)	(4)	和
1	−0.1333	+0.3000	−0.1667	+0.3000−0.3000
2	+0.1333	−0.1334	——	+0.1333−0.1334
3	——	−0.1667	+0.1667	+0.1667−0.1667

$$[vv]=0.2667$$

$$\therefore\quad m=\pm\sqrt{\frac{0.2667}{2}}=\pm0''.337$$

平差後之各角度之權，可依第五章所論之算法，用權方程式求出。因各方向觀測次數多寡不同，各角度之權不盡相等，是以各方向之權無法求出。但作圖形平差時，如欲嚴格用最小二乘法，必須知測站平差後各方向之權。當 1850 年之頃，英國測量局以每組方向値與平差方向値之差異求得其近似之權數，並以此近似値爲圖形平差之用。1870 年頃 Bayern 邦之測量，則以每方向對準之次數爲其權數。但此種方法均係近似方法。赫爾默特採用一更合理之方法，能使由各方向之權數計算各角之權數，與由平差中求得各角之權數相差甚微，但此中計算，至爲繁雜，對於實際應用，頗不便利，本書從略。

第七節 不完全方向組之簡略計算法

前節所述之不完全方向組平差法，係嚴格遵照最小二乘法之原理，其計算工作至爲繁雜。英國測量局採用一種簡略計算法，其結果與應用最小二乘法所得者相差極微，茲先略述其理論，再以上節之例解釋之。

今自公式(42)出發，捨去諸定向未知數 z', z'', ……等項，於是自(42)內之後$(s-1)$個方程式內，可求得 x_1, x_2 ……等之第一近似值：

$$x^0{}_1=\frac{[pl_2]}{[p_2]},\qquad x^0{}_2=\frac{[pl_3]}{[p_3]},\quad\cdots\cdots \tag{51}$$

將此近似值代入改正數方程式內，例如在第一組之改正數方程式爲：

$$q\text{個}\begin{cases}v'_1=z' & -l'_1\\ v'_2=z'+x_1 & -l'_2\\ v'_3=z' & +x_2-l'_3\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{52}$$

並假定在該組內$[v']=0$，易言之，即命該組之$[v'v']$爲最小值，於是求得 z' 之近似值：

$$z'=-\frac{1}{q}[x^0-l'] \tag{53}$$

同樣將 $x^0{}_1$, $x^0{}_2$ 代入第二組之改正數方程式內，亦可求得 z''，餘類推。

求得 z', z'', ……之近似值後，再將其代入(52)內，此時復以 x_1, x_2, ……等爲未知數，而另外組成一法方程式，再求 x_1, x_2, ……等之第二近似值。在普通情形下，此第二近似值已與最小二乘法之嚴格結果相差不多，英國測量局之規定，亦即以此爲方向之平差值，但吾人如欲得更精確之結果，仍可重複應用此方法，茲舉前節之例以明之：

例一：第一步：求 x_1, x_2 ……之第一近似值〔參考式(51)〕

（表中僅書秒數，不及分數之值）

組別	權	方向值 l P_1	P_2	P_3
第一組	12	60″.000	51″.646	52.792
第二組	19	60 .000	52 .553	------
第三組	12	60 .000	----	53.104
權中數	x^0	60 .000	52 .202	52.948

第二步：求 z', z'', …… 之近似值

組別	權	x^0-l			組之和	q	Z之近似值
		P_1	P_2	P_3			
第一組	12	0″.000	+0″.556	+0.156	+0.712	3	−0.237
第二組	19	0 .000	−0″.351	——	−0.351	2	+0.176
第三組	12	0 .000	——	−0.156	−0.156	2	+0.078
不等權中數		0	+0 .003	0			

第三步：求 x_1, x_2, …… 之第二次近似值

組別	權	$l-Z$		
		P_1	P_2	P_3
第一組	12	60.237	51.883	53.029
第二組	19	59.824	52.377	
第三組	12	59.922		53.026
不等權中數		59.967	52.186	53.028

若仍將 P_1 方向化爲零方向，即得

$$x_1=26^\circ\ 14'\ 52''.219$$
$$x_2=87^\circ\ 01'\ 53''.061$$

將 $x_1\,x_2$ 與 $z'\,z''$ …… 等值與前節按最小二乘法之結果比較，已相差極少，x 值最大不過差百分之二秒餘。故英國測量局即用此結果已足。爲證明連續應用此法當可求得更相近之值，今再續作一次：

第四步：求 z', z'', …… 之第二次近似值

組別	權	x^0-l			組之和	q	Z之近似值
		P_1	P_2	P_3			
第一組	12	0″.000	+0.573	+0.269	+0.842	3	−0.281
第二組	19	0 .000	−0.334	——	−0.334	2	+0.167
第三組	12	0 .000	——	−0.043	−0.043	2	+0.022
不等權中數		0	+0.017	+0.113			

第四步：求 x_1, x_2, …… 之第二次近似值

組別	權	$l-Z$		
		P_1	P_2	P_3
第一組	12	60.281	51.927	53.073
第二組	19	59.833	52.386	
第三組	12	59.978		53.082
不等權中數		59.998	52.208	53.078

化 P_1 爲零方向，得

$$x_1 = 26°14'\ 52''.210$$

$$x_2 = 87\ \ 04\ \ 53.080$$

此值與嚴格值相差已不過千分之五六秒矣。

習　　題

1. 在測站張家嘴口觀測鷄公山，沙兒崗，大寶鼎及天台寺四目標，其結果如下：

組數		1	2	3	4	5	6	7	8	總和	方向中數
刻度盤位置		0	22°30′	45°	67°30′	90°	112°30′	135°	157°30′		
鷄公山	0°0′	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
沙兒崗	36 03	57.9	58.8	59.0	58.3	55.8	55.8	55.8	57.0	458.40	57.30
大寶鼎	61 05	36.7	33.4	35.4	36.0	36.0	36.8	36.2	33.9	284.40	35.55
天台寺	103 44	28.5	27.6	27.6	26.4	24.6	26.2	24.0	24.0	208.70	26.09

試平差之，並求其中誤差。

2. 自測站沙兒崗觀測大寶鼎，天台寺，張家嘴口及鷄公山四方向，得下列結果：

組數		1	2	3	4	5	6	7	8	中數
大寶鼎	0°00′	00	00	00	00	00	00	00	00	00
天台寺	54 34	17.3	18.3	15.6	14.3	18.0	16.0	15.2	15.7	16.30
張家嘴口	125 20	41.7	40.5	42.6	39.8	43.6	42.3	40.4	39.0	41.24
鷄公山	180 06	07.5	07.4	10.8	05.6	09.8	10.6	08.2	05.6	8.19

試計算觀測之中誤差。

3. 在測站五雲山，觀測其四週三四等三角點，因雲霧之關係，同時不能完全見及所有各目標，故僅得不完全方向組，其結果如下：

測點＼組	°	′	1	2	3	4	5	6	7	8
天台寺	0	00	00	00	00	00	00	00	00	00
熊家岩	25	55	19	08	—	—	—	—	—	—
白羊坡	30	57	58	51	—	—	—	—	—	—
巴山	45	19	38	29	28	30	—	—	—	—
歇馬場	55	58	24	15	—	—	—	—	—	—
廟頂坡	63	11	21	14	—	—	—	—	—	—
楊洪廟	79	19	12	04	—	—	—	—	—	—
獅子岩	102	05	51	46	55	44	—	—	—	—
大寶鼎	174	50	68	62	76	66	66	58	58	59
流水岩	198	05	—	—	—	—	07	07	—	—
佛衣寺	235	37	—	—	—	—	—	—	13	14
何家崖口	244	50	—	—	—	—	18	12	—	—
眞武廟	252	24	32	32	—	—	—	—	—	—
大坡	278	16	55	55	58	62	—	—	—	—
楊家廟	301	04	—	—	—	—	45	44	—	—
迴龍寺	328	07	47	42	—	—	—	—	—	—

試應用簡略計算法平差之。

第八章　圖形平差

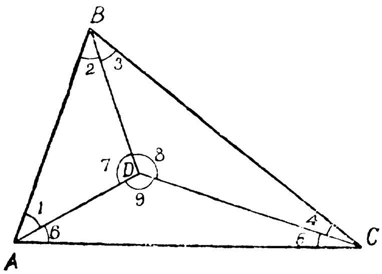
第一節　圖形條件方程式

當測站平差完畢之後，吾人即以測站平差之結果（角度或方向值）視作獨立觀測值，而進行圖形平差。一般而論，圖形平差多採條件平差之方式。今先不論基線天文觀測諸條件，而僅論一三角網內之圖形幾何條件。此種條件可分爲兩種：角度條件及邊長條件。

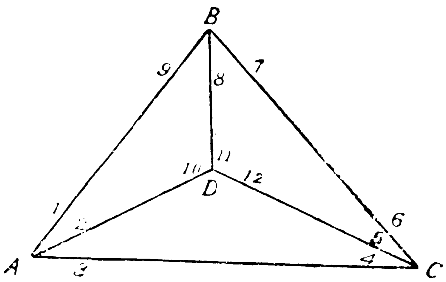
角度條件有兩種不同形式：一爲測站水平角閉合條件。在一測站上，如將周圍各方向間之角度均加觀測，則有一水平角閉合條件。此種條件於方向觀測時則不存在。如第一圖（甲）爲角觀測之情形，在測站 D 上觀測 (7)(8)(9) 三角度，經圖形平差後，此三角度之和必仍爲 360°。同圖（乙）爲方向觀測之情形，此時平差後 (10) (11) 及 (12) 各方向各自得一改正數。(11—10)，(12—11) 及 (10—12) 各角度之改正數和爲零，因

$$v_{11}-v_{10}+v_{12}-v_{11}+v_{10}-v_{12}=0$$

也。故方向觀測時，此種條件自動滿足，不必另列條件。



（甲）



（乙）

第八章　第一圖

第二種角度條件，爲三角形或任意一多邊形內角總和之幾何條件。例如上圖之三角形 ABD，其內角總和必須等於 $180°+\varepsilon$，ε 爲該三角形之球面角超。當角度觀測時（圖甲），其形式如下：

$$(1)+(2)+(7)-(180°+\varepsilon)=0 \tag{1}$$

當方向觀測時（圖乙），其形式如下：

$$(2)-(1)+(9)-(8)+(11)-(10)-(180°+\varepsilon)=0 \qquad (2)$$

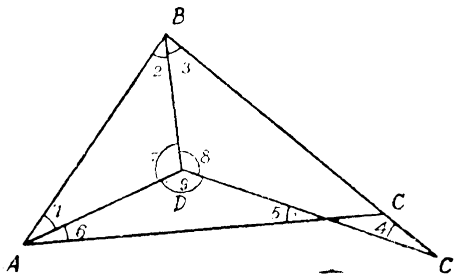
又如上圖之四邊形 $ADBC$，其角度條件爲：

（甲）角度觀測 $(3)+(4)+(5)+(6)+(8)+(9)-(360°+\varepsilon)=0$

（乙）方向觀測 $(3)-(2)+(6)-(4)+(8)-(7)+(10)-(11)-(360°+\varepsilon)=0$

普通一 n 邊之多角形，其內角總和應爲 $(n-2)180°+\varepsilon$。

角度條件滿足之後，每一圖形並不一定能完全閉合。例如第二圖之三邊中點形，其角度條件已完全滿足，但圖形仍不閉合。蓋吾人如自 AB 邊計算 BC 邊之長度，可循兩不同路線：由 AB 經三角形 ABC 得 BC 之邊長爲 BC；由 AB 經三角形 ABD 先求 BD 之長，再經三角形 $BC'D$ 得 BC 之邊長爲 BC'。是以圖形內各角度能滿足內角總和之條件以後，並不能得一幾何上閉合之圖形。如欲使此圖形閉合，必須令



第八章　第二圖

$$BC=BC'$$

或
$$\frac{BA}{BD}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BC}{BA}=1 \qquad (3)$$

是爲邊長條件。如以觀測值（此處爲角度）表示之，可將上述之邊長計算用正弦定律導出：

$$BC=AB\cdot\frac{\sin(1+6)}{\sin(4+5)} \qquad (4)$$

$$BC'=AB\cdot\frac{\sin(1)\sin(8)}{\sin(7)\sin(4)} \qquad (5)$$

將式(4)及(5)代入(3)內，卽可約去 AB，BC 等邊長值，而得

$$\frac{\sin(1)\sin(8)\sin(4+5)}{\sin(7)\sin(4)\sin(1+6)}=1 \qquad (6)$$

此爲各角度間之邊長條件。實際應用時，須將此式化爲對數式：

$$\log\sin(1)-\log\sin(7)+\log\sin(8)-\log\sin(4)+\log\sin(4+5)$$
$$-\log\sin(1+6)=0 \qquad (7)$$

如以角度(1),(7)……等之觀測值代入(7),則由於觀測誤差關係,其右方不爲零,而其對數之差值爲 w, 或

$$\log\sin(1)-\log\sin(7)+\log\sin(8)-\log\sin(4)+\log\sin(4+5)$$
$$-\log\sin(1+6)=w \tag{8}$$

命 v_1, v_7, v_8 …… 等爲角度(1),(7),(8)…… 等之改正數,加至各角後,對數差值 w 自將消去。v 之單位爲秒,改正後之角度之正弦對數爲:

$$\log\sin\{(1)+v_1\},\quad \log\sin\{(7)+v_7\}\cdots\cdots$$

依泰羅定律展開之,則得:

$$\log\sin\{(1)+v_1\}=\log\sin(1)+\mu\cot(1)\frac{v_1}{\rho}=\log\sin(1)+\delta_1 v_1$$

$$\log\sin\{(7)+v_7\}=\log\sin(7)+\mu\cot(7)\frac{v_1}{\rho}=\log\sin(1)+\delta_7 v_7$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{9}$$

$$\log\sin\{(1+6)+v_1+v_6\}=\log\sin(1+6)+\mu\cot(1+6)\frac{v_1+v_6}{\rho}$$
$$=\log\sin(1+6)+\delta_{(1+6)}(v_1+v_6)$$

μ 爲將自然對數化爲普通對數之常數, $\rho=206265''$, 如以對數之第六位爲單位,

$$\frac{\mu}{\rho}=2.1055$$

或　　$$\delta_1=2.1055\cot(1),\quad \delta_7=2.1055\cot(7)\cdots\cdots \tag{10}$$

實際計算時,因 δ_1 僅需至小數點後兩位,吾人可取七位對數表中每差 $10''$ 正弦對數之差異值 d (對數小數點後第七位爲單位)化爲每秒及六位對數之單位, 故

$$\delta_1=\frac{1}{100}d_1,\qquad \delta_7=\frac{1}{100}d_7\cdots\cdots \tag{11}$$

在計算公式(8)內之差值 w 時,卽將 d_1, d_7 …… 諸值自對數表中取出,如此較用公式(10)爲簡單,而結果之精度並未減低。

將式(9)代入(8)內,可得一次之邊長條件方程式:

$$\delta_1 v_1-\delta_7 v_7+\delta_8 v_8-\delta_4 v_4+\delta_{(4+5)}(v_4+v_5)-\delta_{(1+6)}(v_1+v_6)+w=0$$

依 v 併項, 遂得

$$(\delta_1-\delta_{(1+6)})v_1+(\delta_{(4+5)}-\delta_4)v_4+\delta_{(4+5)}v_5-\delta_{(1+6)}v_6-\delta_7 v_7+\delta_8 v_8+w=0 \tag{12}$$

此式爲平差計算時所用之邊長條件方程式。

倘爲方向觀測，吾人可比較第一圖之(甲)及(乙)而得相當於式(6)之邊長條件如下：

$$\frac{\sin(2-1)\sin(12-11)\sin(6-4)}{\sin(11-10)\sin(6-5)\sin(3-1)}=1 \tag{13}$$

化爲對數後，得

$$\delta_{(2-1)}(v_2-v_1)+\delta_{(12-11)}(v_{12}-v_{11})+\delta_{(6-4)}(v_6-v_4)-\delta_{(11-10)}(v_{11}-v_{10})$$
$$-\delta_{(6-5)}(v_6-v_5)-\delta_{(3-1)}(v_3-v_1)+w=0$$

或依 v 併項：

$$(\delta_{(3-1)}-\delta_{(2-1)})v_1+\delta_{(2-1)}v_2-\delta_{(3-1)}v_3-\delta_{(6-4)}v_4+\delta_{(6-5)}v_5+(\delta_{(6-4)}-\delta_{(6-5)})v_6$$
$$+\delta_{(11-10)}v_{10}-(\delta_{(12-11)}+\delta_{(11-10)})v_{11}+\delta_{(12-11)}v_{12}+w=0 \tag{14}$$

此時 v_1, v_2 …… 等爲方向 (1)，(2) …… 等之改正數。

第二節　三角網內圖形條件之數目

圖形條件共分角度條件與邊長條件兩種，而角度條件又分爲水準角閉合條件及多邊形（包括三角形）內角總和條件。在一圖形較爲複雜之網內，吾人常須檢查究竟此網應有若干圖形條件，其中角度及邊長條件各爲若干。爲解答此問題，吾人須先將三角網圖形繪出，將所有觀測之方向以實線連接之。如某方向僅自一端觀測，則該半段用實線，而另外半段用虛線(如第三圖)。今命

$$\left.\begin{array}{l} p\ \text{爲三角點之總數} \\ p'\ \text{純用前交會或後交會所定三角點之數目} \\ l\ \text{所有三角點間之連接線總數} \\ l'\ \text{半實半虛之連接線數目} \end{array}\right\} \tag{15}$$

而就角度觀測方向觀測兩種，討論其應有之圖形條件數目。

(I) 角度觀測　設觀測之角度共爲 w 個。

(1) 圖形條件之數目 r

由第六章條件平差之理論中，吾人已曾論及，任意一平差問題，其條件方程之數目係等於多餘觀測之數目。故欲求三角網內圖形條件之總數，首須知悉如欲完全固定此圖形中之各點，至少應有若干角度觀測，自實際觀測角度之數目減去之，即得多餘觀測之數目，亦即圖形條件之總數也。

今設自一固定線出發，其兩端共有兩點。如欲加測一第三點，至少須測兩角，是以

$$
共\ p\ 點\begin{cases}基線之兩點要求 & 0\ 角\\ 第三點 \quad ,,\ ,, & 2\ 角\\ 第四點 \quad ,,\ ,, & 2\ 角\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 第\ p\ 點 \quad ,,\ ,, & 2\ 角\end{cases}
$$

$$和\ 0+(p-2)2=(2p-4)\ 角$$

即欲測定 p 個三角點，至少須觀測 $(2p-4)$ 個角度。今實測 w 個角，故多餘觀測之數目，亦即圖形條件之總數目為

$$r=w-2p+4 \tag{16}$$

（乙）內角總和條件之數目

凡一多邊形或三角形內，必須觀測其所有內角，始能成立一內角總和條件。易言之，必須所有連接多邊形各點間之線均為實線時，始有內角總和條件。同理，如一三角點僅自其他三角點觀測之，而本身未置儀器作角度觀測（謂之前交會點），或在此三角點上曾向他點觀測，但自他點均未觀測此點（謂之後交會點），則自此點出發之線均為半虛半實之連接線，此種點必不能與任何其他點作成一實線多邊形。是以欲求多邊形內角總和條件之數目，必須將帶有虛線之連接線，及純由前交會或後交會固定之點除去不論。若專論實點及實線，則在 $(p-p')$ 個實點間如用 $(p-p')-1$ 條實線連接之，適無角度條件。凡多有一實線，即多有一內角總和條件。根據(15)實線之總數為 $(l-l')$，故內角總和條件之數目為：

$$內角總和條件數目=(l-l')-(p-p')+1 \tag{17}$$

（丙）邊長條件之數目：

今先設想自一三角形出發，連接此三角形之三點共有三邊，如增加一點，可用任意兩線連接之。如第三圖之 ABC 為一三角形，共有三線連接之，加入 D 點則多加兩線無邊長條件；倘加三線為第五圖，即生一邊長條件，蓋多一線即使邊長計算，可循兩路進行矣。是以

最初三點需用	3 連接線
第四點需	2 連接線
第五點需	2 連接線
…………………	……………
第 p 點需	2 連接線
共 p 點需	$(2p-3)$ 連接線

此處所指之線，實線或半實半虛之線均計在內，故如一三角網內連接線之總數為 l，則

$$邊長條件數目 = l-2p+3 \qquad (18)$$

(4)水平角閉合條件之數目：

每一測站如共有 s 個連接線，僅測 $s-1$ 個角度卽足，如觀測 s 個角，卽發生水平角閉合條件。欲知一三角網內水平角閉合條件之數目，可將每測站實線數目相加，如連接線之一端為實線，一端為虛線，實線之一端亦須計入，故 $\Sigma s=2l-l'$。實際測站之總數為 $p-p'$ 時，故僅測 $\Sigma s-(p-p')=2l-l'-p+p'$ 個角度卽足，倘觀測之角度總數為 w，則

$$水平角閉合條件數目 = w-2l+l'+p-p' \qquad (19)$$

將(17)，(18)及(19)三公式相加得：

$$\begin{aligned}圖形條件總數 &= +l-l'-p+p'+1\\ &\quad +l \qquad -2p \quad +3\\ &\quad w-2l+l'+p-p'\\ &= w-2p+4\end{aligned}$$

與式(16)完全符合。

倘三角網內無不放置儀器之點，亦無虛線方向，則 $p'=0$，$l'=0$ 公式(17)及(19)可化簡。玆將此種情形下之各種條件數目列成下式：

$$圖形條件總數目 = w-2p+4 \qquad (16)^*$$

$$內角總和條件數目 = l-\ p+1 \qquad (17)^*$$

$$邊長條件數目 = l-2p+3 \qquad (18)^*$$

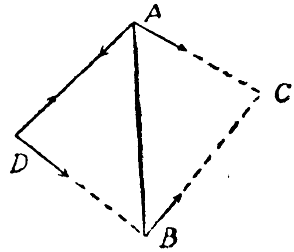
$$水平角閉合條件數目 = w-2l+p \qquad (19)^*$$

(II)方向觀測

(1)圖形條件之總數目：

設自 A B 兩點出發，相對各有一方向，加 C 點時(圖三)如 C 不放儀

器作方向觀測，則必需由 AC, BC 兩方向前交會，故只需兩方向已足。倘加 D 點，而於 D 設儀器，必需三方向如圖之 AD, DA 及 DB。是以在一三角網內，如有 p 個點，其中 p' 個爲不放儀器觀測之點，其中原點二個(AB)共需 2 方向，其他 $(p-p'-2)$ 個點需 $3(p-p'-2)$ 個方向，是以最少需要觀測之總數目爲 $3(p-p'-2)+2p'+2=3p-p'-4$。設共觀測 R 個方向，則多餘觀測之數目，亦卽圖形條件之總數爲：



第八章　第三圖

$$r=R-3p+p'+4=2l-l'-3p+p'+4 \qquad (20)$$

因觀測方向之總數目，卽爲所有線數乘 2 減虛線之數目也。

(2)內角總和條件之數目：

方向觀測與角度觀測無別，故按照式(17)在方向觀測時

$$\text{內角總和條件之數目亦}=(l-l')-(p-p')+1 \qquad (21)$$

(3)邊長條件之數目：

方向觀測與角度觀測亦無分別，按式(18)

$$\text{邊長條件之數目}=l-2p+3 \qquad (22)$$

因方向觀測時無所謂水平角閉合條件，是以按(21)及(22)得方向觀測時圖形條件之總數爲：

$$\begin{aligned} r &= l-l'-p+p'+1 \\ &\quad +l \quad\ -2p \qquad +3 \\ &=2l-l'-3p+p'+4 \end{aligned}$$

與公式(20)固相同也。

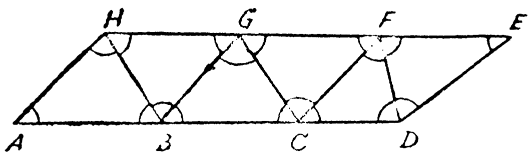
倘 $l'=0$, $p'=0$，則可應用下列公式.

$$\text{圖形條件總數}\ r=2l-3p+4 \qquad (20)^*$$

$$\text{內角總和條件數目}=l-p+1 \qquad (21)^*$$

$$\text{邊長條件數目}=l-2p+3 \qquad (22)^*$$

比較方向觀測與角度觀測各種條件之數目，可知同一三角網用方向觀測與用角度觀測時內角條件及邊長條件數目完全相等，但方向觀測時，可少去水平角閉合條件。



第八章　第四圖

例：(a) 試求下列三角網內各條件之數目：

$w=18$

$p=8 \qquad l=13$

應用公式(16)*至(18)*得

圖形條件總數目 $r=18-16+4=6$

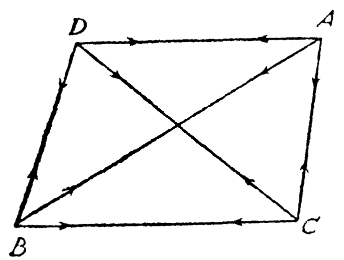
內角條件數目 $=13-8+1=6$

邊長條件數目 $=13-16+3=0$

水平角閉合條件數目 $=18-26+8=0$

蓋此圖形名爲三角形單鎖，除每個三角形內有一內角總和方程式外，並無邊長及水平角閉合條件。倘爲方向觀測亦同。

(b)求下列四邊形內各條件之數目：



第八章　第五圖

$l=6 \qquad p=4$

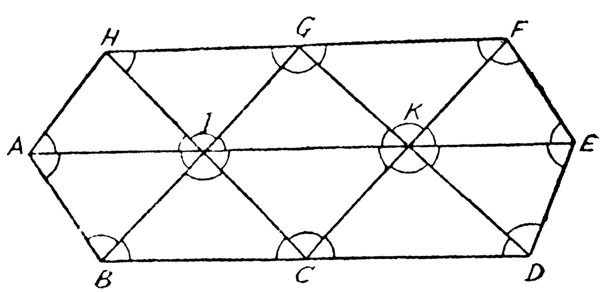
圖形條件總數 $=12-12+4=4$

內角條件數目 $=6-4+1=3$

邊長條件數目 $=6-8+3=1$

此圖形爲一四邊形，共有三個內角條件，一個邊長條件。內角條件與邊長條件各有數種列法，將於第三節論及之。

(c) 求三角雙鎖內各條件之數目：



第八章　第六圖

$w=30$

$p=10 \qquad l=19$

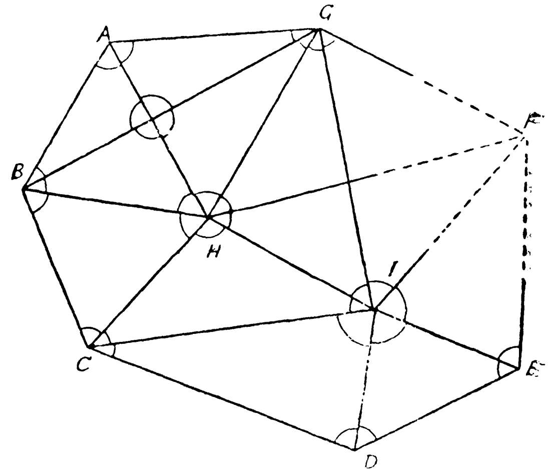
圖形條件總數$=30-20+\ 4=14$

內角條件數目$=19-10+\ 1=10$

邊長條件數目$=19-20+\ 3=2$

水平角閉合條件數目$=30-38+10=2$

此圖形爲三角形雙鎖，蓋適爲二條單鎖所拼合者。除每個三角形有一內角條件共計 10 個外，每一多邊中點形 $ABCKGH$ 及 $CDEFGI$，各有一邊長條件，多邊中點形之中點 I 及 K 各有一水平角閉合條件。



第八章　　第七圖

(d) 求下列圖形之條件數目：

$w=28$

$p=9 \qquad p'=1$

$l=19 \qquad l'=4$

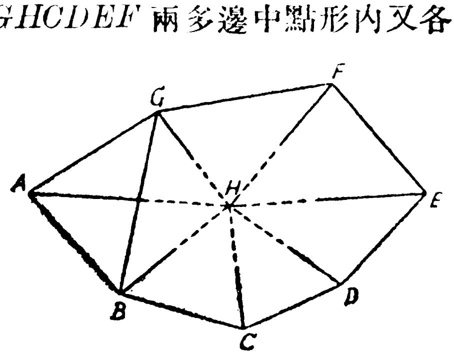
$r=28-18+4=14$

內角總和條件數目$=(19-4)-(9-1)+1=8$

邊長條件數目$=19-18+3=4$

水平角閉合條件數目$=28-38+4+9-1=2$

今試檢查內角總和條件之所在，可分述如下：BHC，HCI，ICD，IDE，IGH 各三角形內各一個，四邊形 $ABHG$ 內 3 個，共爲 8 個與上求之數目相等。邊長方程式在 $ABHG$，$GHIF$ 兩四邊形內各一，在$ABCIG$，$GHCDEF$ 兩多邊中點形內又各一，共爲 4 個，亦符合。至於水平角閉合條件，則極明顯在 H，I 兩測站。



第八章　　第八圖

(e) 下列圖形內係用方向觀測，試求其條件之數目。

$p=8 \quad p'=1$

$l=16 \quad l'=7$

$R=2l-l'=25$

$r=25-24+1+4=6$

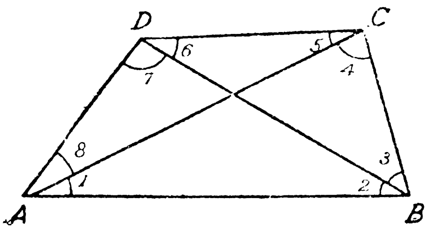
內角總和條件數目$=(16-7)-(8-1)+1=3$

邊長條件數目 $=16-16+3=3$

內角總和之條件為 ABG, DEF 兩實線三角形，及 $BCDFG$ 實線多邊形。邊長條件為 $ABHG$, $HDEF$ 兩四邊形及 $BCDFG$ 一多邊形。

第三節 四邊形之圖形條件

由前節之例中，吾人已知三角單鎖及雙鎖之圖形條件均極易認出，但四邊形之圖形條件，則尚有數種排列法，故特再提出討論之。



第八章 第九圖

無論角度觀測或方向觀測，每個四邊形均有四個圖形條件：三個角度條件及一個邊長條件。今先設為角度觀測(第九圖)並命各三角形之球面角超如下：

$\triangle ABC \quad \varepsilon_1$

$\triangle BCD \quad \varepsilon_2$

$\triangle CDA \quad \varepsilon_3$

$\triangle DAB \quad \varepsilon_4$

注意 $\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4 \qquad (23)$

內角條件共有下列數種寫法：

$$
\left.
\begin{aligned}
(1)+(2)+(3)+(4)-(180^\circ+\varepsilon_1)&=0 \quad (a)\\
(3)+(4)+(5)+(6)-(180^\circ+\varepsilon_2)&=0 \quad (b)\\
(5)+(6)+(7)+(8)-(180^\circ+\varepsilon_3)&=0 \quad (c)\\
(7)+(8)+(1)+(2)-(180^\circ+\varepsilon_4)&=0 \quad (d)\\
(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)-(360^\circ)+\varepsilon_1+\varepsilon_3)&=0 \quad (e)\\
(1)+(2)-(5)-(6)-\ (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\ &=0 \quad (f)\\
(3)+(4)-(7)-(8)-\ (\varepsilon_2-\varepsilon_3)\ &=0 \quad (g)
\end{aligned}
\right\} \qquad (24)
$$

公式 (24) 內之 $(a)(b)(c)(d)$ 四式，係由第九圖內之四個三角形所組成，(e) 由四邊形 $ABCD$ 所組成，$(f)(g)$ 則由兩個折過之四邊形 $ABDCA$ 及 $BCADB$ 所組成。以上七式均可各為四邊形之一內角條件，吾人可任意選擇，但須注意此七個條件之間並非相互獨立，每次僅可任選三個獨立者(因四邊形之內角條件僅為三個也)。最明顯者為下列各關係：

$$
\left.
\begin{aligned}
(a)+(c)&=(b)+(d)=(e)\\
(a)-(b)&=(d)-(e)=(f)\\
(b)-(c)&=(a)-(d)=(g)
\end{aligned}
\right\} \qquad (25)
$$

上式(25)之關係，除由(24)各式加減而得外，並須注意(23)之關係。

此外則在$(a)(b)(c)(d)$四條件中亦僅有三個獨立者，並由其中任意三個條件均可用加減求得第四個也。

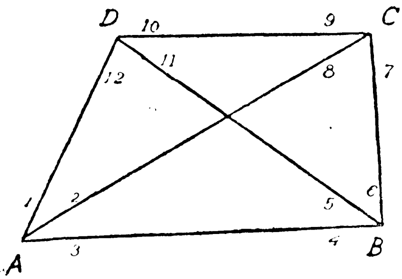
是以選用三個角度條件時，必須注意(25)之關係，勿令所選三個條件爲互相不獨立者。選擇之法可分下列三類：

1．$(a)(b)(c)(d)$中之任意三個

2．$(e)(f)(g)$

3．$(e)(f)(g)$之任意一個與$(a)(b)(c)(d)$中之二個，但須注意(25)之關係。

在此三法中，第二法特别值得注意，如先捨去邊長條件不顧時，可由(24)之$(e)(f)(g)$三條件組成法方程式。



第八章　第十圖

$$
\begin{aligned}
8k_1 \qquad\qquad & +w_{(e)}=0 \\
4k_2 \qquad & +w_{(f)}=0 \qquad\qquad (26) \\
4k_3 & +w_{(g)}=0
\end{aligned}
$$

(26)解算極易，因所有$[ab][ac][bc]$諸係數均爲零也。

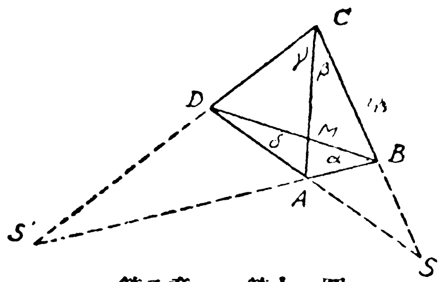
如爲方向觀測（第十圖），則相當於(24)者爲下列諸內角總和條件：

$$
\left.
\begin{aligned}
&(3)-(2)+(6)-(4)+(8)-(7)-(180^\circ+\varepsilon_1)=0 && (a)\\
&(6)-(5)+(9)-(7)+(11)-(10)-(180^\circ+\varepsilon_2)=0 && (b)\\
&(9)-(8)+(12)-(10)+(2)-(1)-(180^\circ+\varepsilon_3)=0 && (c)\\
&(12)-(11)+(3)-(1)+(5)-(4)-(180^\circ+\varepsilon_4)=0 && (d)\\
&(3)-(1)+(6)-(4)+(9)-(7)+(12)-(10)-(360^\circ+\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0 && (e)\\
&(3)-(2)+(5)-(4)-(9)+(8)-(11)+(10)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0 && (f)\\
&(6)-(5)+(8)-(7)-(12)+(11)-(2)+(1)-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)=0 && (g)
\end{aligned}
\right\}(27)
$$

如用$(e)(f)(g)$三條件組法方程式，亦可同樣得極簡單之法方程式：

$$
\begin{aligned}
8k_1 \qquad\qquad & +w_{(e)}=0 \\
8k_2 \qquad & +w_{(f)}=0 \qquad\qquad (28) \\
8k_3 & +w_{(g)}=0
\end{aligned}
$$

其次再論邊長條件：亦有相當於式(24)及(27)之七種列法。惟此處不如角度條件之明顯，今用圖說明之：



第八章　第十一圖

第十一圖中 $ABCD$ 為四邊形，其對角線之交點為 M，兩相對邊之交點為 S 及 S'，M, S, S' 均非測站，且亦非三角點。但吾人每次均可取 A, B, C, D 或 M, S, S' 之任一點為"極"而列出邊長條件：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{極 } A:\ \frac{AD}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}=1\\
&\text{極 } B:\ \frac{BA}{BD}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BC}{BA}=1\\
&\text{極 } C:\ \frac{CB}{CA}\cdot\frac{CA}{CD}\cdot\frac{CD}{CB}=1\\
&\text{極 } D:\ \frac{DC}{DB}\cdot\frac{DB}{DA}\cdot\frac{DA}{DC}=1\\
&\text{極 } M:\ \frac{MA}{MB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{MD}{MA}=1\\
&\text{極 } S:\ \frac{SA}{SC}\cdot\frac{SC}{SD}\cdot\frac{SD}{SB}\cdot\frac{SB}{SA}=1\\
&\text{極 } S':\ \frac{S'A}{S'C}\cdot\frac{S'C}{S'B}\cdot\frac{S'B}{S'D}\cdot\frac{S'D}{S'A}=1
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

式(29)之邊長比例，亦可用角度表示之如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{極 } A\quad \frac{\sin(5)\sin(2+3)\sin(7)}{\sin(6+7)\sin(4)\sin(2)}=1 \quad (A)\\
&\text{極 } B\quad \frac{\sin(7)\sin(4+5)\sin(1)}{\sin(8+1)\sin(6)\sin(4)}=1 \quad (B)\\
&\text{極 } C\quad \frac{\sin(1)\sin(3)\sin(6+7)}{\sin(8)\sin(6)\sin(2+3)}=1 \quad (C)\\
&\text{極 } D\quad \frac{\sin(3)\sin(8+1)\sin(5)}{\sin(4+5)\sin(2)\sin(8)}=1 \quad (D)\\
&\text{極 } M\quad \frac{\sin(1)\sin(8)\sin(5)\sin(7)}{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)}=1 \quad (M)\\
&\text{極 } S\quad \frac{\sin(4)\sin(6+7)\sin(3)\sin(8+1)}{\sin(8)\sin(4+5)\sin(7)\sin(2+3)}=1 \quad (S)\\
&\text{極 } S'\quad \frac{\sin(5)\sin(2+3)\sin(6)\sin(8+1)}{\sin(1)\sin(4+5)\sin(2)\sin(6+7)}=1 \quad (S')
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

由式(30)可看出如以 $ABCD$ 四點作極，則邊長條件各有六項，以 M, S, S' 三點作極，邊長條件各有八項。

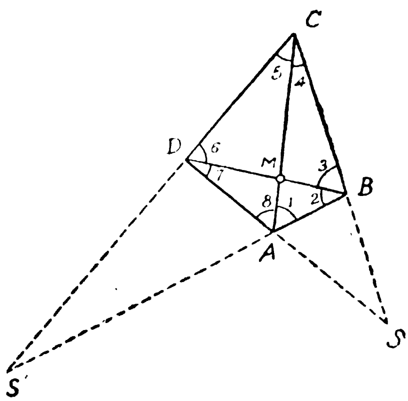
式(30)之七式，其書法雖各有不同，但如應用角度條件，可由任意一式化至其他一式。最明顯之關係為：

$$
\begin{aligned}
(M) &= (A)(C) = (B)(D) \\
(S) &= \frac{(D)}{(A)} = \frac{(C)}{(B)} \\
(S') &= \frac{(A)}{(B)} = \frac{(D)}{(C)}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

理論上，吾人可取(30)中之任何一式為平差之用，其結果當屬一致，但事實上則必須選擇對於計算結果最精準，而計算手續又較簡單者。若專以後一條件論，六項之方程式較八項者為簡單，計算法方程式係數時，亦可稍省工作；但若論精準，則反是，蓋欲使計算精度增高，必須邊長條件中之係數較大，易言之，即必須使之儘量含有小角度。因由第一節中已知邊長條件之係數與角度之餘切成正比，而角度愈小，則其餘切愈大也。

關於邊長條件之選擇，丹麥人 Zacharie 及德人 Jordan 均有詳盡之討論。尤其後者證明邊長條件之係數大小，與所選極點相對三角形之面積成比例。今略將其意義解釋如下：

今將第十二圖中之四邊形 $ABCD$ 以其對角線分為四部，令四部之面積為 α, β, γ, δ 如圖所示。以 A, B, C, D, M, S 及 S' 各點為極時，邊長條件係數與下列面積成比例：



第八章　第十二圖

極 A	面積 $\beta+\gamma$
B	$\gamma+\delta$
C	$\alpha+\delta$
D	$\alpha+\beta$
M	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$
S	$\gamma-\alpha$
S'	$\beta-\delta$

由上列之面積比例，可以看出以 M 為極之邊長方程式最為精準。一般而論，以 S 或 S' 為極之邊長方程式最不利，蓋如 AD 與 BC 兩邊平行 $\gamma-\alpha=0$,

如 AB 與 CD 兩邊平行，則 $\beta-\delta=0$，而普通之四邊形，其對邊均相近於平行也。故平常應用時吾人多選 A, B, C, D, M 中之一點爲極，而列邊長方程式。最精準者爲(M)，但含係數爲八項，而在(A) (B) (C) (D)四式則共含六項。

式(30)之列出，係假定角度觀測，如爲方向觀測，應以方向符號代角度符號，其餘無分別，此時(A) (B) (C) (D)各式均含九項，(M) 則含十二項。

第四節　四邊形之平差——角度觀測

今有四邊形一個，如第三節第九圖所示，其角度觀測結果如下，試平差之。

角度觀測值：

(1)	42°	38′	50″.51	(2)	41°	33′	08″.83
(3)	37	48	37.59	(4)	57	59	21.96
(5)	29	37	43.75	(6)	54	34	15.64
(7)	70	46	25.44	(8)	25	01	35.80

三角形	球面角超	三角形閉合差	條件不符值
$\triangle ABC$	$\varepsilon_a=0.26$	$w_a=-1''.37$	$w_1=w_a+w_c=-0''.85$
$\triangle BCD$	$\varepsilon_b=0.16$	$w_b=-1.22$	$w_2=w_a-w_b=-0.15$
$\triangle CDA$	$\varepsilon_c=0.11$	$w_c=+0.52$	$w_3=w_b-w_c=-1.75$
$\triangle DAB$	$\varepsilon_d=0.21$	$w_d=+0.37$	

邊長條件之計算：

Log sin (1)	9.8308992	$\delta_1=2.28$	Log sin (2)	9.8217135	$\delta_2=2.37$
,, (3)	9.7874966	$\delta_3=2.71$	,, (4)	9.9283704	$\delta_4=1.30$
,, (5)	9.6940602	$\delta_5=3.70$	,, (6)	9.9110695	$\delta_6=1.50$
,, (7)	9.9750757	$\delta_7=0.73$	,, (8)	9.6263806	$\delta_8=4.32$
	9.2875317			9.2875340	

$\omega_4=-2.3$

條件方程式：

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
a	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	−0.85=0
b	+1	+1			−1	−1			−0.15=0
c			+1	+1			−1	−1	−1.75=0
d	+2.28	−2.37	+2.71	−1.30	+3.70	−1.50	+0.73	−4.32	−2.30=0

法方程式：

$$
\begin{aligned}
&\underline{8k_1} \quad -0.07k_4 \quad -0.85=0\\
&\quad \underline{+4k_2} \quad -2.29k_4 \quad -0.15=0\\
&\quad\quad \underline{+4k_3}+5.00k_4 \quad -1.75=0\\
&\quad\quad\quad \underline{+54.98k_4} -2.30=0
\end{aligned}
$$

此法方程式之約化至為簡單，蓋僅第四式須加約化也：

$$
\begin{array}{rr}
+54.98k_4 & -2.30 \quad =0\\
-\ \ 0.00 & -0.01\\
-\ \ 1.31 & -0.09\\
-\ \ 6.25 & +2.19\\
\hline
47.42k_4 & -0.21=0
\end{array}
$$

由此得　$k_4=+0.0044$

代入法方程式內求出：　$k_1=+0.106$　$k_2=+0.040$　$k_3=+0.432$

改正數之計算：

角度	ak_1	bk_2	ck_3	dk_4	v	vv	改正後之角度
(1)	+0.106	+0.040		+0.010	+0.16	0.0256	42° 38′ 56″.67
(2)	+0.106	+0.040		−0.010	+0.14	196	41 33 08.97
(3)	+0.106		+0.432	+0.012	+0.55	3025	37 48′ 38.14
(4)	+0.106		+0.432	−0.006	+0.53	2809	57 59 22.49
(5)	+0.106	−0.040		+0.016	+0.08	64	29 37 43.83
(6)	+0.106	−0.040		−0.007	+0.06	36	54 34 15.70
(7)	+0.106		−0.432	+0.003	−0.32	1024	70 46 25.12
(8)	+0.106		−0.432	−0.019	−0.35	1225	25 01 35.45

$$[vv]=0.8635$$

$$-[wk]=0.8634$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{0.8635}{4}}=\pm 0''.47$$

檢核:

$\triangle ABC$	(1)	42°	38′	50″.67		$\triangle BCD$	(3)	37°	48′	38″.14
	(2)	41	33	08 .97			(4)	57	59	22 .49
	(3)	37	48	38 .14			(5)	29	37	43 .83
	(4)	57	59	22 .49			(6)	54	34	15 .70
	和=	180	00	0 .27			和=	180	00	00 .16
	應			0 .26			應			00 .16
$\triangle CDA$	(5)	29	37	43 .83		$\triangle DAB$	(7)	70	46	25 .12
	(6)	54	34	15 .70			(8)	25	01	35 .45
	(7)	70	46	25 .12			(1)	42	38	50 .67
	(8)	25	01	35 .45			(2)	41	33	08 .97
	和=	180	00	00 .10			和=	180	00	00 .21
	應			00 .11			應			0 .21

log sin (8)	9.6263790		log sin (1)	9.8308995
log sin (2)	9.8217139		log sin (3)	9.7874981
log sin (4)	9.9283711		log sin (5)	9.6940505
log sin (6)	9.9110696		log sin (7)	9.9750755
	9.2875336			9.2875336

單個四邊形之平差,亦可採用分組平差法(第六章第六節),計算較爲簡單。玆將其用法說明於下:

先取角度方程式三個如下:

$$\left.\begin{array}{l} v'_1+v'_2+v'_3+v'_4+v'_5+v'_6+v'_7+v'_8+w'_1=0 \\ v'_1+v'_2 \qquad\qquad -v_5-v_6 \qquad\qquad +w'_2=0 \\ \qquad +v'_3+v'_4 \qquad\qquad -v'_7-v'_8+w'_3=0 \end{array}\right\} \qquad (32)$$

是爲第一組條件方程,得法方程式:

$$\left.\begin{array}{l} 8k'_1 \qquad\qquad\qquad +w'_1=0 \\ \qquad +4k'_2 \qquad\qquad +w'_2=0 \\ \qquad\qquad +4k'_3 \quad +w'_3=0 \end{array}\right\} \qquad (33)$$

由此可得: $k'_1=-\frac{w'_1}{8}$, $k'_2=-\frac{w'_2}{4}$, $k'_3=-\frac{w'_3}{4}$

及初次改正數:

$$\left.\begin{aligned}v'_1=v'_2=-\frac{w'_1}{8}-\frac{w'_2}{4},\quad v'_5=v'_6=-\frac{w'_1}{8}+\frac{w'_2}{4}\\ v'_3=v'_4=-\frac{w'_1}{8}-\frac{w'_3}{4},\quad v'_7=v'_8=-\frac{w'_1}{8}+\frac{w'_3}{4}\end{aligned}\right. \qquad (34)$$

由此公式可見第一次改正數之計算至為簡單，根本無須列法方程式，而可直接求得之。然後再以改正後之角度列出第二次之條件方程式：

$$\left.\begin{array}{l}v''_1+v''_2+v''_3+v''_4+v''_5+v''_6+v''_7+v''_8=0\\ v''_1+v''_2\qquad\qquad -v''_5-v''_6=0\\ \qquad +v''_3+v''_4\qquad\qquad -v''_7-v''_8=0\\ \delta_1v''_1-\delta_2v''_2+\delta_3v''_3-\delta_4v''_4+\delta_5v''_5-\delta_6v''_6+\delta_7v''_7-\delta_8v''_8+w''_4=0\end{array}\right\}(35)$$

此時前三個角度方程式之不符值項均為零，第四個條件之不符值項 w_4 係以初次改正後之角度值計算而得。如此得法方程式：

$$\left.\begin{array}{lllll}8k''_1 & —— & —— & +Ak''_4 & ——=0\\ —— & 4k''_2 & —— & +Bk''_4 & ——=0\\ —— & —— & 4k''_3 & +Ck''_4 & ——=0\\ Ak''_1 & +Bk''_2 & +Ck''_3 & +Dk''_4 & +w''_4=0\end{array}\right\}$$

由條件方程式中可以看出：

$$\left.\begin{aligned}A&=(\delta_1+\delta_3+\delta_5+\delta_7)-(\delta_2+\delta_4+\delta_6+\delta_8)\\ B&=(\delta_1-\delta_2)-(\delta_5-\delta_6)\\ C&=(\delta_3-\delta_4)-(\delta_7-\delta_8)\\ D&=[\delta^2]\end{aligned}\right\}\qquad (36)$$

將 $k_1\,k_2\,k_3$ 消去即得：

$$\left\{D-\frac{1}{8}(A^2+2B^2+2C^2)\right\}k''_4+w''_4=0 \qquad (37)$$

或

$$\left.\begin{aligned}k''_4&=-\frac{w''_4}{D-\frac{1}{8}(A^2+2B^2+2C^2)}\\ k''_1&=-\frac{A}{8}k''_4,\quad k''_2=-\frac{B}{4}k''_4,\quad k''_3=-\frac{C}{4}k''_4\end{aligned}\right. \qquad (38)$$

此法簡捷之處，在無須約化法方程式，亦不必將其列出。先照式(34)將角度方程不符值配敷於各角，然後計算邊長方程式，順帶查出各角之 δ 值，而依(36)計算 $A\ B\ C\ D$ 各值，更依(38)求 k 值，即可求二次改正數矣。至於$[vv]$及中誤差之計算，仍須顧及第一次之改正數，蓋

$$v_i = v'_i + v''_i$$

也。茲仍以前例用此法計算之如下:

角 度	觀 測 值			$-\frac{w_1}{8}$	$\pm\frac{w_2}{4}$	$\pm\frac{w_3}{4}$	初 步 改 正 值	
(1)	42°	38′	50″.51	+0″.106	+0.038		--	50.65
(2)	41	33	08.83	+0 .106	+0.038		--	08.97
(3)	37	48	37.59	+0 .106		+0.438	--	38.13
(4)	57	59	21.96	+0 .106		+0.438	--	22.50
(5)	29	37	43.75	+0 .106	−0.038		--	43.82
(6)	54	34	15.64	+0 .106	−0.038		--	15.71
(7)	70	46	25.44	+0 .106		−0.438	--	25.11
(8)	25	01	35.80	+0 .106		−0.438	--	35.47

$$w_a = -1''.37 \qquad w_1 = w_a + w_c = -0''.85$$
$$w_b = -1\ .22 \qquad w_2 = w_a - w_b = -0\ .15$$
$$w_c = +0\ .52 \qquad w_3 = w_b - w_c = -1\ .75$$
$$w_d = +0\ .37$$

正 弦 對 數 +	−	δ		$\delta_1-\delta_2$ $\delta_5-\delta_6$	$\delta_3-\delta_4$ $\delta_7-\delta_8$	δ^2
9.8308995		2.29				5.24
	9.8217139		2.37	−0.08		5.62
9.7874981		2.72				7.40
	9.9283711		1.32		+1.40	1.74
9.6940604		3.70				13.69
	9.9110696		1.50	+2.20		2.25
9.9750755		0.74				0.55
	9.6263791		4.32		−3.58	18.66
9.2875335	9.2875337	9.45	9.51	−2.28	+4.98	55.15
$w=-0.2$		$A=-0.06$		$=B$	$=C$	$=D$

$$A^2 = 0.00 \qquad D = 55.15 \qquad k''_4 = \frac{+0.2}{47.65} = +0.0042$$

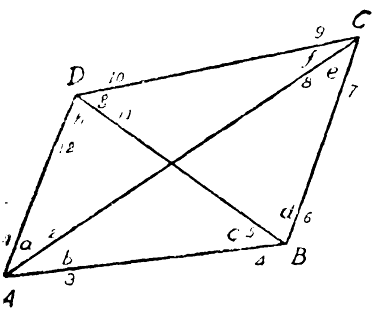
$$2B^2 = 10.40 \qquad \frac{1}{8}\Sigma = \underline{7.50} \qquad k''_1 = -\frac{A}{8}k''_4 = 0$$

$$2C^2 = \underline{49.60} \qquad 47.65 \qquad k''_2 = -\frac{B}{4}k''_4 = +0.0024$$

$$\Sigma = 60.00 \qquad k''_3 = -\frac{C}{4}k''_4 = -0.0052$$

角度	ak''_1	bk''_2	ck''_3	dk''_4	v''	v'	v
(1)	0	+0".002		+0".010	+0".012	+0".144	+0".16
(2)	0	+0 .002		−0 .010	−0 .008	+0 .144	+0 .14
(3)	0		−0".005	+0 .011	+0 .006	+0 .544	+0 .55
(4)	0		−0 .005	−0 .006	−0 .011	+0 .544	+0 .53
(5)	0	−0 .002		+0 .016	+0 .014	+0 .068	+0 .08
(6)	0	−0 .002		−0 .006	−0 .008	+0 .068	+0 .06
(7)	0		+0 .005	+0 .003	+0 .008	−0 .332	−0 .32
(8)	0		+0 .005	−0 .018	−0 .013	−0 .332	−0 .35

以上計算之步驟，表中均已詳列，無庸解釋。比較所得結果，與前法毫無差異。



第八章　第十三圖

第五節　四邊形之平差——方向觀測

方向觀測時之四邊形平差與前節所述之角度觀測無大差別。今就下圖為例而論之。一四邊形內每測站觀測三方向，共為十二個方向，其角度條件方程式如下（參閱第十三圖）：

$$\left.\begin{aligned}
-v_1 \quad +v_3-v_4 \quad +v_6-v_7 \quad +v_9-v_{10} \quad +v_{12}+w_1&=0\\
-v_2+v_3-v_4+v_5 \quad +v_8-v_9+v_{10}-v_{11} \quad +w_2&=0\\
+v_1-v_2 \quad -v_5+v_6-v_7+v_8 \quad +v_{11}-v_{12}+w_3&=0
\end{aligned}\right\}(39)$$

今以 $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ 表示此十二方向間所組成之角度，如

$$a=(2)-(1)\qquad b=(3)-(2)\cdots\cdots$$

餘類推。$\delta_a\,\delta_b\,\delta_c\cdots\cdots$ 為 $a\,b\,c\cdots\cdots$ 等角每差 $1''$ 時其正弦對數之變化，於是得邊長條件方程式：

$$\frac{\sin(3-2)\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(12-11)}{\sin(2-1)\sin(5-4)\sin(8-7)\sin(11-10)}=1 \qquad (40)$$

若化為改正數之邊長條件，則得下式：

$$\begin{aligned}&\delta_a v_1-(\delta_a+\delta_b)v_2+\delta_b v_3+\delta_c v_4-(\delta_c+\delta_d)v_5+\delta_d v_6+\delta_e v_7\\&-(\delta_e+\delta_f)v_8+\delta_f v_9+\delta_g v_{10}-(\delta_g+\delta_h)v_{11}+\delta_h v_{12}+w_4=0\end{aligned} \qquad (41)$$

將(39)與(41)聯合解算，卽可求得 k_1, k_2, k_3，然後求得改正數 v_1, $v_2\cdots\cdots v_n$ 等。

關於方向條件公式之係數有一定律，卽所有係數之和應為零。無論在角度條件及邊長條件均能適用。蓋所有角度及邊長條件均以角度為單位而列出者，故實際如以 α 代表角度，而以 v 代表方向，則所有方向觀測之條件均可化為

$$a_1\alpha'+a_2\alpha''+\cdots\cdots=0 \qquad (41)$$

之形式，如換以 v，則得

$$a_1(v'_r-v'_l)+a_2(v''_r-v''_l)+\cdots\cdots=0 \qquad (42)$$

蓋每個角度均可以其左右兩方向之差表示，卽 $\alpha'=v'_r-v'_l$, $\alpha''=v''_r-v''_l$ ……是也。由(42)取其係數之和，得

$$[a]=+a_1-a_1+a_2-v_2\cdots\cdots=0$$

此外尙可由此證明另一定律，卽每測站各方向改正數之和亦等於零。蓋任意一角度化為方向後，其改正數之係數和必為零。倘將一測站各改正數相加，因

$$v_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\cdots\cdots$$

故 $$[v]=[a]k_1+[b]k_2+[c]k_3+\cdots\cdots$$

根據上述之理論，$[a]=[b]=[c]=\cdots\cdots=0$，故 $[v]=0$。

此定律可作檢核計算結果之用。

茲舉例如下（參閱第十三圖）：

觀測結果

A 雷家山	B 小啞口	球面角超
1. 0° 00′00″.00	4. 0° 00′00″.00	$\triangle ABC$: $\varepsilon_a=0''.51$
2. 43° 07′58″.04	5. 26°58′37″.73	
3. 116°29′40″.89	6. 56°57′26″.14	$\triangle BCD$: $\varepsilon_b=0''.46$
C 歌樂山	**D 寶華山**	
7. 0° 00′00″.00	10. 0° 00′00″.00	$\triangle CDA$: $\varepsilon_c=0''.28$
8. 49° 40′52″.76	11. 56°31′58″.40	
9. 93° 29′15″.45	12. 93°03′41″.37	$\triangle DAB$: $\varepsilon_d=0''.33$

三角形閉合差之計算

$\triangle ABC$		$\triangle BCD$		$\triangle CDA$	
$\angle ABC$:	56°57′26″.14	$\triangle BCD$:	93°29′15″.45	$\angle CDA$:	93°03′41″.37
$\angle BCA$:	49°40′52″.76	$\triangle CDB$:	56°31′58″.40	$\angle DAC$:	43°07′58″.04
$\angle CAB$:	73°21′42″.85	$\triangle DBC$:	29°58′48″.41	$\angle ACD$:	43 48′22″.69
	180°00′01″.75		180 00′02″.26		180°00′02″.10
$\varepsilon_a=$	0.51	$\varepsilon_b=$	0.46	$\varepsilon_c=$	0.28
$w_a=$	+1.24	$w_b=$	+1.80	$w_c=$	+1.82

$\triangle DAB$

$\angle DAB$:	116°	29′	40″.89
$\angle ABD$:	26	58	37″.73
$\angle BDA$:	36	31	42″.97
	180	00	01″.59
$\varepsilon_d=$			0″.33
$w_d=$			+1″.26

檢核：　$w_a+w_c=w_b+w_d=+3''.06$

角度條件不符值：

$$w_1=w_a+w_c=+3''.06$$
$$w_2=w_a-w_b=-0''.56$$
$$w_3=w_b-w_c=-0''.02$$

邊長條件之計算如下：

角度	觀　測　值	正弦對數	δ	角度	觀　測　值	正弦對數	δ
(a)	43°07′58″.04	9.8348602	2.25	(b)	73°21′42″.85	9.9814255	0.63
(c)	26°56′37″.73	9.6567066	4.13	(d)	29°58′48″.41	9.6987088	3.65
(e)	49°40′52″.76	9.8822156	1.79	(f)	43°48′22″.69	9.8402457	2.19
(g)	56°31′58″.40	9.9212715	1.39	(h)	36°31′42″.97	9.7746804	2.84
	和	9.2950539	9.56		和	9.2950604	9.31

$$w_4=+\quad 6.5$$

比較(39)(41)兩式，可得法方程式係數如下：

$$[ad] = -(\delta_a + \delta_c + \delta_e + \delta_g) + (\delta_b + \delta_d + \delta_f + \delta_h) = -0.25$$

$$[bd] = \{(\delta_a - \delta_e) - (\delta_d - \delta_h)\} - 2\{(\delta_c - \delta_g) - (\delta_b - \delta_f)\} = -8.95$$

$$[cd] = 2\{(\delta_a - \delta_e) + (\delta_d - \delta_h)\} + \{(\delta_c - \delta_g) + (\delta_b - \delta_f)\} = +3.72$$

$$[dd] = [\delta\delta] + (\delta_a + \delta_b)^2 + (\delta_c + \delta_d)^2 + (\delta_e + \delta_f)^2 + (\delta_g + \delta_h)^2 = +156.39$$

故法方程式爲:

$$\begin{array}{lllll}
\underline{8k_1} & & - & 0.25k_4 & +3.06=0 \\
& \underline{+8k_2} & - & 8.95k_4 & -0.56=0 \\
& & \underline{+8k_3} + & 3.72k_4 & -0.02=0 \\
& & & \underline{+156.39k_4} & +6.50=0
\end{array}$$

法方程式之約化至爲簡單,僅須約化最後一式:

$$\begin{array}{rrl}
+156.39\,k_4 & +6.50 & =0 \\
-\quad 0.008 & +0.096 & \\
-\quad 10.000 & -0.626 & \\
-\quad 1.730 & +0.009 & \\
\hline
+144.65\,k_4 & +5.98 & =0
\end{array}$$

$$k_4 = -0.0413$$

代入法方程式之前三式內,得:

$$k_1 = -0.382, \quad k_2 = +0.024, \quad k_3 = +0.022$$

改正數之計算可列表如下:

方 向	ak_1	bk_2	ck_3	dk_4	v	vv	改正後之方向值
(1)	+0.382		+0.022	−0.093	+0″.31	0.0961	0 00 00.31
(2)		−0.024	−0.022	+0.119	+0 .07	49	43 07 58.11
(3)	−0.382	+0.024		−0.026	−0 .38	1444	116 20 40.51
(4)	+0.382	−0.024		−0.170	+0 .19	361	0 00 00.19
(5)		+0.024	−0.022	+0.321	+0 .32	1024	26 58 38.05
(6)	−0.382		+0.022	−0.151	−0 .51	2601	56 57 25.63
(7)	+0.382		−0.022	−0.074	+0 .29	841	0 00 00.29
(8)		+0.024	+0.022	+0.164	+0 .21	441	49 40 52.97
(9)	−0.382	−0.024		−0.090	−0 .50	2500	93 29 14.95

(10)	+0.382	+0.024		−0.057	+0 .35	1225	0 00 00.35
(11)		−0.024	+0.022	+0.174	+0 .17	289	56 31 58.57
(12)	−0.382		−0.022	−0.117	−0 .52	2704	93 03 40.85

$$[vv]=1.4440$$

$$-[wk]=1.451$$

關於結果之檢核，可用前述之定律：每測站各方向改正數之和應爲零，如 $v_1+v_2+v_3=0$，$v_4+v_5+v_6=0$，……又 $[vv]$ 之值與 $-[wk]$ 亦符合於計算精度之內。每方向之觀測中誤差爲：

$$m=\sqrt{\frac{1.444}{4}}=\pm 0''.60$$

最後之檢核爲將改正後之方向值代入條件方程式內，視其是否完全滿足，此處略去不列。

方向觀測之四邊形，亦可應用分組平差法。由三個角度條件〔式(39)〕所組成之法方程式爲：

$$\begin{aligned}8k'_1 \qquad\qquad &+w'_1=0\\ 8k'_2 \qquad &+w'_2=0\\ 8k'_3 &+w'_3=0\end{aligned} \tag{43}$$

解出得：

$$k'_1=-\frac{w'_1}{8},\qquad k'_2=-\frac{w'_2}{8},\qquad k'_3=-\frac{w'_3}{8} \tag{44}$$

故改正數爲：

$$\left.\begin{aligned}v'_4=-v'_3=+\frac{1}{8}(w'_1+w'_2),\quad v'_{10}=-v'_9=+\frac{1}{8}(w'_1-w'_2)\\ v'_2=-v'_8=+\frac{1}{8}(w'_2+w'_3),\quad v'_{11}=-v'_5=+\frac{1}{8}(w'_2-w'_3)\\ v'_7=-v'_6=+\frac{1}{8}(w'_3+w'_1),\quad v'_{12}=-v'_1=+\frac{1}{8}(w'_3-w'_1)\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

據此將各方向值改正後，然後計算邊長條件，得不符值 w''_4，由此組

成之第二次法方程式爲:

$$\left.\begin{array}{l} 8k''_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + Ak''_4 \qquad\quad = 0 \\ \qquad + 8k''_2 \qquad\qquad\quad + Bk''_4 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad + 8k''_3 + Ck''_4 \qquad\quad = 0 \\ Ak''_1 + Bk''_2 + Ck''_3 + Dk''_4 + w''_4 = 0 \end{array}\right\} \tag{46}$$

其中 A, B, C, D 各值，卽爲

$$\left.\begin{array}{l} A = -(\delta_a + \delta_c + \delta_e + \delta_g) + (\delta_b + \delta_d + \delta_f + \delta_h) = -A_1 + A_2 \\ B = \{(\delta_a - \delta_e) - (\delta_d - \delta_h)\} - 2\{(\delta_c - \delta_g) - (\delta_b - \delta_f)\} = B_1 - 2B_2 \\ C = 2\{(\delta_a - \delta_c) + (\delta_d - \delta_h)\} + \{(\delta_e - \delta_g) + (\delta_b - \delta_f)\} = 2C_1 + C_2 \\ D = 2\{[\delta\delta] + \delta_a\delta_b + \delta_c\delta_d + \delta_e\delta_f + \delta_g\delta_h\} = 2(D_1 + D_2) \\ \text{或 } D = [\delta\delta] + (\delta_a + \delta_b)^2 + (\delta_c + \delta_d)^2 + (\delta_e + \delta_f)^2 + (\delta_g + \delta_h)^2 \end{array}\right\} \tag{47}$$

A, B, C, D 之計算亦可列表行之，但不如角度觀測時之簡單。法方程式(46)經約化三次後，得

$$\left\{ D - \frac{1}{8}(A^2 + B^2 + C^2) \right\} k''_4 + w''_4 = 0$$

是以

$$k''_4 = -\frac{w''_4}{D - \frac{1}{8}(A^2 + B^2 + C^2)} \tag{48}$$

然後代入其他三個法方程式內，卽得

$$k''_1 = -\frac{A}{8}k''_4, \quad k''_2 = -\frac{B}{8}k''_4, \quad k''_3 = -\frac{C}{8}k''_4 \tag{49}$$

茲再應用此法將前例解算如下:

$$\begin{array}{llll} w'_1 = +3''.06 & w'_2 = -0''.56 & w'_1 + w'_2 = +2''.50 & w'_1 - w'_2 = +3''.62 \\ w'_2 = -0''.56 & w'_3 = -0''.02 & w'_2 + w'_3 = -0''.58 & w'_2 - w'_3 = -0''.54 \\ w'_3 = -0''.02 & w'_1 = +3''.06 & w'_3 + w'_1 = +3''.04 & w'_3 - w'_1 = -3''.08 \end{array}$$

按照(45)求各方向之改正數，並以初步改正後之方向値計算各夾角(a)，(b)，(c)，(d)，……等如下:

方向	觀測值	改正數	改正後秒數	夾角	角度
(1)	0° 00′ 00″.00	+0″.38	00″.38	43° 07′ 57″.59	(a)
(2)	43° 07′ 58″.04	−0″.07	57″.97		
(3)	116° 29′ 40″.89	−0″.31	40″.58	73° 21′ 42″.61	(b)
(4)	0° 00′ 00″.00	+0″.31	00″.31	26° 58′ 37″.49	(c)
(5)	26° 58′ 37″.73	+0″.07	37″.80		
(6)	56° 57′ 26″.14	−0″.38	25″.76	29° 58′ 47″.96	(d)
(7)	0° 00′ 00″.00	+0″.38	00″.38	49° 40′ 52″.45	(e)
(8)	49° 40′ 52″.76	+0″.07	52″.83		
(9)	93° 29′ 15″.45	−0″.45	15″.00	43° 48′ 22″.17	(f)
(10)	0° 00′ 00″.00	+0″.45	00″.45	56° 31′ 57″.88	(g)
(11)	56° 31′ 58″.40	−0″.07	58″.33		
(12)	93° 03′ 41″.37	−0″.38	40″.99	36° 31′ 42″.66	(h)

由初步改正後之夾角值計算邊長方程式，並以各角度正弦對數變化δ按式(47)推算 $A\ B\ C\ D$ 之值。凡此計算均可列於下表中：

角度	正弦對數	正弦對數	δ		$\delta_a-\delta_c$ $\delta_e-\delta_g$	$\delta_d-\delta_b$ $\delta_h-\delta_f$	B_1 B_2	C_1 C_2	δδ	$\delta_l\ \delta_r$
(a)	9.8348592		2.25						5.06	
(b)		9.9814253		0.63					0.40	1.42
(c)	9.6567057		4.13		+0.47	+0.81	−0.34	+1.28	17.06	
(d)		9.6987072		3.65					13.32	15.07
(e)	9.8822151		1.78		+2.74	−1.57	+4.31	+1.17	3.17	
(f)		9.8402446		2.20					4.84	3.92
(g)	9.9212707		1.39						1.93	
(h)		9.7746796		2.84					8.07	3.95
和	9.2950567	9.2950567	9.55	9.32			$B=$	$C=$	53.85	24.36
	$w'_4=+6.0$		$A=-0.23$				−8.[illegible]6	+3.73	$D=156.42$	

$A^2=0.05$　　$B^2=80.28$　　$C^2=13.91$

$$D-\frac{1}{8}(A^2+B^2+C^2)=156.42-\frac{1}{8}94.24=144.64$$

按式(48)得　　$k''_4=-0.0414$

代入(49)得　　$k''_1=-0.001$

$k''_2=-0.046$

$k''_3=+0.019$

二次改正數之計算以及改正數總和列於下表：

方向	ak''_1	bk''_2	ck''_3	dk''_4	v''	v'	v
(1)	+0.001		+0.019	−0.093	−0.07	+0.38	+0.31
(2)		+0.046	−0.019	+0.119	+0.15	−0.07	+0.08
(3)	−0.001	−0.046		−0.026	−0.07	−0.31	−0.38
(4)	+0.001	+0.046		−0.171	−0.12	−0.31	+0.19
(5)		−0.046	−0.019	+0.322	+0.26	+0.07	+0.33
(6)	−0.001		+0.019	−0.151	−0.13	−0.38	−0.51
(7)	+0.001		−0.019	−0.074	−0.09	+0.38	+0.29
(8)		−0.046	+0.019	+0.165	+0.14	+0.07	+0.21
(9)	−0.001	+0.046		−0.091	−0.05	−0.45	−0.50
(10)	+0.001	−0.046		−0.058	−0.10	+0.45	+0.35
(11)		+0.046	+0.019	+0.175	+0.24	−0.07	+0.17
(12)	−0.001		−0.019	−0.118	−0.14	−0.38	−0.52
檢核	0	0	0	−0.001	+0.02	0	+0.02

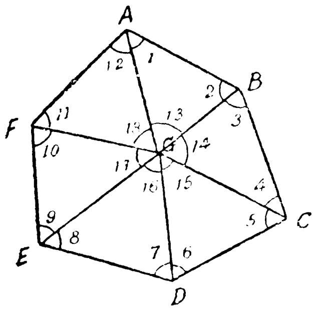
將此結果與前所求出者相比，所差最多 0″.01、係因計算時四捨五入所致。比較兩法之計算工作，則分組平差於此處並無若何簡捷可言。吾人所以列出者，乃為與下文第八節簡略平差法比較之故。

第六節　多邊中點形之平差

多邊中點形乃一多邊形而具一中點之圖形也。最簡單者如本章之第一圖為三邊中點形。在三角網中較為普通者為五邊中點形、六邊中點形、及七邊中點形。如第六圖之 $ABCKGHI$ 為一六邊中點形，第七圖之

$CDEFHI$ 為一五邊中點形。

倘一多邊形所有各邊之兩端均經觀測，其內角條件之數目即等於外邊之數目。如用角度觀測，則尚須增一中點水平角閉合條件。無論何種情形，均有一邊長條件。今以第十四圖所示之六邊中點形為例解釋之。設此圖形用角度觀測，則共有六個內角條件，一個中點水平角閉合條件，及一個邊長條件。六個內角條件可以六個三角形內角和之條件列出，邊長條件則以中點為極計算之。



第八章　第十四圖

內角條件：

$$\triangle GAB\quad (1)+(2)+(13)-(180^\circ+\varepsilon_{ab})=0$$
$$\triangle GBC\quad (3)+(4)+(14)-(180^\circ+\varepsilon_{bc})=0$$
$$\triangle GCD\quad (5)+(6)+(15)-(180^\circ+\varepsilon_{cd})=0$$
$$\triangle GDE\quad (7)+(8)+(16)-(180^\circ+\varepsilon_{de})=0$$
$$\triangle GEF\quad (9)+(10)+(17)-(180^\circ+\varepsilon_{ef})=0$$
$$\triangle GFA\quad (11)+(12)+(18)-(180^\circ+\varepsilon_{fa})=0$$

中點水平角閉合條件：

$$(13)+(14)+(15)+(16)+(17)+(18)-360^\circ=0$$

邊長條件：

$$\frac{GA}{GB}\cdot\frac{GB}{GC}\cdot\frac{GC}{GD}\cdot\frac{GD}{GE}\cdot\frac{GE}{GF}\cdot\frac{GF}{GA}=1$$

或以各角表示之：

$$\frac{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)\sin(10)\sin(12)}{\sin(1)\sin(3)\sin(5)\sin(7)\sin(9)\sin(11)}=1$$

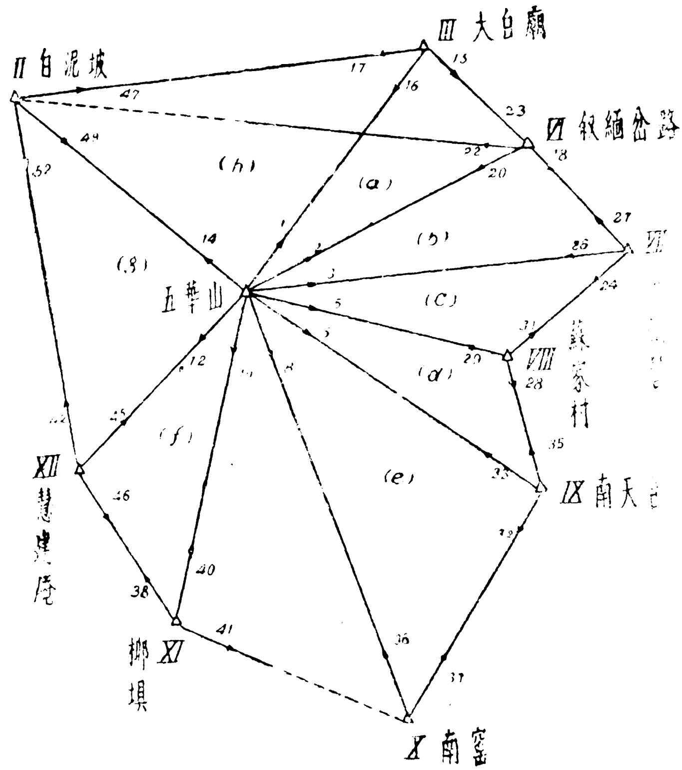
此後計算步驟與前兩節所舉四邊形平差之例類似，茲不贅述。

第七節　三角網平差舉例

無論三角網或三角鎖，其基本圖形不外三角形四邊形或多邊中點形。是以任意三角網或三角鎖均可視作由此數種圖形組合而成，不過其連接之處或有較複雜之疊合。由上列數節所述，吾人已可明悉各種條件方程式

之列法;無論在若何複雜之情形,其理並無二致。茲再舉兩實例於下,以解釋較爲複雜三角網之平差方法。

例一:雲南省昆明市舉辦土地測量所作之三角測量,其圖形大體爲一九邊中點形,如第十五圖所示。在此中點形內,缺一由 X 至 XI 之方向,但多測由 VI 至 II 之方向,致使 II III IV 五(B)成爲一四邊形。其觀測結果如下:



第八章　第十五圖

五華山測站(B)

III ……(1)= 00°00′00″

VI ……(2)= 37 51 27.2

VII ……(3)= 70 58 21.7

VIII ……(5)= 92 54 57.4

IX ……(6)=108 35 12.2

X ……(8)=142 44 3.4

XI ……(10)=175 18 16.9

XII ……(12)=198 18 46.8

II ……(14)=278 32 18.2

VI 紋緬岔路測站

VII …(18)= 00°00′00″,
五(B)…(20)= 97 48 32.2,
II ……(22)=132 57 22.5,
III……(23)=183 74 41.8,

VII 大樹營測站

VII …(24)= 00°00′00″,
五(B)…(20)= 57 37 35.9,
VI……(27)=106 42 0.0,

VIII 蘇家村測站

IX……(28)= 00°00′00″
五(B)…(29)=131 2 38.1
VII …(31)=231 28 38.7

IX 南天台測站

X…… (32)= 00°00′09″,
五(B)…(33)= 70 1 32.7,
VIII…(35)=103 18 19.1,

X 南窰測站

X(B)…(36)= 00°00′00″,
IX……(37)= 75 49 57.6,

VI 柳壩測站

XII …(32)= 00°00′00″
五(B)…(40)= 47 23 13.8
X ……(41)=129 55 5.4

XII 慧建庵測站	II 白泥坡測站	III 大白廟
II ……(42) = 00°00′00″,	III ……(47) = 00°00′00″,	VI……(15) = 00°00′00″
五(B) ··(45) = 57 20 31.4,	五(B)···(49) = 45 30 47.0,	五(B)···(16) = 56 42 47
XI……(46) = 166 56 31.5,	XII ···(52) = 87 56 44.3,	II ……(17) = 109 43 50.1

圖形條件數目：

$$R=36,\qquad p=10,\qquad l=19,\qquad l'=2。$$

內角條件數目：　$19-\ 2-10+1=8$

邊長條件數目：　$19-20+\ 3\quad =2$

圖形條件總數：　$38-2-30+4=10$

角度方程式：

$$\left.\begin{array}{ll}
(a) & -V_1\ +V_2\ -V_{15}+V_{16}-V_{20}+V_{23}-18.5=0\\
(b) & -V_2\ +V_3\ -V_{18}+V_{20}-V_{26}+V_{27}-\ 9.2=0\\
(c) & -V_3\ +V_5\ -V_{21}+V_{26}-V_{29}+V_{31}+12.2=0\\
(d) & -V_5\ +V_6\ -V_{28}+V_{29}-V_{33}+V_{35}-20.7=0\\
(e) & -V_6\ +V_8\ -V_{32}+V_{33}-V_{36}+V_{37}+21.5=0\\
(f) & -V_{10}+V_{12}-V_{38}+V_{40}-V_{45}+V_{46}-16.2=0\\
(g) & -V_{12}+V_{14}-V_{42}+V_{45}-V_{49}+V_{52}+\ 0.1=0\\
(h) & +V_1\ -V_{14}-V_{13}+V_{17}-V_{47}+V_{49}+14.2=0
\end{array}\right\}\qquad (a)$$

邊長方程式：

以五(B)爲極點，得第一邊長方程式(1)，第二邊方程式係屬於四邊形 III VI 五(B) II 者，若以 VI 爲極點則得(2)。

$$(1)\qquad \frac{\sin(23-20)\sin(27-26)\sin(31-29)\sin(35-33)\sin(37-36)\sin(41-40)\sin(46-45)}{\sin(16-15)\sin(20-18)\sin(26-24)\sin(29-28)\sin(33-32)\sin\measuredangle\text{XI X 五}(B)\sin(40-38)}$$

$$\frac{\sin(52-49)\sin(17-16)}{\sin(45-42)\sin(49-47)}=1$$

$$(2)\qquad \frac{\sin\measuredangle\text{III II VI}\sin(2-13)\sin(15-14)}{\sin\measuredangle\text{VI II 五}(B)\sin(17-14)\sin(2-1)}$$

$$\measuredangle\text{XI X 五}(B)=\ 180^\circ-(10-\ 8)-(41-40)=64^\circ53'54''.9$$

$$\measuredangle\text{III II VI}\ =\ 180^\circ-(17-15)-(23-22)=19^\circ58'50''.6$$

$$\measuredangle\text{VI II 五}(B)=-108^\circ+(49-47)+(17-15)+(23-22)=25^\circ31'56''.4$$

角 度	logsin	1″之對數差	角 度	logsin	1″之對數差
(23−20)	9.9986207	$+1.7(V_{23}-V_{20})$	(16−15)	9.9221127	$+13.8(V_{16}-V_{15})$
(27−26)	9.8782626	$+18.3(V_{27}-V_{26})$	(20−18)	9.9951537	$-2.9(V_{20}-V_{13})$
(31−29)	9.9927593	$-3.9(V_{31}-V_{29})$	(26−24)	9.9266392	$+13.3(V_{26}-V_{24})$
(35−33)	9.7393544	$+32.0(V_{35}-V_{33})$	(29−28)	9.8774963	$-18.3(V_{29}-V_{28})$
(37−36)	9.9865855	$+5.0(V_{37}-V_{36})$	(33−32)	9.9736568	$+7.7(V_{33}-V_{32})$
(41−40)	9.9862955	$+2.8(V_{41}-V_{40})$	∡XIX 五(B)	9.9569165	$+9.9(V_{3}-V_{13}+V_{40}-V_{41})$
(46−45)	9.9740773	$-7.5(V_{46}-V_{45})$	(40−38)	9.8668456	$+19.3(V_{40}-V_{38})$
(52−49)	9.8291250	$+23.0(V_{52}-V_{49})$	(45−42)	9.9252640	$+13.5(V_{45}-V_{42})$
(17−16)	9.9625157	$+15.8(V_{17}-V_{16})$	(49−47)	9.8523393	$+26.7(V_{49}-V_{47})$
$A=9.2976004$			$N=9.2976183$		
$N=9.2976183$					
$w=\quad 179$					

將改正數依次列成一次函數之邊上方程式：

$$
\begin{aligned}
&-0.99V_8+0.99V_{10}+1.38V_{15}-2.96V_{16}+1.58V_{17}-0.29V_{13}+0.12V_{20}+0.17V_{23}\\
&+1.33V_{24}-3.16V_{26}+1.83V_{27}-1.83V_{28}+2.22V_{29}-0.39V_{31}+0.77V_{32}-3.97V_{33}\\
&+3.20V_{35}-0.53V_{36}+0.53V_{3}+1.95V_{38}-3.20V_{40}+1.27V_{41}+1.35V_{42}-0.60V_{45}\\
&-0.75V_{46}+2.07V_{47}-4.37V_{49}+2.30V_{52}-17.9=0 \qquad (b)
\end{aligned}
$$

角 度	log sin	1″	之 對 數 差
∡ III II VI	9.5336500	+57.9	$(V_{15}-V_{17}+V_{22}-V_{23})$
(2−14)	9.9404694	−11.9	$(V_{2}-V_{14})$
(16−15)	9.9221127	+13.8	$(V_{16}-V_{15})$
	$A=9.3962321$		
	$N=9.3961778$		
	$w=\quad 543$		

角 度	log sin	1″	之 對 數 差
(17−15)	9.9737233	−7.5	$(V_{17}-V_{15})$
∡ VI II 五(B)	9.6344978	+44.1	$(V_{49}-V_{47}+V_{14}-V_{15}+V_{23}-V_{22})$
(2−1)	9.7879564	+27.0	$(V_{2}-V_{1})$
	$N=9.3961778$		

將改正數依次排列，得一次函數之邊長方程式如下：

$$
\begin{aligned}
&+2.70V_1-3.88V_2+1.18V_{14}+8.07V_{15}+1.38V_{16}-9.45V_{17}\\
&+10.20V_{22}-10.20V_{23}+4.41V_{47}-4.41V_{49}+54.3=0 \qquad (c)
\end{aligned}
$$

合 (a) (b)及 (c) 共得 10 條件方程式，其係數列成一表，名爲條件方程式之係數表：

條件方程式之係數表

		V_1	V_2	V_3	V_5	V_6	V_8	V_{10}	V_{12}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}
k_1	a	−1	+1								−1	+1	
k_2	b		−1	+1									
k_3	c			−1	+1								
k_4	d				−1	+1							
k_5	e					−1	+1						
d_6	f							−1	+1				
k_7	g								−1	+1			
k_8	h	+1								−1		−1	+1
k_9	i						−0.99	+0.99			+1.38	−2.96	+1.58
k_{10}	j	+2.70	−3.88							+1.18	+8.07	+1.38	−9.45

條件方程式之係數表(續一)

		V_{18}	V_{20}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{31}	V_{32}	V_{33}
k_1	a		−1		+1								
k_2	b	−1	+1				−1	+1					
k_3	c					−1	+1			−1	+1		
k_4	d								−1	+1			−1
k_5	e											−1	+1
k_6	f												
k_7	g												
k_8	h												
k_9	i	−0.29	+0.12		+0.11	+1.33	−3.16	+1.83	−2.83	+2.22	−0.39	+0.77	−3.97
k_{10}	j			+10.20	−10.25								

條件方程式之係數表(續二)

		V_{35}	V_{36}	V_{37}	V_{38}	V_{40}	V_{41}	V_{42}	V_{45}	V_{46}	V_{47}	V_{49}	V_{52}	w
k_1	a													−18.5
k_2	b													− 9.2
k_3	c													+12.2
k_4	d	+1												−20.7
k_5	e		−1	+1										+21.5
k_6	f				−1	+1			−1	+1				−16.2
k_7	g							−1	+1			−1	+1	+ 0.1
k_8	h										−1	+1		+14.2
k_9	j	+3.20	−0.53	+0.53	+1.98	−3.20	+1.27	+1.35	−0.60	−0.75	+2.09	+4.37	+2.30	−17.9
k_{10}	j													+54.3

法方程式：

$$
\begin{aligned}
&+6.000k_1-2.000k_2\cdots\cdots-2.000k_8-4.290k_9-23.470k_{10}-18.500=0\\
&6.000k_2-2.000k_3\cdots\cdots+5.400k_9+3.880k_{10}-9.200=0\\
&6.000k_3-2.000k_4\cdots\cdots-7.100k_9\cdots\cdots+12.200=0\\
&6.000k_4-2.000k_5\cdots\cdots+11.220k_9\cdots\cdots-20.700=0\\
&+6.000k_5\cdots\cdots-4.670k_9\cdots\cdots+21.500=0\\
&+6.000k_6-2.000k_7\cdots\cdots-6.270k_9\cdots\cdots-16.200=0\\
&6.000k_7-2.000k_8+4.720k_9+5.590k_{10}+0.1000=0\\
&6.000k_8-1.900k_9-18.130k_{10}+14.200=0\\
&+112.934k_9+18.783k_{10}-17.900=0\\
&+427.044k_{10}+54.300=0
\end{aligned}
$$

解出：

$k_1=+3.5407$, $k_2=+3.6912$, $k_3=-0.4158$, $k_4=+3.6124$, $k_5=-2.8115$

$k_6=+3.7942$, $k_7=+0.6816$, $k_8=-1.0095$, $k_9=-0.1275$, $k_{10}=-0.0032$

$[VV]=-[wk]=267.2802$

改正數之計算：

		1	2	3	5	6	8	10	12
a	$k_1=+3.5409$	-3.541	$+3.541$						
b	$k_2=+2.6912$		-2.691	$+2.691$					
c	$k_3=-0.4158$			$+0.416$	-0.416				
d	$k_4=+2.6124$				-2.612	$+2.612$			
e	$k_5=-2.8115$					$+2.812$	-2.812		
f	$k_6=+2.7942$							-2.794	$+2.794$
g	$k_7=+0.6816$								-0.682
h	$k_8=-1.0093$	-1.009							
i	$k_9=-0.1275$						$+0.126$	-0.126	
j	$k_{10}=-0.0032$	-0.009	$+0.012$						
	V	-4.559	$+0.862$	$+3.107$	-3.028	$+5.424$	-2.686	-2.920	$+2.112$

	↑ 接上同	14	15	16	17	18	20	22
			-3.541	$+3.541$			-3.541	
						-2.691	$+2.691$	
		$+0.682$						
		$+1.009$		$+1.009$	-1.009			
			-0.176	$+0.377$	-0.201	$+0.037$	-0.015	
		-0.004	-0.026	-0.004	$+0.030$			-0.033
		$+1.687$	-3.743	$+4.923$	-1.180	-2.654	-6.835	-0.033

	23	24	26	27	28	29	31	32	33	35	36
a	+3.541										
b			−2.691	+2.691							
c		+0.410	−0.416			+0.416	−0.416				
d					−2.612	+2.612			−2.612	+2.612	
e								+2.812	−2.812		+2.812
f											
g											
h											
i	−0.022	−0.170	+0.403	+0.233	+0.233	−0.283	+0.056	−0.098	+0.566	−0.408	+0.068
j	+0.033										
V =	+3.552	+0.246	−2.704	+2.458	−2.379	+2.745	−0.360	+2.714	−4.918	+2.204	+2.880

↑同	37	38	40	41	42	45	46	47	49	52
	−2.816									
		−2.794	+2.794			−2.794	+2.794			
					−0.682	+0.682			−0.682	+0.682
								+1.009	−1.009	
	−0.068	−0.246	+0.408	−0.162	−0.172	+0.077	+0.096	−0.264	+0.557	−0.293
	−2.880	−3.040	+3.202	−0.162	−0.854	−2.035	+2.890	+0.731	−1.120	+0.389

$$[VV] = +267.2899$$

每一方向觀測之中誤差：

$$m = \pm\sqrt{\frac{267.29}{10}} = \pm 5''.16$$

各觀測值上加以改正數而得平差值，以之代入原有角度及邊長方程式內均能符合檢核計算，此處從略。

例二：中國地理研究所於四川北碚設一測量實驗區，其二等三角鎖示如第十六圖，大體上爲一四邊形單鎖，北端加一三角形，其觀測結果如下：

測站：鷄公山 II 5

1.	II 7	0° 00′ 00″.00
2.	II 6	89° 11′ 37″.35

測站：張家壩口 II 6

3.	II 5	0° 00′ 00″.00
4.	II 7	36° 03′ 57″.98
5.	II 9	61° 05′ 33″.78
6.	II 8	103° 44′ 24″.29

測站：沙兒崗 II 7

7.	II 9	0° 00′ 00″.00
8.	II 8	54° 34′ 15″.64
9.	II 6	125° 20′ 41″.08
10.	II 5	180° 06′ 06″.35

測站：天台寺 II 8

11.	II 6	0° 00′ 00″.00
12.	II 7	47° 33′ 08″.83
13.	II 9	79° 21′ 46″.42
14.	II 11	106° 32′ 06″.13
15.	II 10	160° 10′ 27″.18

測站：大寶頂 II 9

16.	II 11	0° 00′ 00″.00
17.	II 10	48° 51′ 49″.95
18.	II 8	106° 23′ 48″.69
19.	II 6	164° 23′ 10″.65
20.	II 7	194° 00′ 54″.40

測站：雷家山 II 10

21.	II 8	0° 00′ 00″.00
22.	II 9	41° 39′ 17″.78
23.	II 11	65° 33′ 58″.09
24.	II 13	108° 41′ 51″.13
25.	II 12	182° 03′ 33″.98

測站：寶華寺 II 11

26.	II 13	0° 00′ 00″.00
27.	II 12	56° 31′ 58″.40
28.	II 10	93° 03′ 41″.37
29.	II 8	153° 51′ 22″.68
30.	II 9	200° 17′ 18″.17

測站：小壩口 II 12

31.	II 10	0° 00′ 00″.00
32.	II 11	26° 58′ 37″.73
33.	II 13	56° 57′ 26″.14

測站：歌樂山 II 13

34.	II 12	0° 00′ 00″.00
35.	II 10	43° 40′ 52″.76
36.	II 11	93° 29′ 15″.45

三角形及球面角超值計算舉例。茲以 II5－II6－II7 一個三角形爲例：其中 II5－II6 一邊之邊長由基線網中求出爲：

$$\log(\mathrm{II}5-\mathrm{II}6)=3.811276$$

按洛讓定理求此三角形三角度之化成角如下：

	角度	球面角觀測値	化成角	正弦對數
α	II 6－II 7－II 5	$54°45'25''.27$	$25''.07$	9.912069
β	II 5－II 6－II 7	$36°03'57''.98$	$57''.78$	9.769907
γ	II 7－II 5－II 6	$89°10'37''.35$	$57''.15$	9.999955
		和$=180°00'00''.60$	$00''.00$	
		$\frac{1}{3}=0''.20$		

各邊長 $a\,b\,c$（a 邊對 α 角，b 邊對 β 角，c 邊對 γ 角）之對數可用正弦定律求之，卽

$$m=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

a 爲已知邊，故

$$\begin{aligned}\log a &= 3.811276\\ \log\sin\alpha &= 9.912069\\ \hline \log m &= 3.899207\end{aligned}$$

以 $\log m$ 之値加上表 $\log\beta$ 及 $\log\gamma$ 之値卽得 b, c 兩邊之對數：

$$\log b = 3.669114$$

$$\log c = 3.899162$$

計算球面角超之公式如下：

$$\varepsilon''=\frac{\rho}{2\gamma^2}\,ab\sin\gamma$$

$$\log\frac{\rho}{2\gamma^2}=1.40546$$

$$\log a = 3.81128$$

$$\log b = 3.66911$$

$$\log\sin\gamma = 9.99996$$

$$\log\varepsilon'' = 8.88581 \qquad 故\ \varepsilon''=0''.0769$$

其餘各三角形之球面角超計算方法相同，茲不備列。

球面角超既知之後，即可列條件方程。按第二節條件方程數目之公式：因 $p=9$，$l=18$，故角度條件共有

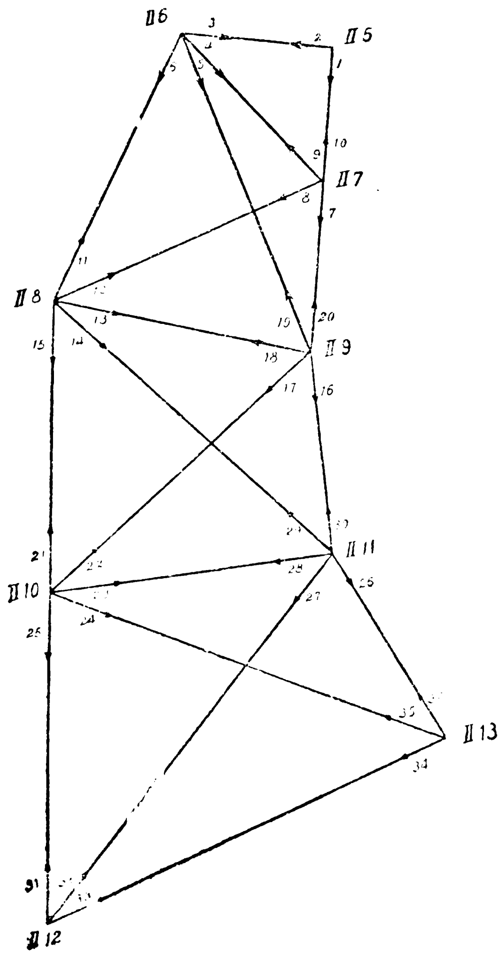
$$l-p+1=10 \text{ 個}$$

邊長條件共有　$l-2p+3=3$ 個

條件總數爲　$2l-3p+4=13$ 個

角度條件及邊長條件之列法已於第三節之例中詳爲說明，故此處僅將其列表如下：

略　圖



第八章　第十六圖

條件方程表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
a				+2.1419	−3.2275	+1.0856	+0.7114	−1.0602	+0.3488		+1.1282	−2.4170	+1.2888
b													+1.9483
c													
d	−1	+1	−1	+1					−1	+1			
e					+1	−1	−1	+1			+1	−1	
f				−1	+1			−1	+1			+1	−1
g				−1		+1	−1		+1		−1		+1
h													
i													−1
j													−1
k													
l													
m													
s	−1	+1	−1	+1.1419	−1.2275	+1.0856	−1.2886	−1.0602	+1.3488	+1	+1.1282	−2.4170	+1.2371

條件方程表（續一）

	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
a					+0.6251	−2.3834	+1.7583					
b	−2.6845	+0.7362	+0.8735	−1.5098	−0.6363			−1.1242	−3.3798	+2.2558		
c										+1.0674	−1.3662	+0.2988
d												
e						−1	+1					
f					+1	−1						
g					−1		−1					
h	−1	+1	+1	−1				−1	+1			
i	+1			−1	+1				+1	−1		
j		+1	−1		+1			−1		+1		
k										+1	+1	
l											−1	+1
m										−1		+1
s	−2.6845	+2.7362	+0.8735	−3.5098	+3.2614	−4.3834	+3.7583	−0.8758	−1.3798	+1.3230	−1.3662	+2.2988

條件方程表（續二）

	v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	w
a												−1.0924
b			+0.5590	−1.5102	+0.9512							+3.1346
c	+0.6611	−2.0111	+1.3500			+1.9645	−3.6979	+1.7334	+0.8486	−1.8912	+1.0426	+3.0871
d												+0.52
e												+0.15
f												+1.73
g												−0.84
h				+1	−1							−0.74
i			+1	−1								−4.15
j			−1		+1							−1.07
k		−1	+1				+1	−1	+1	−1		+0.02
l	+1	−1				−1	+1			+1	−1	−0.56
m	−1		+1			−1		+1	−1		+1	+3.06
s	+0.6611	−4.0111	+3.9090	−1.5102	+0.9512	−0.0355	−1.6979	+1.7334	+0.8486	−1.8912	+1.0426	+3.2493

上表所列之條件方程，a, b, c, 三個爲三個四邊形之邊長條件，其改正數係數係爲角度餘切。d 爲 II5－II6－II7 三角形之條件，以下九個條件爲三個四邊形內之角度條件。由此所得之法方程式可列表如下：

法方程式表

	$a]k_1$	$b]k_2$	$c]k_3$	$d]k_4$	$e]k_5$	$f]k_6$	$g]k_7$	$h]k_8$
$[a$	+25.8735	+ 2.[illegible]88	0	+1.7931	+1.602[illegible]	−4.6[illegible]	−0.1251	0
$[b$		+36.2643	+ 3.1623	0	0	−1.312[illegible]	+1.3120	−1.1614
$[c$			+35.3214	0	0	0	0	0
$[d$				+6.[illegible]	0	−2.[illegible]	−2.0000	0
$[e$					+8.0000	0	0	0
$[f$						+8.0000	0	0
$[g$							+8.0000	0
$[h$								+8.0000
$[i$								
$[j$								
$[k$								
$[l$								
$[m$								
$[s$								

↑接上	$i]k_9$	$j]k_{10}$	$k]k_{11}$	$l]k_{12}$	$m]k_{13}$	[illegible]	w	S
	−0.0[illegible]	−[illegible]	0	0	0	+ [illegible]	−1.0924	+ 34.9747
	−0.0[illegible]	+[illegible]	−1.6[illegible]6	0	−1.6[illegible]6	+ [illegible]	+3.134[illegible]	+ 34.936[illegible]
	+0.2[illegible]26	−0.2820	−1.7[illegible]	−1.25[illegible]	−0.[illegible]	+ 32.[illegible]	−3.0871	+ 35.4310
	0	0	0	0	0	+ 3.7[illegible]	+0.5200	+ 4.3131
	0	0	0	0	0	+ [illegible]	+0.1500	+ 9.7522
	+2.0000	+2.0000	0	0	0	+ 4.[illegible]	+1.7300	+ 5.7603
	−2.0000	−[illegible]	0	0	0	+ 3.18[illegible]	−0.8400	+ 2.346[illegible]
	0	0	0	0	0	+ 6.8386	−0.7400	+ 6.0986
	+8.0000	0	+2.0000	0	+2.0000	+ 5.[illegible]	−4.1500	+ 1.4160
		+8.0000	−2.0000	0	−2.0000	+ 3.1280	−1.0700	+ 2.0[illegible]80
			+8.0000	0	0	+ 4.53[illegible]	+0.0200	+ 4.5[illegible]94
				+8.0000	0	+ 3.7410	−0.5600	+ 3.1810
					−8.0000	+ 6.1[illegible]	+3.0600	+ 9.[illegible]
						+ 1[illegible].825[illegible]	+3.[illegible]493	+1[illegible]4.0748

由此法方程表中，可見各邊長條件之法方程式列於前面，而角度條件列於後。蓋解算大規模法方程式時，應以含有較大係數之方程式列於前面，使其係數不致因多次約化而逐漸近於零。又此處係數採用小數點後四位，亦

上列法方程式用高斯約化法約化後，即得約化法方程式如下：

約 化 法 方

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
+35.8735	+2.9088	0	+1.17931	+1.6022	−4.6577	−0.1251
[bb·1]	+36.0285	+3.1623	−0.1454	−0.1299	−0.9344	+1.3221
	[cc·2]	+35.0138	+0.0128	+0.0114	+0.0820	−0.1160
		[dd·3]	+5.9698	−0.0806	−1.7710	−1.9884
			[ee·4]	+7.9268	+0.1804	−0.0167
				[ff·5]	+6.8260	−0.5771
					[gg·6]	+7.2330
						[hh·7]

為解算大規模三角網法方程式常取之步驟。僅以十三個繫數之法方程式系統，採用小數點後三位原可足用，此處乃為與第十一章所述擴展法結果比較，故用四位計算。

程　式　表

k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	w
0	−0.6637	−0.6637	0	0	0	−1.0924
−1.1314	−5.9991	+0.1287	−1.6966	0	−1.6966	+3.2232
+0.1019	+0.8091	−0.2938	−1.6151	−4.2590	+0.0321	+2.8042
−0.0047	+0.0087	+0.0338	−0.0063	+0.0016	−0.0069	+0.5866
−0.0043	+0.0077	+0.0307	−0.0055	+0.0014	−0.0062	+0.2175
−0.0316	+1.7587	+1.9272	−0.0420	+0.0105	−0.0461	+1.8360
+0.0386	−1.6280	−1.8338	+0.0514	−0.0127	+0.0562	−0.5999
+7.9620	−0.1790	+0.0237	−0.0505	+0.0125	−0.0553	−0.6320
[ii·8]	+6.1472	−0.8923	+1.7761	+0.0930	+1.7401	−4.3208
	[jj·9]	+6.8466	−1.7247	−0.0284	−1.7137	−2.3774
		[kk·10]	+6.8970	−0.2301	−1.0140	+0.9629
			[ll·11]	+7.4732	−0.0630	−0.1347
				[mm·12]	+6.8479	+3.9913
						−7.5289

由此得出之 k 值為：

$$
\begin{array}{lll}
k_1=+0.0100 & k_6=+0.5309 & k_{10}=-0.1447 \\
k_2=-0.0162 & k_7=-0.3400 & k_{11}=+0.2249 \\
k_3=+0.1072 & k_8=-0.0949 & k_{12}=-0.0131 \\
k_4=+0.1475 & k_9=-0.9537 & k_{13}=+0.5829 \\
k_5=+0.0168 & &
\end{array}
$$

將 k 值代入條件方程式內，卽得各方向改正數之値。因此例將於第十一章第七節再用擴展法計算，故計算改正數及核算之步驟，均留待該節完成之。

第八節　方向觀測之簡略平差法

在一三角網之平差中，設方向 P_iP_k 之改正數為 v_{ik}，則其公式可作下列書法：

$$v_{ik}=ak_1+bk_2+\cdots\cdots+\alpha_i k'+\beta_i k''+\cdots\cdots \tag{50}$$

k_1，k_2……為角度條件之繫數，k'，k''……為邊長條件之繫數；a，b……為該方向在第一第二……角度條件方程式內之係數（普通均為 $+1$ 或 -1）；α_i，β_i……為該方向在第一第二……邊長條件方程式內之係數。P_i，P_k 之相對方向 P_kP_i 之改正數公式為：

$$v_{ki}=-ak_1-bk_2\cdots\cdots+\alpha_k k'+\beta_k k''+\cdots\cdots \tag{51}$$

蓋在角度條件中，兩相對方向必同時出現，而其係數均為 1，但符號相反。

是以吾人如應用分組平差法，以所有角度條件為一組作初步平差，則初步之方向改正數：

$$v'_{ik}=+\delta_{ik} \qquad v'_{ki}=-\delta_{ik} \tag{52}$$
$$v'_{ik}-v_{ki}'=+2\delta_{ik}$$

在第二組邊長條件平差時，如令各方向之改正數為 ε，並令兩相對方向之改正數互等，卽 $\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}$，則兩次平差後之總改正數為：

$$v_{ik}=+\delta_{ik}+\varepsilon_{ik}$$
$$v_{ki}=-\delta_{ik}+\varepsilon_{ik}$$

而
$$v_{ik}-v_{ki}=+2\delta_{ik} \tag{53}$$

如此則第一組之角度條件自動滿足。蓋在角度條件中，如將兩相對方向併為一處，則影響於此條件者，僅為兩相對方向改正數之差，卽 $v_{ik}-v_{ki}$，根

據式(52)及(53)，經過第二組平差後，其值並未變也。是以應用 $\varepsilon_{ih}=\varepsilon_{ki}$ 之假定，於第二組邊方程式之平差時，可完全不顧及第一組之角度條件，因此計算工作可以簡省。但此假定並非根據最小二乘法之原理，其結果自不嚴格。茲以第五節之例應用此法平差。

按第五節第241頁專以角度條件初步平差之結果為：

$$v'_4=-v'_3=+0''.31 \qquad v'_{10}=-v'_9=+0''.45$$
$$v'_2=-v'_8=-0''.07 \qquad v'_{11}=-v'_5=-0''.07$$
$$v'_7=-v'_6=+0''.38 \qquad v'_{12}=-v'_1=-0''.38$$

經過此初步改正後而列出之邊長條件方程式為(按第245頁)：

$$+2.25\,\varepsilon_1-2.88\,\varepsilon_2+0.63\,\varepsilon_3+4.13\,\varepsilon_4-7.78\,\varepsilon_5+3.65\,\varepsilon_6+1.78\,\varepsilon_7$$
$$-3.98\,\varepsilon_8+2.20\,\varepsilon_9+1.39\,\varepsilon_{10}-4.23\,\varepsilon_{11}+2.84\,\varepsilon_{12}+6.0=0 \qquad (54)$$

由此命兩相對方向之第二次改正數相等，即

$$\varepsilon_4=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_2=\varepsilon_8,\quad \varepsilon_7=\varepsilon_6,\quad \varepsilon_{10}=\varepsilon_9,\quad \varepsilon_{11}=\varepsilon_5,\quad \varepsilon_{12}=\varepsilon_1$$

而代入式(54)，即得

$$+5.09\,\varepsilon_1-6.86\,\varepsilon_2+4.76\,\varepsilon_3-12.01\,\varepsilon_5+5.43\,\varepsilon_6+3.58\,\varepsilon_9+6.0=0 \qquad (55)$$

由此不顧角度條件而組成之法方程式為：

$$282.2\,k''_4+6.0=0$$

故

$$k''_4=-0.0212$$

由此按照式(55)即可計算二次改正數 ε，茲將其結果列表於下：

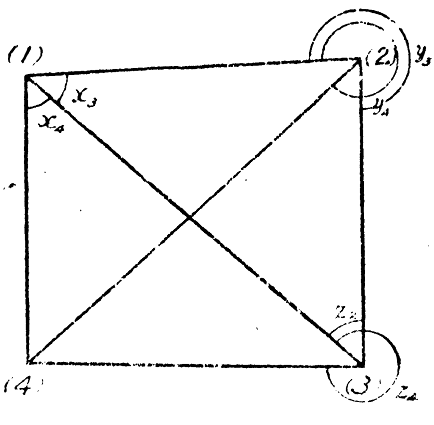
方向	v'	ε	$v=v'+\varepsilon$	v	嚴格之 v	差異
(1)	$+0''.38$	$-0''.11$	$+0''.27$	$+0''.29$	$+0''.31$	$+0''.02$
(2)	$-0''.07$	$+0''.15$	$+0''.08$	[illegible]	$+0''.08$	$-0''.02$
(3)	$-0''.31$	$-0''.10$	$-0''.41$	$-0''.39$	$-0''.38$	$+0''.01$
(4)	$+0''.31$	$-0''.10$	$+0''.21$	$+0''.19$	$+0''.19$	0
(5)	$+0''.07$	$+0''.26$	$+0''.33$	$+0''.32$	$+0''.33$	$+0''.01$
(6)	$-0''.38$	$-0''.12$	$-0''.50$	$-0''.51$	$-0''.51$	0
(7)	$+0''.38$	$-0''.12$	$+0''.26$	$+0''.28$	$+0''.29$	$+0''.01$
(8)	$+0''.07$	$+0''.15$	$+0''.22$	$+0''.23$	$+0''.21$	$-0''.02$

(9)	$-0''.45$	$-0''.08$	$-0''.53$	$-0''.51$	$-0''.50$	$+0''.01$
(10)	$+0''.45$	$-0''.08$	$+0''.37$	$+0''.35$	$+0''.35$	0
(11)	$-0''.07$	$+0''.26$	$+0''.19$	$+0''.17$	$+0''.17$	0
(12)	$-0''.38$	$-0''.11$	$-0''.49$	$-0''.52$	$-0''.52$	0

表中v'爲第一次專以角度條件平差之結果，ε 爲邊長條件之改正數，(v)爲二者之和，亦卽最後之改正數。爲與用嚴格方法求得之改正數比較，必須將此處每測站之改正數和化爲零，卽 $[v]=0$ 上表第五列之v卽爲移動後之改正數，第二列爲嚴格之v值，比較五六兩列之値，得其差異列於第七列。最大之差異不過 ± 0.02，足見此簡略平差方法之精度頗佳。在三四等三角網中，如採用此法可使計算工作減少甚多。

第九節　應用不完全方向組觀測時之圖形平差法

在大三角測量時，晚近一般之習慣多用完全方向組觀測，或如德國測量總局採用史賴伯全組合角度觀測法，亦可化爲完全方向組之結果。在史賴伯以前，德國白塞耳作東普魯士弧度測量時，因每測站四週之各點，常不能同時獲得良好之通視，而彼時又不知利用探照燈於夜間工作，是以僅得不完全方向組之結果。由第七章第六節中，已知不完全方向組之平差結果，僅能以角度代表之，若化爲方向，則每個方向應得之權値無法嚴格求出。是以白塞耳平差時，將測站平差與圖形平差合於一處，而利用第六章第九節中所論附有條件方程之間接觀測平差法以解算之，蓋測站平差爲間接觀測，而圖形平差則有條件方程也。玆以下列虛擬之例解釋此法之步驟。



第八章　第十七圖

今有一近於正四方形之四邊形（第十七圖），其各站方向觀測之成果爲：

表　一

測站(1)

測　　點	(2)	(3)	(4)	權
第一組	0° 0′ 0.0″	45° 0′ 0″.3	90° 0′ 0″.9	1
第二組	0	1 .0		1
第三組		0 .0	89° 59′59″.8	1

測站(2)

測　　點	(1)	(2)	(3)	權
第一組	0° 0′ 0.0″	270° 0′ 0″.6	315° 0′ 0″.3	1
第二組	0		0″.6	1
第三組		0″.0	1″.0	1

測站(3)

測　　點	(1)	(2)	(3)	權
第一組	0° 0′ 0″	45° 0′ 1″.0	315° 0′ 0″.5	1
第二組	0	0″.3	314° 59′ 59″.7	1

測站(4)

測　　點	(1)	(2)	(3)	權
第一組	0° 0′ 0″	45° 0′ 0″.2	90° 0′ 1″.3	0.5
第二組	0	1″.0	0″.5	0.5

整理上表所列結果，首作各站之測站平差，其中測站(1)(2)之觀測爲不完全方向組之觀測，測站(3)(4)之觀測則爲完全方向組。測站(1)之測站平差已在第七章第六節之例內演算，茲更用相同步驟，演化測站(2)及(3)之成果並列於第二表。測站(3)因爲完全方向組觀測，本可與測站(4)同樣應用簡單之平均得其測站之平差，但爲普遍之解說計，亦列於不完全方向組內，以資參考。

表二

	(甲)
測站	(1)
近似角	$\angle 213=45^\circ 0'00''$ $\angle 214=90^\circ 00'00''$
改正數	x_3 x_4
法方程式及其約化式	$\frac{5}{3}x_3-\frac{5}{6}x_4=+0.5$ $\frac{3}{4}x_4=+0.65$
測站平差結果	$x_3=+0.7333$ $x_4=+0.8667$
中誤差	$[vv]=0.2267$ $m=\pm 0''.337$

	(乙)
測站	(2)
近似角	$\angle 123=270^\circ 00'00''$ $\angle 124=315^\circ 00'00''$
改正數	y_3 y_4
法方程式及其約化式	$\frac{7}{6}y_3-\frac{5}{6}y_4=-0.2$ $\frac{15}{14}y_4=+\frac{4.6}{7}$
測站平差結果	$y_3=0.2666$ $y_4=+0.6133$
中誤差	$[vv]=0.4223$ $m=\pm 0''.460$

	(丙)
測站	(3)
近似角	$\angle 132=45^\circ 00'0''.65$ $\angle 134=315^\circ 00'0''.60$
改正數	z z_4
法方程式及其約化式	$\frac{4}{3}z_2-\frac{2}{3}z_4=0$ $z_4=0$
測站平差結果	$z_2=0$ $z_4=0$
中誤差	$[vv]=0.1900$ $m=\pm 0''.308$

測站(4)之測站平差依完全組法簡單之平均得之。成果見表三，其測站平差所得之權單位中誤差則爲：

$$[vv]=0.3200 \qquad m=\pm 0''.400$$

此等測站平差之結果，尙須經四邊形圖形之平差，故仍須加其他改正數，總列其值如下：

表　三

	測站平差之結果	圖形平差之改正數	權
(1)	$\measuredangle(2.3)=45°\ 00''.7333$	$+\xi_3$	
	$\measuredangle(2.4)=90°\ 00''.8667$	$+\xi_4$	
(2)	$\measuredangle(1.3)=270°\ 00''.2666$	$+\eta_3$	
	$\measuredangle(1.4)=315°\ 00''.6133$	$+\eta_4$	
(3)	$\measuredangle(1.2)=45°\ 00''.6500$	$+\delta_2$	
	$\measuredangle(1.4)=315°\ 00''.1000$	$+\delta_4$	
(4)	$1=0°\ 00''.0000$	$+\gamma_1$	1
	$2=45°\ 00''.6000$	$+\gamma_2$	1
	$3.=90°\ 00''.9000$	$+\gamma_3$	1

圖形平差條件方程式計有角度條件三個邊長條件一個，得：

三角形 1.2.3.

$$\xi_3-\eta_3+\delta_2+1''11.67=0$$

三角形 1.2.4.

$$\xi_1-\eta_4-\gamma_1+\gamma_2+0''.8534=0$$

三角形 1.3.4.

$$-\xi_3+\xi_4-\delta_4-\gamma_1+\gamma_3+0''.9334=0$$

邊長條件方程式按由邊長(1)(2)算至(1)(4)經由不同三角所得結果必等，其式如下：

$$\frac{\sin(4)(2)(1)}{\sin(1)(4)(2)}=\frac{\sin(3)(2)(1)\sin(4)(3)(1)}{\sin(1)(3)(2)\sin(1)(4)(3)}$$

取其對數，並以對數之第七位爲單位，於是得

$$\log\sin 45°-21.06(0.6133+\eta_4)-\log\sin 45°-21.06(0.600-\gamma_1+\gamma_2)$$
$$=\log\sin 45-21.06(0.1000+\delta_4)-\log\sin 45°-21.06(0.6500+\delta_2)$$

或 $$-\eta_4+\delta_2+\delta_4+\gamma_1-\gamma_2-0''.4633=0$$

上述四條件方程式彙列於表四：

表 四

ξ_3	ξ_4	η_3	η_4	δ_2	δ_4	γ_1	γ_2	γ_3	常數
+1		−1		+1					+1.1167
	+1		−1			−1	+1		+0.8534
−1	+1				−1	−1		+1	+0.9334
			−1	+1	+1	+1	−1		−0.4630
	+2	−1	−2	+2		−1		+1	+2.4402

但表四中之 $\xi_3\ \xi_4\ \eta_3\ \eta_4$ 及 $\delta_2\ \delta_4$ 等六值並非獨立之觀測值，故不能直接應用之於平差計算。今可視表二內所列法方程式及其約化式爲等值之虛擬觀測公式（見第六章第九節）因得自表二甲：

$$(x_3+\xi_3)-0.5(x_4+\xi_4)=+0.5\ +\ \lambda_1\quad 權\frac{5}{3}$$

$$(x_4+\xi_4)=+0.087+\lambda_2\quad 權\frac{3}{4}$$

或代入 $x_3\ x_4$ 值後得

$$\xi_3-\ 0.5\xi_4=\lambda_1\quad 權\frac{5}{3}$$

$$\xi_4=\lambda_2\quad 權\frac{3}{4}$$

同理自表二乙得

$$\eta_3-\frac{5}{7}\eta_4=\lambda_3\quad 權\frac{7}{6}$$

$$\eta_4=\lambda_4\quad 權\frac{15}{14}$$

自表二丙得

$$\delta_2-0.5\delta_4=\lambda_5\quad 權\frac{4}{3}$$

$$\delta_4=\lambda_6 \quad 權\ 1$$

將此等關係代入表四之條件方程式中，消除 $\xi_3\ \xi_4$ ……等未知數而代之以 $\lambda_1\ \lambda_2$ ……，則得以 λ 及 γ 所組成之條件方程式：

表　五

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	γ_1	γ_2	γ_3	常　數
+1	+0.5	−1	$-\frac{5}{7}$	+1	+0.5				+1.1167
	+1		−1			−1	+1		+0.8534
−1	+0.5				−1	−1		+1	+0.9334
			−1	+1	+1.5	+1	−1		−0.4633
	+2	−1	$-\frac{19}{7}$	+2	+1	−1		+1	+2.4402
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{4}{3}$	1	1	1	1	權

由此組成之法方程式為：

表　六

$$+3.2666\,k_1+1.333\ \ k_2-0.7667\,k_3+2.1667\,k_4+1.1167=0$$
$$+1.3333\,k_1+4.2667\,k_2+1.6667\,k_3-1.0667\,k_4+0.8534=0$$
$$-0.7667\,k_1+1.6667\,k_2+3.9333\,k_3-2.5000\,k_4+0.9334=0$$
$$+2.1667\,k_1-1.0667\,k_2-2.5000\,k_3+5.9333\,k_4-0.4633=0$$

所有約化法方程式之第一行為：

表　七

$$+3.2666\,k_1+1.333\ \ k_2-0.7667\,k_3+1.1667\,k_4+1.1167=0$$
$$+3.7225\,k_2+1.9796\,k_3-1.9511\,k_4+0.3976=0$$
$$+2.7006\,k_3-0.9539\,k_4+0.9841=0$$
$$+3.1366\,k_4-0.6481=0$$

或將第一項化為 1 時，得：

表　八

$$
\begin{aligned}
k_1+0.40816\,k_2-0.23471\,k_3+0.66329\,k_4+0.34188&=0\\
k_2+0.53179\,k_3-0.52413\,k_4+0.10681&=0\\
k_3-0.35322\,k_4+0.36440&=0\\
k_4-0.20663&=0
\end{aligned}
$$

由之解得各繫數及改正數如下:

$$k_1=-0.61120\quad k_2=+0.15646\quad k_3=-0.29141\quad k_4=+0.20663$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1&=-0.1919 & \lambda_6&=+0.2958\\
\lambda_2&=-0.3932 & \gamma_1&=+0.3416\\
\lambda_3&=+0.5239 & \gamma_2&=-0.0502\\
\lambda_4&=+0.0686 & \gamma_3&=-0.2914\\
\lambda_5&=-0.3035 & [P\lambda\lambda]&=0.9168
\end{aligned}
$$

此時權單位之中誤差爲:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[P\lambda\lambda]+[P\gamma\gamma]}{4}}=\pm\sqrt{\frac{0.9169}{4}}=\pm0''.479$$

更由 $\lambda_1\,\lambda_2\cdots\cdots$ 與 $\xi_3\,\xi_4\,\eta_3\,\eta_4\,\delta_2\,\delta_4$ 等關係得:

$$
\begin{aligned}
\xi_3&=-0''.3885 & \eta_4&=+0''.0685\\
\xi_4&=-0''.3932 & \delta_2&=-0''.1556\\
\eta_3&=+0''.5729 & \delta_4&=+0''.2958
\end{aligned}
$$

平差後最後之結果爲:

表 九

$$
\text{測站}(1)\begin{cases}(1)=0°0'0''.0000\\(2)=45°0'0''.3448\\(3)=90°0'0''.4735\end{cases}\qquad
\text{測站}(3)\begin{cases}(1)=0°0'0''.0000\\(2)=45°0'0''.4944\\(3)=315°0'0''.3958\end{cases}
$$

$$
\text{測站}(2)\begin{cases}(1)=0°0'0''.0000\\(3)=270°0'0''.8395\\(4)=315°0'0''.6819\end{cases}\qquad
\text{測站}(4)\begin{cases}(1)=0°0'0''.0000\\(2)=45°0'0''.2082\\(3)=90°0'0''.2670\end{cases}
$$

每權單位方向觀測之中誤差按式(114)(第六章)應爲:

$$m=\sqrt{\frac{[Pvv]+[P\lambda\lambda]+[P\gamma\gamma]}{n-u+\gamma}}$$

其中 $[P\gamma v]+[P\gamma\gamma]+[P\lambda\lambda]=(02267+0.4227+0.1900+0.3210)$

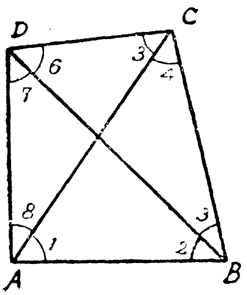
$$+0.9168=2.0762$$

$$\therefore \quad m=\sqrt{\frac{2.0762}{26-(12+6)+4}}=\sqrt{\frac{2.0762}{12}}=\pm 0''.416$$

第十節　間接觀測平差法

三角網之圖形平差，率多採用條件平差法，但有時亦可採用間接觀測法平差。今以角度觀測之四邊形爲例以解釋之。

第十八圖爲一四邊形，所觀測之角度爲(1)，(2)，……(8)各角。欲確定此四邊形實際僅須觀測四個角度卽足。故吾人假定其中之四個角度(1)(2)，(3)，(8)之改正數 v_1，v_2，v_3，v_8 爲未知數，而將其他各角應用角度及邊長方程式化爲此四個角度之函數。由角度條件可得：



第八章　第十八圖

$$\begin{aligned} v_4&=-v_1-v_2-v_3-w_a \\ v_7&=-v_1-v_2-v_8-w_b \end{aligned} \qquad (56)$$

w_1 及 w_2 爲以觀測之角度値代入三角形 ABC 及 ABD 所得之不符値。以 C 爲極之邊長條件可書作：

$$\delta_1 v_1-\delta_{(2+3)}v_2+(\delta_3-\delta_{(2+3)})v_3+(\delta_{(6+7)}-\delta_6)v_6+\delta_{(6+7)}v_7-\delta_8 v_8+w_c=0$$

更利用(56)之關係可得：

$$\begin{aligned}(\delta_{(6+7)}-\delta_6)v_6=&(\delta_{(6+7)}-\delta_1)v_1+(\delta_{(6+7)}+\delta_{(2+3)})v_2+(\delta_{(2+3)}-\delta_3)v_3\\&+(\delta_{(6+7)}+\delta_8)v_8+\delta_{(6+7)}w_b-w_c\end{aligned} \qquad (57)$$

式(57)爲角度(6)之改正數 v_6 與未知數 v_1，v_2，v_3，v_8 之關係。同理以 D 爲極之邊長條件爲：

$$\delta_{(1+8)}v_1-\delta_2 v_2+\delta_3 v_3-\delta_{(4+5)}v_4+(\delta_5-\delta_{(4+5)})v_5+(\delta_{(8+1)}-\delta_8)v_8+w_a=0$$

利用(56)之關係可化爲：

$$\begin{aligned}(\delta_5-\delta_{(4+5)})v_5=&-(\delta_{(1+8)}+\delta_{(4+5)})v_1+(\delta_2-\delta_{(4+5)})v_2-(\delta_3+\delta_{(4+5)})v_3\\&+(\delta_8-\delta_{(8+1)})v_8-\delta_{(4+5)}w_a-w_d\end{aligned} \qquad (58)$$

式(57)及式(58)可簡單以下式代表之：

$$\begin{aligned} v_6&=a_6v_1+b_6v_2+c_6v_3+d_6v_8-l_6 \\ v_5&=a_5v_1+b_5v_2+c_5v_3+d_5v_8-l_5 \end{aligned} \qquad (59)$$

a_5，a_6，b_5，b_6 …… 等値，由式(57)，(58)中可以看出。

如是吾人可列改正數方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= +v_1 \\
v_2 &= \qquad +v_2 \\
v_3 &= \qquad\qquad +v_3 \\
v_4 &= -v_1 - v_2 - v_3 \qquad\qquad - w_a \\
v_5 &= a_5 v_1 + b_5 v_2 + c_5 v_3 + d_5 v_8 - l_5 \\
v_6 &= a_6 v_1 + b_6 v_2 + c_6 v_3 + d_6 v_8 - l_6 \\
v_7 &= -v_1 - v_2 \qquad\qquad - v_8 - w_b \\
v_8 &= \qquad\qquad\qquad + v_8
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由式(60)可組成法方程式而計算 v_1, v_2, v_3, v_8 之值，並由(56), (59)兩式求其他改正數 v_4, v_5, v_6, v_7 之值。茲將第四節之例依此法平差如下:

角度觀測值: (參考第九圖)

(1)	42° 38′ 50″.51	(2)	41° 33′ 08″.83
(3)	37° 48′ 37″.59	(4)	57° 59′ 21″.96
(5)	29° 37′ 43″.75	(6)	54° 34′ 15″.64
(7)	70° 46′ 25″.44	(8)	25° 01′ 35″.80

按第 234 頁之結果, $\triangle ABC$ 及 $\triangle DAB$ 之閉合差為 $-1''.37$ 及 $+0.37$, 如命 v_1, v_2, v_3, v_8 為獨立未知數,則按照式(56)得

$$v_4 = -v_1 - v_2 - v_3 + 1.37$$
$$v_7 = -v_1 - v_2 - v_8 - 0.37$$

其次以 C 點及 D 點為極,得邊長條件不符值如下:

以 C 為極之邊長條件計算:

角 度	觀 測 值	正弦對數	δ	角度	觀 測 值	正弦對數	δ
(1)	42° 38′ 50″.51	9.8308992	+2.28	(2+3)	79°21′ 46″.42	9.9924722	+0.39
(3)	37° 48′ 37″.59	9.7874966	+2.71	(6)	54°34′ 15″.64	9.9110695	+1.50
(6+7)	125° 20′ 41″.08	9.9115231	−1.50	(8)	25°01′ 35″.80	9.6263806	+4.32
		9.5299189				9.5299223	

故 $$w_c = -3.4$$

以 D 為極之邊長條件計算:

角度	觀測值	正弦對數	δ	角度	觀測值	正弦對數	δ
(3)	37°48′37″.59	9.7874966	+2.71	(4+5)	87°37′05″.71	9.9996247	+0.09
(5)	29°37′43″.75	9.6940602	+3.70	(8)	25°01′35″.80	9.6263806	+4.32
(1+8)	67°40′26″.31	9.9661592	+0.86	(2)	41°33′08″.83	9.8217135	+2.37
		9.4477160				9.4477188	

故
$$w_d = -2.8$$

按照(57)(58)兩式，得

$$-3.00\,v_6 = -3.78\,v_1 - 1.11\,v_2 - 2.32\,v_3 + 2.82\,v_8 + 2.84$$
$$+3.61\,v_5 = -0.95\,v_1 + 2.28\,v_2 - 2.80\,v_3 + 3.46\,v_8 + 2.92$$

由此可化爲(59)之形式：

$$v_6 = +1.26\,v_1 + 0.37\,v_2 + 0.77\,v_3 - 0.94\,v_8 - 0.95$$
$$v_5 = -0.26\,v_1 + 0.63\,v_2 - 0.78\,v_3 + 0.96\,v_8 + 0.81$$

是以全體改正數方程式爲：

$$\begin{aligned}
v_1 &= +v_1 \\
v_2 &= \qquad\qquad +v_2 \\
v_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad +v_3 \\
v_4 &= -v_1 \quad -v_2 \quad -v_3 \qquad\qquad +1.37 \\
v_5 &= -0.26v_1 + 0.63v_2 - 0.78v_3 + 0.96v_8 + 0.81 \\
v_6 &= +1.26v_1 + 0.37v_2 + 0.77v_3 - 0.94v_8 - 0.95 \\
v_7 &= \quad -v_1 \quad -v_2 \qquad\qquad -v_8 \quad -0.37 \\
v_8 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +v_8
\end{aligned}$$

由此列出法方程式：

$$\begin{aligned}
\underline{4.655\,v_1} \; + 2.302\,v_2 + 2.173\,v_3 - 0.433\,v_8 - 2.407 &= 0 \\
\underline{+3.534\,v_2} + 0.794\,v_3 + 1.257\,v_8 - 0.842 &= 0 \\
\underline{+3.201\,v_3} - 1.473\,v_8 - 2.734 &= 0 \\
\underline{+3.805\,v_8} + 2.040 &= 0
\end{aligned}$$

解出後，得

$$v_1 = +0''.162 \quad v_2 = +0''.134 \quad v_3 = +0''.551 \quad v_8 = -0''.348$$

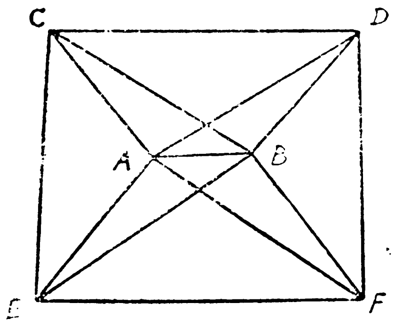
代入改正數方程式內，得其他角度之改正數爲：

$$v_4 = +0''.523 \quad v_5 = +0''.088 \quad v_6 = +0''.055 \quad v_7 = -0''.318$$

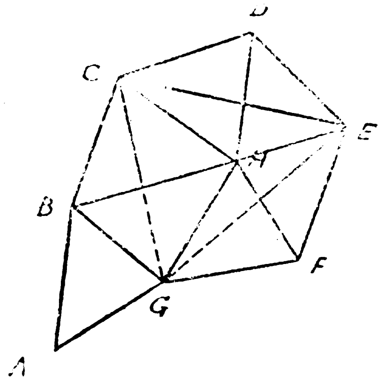
試與第四節用繁數法所作結果比較，可知二者完全符合，其最後一位所差之數，係由於湊整之所致。

習 題

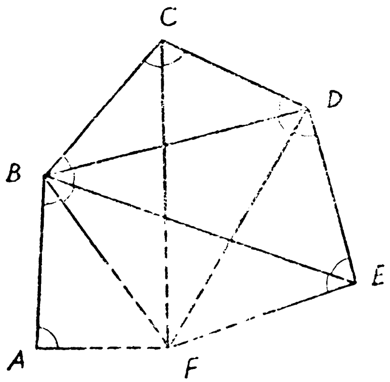
1．試求下列各圖形之條件方程數目，並指出各條件之列法



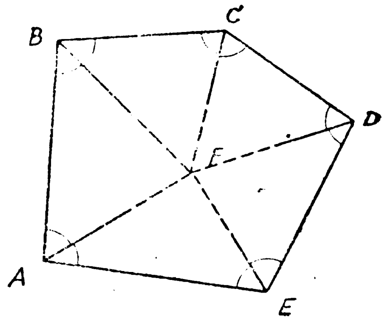
第八章 第十九圖
(a) 方向觀測



第八章 第二十圖
(b) 方向觀測



第八章 第二十一圖
(c) 角度觀測



第八章 第二十二圖
(d) 角度觀測

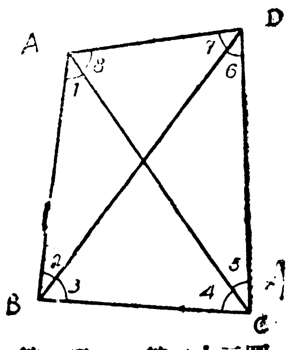
2．下列四邊形試用分組平差法將其平差：

(1) 43° 44′ 02″.0　(5) 28° 17′ 12″.9

(2) 26° 42′ 51″.8　(6) 42° 09′ 40″.3

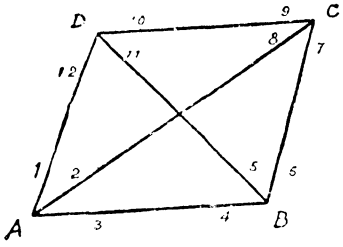
(3) 61° 29′ 53″.9　(7) 44° 49′ 27″.4

(4) 48° 03′ 10″.3　(8) 64° 43′ 42″.3



第八章 第二十三圖

3．試將下列方向觀測之四邊形用嚴格法平差：



第八章　第二十四圖

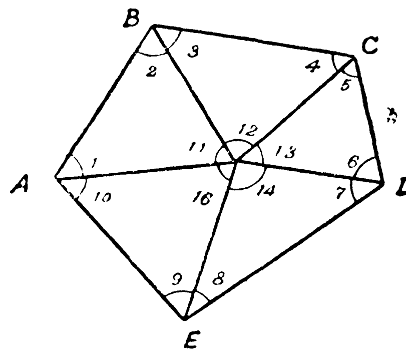
測站 A:		測站 B:	
1.	$0°\ 00'\ 00''$	4.	$0°\ 06'\ 00''$
2.	$37°\ 26'\ 41''$	5.	$41°\ 17'\ 34''$
3.	$72°\ 02'\ 06''$	6.	$97°\ 15'\ 36''$
測站 C:		**測站 D:**	
7.	$0°\ 06'\ 00''$	10.	$0°\ 00'\ 00''$
8.	$48°\ 09'\ 02''$	11.	$46°\ 01'\ 27''$
9.	$78°\ 00'\ 28''$	12.	$112°\ 41'\ 51''$

四邊形之面積甚小，其球面角超可略而不計。

4．上題試用簡略方法平差並比較其結果。

5．下列五邊中點形之觀測結果爲：

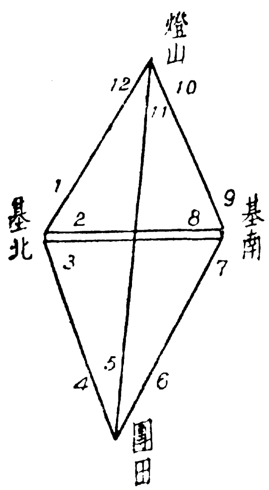
(1)	$38°\ 52'\ 12''.7$	(9)	
(2)	$52°\ 12'\ 31''.5$	(10)	
(3)	$48°\ 51'\ 13''.7$	(11)	
(4)		(12)	
(5)		(13)	
(6)		(14)	
(7)		(15)	
(8)			



第八章　第二十五圖

試平差之並求每角觀測之中誤差。

6．北碚基線網之第一次擴大圖形如下，其觀測結果爲：



第八章　第二十六圖

測站：基北		測站：基南	
1.	$0°\ \ 0'\ \ 0''.00$	7.	$0°\ \ 0'\ \ 0''.00$
2.	$87°\ 06'\ 06''.64$	8.	$81°\ 29'\ 40''.02$
3.	$148°\ 13'\ 38''.64$	9.	$147°\ 20'\ 47''.49$
測站：團田		**測站：燈山**	
4.	$342°\ 25'\ 12''.95$	10.	$0°\ \ 0'\ \ 0''.00$
5.	$0°\ \ 0'\ \ 0''.00$	11.	$12°\ 51'\ 12''.28$
6.	$19°\ 47'\ 59''.97$	12.	$27°\ 02'\ 46''.37$

各三角形之球面角超爲：

南北燈：　$0''.01$

南北團：　$0''.00$

南燈圍:　　0″.00

北燈圍:　　0″.00

試將其平差並求第一次擴大邊(燈山)——(圍田)之中誤差(基線量測之誤差不計)。

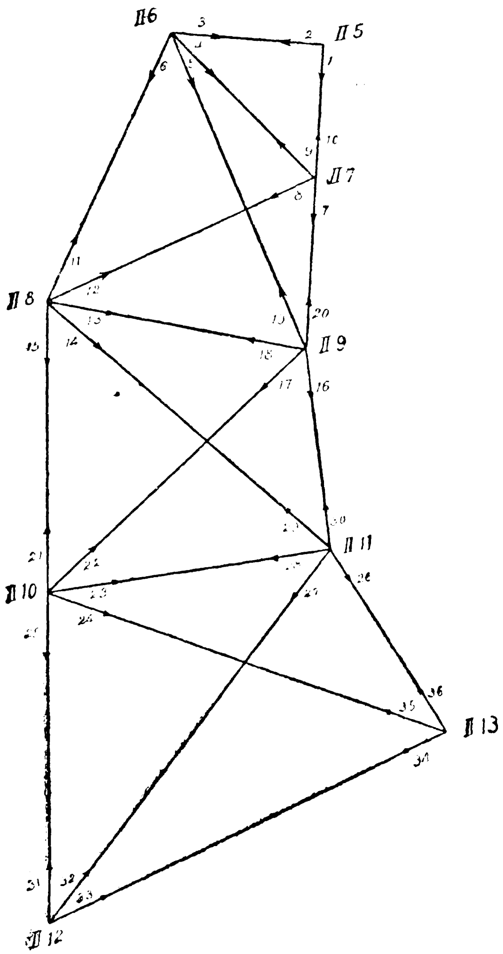
第九章　三角網之其他條件

第一節　基線條件

當三角網或三角鎖內不僅含有一條基線時，卽發生基線條件，亦名爲長度條件；蓋自任意一基線（或其擴大邊）出發，經過三角網之任意一部計算各邊長度，以推至另外一基線（或擴大邊）時，其所得之結果必須與該邊直接量得（或擴大）之結果完全相符。今設想在一網內共有 g 條基線，則欲達到上述目的必須有 $g-1$ 個基線條件。此處所言之基線爲廣義的，亦包括強制附合平差時之固定邊長。所謂強制附合平差者，卽所欲平差之三角網與一已經平差之三角網相接，而平差後必須使原平差之結果不變之謂。就長度言，兩網之公共邊必須保留原來平差之長度。

基線條件中通常假定基線或固定邊之値不受改正，蓋基線之量測至爲精密，其誤差與三角網遞算之誤差相比，可以不加計較也。

基線條件與邊長條件之形式無異，茲以第八章第七節中國地理研究所之三角網爲例，而將其圖形再度繪之於下（第一圖），以解釋基線條件之列法。圖中之 II 5——II 6一邊爲北碚基線之擴大邊；II 12——II 13一邊爲由重慶基線（測量總局所測）推算而得。今爲欲使此兩基線之結果相合，而加於此網內平差，則必



第九章　第一圖

須列一基線條件。設

$$L_1 = \mathrm{II}\ 5 —— \mathrm{II}\ 6 \text{ 量得之長度}$$

$$L_2 = \mathrm{II}12 —— \mathrm{II}13 \text{ 量得之長度}$$

則用平差後之方向值計算，必須能符合下列公式：

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\mathrm{II}5-\mathrm{II}6}{\mathrm{II}6-\mathrm{II}7} \cdot \frac{\mathrm{II}6-\mathrm{II}7}{\mathrm{II}7-\mathrm{II}8} \cdot \frac{\mathrm{II}7-\mathrm{II}8}{\mathrm{II}8-\mathrm{II}9} \cdot \frac{\mathrm{II}8-\mathrm{II}\ 9}{\mathrm{II}9-\mathrm{II}10} \cdot \frac{\mathrm{II}\ 9-\mathrm{II}10}{\mathrm{II}10-\mathrm{II}11} \cdot \frac{\mathrm{II}10-\mathrm{II}11}{\mathrm{II}11-\mathrm{II}12}$$
$$\cdot \frac{\mathrm{II}11-\mathrm{II}12}{\mathrm{II}12-\mathrm{II}13} \tag{1}$$

應用正弦定律，代入式(1)內，卽得

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\sin(10-9)}{\sin(2-1)} \cdot \frac{\sin(12-11)}{\sin(6-4)} \cdot \frac{\sin(20-18)}{\sin(8-7)} \cdot \frac{\sin(22-21)}{\sin(15-13)} \cdot \frac{\sin(30-28)}{\sin(17-16)}$$
$$\cdot \frac{\sin(32-31)}{\sin(25-23)} \cdot \frac{\sin(36-34)}{\sin(27-26)} \tag{2}$$

將式(2)化爲對數式，命各角度正弦對數每秒之差爲 δ，則式(2)可化爲下列條件方程式：

$$\delta_{2-1}v_1 - \delta_{2-1}v_2 + \delta_{6-4}v_4 - \delta_{6-4}v_6 + \delta_{8-7}v_7 - \delta_{8-7}v_8 - \delta_{10-9}v_9 + \delta_{10-9}v_{10} - \delta_{12-11}v_{11} + \delta_{12-11}v_{12}$$
$$+ \delta_{15-13}v_{13} - \delta_{15-13}v_{15} + \delta_{17-16}v_{16} - \delta_{17-16}v_{17} - \delta_{20-18}v_{18} + \delta_{20-18}v_{20} - \delta_{22-21}v_{21} + \delta_{22-21}v_{22}$$
$$+ \delta_{25-23}v_{23} - \delta_{25-23}v_{25} + \delta_{27-26}v_{26} - \delta_{27-26}v_{27} - \delta_{30-28}v_{28} + \delta_{30-28}v_{30} - \delta_{32-31}v_{31} + \delta_{32-31}v_{32}$$
$$- \delta_{36-34}v_{34} + \delta_{36-34}v_{36} + w_g = 0 \tag{3}$$

式(3)之列出不再解釋，蓋與邊長條件之化算完全相同，其中之不符值 w_g 可以下式表示之：

$$\log\sin(10\times9)' + \log\sin(12-11)' + \log\sin(20-18)' + \log\sin(22-21)'$$
$$+ \log\sin(30-28)' + \log\sin(32-31)' + \log\sin(36-34)' - \log\sin(2-1)'$$
$$- \log\sin(6-4)' - \log\sin(8-7)' - \log\sin(15-13)' - \log\sin(17-16)'$$
$$- \log\sin(25-23)' - \log\sin(27-26)' - (\log l_1 - \log l_2)' = w_g \tag{4}$$

式(4)中各角度均加一撇，蓋表示係觀測值也。根據第八章第 259 頁之觀測值，可將(3)(4)兩式計算如下：

		δ			δ
$\log\sin(10-9)'$	9.912 0688	+1.49	$\log\sin(2-1)'$	9.999 9552	+0.03
$\log\sin(12-11)'$	9.821 7131	+2.37	$\log\sin(6-4)'$	9.966 1591	+0.86
$\log\sin(20-18)'$	9.999 6247	+0.68	$\log\sin(8-7)'$	9.911 0700	+1.50
$\log\sin(22-21)'$	9.822 5906	+2.37	$\log\sin(15-13)'$	9.994 3913	+0.34
$\log\sin(30-28)'$	9.980 0672	−0.65	$\log\sin(17-16)'$	9.876 8795	+1.84
$\log\sin(32-31)'$	9.656 7044	+4.13	$\log\sin(25-23)'$	9.951 8118	−1.05

$\log\sin(36-34)'$ 9.999 1950 -0.13	$\log\sin(27-26)'$ 9.921 2704 $+1.39$
9.191 9638	9.621 5373

差異＝9.570 4265

$\log l_1=3.811\ 2756$

$\log l_2=4.240\ 8526$

$\log l_1-\log l_2=9.570\ 4.30$

不符值 $w_g=$ 　　$+3.5$（因 δ 亦以對數第六位爲單位也）

基線條件方程式爲：

$$\begin{aligned}&+0.03v_1-0.03v_2+0.86v_4-0.86v_6+1.50v_7-1.50v_8-1.49v_9+1.49v_{10}\\&-2.37v_{11}+2.37v_{12}+0.34v_{13}-0.34v_{15}+1.84v_{16}-1.84v_{17}-0.08v_{18}+0.08v_{20}\\&-2.37v_{21}+2.37v_{22}-1.05v_{23}+1.05v_{25}+1.39v_{26}-1.39v_{27}+0.65v_{23}-0.65v_{30}\\&-4.13v_{31}+4.13v_{32}+0.14v_{34}-0.13v_{35}+3.5=0\end{aligned}$$

第二節　方位角及拉伯拉斯條件

方位角條件與基線條件之意義頗似。基線條件爲長度之聯合控制，方位角條件則爲方位角之聯合控制。在一較大之三角網中，自一固定方位角出發（例如由天文觀測所得）以求其他各邊之方位角，當傳遞次數過多時，常因觀測誤差之漸次積疊而使距原點方位角遼遠各邊之方位角誤差增大，因而影響遠處三角點位置之精度。欲免此弊，必須於網中多處作天文方位角之觀測，以資控制，因而發生方位角條件。所謂方位角條件者，即自一固定方位角出發，經三角網之各邊，推算至第二固定方位角，其所推算之結果必須與固定之值完全符合。此處所言之固定方位角，實際不僅指天文觀測之方位角，亦包括因強制附合而生之固定方位角。蓋強制附合時，不僅公共邊之邊長須保留，其方位角亦須保留也。一般而論，如有 a 個固定方位角，即有 $a-1$ 個方位角條件。

茲仍以前節之圖形爲例，II 5—II 6 一邊之方位角係由北碚基線網中天文觀測推算而得，II 12—II 13 之方位角亦可由測量總局在重慶基線端點之天文觀測推算。因測量總局之三角網早經平差，其點位並已作爲地形測量控制之用，是以中國地理研究所測量實驗區之三角鎖必須與之強制附合，以便地形圖之併合。茲設

α_1 代表由實驗區三角網推算 II 6 至 II 5 之方位角，

α_2 代表由測量局三角網推算 II 12 至 II 13 之方位角，

則根據第一圖,三角網內各方向必須滿足下列之方位角條件:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1+(6-3)-(180^\circ+\Delta\alpha_{6-8})+(15-11)-(180^\circ+\Delta\alpha_{8-10})+(25-21)-(180^\circ+\Delta\alpha_{10-12})\\
&+(33-31)=\alpha_2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

式中之 $\Delta\alpha_{6-8}$, $\Delta\alpha_{8-10}$ …… 爲大地線 II6—II8、II8—II10, II10—II12 往返方位角之差,例如 $\Delta\alpha_{6-8}=\alpha_{8-6}-\alpha_{6-8}-180^\circ$ (6)

其值可由平差前之三角形概算得出。今將觀測值代入式(5),即得方位角條件:

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}+w_a=0 \tag{7}$$

式中 w_a 一項爲:

$$
\begin{aligned}
w_a=(6-3)'+(15-11)'+(25-21)'+(33-31)'&\\
-(3\cdot180^\circ+\Sigma\Delta\alpha)+(\alpha_1-\alpha_2)&
\end{aligned}
\tag{8}
$$

茲以實際觀測之結果❶,將(7)(8)兩式計算如下:

$$
\begin{array}{lrrr}
(6-3)'= & 103 & 44 & 24.29\\
(15-11)'= & 160 & 10 & 27.18\\
(25-21)'= & 182 & 03 & 33.98\\
(33-31)'= & 56 & 57 & 26.14\\
\hline
 & 502 & 55 & 51.59\\
-(3\cdot180^\circ+\Sigma\Delta\alpha)= & -540 & 03 & 54.36\\
\hline
 & -37 & 08 & 2.77\\
\alpha_1-\alpha_2= & 37 & 08 & 2.55\\
\hline
w_a= & & & +0.22
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
\Delta\alpha_{6-8}= & 1' & 55''.38\\
\Delta\alpha_{8-10}= & 0' & 49''.98\\
\Delta\alpha_{10-12}= & 1' & 09''.00\\
\hline
\Sigma\Delta\alpha= & 3' & 54''.36
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrr}
\alpha_1= & 109^\circ & 49' & 54''.59\\
\alpha_2= & 72^\circ & 41' & 52''.04\\
\hline
\alpha_1-\alpha_2= & 37 & 08 & 2.55
\end{array}
$$

由此得方位角條件爲:

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}+0.22=0$$

上述之固定方位角除在強制附合之情形外,率由天文觀測得來。顧天文觀測之結果,尙含有垂線偏差之影響,不能與橢圓體面上所推算者盡相符合,故以之控制三角網之方位角實有不足。欲免此種誤差,必須利用拉伯拉斯方程式。凡一三角點,其經度與方位角均用天文觀測測定者即名爲拉伯拉斯點;在兩拉伯拉斯點之間,可按垂線偏差之關係,列一條件,是即

❶由測量總局三角網推算,II 12—II 13之方位角,係用觀測成果所計算,因其平差改正過大(有超過 3″者),如用平差值計算 w_a 將爲 $+6''.30$,顯係觀測或平差有誤之故。是以此處舉例未用之。

爲拉伯拉斯條件。

設 P_1 爲三角網之原點，所有網內其他各點之經緯度及方位角均由此點出發推算。茲有一拉伯拉斯點 P_2，其緯度爲 φ_2，$P_1 P_2$ 間之經度差由三角網計算而得者爲 λ_2，由天文觀測求得者爲 λ_2^*，又自 P_2 至其鄰近一任意三角點 P'_2 之方位角由三角網計算而得者爲 α_2，由天文觀測求得者爲 α_2^*。按垂線偏差之公式，P_2 點之拉伯拉斯方程式爲：

$$\alpha_2-\alpha_2^*=(\lambda_2-\lambda^*)\sin\varphi_2$$

或可書爲條件方程之形式：

$$(\alpha_2-\lambda_2\sin\varphi_2)-(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)=0 \tag{9}$$

今設 α_2'，λ'_2 爲由方向觀測值所計算之方位角及經度差值，其改正數爲 $\delta\alpha_2$ 及 $\delta\lambda_2$。又以 $(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)'$ 代表由天文觀測結果所得之值，其總共改正數以 u 表示之。將此等觀測值代入式(9)內，卽得

$$\delta\alpha_2-\delta\lambda_2\sin\varphi_2-u+w_l=0 \tag{10}$$

其中不符值項爲：

$$w_l=(\alpha'_2-\lambda'_2\sin\varphi_2)-(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)' \tag{11}$$

α'_2 實卽式(5)內之 α_2，用一般符號表示之可書作：

$$\alpha'_2=\alpha_1+\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha')$$

α_1 爲固定方位角，β' 爲各計算所用線之夾角，卽式（8）中之（6－3）′，(15－11)′，……等。又 α'_2 之改正數 $\delta\alpha_2$ 可書爲

$$\delta\alpha_2=\Sigma\delta\beta'-\Sigma\delta\Delta\alpha'$$

$\delta\beta'$ 及 $\delta\Delta\alpha'$ 爲 β' 及 $\Delta\alpha'$ 之改正數。故式(10)及(11)可化爲下式：

$$\Sigma\delta\beta'-u-(\delta\lambda_2\sin\varphi_2+\Sigma\delta\Delta\alpha')+w_l=0 \tag{10}^*$$

$$w_l=\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha')+(\alpha_1-\alpha_2^*)-(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2 \tag{11}^*$$

式(10)*中括弧內之兩項，係顧及平差後方向改正對於用觀測值所計算之初步經度差及方位角之影響。惟此種影響極小，據倍希林 (Bäschlin) 之研究[1]，在普通情形內可以完全不必顧及。又式(11)* 右方之前半部實卽式（8）中之 w_a，故可將此兩式再度簡化，而得應用之公式如下：

$$\Sigma v_a-u+w_l=0 \tag{12}$$

$$w_l=w_a-(\lambda'_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2 \tag{13}$$

---

[1] Baeschlin: Rapport sur la Répartition et L'utilization poatique des Points de Laplace, Bulletin Géodisique, 1936. pp. 425—458。

在式(12)中，將 $\Sigma\delta\beta'$ 易爲 Σv_a，卽用以計算方位角各有關方向之改正數也。將式(13)與式(8)比較，可知應用拉伯拉斯條件後之方位角條件不符值，較無拉伯拉斯條件者多一改正項 $(\lambda'_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2$。又式(12)較式(7)多一天文改正數 u。在平差時 u 之權應較方向改正之權爲小，蓋天文觀測結果不如一方向精度之高，其比例約在1:20至1:30之間。天文改正數實際應書作：

$$u=\delta\alpha_2^*-\delta\lambda_2^*\sin\varphi_2 \tag{14}$$

包括天文方位角及天文經度差兩項改正，但此二者不能再分開，故以上均以一 u 表示之。

茲爲解釋拉伯拉斯條件之列法起見，假定前述三角網之 II12 爲拉伯拉斯點，在此點之天文觀測結果(假定)爲：

II 6 – II12 之經度差 $\lambda_2^*=106°\,14'57''.912$

II12 – II13 之方位角 $\alpha_2^*=\ 72°\,41'52''.04$

II12之緯度 $\varphi_2=29°31'29''$

計算之步驟爲按方向觀測値求 λ'_2 及 $\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha')$，$\lambda'_2$ 由經緯度概算中得出，$\Sigma\beta'(180°+\Delta\alpha)$ 之計算已見於上面例中，將此値代入式(11)*內求 w_l 如下：

$\lambda'_2=$	106 14 57.289	$\alpha_1=$	109 49 54.59
$\lambda^*_2=$	106 14 57.912	$\alpha_2^*=$	72 41 52.04
$\lambda'-\lambda_2^*=$	−0.723	$\alpha_1-\alpha_2^*=$	+37 08 2.55
$\sin\varphi_2=$	0.4928	$\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha')=$	−37 08 2.77
$(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2=$	−0.36	$-(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2=$	+ 0.36
		$w_l=$	+0.15

然後由式(12)得拉伯拉斯條件爲：

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}-u+0''.15=0$$

第三節　經緯度條件

在強制附合三角網及環形網中，除有前述之基線及方位角條件外，尙有經緯度閉合之條件存在。例如第一圖之四邊形鎖，II12 – II13 一邊爲測量總局蓉渝系三角鎖之一邊，如欲將中國地理硏究所測量實驗區之三角網與蓉渝系三角鎖附合，須滿足四個條件：

(1) 由基線擴大邊 II5 – II6 推算至附合邊 II12 – II13 之長度，必須

與蓉渝三角網平差後所得該邊之長度相等，是為基線條件。

(2) 由 II6－II5 之原點方位角推算至附合邊 II12－II13 之方位角，必須與蓉渝三角網平差後所得該邊之方位角相等，是爲方位角條件。

(3) 由原點 II 6 之經緯度推算至 II12 之經緯度，必須與蓉渝三角網平差後所得 II12 一點之經緯度相合，此爲兩個條件，因經緯度條件必須分列，是爲經緯度條件。

關於基線及方位角條件之列法已於前兩節中述明，茲再進而解釋經緯度條件之列法，仍以中國地理研究所之三角網爲例。II 6 爲三角網中之經緯度原點，其值爲 φ_6 及 L_6，II6－II5 爲基線擴大邊，其長度以 s_{6-5} 表示之，其方位角爲出發方位角，以 α_{6-5} 表示之。又網中之 II12 爲與測量總局三角網之一共同點，設在該網內之坐標爲 $\varphi^\circ{}_{12}$ 及 $L^\circ{}_{12}$。今如自 II 6 循圖一之三角網計算 II12 之經緯度差，其值爲 $\sum\limits_6^{12}\Delta\varphi$ 及 $\sum\limits_6^{12}\lambda$，則經緯度條件應爲：

$$\varphi_6+\sum_6^{12}\Delta\varphi=\varphi^\circ{}_{12}$$

$$L_6+\sum_6^{12}\lambda=L^\circ{}_{12}$$

倘用觀測值循 II6—II8—II10—II12 計算之 $\Delta\varphi$ 及 λ 值以其上加一撇表示之，則經緯度條件之不符值爲：

$$\left.\begin{aligned}w_\varphi&=\sum_6^{12}\Delta\varphi'-(\varphi^\circ{}_{12}-\varphi_6)=\Delta\varphi'{}_{6-8}+\Delta\varphi'{}_{8-10}+\Delta\varphi'{}_{10-12}-(\varphi^\circ{}_{12}-\varphi_6)\\w_\lambda&=\sum_6^{12}\lambda'-(L'{}_{12}-L_6)=\lambda'{}_{6-8}+\lambda'{}_{8-10}+\lambda'{}_{10-12}-(L^\circ{}_{12}-L_6)\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

以 $\Delta\varphi'$ 及 λ' 改正數所列之經緯度條件爲：

$$\left.\begin{aligned}&d\Delta\varphi_{6-8}+d\Delta\varphi_{8-10}+d\Delta\varphi_{10-12}+w_\varphi=0\\&d\lambda_{6-8}+d\lambda_{8-10}+d\lambda_{10-12}+w_\lambda=0\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

式(16)中之 $d\Delta\varphi_{6-8}$ 及 $d\lambda_{6-8}$ 等並非觀測值之改正數，故必先將其化爲方向改正數 v 之函數。此工作需分兩步進行之。第一步將 $d\Delta\varphi$ 及 $d\lambda$ 等化爲各邊長 s 及方位角 α 之函數，第二步再將 s 與 α 之改正數 $d\log s$ 與 $d\alpha$ 列爲各方向改正數 v 之公式。第一步可取大地測量中經緯度計算公式之

第一項，而略去其他各項，對於此處應用，其公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi_{1\cdot2}&=(\varphi_2-\varphi_1)''=\frac{s_{12}\cos\alpha_{12}}{M_1}\rho''+\cdots\cdots+(\text{可略去之各項})\\ \lambda_{1\cdot2}&=L_2-L_1=\frac{s_{12}\sin\alpha_{12}}{N_1\cos\varphi_1}\rho''+\cdots\cdots+(\text{可略去之各項})\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

式(17)中之 φ_1，L_1，φ_2，L_2 爲兩三角點 P_1，P_2 之經緯度，$\Delta\varphi_{1\cdot2}$ 及 $\lambda_{1\cdot2}$ 爲兩點間之經緯度差以秒表示之。s_{12} 爲 P_1P_2 之距離，α_{12} 爲自 P_1 至 P_2 之方位角（自北方計算），M_1，N_1 爲 P_1 點之子午圈及卯酉圈曲度半徑，ρ'' 爲以弧度値化爲秒値之常數，在圓周 360° 之分割中，$\rho''=206265$。

今將式(14)依 s_{12} 及 α_{12} 微分，得

$$\left.\begin{aligned}d\Delta\varphi_{1\cdot2}&=\frac{\cos\alpha_{1\cdot2}}{M_1}\rho''\,ds_{1\cdot2}-\frac{s_{1\cdot2}\sin\alpha_{1\cdot2}}{M_1}\,d\alpha_{1\cdot2}\\ d\lambda_{1\cdot2}&=\frac{\sin\alpha_{1\cdot2}}{N_1\cos\varphi_1}\rho''\,ds_{1\cdot2}+\frac{s_{1\cdot2}\cos\alpha_{1\cdot2}}{N_1\cos\varphi_1}\,d\alpha_{1\cdot2}\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

此處之 $d\alpha_{1\cdot2}$ 亦以秒爲單位，故該項之 ρ'' 取消。將式(17)之關係代入式(18)，並將 ds 化爲 $d\log s$，又命 $\dfrac{N_1\cos\varphi_1}{M_1}=V_1^2\cos\varphi_1=A_1$，卽得

$$\left.\begin{aligned}d\Delta\varphi_{1\cdot2}&=+\frac{\Delta\varphi_{1\cdot2}}{\mu\cdot10^6}d\log s_{1\cdot2}-\frac{A_1}{\rho''}\lambda_{1\cdot2}\,d\alpha_{1\cdot2}\\ d\lambda_{1\cdot2}&=+\frac{\lambda_{1\cdot2}}{\mu\cdot10^6}d\log s_{1\cdot2}+\frac{1}{A_1\rho''}\Delta\varphi_{1\cdot2}d\alpha_{1\cdot2}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

此兩方程式代表 $\Delta\varphi_{1\cdot2}$ 及 $\lambda_{1\cdot2}$ 與 $d\log s_{1\cdot2}$ 及 $d\alpha_{1\cdot2}$ 之關係。μ 爲對數常數，等於 0.43429，又此處之 $d\log s_{1\cdot2}$ 以對數第六位爲單位，故須除以 10^6。

第二部將 $d\log s_{1\cdot2}$ 及 $d\alpha_{1\cdot2}$ 列爲各方向改正數之一次函數，茲以 H6—H8 之例說明之。由第一圖中可以看出：

$$s_{6-8}=s_{6-5}\frac{\sin(2-1)\sin(9-8)}{\sin(10-9)\sin(12-11)}\quad(20)$$

此式可按以前邊長條件之法，用對數化算，得

$$\begin{aligned}d\log s_{6-8}=&-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9-\delta_{10-9}v_{10}\\ &+\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12}\end{aligned}\quad(21)$$

δ_{2-1} 爲角度 $(2-1)$ 每變1秒，其正弦對數第六位之變化，v 之單位爲秒。又由圖中得方位角之關係：

$$\alpha_{6-8}=\alpha_{6-5}+(6-3) \tag{22}$$

化爲改正數公式，得

$$d\alpha_{6-8}=v_6-v_3 \tag{23}$$

此處須注意者，卽(20)(22)兩式之列出，必須自基線擴大邊及原點方位角出發。同樣亦可列出 II8—II10 II10—II12 之相當公式，今將其統列如下：

$$\left.\begin{array}{l}
\text{II6—II8} \\
\quad d\log s_{6-8}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9 \\
\qquad\qquad -\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12} \\
\quad d\alpha_{6-8}=-v_8+v_6 \\
\text{II8—II10} \\
\quad d\log s_{8-10}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{6-4}v_4+\delta_{6-4}v_6-\delta_{8-7}v_7 \\
\qquad\qquad +\delta_{8-7}v_8+\delta_{10-9}v_9-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11} \\
\qquad\qquad -\delta_{12-11}v_{12}-\delta_{18-17}v_{17}+(\delta_{18-17}+\delta_{20-18})v_{18} \\
\qquad\qquad -\delta_{20-18}v_{20}+\delta_{22-21}v_{21}-\delta_{22-21}v_{22} \\
\quad d\alpha_{8-10}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15} \\
\text{II10—II12} \\
\quad d\log s_{10-12}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{6-4}v_4+\delta_{6-4}v_6-\delta_{8-7}v_7 \\
\qquad\qquad +\delta_{8-7}v_8+\delta_{10-9}v_9-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11} \\
\qquad\qquad -\delta_{12-11}v_{12}-\delta_{15-13}v_{13}+\delta_{15-13}v_{15}-\delta_{17-16}v_{16} \\
\qquad\qquad +\delta_{17-16}v_{17}+\delta_{20-18}v_{18}-\delta_{20-18}v_{20}+\delta_{22-21}v_{21} \\
\qquad\qquad -\delta_{22-21}v_{22}-\delta_{28-27}v_{27}+(\delta_{28-27}+\delta_{30-28})v_{28} \\
\qquad\qquad -\delta_{30-28}v_{30}+\delta_{32-31}v_{31}-\delta_{32-31}v_{32} \\
\quad d\alpha_{10-12}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}
\end{array}\right\} \tag{24}$$

列出(24)各式後，卽可按(19)列出 $d\Delta\varphi_{6-8}$，$d\Delta\varphi_{8-10}$，$d\Delta\varphi_{10-12}$ 及 $d\lambda_{6-8}$，$d\lambda_{8-10}$，$d\lambda_{10-12}$ 各式，然後將其代入式(16)中，卽爲由 II6—II12 之經緯度條件矣。茲爲說明起見，將 $d\Delta\varphi_{6-8}$ 及 $d\lambda_{6-8}$ 兩式列下：

$$\left.\begin{aligned} d\Delta\varphi_{6-8} &= \frac{\Delta\varphi_{6-8}}{\mu\cdot 10^6}\Big\{-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9 \\ &\quad -\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12}\Big\}-\frac{A_6}{\rho''}\lambda_{6-8}(v_3+v_6) \\ d\lambda_{6-8} &= \frac{\lambda_{6-8}}{\mu\cdot 10^9}\Big\{-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9 \\ &\quad -\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}\delta_{11}-\delta_{12-11}v_{12}\Big\}+\frac{1}{A_6\rho''}\Delta\varphi_{6-8}(-v_3+v_6) \end{aligned}\right\}(25)$$

在實際計算時，$\Delta\varphi_{6-8}$ 及 λ_{6-8} 可取由觀測值所得之概算值，A_6 之值可由地球橢圓函數之表中以 φ_6 爲引數，查出 V_6^2 之對數而按 $A_6=V_6^2\cos\varphi_6$ 計算之。

今以數目計算之結果綜列如下❶：

$\varphi_6 = 29°\ 49'\ 48''.426$， $\varphi°_{12} = 29°\ 31'\ 28''.828$ $\varphi°_{12}-\varphi_6 = -18'19''.598$

$L_6 = 106°\ 22'\ 50''.169$， $L°_{12} = 106°\ 14'\ 57.260$ $L°_{12}-L_6 = -\ 7'52''.909$

由大地坐標之初步計算，得

$$\begin{aligned} \Delta\varphi'_{6-8} &= -5'05''.424 = -305''.424 & \lambda'_{6-8} &= -3'52''.248 = -232''.248 \\ \Delta\varphi'_{8-10} &= -6'01''.137 = -361''.137 & \lambda'_{8-10} &= -1'40''.884 = -100''.884 \\ \Delta\varphi'_{10-12} &= -7'13''.108 = -433''.108 & \lambda'_{10-12} &= -2'19''.747 = -132''.747 \\ \Sigma\Delta\varphi' &= -18\quad 19.669 & \Sigma\lambda' &= -7\quad 52.879 \\ -(\varphi°_{12}-\varphi_6) &= +18\quad 19.598 & -(L°_{12}-L_6) &= +7\quad 52.909 \\ w_\varphi &= \quad -0''.071 & w_\lambda &= \quad +0''.030 \end{aligned}$$

其次再以 φ_6，φ_8，φ_{10} 爲引數，自地球橢圓表中查出 V_6，V_8，V_{10} 之對數而計算式(25)中之係數：

$\log V_6^2$	$=0.00221$	$\log V_8^2$	$=0.00221$	$\log V_{10}^2$	$=0.00221$
$\log\cos\varphi_6$	$=9.93827$	$\log\cos\varphi_8$	$=9.93864$	$\log\cos\varphi_{10}$	$=9.93906$
$\log A_6$	$=9.94048$	$\log A_8$	$=9.94085$	$\log A_{10}$	$=9.94128$
$\log\rho''$	$=5.31443$	$\log\rho''$	$=5.31443$	$\log\rho''$	$=5.31443$
$\log\frac{A_6}{\rho''}$	$=4.62605$	$\log\frac{A_8}{\rho''}$	$=4.62642$	$\log\frac{A_{10}}{\rho''}$	$=4.62685$
$\log\lambda_{6-8}$	$=2.36595\ n$	$\log\lambda_{8-10}$	$=2.00382\ n$	$\log\lambda_{10-12}$	$=2.14534\ n$
	$6.99200\ n$		$6.63024\ n$		$6.77219\ n$
$\frac{A_6\lambda_{6-8}}{\rho''}$	$=-0.000982$	$\frac{A_8\lambda_{8-10}}{\rho''}$	$=-0.000427$	$\frac{A_{10}\lambda_{10-12}}{\rho''}$	$=-0.000592$

❶此處 $\varphi°_{12}$ 及 $L°_{12}$ 之值係假定者，並非實際之值。

$\log\ \Delta\varphi_{6-8}=2.48490\,n$	$\log\ \Delta\varphi_{8-10}=2.55767\,n$	$\log\ \Delta\varphi_{10-12}=2.63660\,n$
$\log\ A_{6}\rho''=5.25491$	$\log\ A_{8}\rho''=5.25528$	$\log\ A_{10}\rho''=5.25571$
$7.22999\,n$	$7.30239\,n$	$7.38089\,n$
$\frac{\Delta\varphi_{6-8}}{A_{6}\rho''}=-0.001698$	$\frac{\Delta\varphi_{8-10}}{A_{8}\rho''}=-0.002006$	$\frac{\Delta\varphi_{10-12}}{A_{10}\rho''}=-0.002404$
$\log\ \Delta\varphi_{6-8}=2.48490\,n$	$\log\ \Delta\varphi_{8-10}=2.55767\,n$	$\log\ \Delta\varphi_{10-12}=2.63660\,n$
$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$	$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$	$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$
$6.84712\,n$	$6.91989\,n$	$6.99882\,n$
$\frac{\Delta\varphi_{6-8}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000703$	$\frac{\Delta\varphi_{8-10}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000832$	$\frac{\Delta\varphi_{10-12}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000997$
$\log\ \lambda_{6-8}=2.36595\,n$	$\log\ \lambda_{8-10}=2.00382\,n$	$\log\ \lambda_{10-12}=2.14534\,n$
$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$	$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$	$\log\ 1:\mu\cdot 10^{6}=4.36222$
$6.72817\,n$	$6.36604\,n$	$6.50756\,n$
$\frac{\lambda_{6-8}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000535$	$\frac{\lambda_{8-10}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000232$	$\frac{\lambda_{10-12}}{\mu\cdot 10^{6}}=-0.000322$

又按觀測成果，將式(24)之數值填入，得下列各式：

II6—II8

$$d\log s_{6-8}=-0.03v_{1}+0.03v_{2}-0.74v_{8}+2.23v_{9}-1.49v_{10}+2.37v_{11}-2.37v_{12}$$

$$da_{6-8}=-v_{3}+v_{6}$$

II8—II10

$$d\log s_{8-10}=-0.03v_{1}+0.03v_{2}-0.86v_{4}+0.84v_{6}-1.50v_{7}+1.50v_{8}+1.49v_{9}$$
$$-1.49v_{10}+2.37v_{11}-2.37v_{12}-1.34v_{17}+1.42v_{18}-0.08v_{20}+2.37v_{21}$$
$$-2.37_{22}$$

$$da_{8-10}=-v_{3}+v_{6}-v_{11}+v_{15}$$

II10—II12

$$d\log s_{10-12}=-0.03v_{1}+0.03v_{2}-0.86v_{4}+0.86v_{6}-1.50v_{7}+1.50v_{8}+1.49v_{9}-1.49v_{10}$$
$$+2.37v_{11}-2.37v_{12}-0.34v_{13}+0.34v_{15}-1.84v_{16}+1.84v_{17}+0.08v_{18}$$
$$-0.08v_{20}+2.37v_{21}-2.37v_{22}-2.84v_{27}+2.19v_{28}+0.65v_{30}+4.13v_{31}$$
$$-4.13_{32}$$

$$da_{10-12}=-v_{3}+v_{6}-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}$$

將以上各式按式(25)乘以相當之係數，卽可列出 $d\Delta\varphi$, $d\lambda$ 各改正數方程式。茲爲便小數位數適宜起見，將各式均乘以 1000，於是得

$$1000d\Delta\varphi_{6-8}=+0.02v_{1}-0.02v_{2}+0.98v_{3}-0.98v_{6}+0.52v_{8}-1.57v_{9}+1.05v_{10}$$
$$-1.67v_{11}+1.67v_{12}$$

$$1000d\Delta\varphi_{8-10}=+0.02v_{1}-0.02v_{2}+0.43v_{3}+0.72v_{4}-1.15v_{6}+1.25v_{7}-1.25v_{8}$$
$$-1.24v_{9}+1.24v_{10}-1.54v_{11}+1.97v_{12}-0.48v_{15}-1.12v_{17}$$
$$-1.18v_{18}+0.07v_{20}-1.97v_{21}+1.97v_{22}$$

$$1000d\Delta\varphi_{10-12}=+0.03v_1-0.03v_2+0.59v_3+0.86v_4-1.45v_6+1.50v_7-1.50v_8$$
$$-1.49v_9+1.49v_{10}-1.77v_{11}+2.36v_{12}+0.34v_{13}-0.93v_{15}+1.84v_{16}$$
$$-1.84v_{17}-0.08v_{18}+0.08v_{20}-1.77v_{21}+2.36v_{22}-0.59v_{25}+2.83v_{27}$$
$$-2.18v_{28}-0.65v_{30}-4.12v_{31}+4.12v_{32}$$

$$1000\ d\lambda_{6-8}=+0.02v_1-0.02v_2+1.70v_3-1.70v_6+0.40v_8-1.19v_9+0.80v_{10}$$
$$-1.27v_{11}+1.27v_{12}$$

$$1000\ d\lambda_{8-10}=+0.01v_1-0.01v_2+2.01v_3+0.19v_4-2.20v_6+0.35v_7-0.35v_8$$
$$-0.35v_9+0.35v_{10}+1.46v_{11}+0.55v_{12}-2.01v_{15}+0.31v_{17}-0.33v_{18}$$
$$+0.02v_{20}-0.55v_{21}+0.55v_{22}$$

$$1000\ d\lambda_{10-12}=+0.01v_1-0.01v_2+2.40v_3+0.28v_4-2.68v_6+0.48v_7-0.48v_8$$
$$-0.48v_9+0.48v_{10}+1.64v_{11}+0.76v_{12}+0.11v_{13}-2.51v_{15}+0.33v_{16}$$
$$-0.33v_{17}-0.03v_{18}+0.03v_{20}+1.64v_{21}+0.76v_{22}-2.40v_{25}+0.91v_{27}$$
$$-0.71v_{28}0.21v_{30}-1.33v_{31}+1.33v_{32}$$

將各 $d\Delta\varphi$ 之式及各 $d\lambda$ 之式分別相加，卽可按式(16)書出經緯度條件方程式。式中之 w_φ 及 w_λ 乃以 $1/1000''$ 爲單位，蓋上列之 $d\Delta\varphi$ 及 $d\lambda$ 各式均以 1000 乘過也。

緯度條件方程式：

$$+0.07v_1-0.07v_2+2.00v_3+1.58v_4-3.58v_6+2.75v_7-2.23v_8-4.30v_9$$
$$+3.78v_{10}-4.98v_{11}+6.00v_{12}+0.34v_{13}-1.36v_{15}+1.84v_{16}-0.72v_{17}-1.26v_{18}$$
$$+0.15v_{20}-3.74v_{21}+4.33v_{22}-0.59v_{25}+2.83v_{27}-2.18v_{28}-0.65v_{30}-4.12v_{31}$$
$$+4.12v_{32}-71=0$$

經度條件方程式：

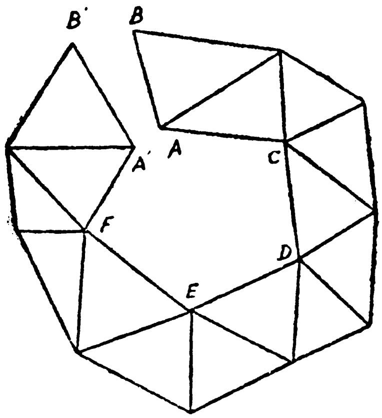
$$+0.04v_1-0.04v_2+6.11v_3+0.47v_4-6.58v_6+0.83v_7-0.43v_8-2.02v_9$$
$$+1.63v_{10}+1.83v_{11}+2.58v_{12}+0.11v_{13}-4.52v_{15}+0.33v_{16}-0.02v_{17}-0.36v_{18}$$
$$+0.05v_{20}+1.09v_{21}+1.31v_{22}-2.40v_{25}+0.91v_{27}-0.71v_{28}-0.21v_{30}-1.33v_{31}$$
$$+1.33v_{32}+30=0$$

除上述之方法外，經緯度條件亦可化至平面上列出，使其平面坐標相等。此法之優點在平面坐標計算之公式較爲簡單，但應用於較大規模之三角網時，因投影所生之誤差漸大，勢必顧及其改正數，是其缺點。關於此法之公式，其演化步驟與前述方法類似。至於方位角與坐標變化之關係，下章論交會定點法時，均將詳論，故此處從略。

第四節　環形網之平差

環形網之特徵,在其本身必須閉合。今如有一環形網如第二圖所示,則除普通之圖形條件外,尙有所謂環形條件者。蓋圖形條件中之角度條件滿足後,僅能使各三角形內之角度閉合;在此簡單之單鎖環形網中尙有一邊長條件,卽自任意一邊 AB 起循一方向,計算各邊之長度,及仍回算至 AB 邊本身時,其長度必須與出發之長度相符,卽第二圖中之 $A'B'$ 須與 AB 相等。

在普通三角網中,如上述之角度及邊長條件滿足後,三角網卽能符合無間矣。但在環形網中未必如是,蓋由第一圖中卽可看出,角度與邊長條件滿足後,$A'B'$ 兩點未必卽與 AB 相合於一處。欲使此兩點相合,尙有三個條件。



第九章　第二圖

(1) $A'B'$ 與 AB 之方位角必須相等,是爲方位角條件。

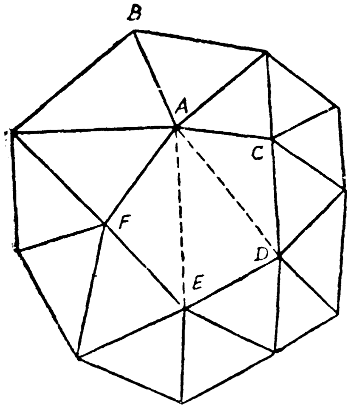
(2) A 與 A'(或 B 與 B')必須重疊,易言之,卽其經緯度必須相等,是爲兩個坐標條件。

此三個條件,統名之曰環形網條件,或曰多邊形條件,其性質固與閉合導線中之三個條件完全相同也。此三個條件中之第一條件,亦可化爲多邊形內角總和條件,蓋 $ACDEF$ 爲一多邊形,由其各邊方向所構成之內角總和如與幾何條件相合,則 AB 必與 $A'B'$ 平行,關於此種條件之列法,前數節中均已論及,茲不重述。

環形網之條件,除上述一種列法外,尙可有他種選擇。例如方位角條件,亦可易以 B 點任意之一坐標(經度或緯度)條件。此外邊長條件亦可易以 B 點其他一坐標之條件。如此則除各三角形閉合之條件外,尙加 AB 兩點之四個坐標條件。條件方程式之數目仍舊不變。一般因方位角條件較爲簡單,故常用前述之組合。

坐標條件不一定爲經緯度條件,亦可爲平面坐標條件。

環形網之平差除用上法外,尙可利用虛擬觀測法平差。例如第一圖之網形,其環形中間之多邊形甚小,故可假設由 A 點至 DE 兩點曾作觀測,



第九章　第三圖

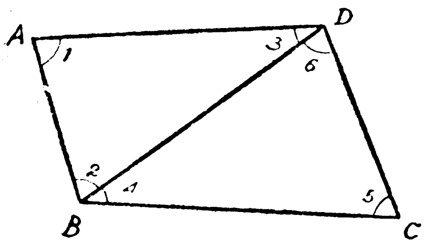
於是其圖形變爲第二圖之形狀。AD 與 AE 兩方向，可給與一近似値，由此列出以 A，C，D，E，F 五點爲中心之五個邊長條件。在此五個邊長條件中，共含有兩個未知數，卽虛擬觀測之兩個方向是也。此兩個方向旣未經實測，自不能列於條件方程之內，故必須由五個條件中將其消去，於是僅餘三個邊長條件。以此三個條件並加 $ACDEF$ 五邊形之內角總和條件，卽相當於前述之 AB 邊長及三個環形條件，其數目亦共爲四個。兩種方法中條件方程之列出工作俱甚繁雜，如環形中間之多邊形不過四五邊，則後法或較簡單；但在較大環形網內，中間多邊形點數甚多時，後法中消除虛擬未知數之工作太繁，反不若前法之簡單矣。

一般而論，環形網之條件過於複雜，在較大規模之平差時，多不採用上述之方法，而採用特殊方法，如分段以大地線代替，或用坐標法等，此種特殊方法，將於第十一章論述之。

第十章　交會定點法

第一節　概論

通常無強制附合之三角網，無論其精度屬於何等，均用條件法平差，其法已於前章詳論之。但就理論言，固亦可以各三角點之平面坐標爲未知數，而用間接觀測法平差，此時除由出發二點之坐標可認爲已知外，其餘各點均各含有兩未知數（即點之縱橫二坐標）。今設有一簡單之三角鎖，共有 n 個三角形，其總共點數應爲 $n+2$ 個，除去兩個已知點外，尚有 n 個未知點，即含有 $2n$ 個未知數。按間接觀測法平差時，應得 $2n$ 個法方程式。如用條件法平差，在此最簡單之三角鎖內，僅含有角度條件方程式 n 個，即僅解 n 個法方程式即足。故後法較前法簡便，且用平面坐標平差時，必須先求出每點之近似坐標值，計算工作更較繁雜，但若三角網之點數較少，而強制附合之處甚多，譬如由一二等三角點定三四等三角點之位置，而以一二等三角點之位置爲不變時，則用平面坐標平差，即較用條件法平差適宜，最簡單之例，設由三個已知三角點 $A\ B\ C$



第十章　第一圖

（第一圖）測定一新點 D 之位置時，其強制附合之條件，除兩個三角形各有一角度條件外，尚有自 $A\ B$ 點出發閉合於已知點 C 之強制條件兩個，共需列四個條件方程式，因得四個法方程式。同一問題若用平面坐標方法平差，則無論觀測之角度爲數幾何，其未知數僅有兩個，即新點 D 之縱橫二坐標值也。故在此種情形之時，宜用平面坐標方法平差。此法亦名爲交會定點法。

所謂交會定點法，即利用交會線之相交而定點位之謂。交會線可由已知點出發測視未知點，稱之爲前方交會線，或外方向線；其由未知點出發而測視已知點者，稱之爲後方交會線，或內方向線；凡連接一已知點與一未知點之視線在兩端俱行觀測者，即同時包括內外方向線者，稱之爲前後

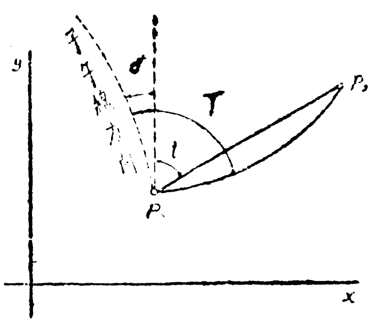
方交會線。在用交會法同時定多點之位置時，亦有自未知點間互測者。

交會定點法最普遍之應用為單點定位法，由數已知點測定一未知點位如第一圖所示之情形；或雙點定位法，由數已知點同時測定二新點之點位。多點定位法則鮮有應用，蓋新點數目加多時，通常多用條件平差法也。凡小三角之三角網中，待定之新點甚多時，有時逐點分開測求；亦有先求交會位置良好之點，得其點位之後，更利用之作為已知點，以測求其他之新點者，如此則繁複之三角網亦可分析為若干單點或雙點交會定位矣。

此類平差問題計算之步驟：第一，根據已知點之平面坐標及任意數個觀測之角度或方向，計算未知點之近似坐標；第二，根據未知點之近似坐標計算各方向或角度之近似值；第三，比較由第二步所算出之方向或角度近似值與觀測所得之值而列出改正數方程式。第一第二兩步驟至為明顯，關於改正數方程式之排列，將於以下數節詳論之。

第二節　方位角及距離之平面改正

用交會法定點時，以坐標值為未知數之間接平差，率行之於平面上；而觀測所得之角度或距離，則位於地球橢圓體上，故在應用此種方法平差之先，必須求其方位角及距離之改正。此種改正隨投影方法之不同而異。在測量實際所應用者多為正形投影，且地域較大時往往分為若干帶分投，以減少各種投影誤差。茲以最常用之橫向梅卡托投影及蘭孛圓錐正形投影為例，列舉其應用之公式。後者即為我國陸地測量總局所規定之統一投影法。



第十章　第二圖

平面方向角係以其標準子午線圈方向為縱坐標軸（y 軸），而大地方位角則以該點本身之子午線圈方向為標準，故二者之間相差子午線收斂角值 σ（第二圖）。此外球面與平面尚有一差別，即平面二點之連接直線並不相當於其他球表面之大地線是也。故除子午線收斂角外，尚須加此項較小之改正 $T-t$（第二圖）。此種改正無須用極嚴格之公式，僅取其展開後之首項即足。

（一）橫向梅卡托投影：橫向梅氏投影係以一子午圈為標準縱坐標軸，

以代普通正向梅卡托投影之以赤道為標準橫坐標軸，故其投影原則兩者相同，惟將投影圓柱面轉過 90° 之角也。

其方位角改正公式為：

$$\text{大地方位角}-\text{平面方位角} = T-t=\gamma+\frac{(y_2-y_1)(2x_1+x_2)}{6\,r^2\,\rho''} \qquad (1)$$

其中 γ 為子午線收斂角，$x_1\,y_1$ 為端點 P_1 之平面坐標，$x_2\,y_2$ 為端點 P_2 之平面坐標。r 為該投影區域內中心緯度之地球平均半徑，其與二主半徑 M, N 之關係為：

$$r=\sqrt{M\,N} \qquad (2)$$

至於長度改正則為：

$$m=\frac{ds}{dS}=1+\frac{x^2}{2\,r^2} \qquad \text{或} \qquad \log m=\frac{\mu}{2r^2}x^2 \qquad (3)$$

$$\log s-\log S=\frac{\mu}{12\,r^2}(x_1{}^2+4x_0{}^2+x_2{}^2) \qquad (4)$$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \mu=0.4343 \qquad \log\mu=9.63778$$

其中 s 為平面之直線距離，S 為地面距離，m 為其點之投影比例尺。由公式 (3) 可知距離改正隨其橫坐標 x 變化，故如 m 與 x 之關係列有表格時，則可在表內求其比例尺之中值以改正距離，不必再應用式(4)矣(參考下例)。

(二)蘭孛圓錐正形投影：以地軸為中軸之圓錐作為投影面，展開之即得圓錐投影。此圓錐往往割交於地球之二緯圈 φ_1，φ_2。在二緯圈時其比例尺差為零。設使此圓錐切交於地球時，其切交之緯圈 φ_0 約位於略大於 φ_1 與 φ_2 中數之處，如以圓球代表此部分之地球橢圓體面時，則圓球之半徑 $r=\sqrt{M\,N}$，均指 φ_0 處數值而言。圓錐投影之特徵為等緯圈之投影為圓弧，子午圈之投影為直線，任意一子午線投影與中間子午線間之角度間隔 θ 即為子午線收斂角，為其經度差之倍數。今更以 y_0 代表 φ_0 之縱坐標時，則其方位角之改正公式為：

$$\text{大地方位角}-\text{平面方位角}=T-t=+\theta-\frac{x_2-x_1}{2r^2\rho''}\left(y_1-y_0+\frac{y_2-y_1}{3}\right) \qquad (5)$$

長度改正則可由比例尺之微分公式得之。

$$m=\frac{ds}{dS}=1+\frac{y^2}{2r^2}-\frac{y^3\tan\varphi_0}{6r^3} \tag{6}$$

如只保留此式之第二項時，則與式(3)之結果完全相同，惟 y 與 x 對調，是卽長度誤差之改正隨縱坐標 y 而變異也。今設有表列 m 與 φ 角每分之變化（或與 y 值每公里之變化），則可直接應用式(6)求其中數。

例 試求某二點（北緯 41° 48′ 及 41°52.3′）間之距離改正。（應用陸地測量總局分帶蘭孛圓錐投影系統。）

下表之第一及第二兩項，取自蘭孛圓錐投影某帶之投影表。比例尺項乃以對數第七位爲單位之值。

表 一

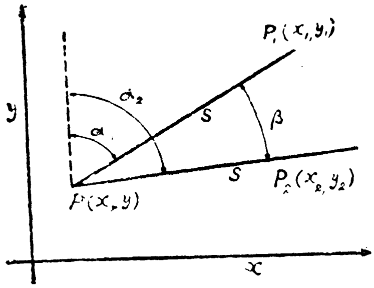
緯 度	比 例 尺 改 正	權	權 × 比 例 尺 改 正
φ			
41°48′.0	−26.3	0.5	−13.15
49′	−20.3	1	−20.3
50′	−13.9	1	−13.9
51′	− 7.1	1	− 7.1
52′.0	0.0	0.8	0.0
	和	4.3	−54.45

$$\frac{-54.45}{4.3}=\bar{\varphi}12.7$$

表列 41° 48′ 處之改正值 −26.3 應用於 41°47′.5 至 41°48′.5，但第一站之緯度爲 41° 48.0，故只計 −26.3 之半值。同理 52′ 3 大於 51′.5 之值爲 0.8，故以之爲 0.0 值之權，如此所得之平均值 −12.7 加之於地面上長度之對數值，卽得平面上長度之對數值矣。

第三節 方向與平面坐標之關係

交會定點之改正數方程式係由方向變遷與平面坐標值變遷間之關係得來。今設有一方向線 PP_1（第三圖），其兩端點之平面坐標各爲 $x\,y$ 與 $x_1\,y_1$，而其在 P 點之方向角設爲 α_1，則其方向角與二點平面坐標值之關係爲：



第十章　第三圖

$$\tan\alpha_1=\frac{x_1-x}{y_1-y} \tag{7}$$

$$\alpha_1=\tan^{-1}\left(\frac{x_1-x}{y_1-y}\right)$$

今所欲求者，即方向角度變遷 $d\alpha_1$ 與二端點平面坐標變遷 dx_1, dy_1, dx, dy 之關係，此關係可以微分式(7)得之：

$$d\alpha_1=\frac{d\left(\frac{x_1-x}{y_1-y}\right)}{1+\left(\frac{x_1-x}{y_1-y}\right)^2}=\frac{\frac{(y_1-y)(dx_1-dx)-(x_1-x)(dy_1-dy)}{(y_1-y)^2}}{1+\left(\frac{x_1-x}{y_1-y}\right)^2}$$

$$=\frac{(y_1-y)(dx_1-dx)-(x_1-x)(dy_1-dy)}{(y_1-y)^2+(x_1-x)^2} \tag{8}$$

更以 S_1 代表 PP_1 之長，則

$$\left.\begin{aligned}S^2{}_1&=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2 \cdots\cdots\\ x_1-x&=S_1\sin\alpha_1 \quad \cdots\cdots\\ y_1-y&=S_1\cos\alpha_1 \quad \cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式(9)代入式(8)，得

$$d\alpha_1=\frac{\cos\alpha_1}{S_1}(dx_1-dx)-\frac{\sin\alpha_1}{S_1}(dy_1-dy) \tag{10}$$

在 PP_1 二點之中，設 P 爲已知點時，則其坐標值無變遷，而 $dx\ dy$ 爲零，此時 α_1 自已知點出發，爲前方交會定點時之情形。反之，設 P_1 爲已知點時，則同理 $dx_1\ dy_1$ 爲零，方向角 α_1 得自未知點 P 觀測已知點 P_1，爲後方交會定點時之情形。

在角度觀測時，角度爲二方向之差，其角度與平面坐標之微分關係，仍可利用式(10)求之。今設自第三圖之 P 點更有第二方向至 P_2，其方向角爲 α_2，其距離 $PP_2=S_2$，則其方向角度變遷與平面坐標變遷之微分方程式應爲：

$$d\alpha_2=\frac{\cos\alpha_2}{S_2}(dx_2-dx)-\frac{\sin\alpha_2}{S_2}(dy_2-dy) \tag{11}$$

而 PP_1 與 PP_2 間夾角 β 之變遷 $d\beta$ 應爲:

$$d\beta = d\alpha_2 - d\alpha_1$$

$$= \frac{\cos\alpha_2}{S_2}(dx_2 - dx) - \frac{\sin\alpha_2}{S_2}(dy_2 - dy) - \frac{\cos\alpha_1}{S_1}(dx_1 - dx)$$

$$+ \frac{\sin\alpha_1}{S_1}(dy_1 - dy) \qquad (12)$$

式(10)及(12)爲此章中之二基礎方程式,所有交會定點之平差問題,均由此關係出發。其坐標變化之係數 $\frac{\cos\alpha_i}{S_i}$, $-\frac{\sin\alpha_i}{S_i}$ 等簡稱之爲方向係數,以 a_i 及 b_i 代表之。當實際應用之時, $d\alpha$ 及 $d\beta$ 恆用秒爲單位, 距離 S 以公里爲單位,而坐標變遷 dx, dy 等取公寸單位;依此標準改動時,則方向係數內須各乘以 $\rho''\frac{1}{1000\times10}$ 一項。

第四節 方向係數之計算方法

由公式(9)之關係,方向係數可以下列三種之方法表示之:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= +\frac{\cos\alpha_i}{S_i}\frac{\rho''}{10000} = \frac{y_i - y}{S_i^2}\frac{\rho''}{10000} = \frac{\cos\alpha_i\sin\alpha_i}{x_i - x}\frac{\rho''}{10000} \\ b_i &= -\frac{\sin\alpha_i}{S_i}\frac{\rho''}{10000} = -\frac{x_i - x}{S_i^2}\frac{\rho''}{10000} = -\frac{\cos\alpha_i\sin\alpha_i}{y_i - y}\frac{\rho}{10000} \end{aligned}\right\} (13)$$

此三種形式均可視應用之便利而斟酌採用。如已知某視線之長度及方位角,可逕應用第一種形式用計算尺或對數計算;如有 $\cos\alpha.\sin\alpha.\frac{\rho}{10000}$ 之表格時,則以第三種形式爲便利;本書附錄列 $u = \frac{\cos\alpha.\rho}{10000}$ 及 $v = -\frac{\sin\alpha\,\rho}{10000}$ 表,依 α 每十分之間隔排列,所以供第一種形式計算時之應用; 此外尙有對數差法及其他圖解方法甚多,均以使式(13)中係數計算之能簡化爲主。茲將數種算法舉例如下,但無論應用何種計算方法,其 a 與 b 之符號可首由式(13)之第二種形式中判斷,卽 a 値之符號恆與縱坐標値差 $y_2 - y_1$ 相同, b 値之符號恆與橫坐標値差 $x_2 - x_1$ 相反也。

例: 今設有二點 P, P_1, 其坐標値爲已知,試求其方向係數 a 與 b。

P_1:	$x_1=2658004.85$		$y_1=\ 921220.79$
P:	$x\ =2695423.55$		$y\ =\ 890348.48$
	$x_1-x=-37418.55$		$y_1-y=+30872.31$

$$\begin{array}{ll}
\log x_1-x=4.5730870(n) & \log x_1-x=4.57309 \\
\log y_1-y=4.4895691 & \log \sin\alpha=9.88725-10 \\
\log\tan\alpha=0.0835179(n) & \log S=4.68584 \\
\alpha=309°31'28''.0 & S=4.8511\text{公尺} \\
 & \quad=48.51\ \text{公里}
\end{array}$$

(1) 對數計算法:

$$\begin{array}{ll}
\log\dfrac{\rho''}{10000}=1.3144 & \log-\dfrac{\rho''}{10000}=1.3144(n) \\
\log(1:S)=8.3142 & \log(1:S)=8.3142 \\
\log\cos\alpha=9.8037 & \log\sin\alpha=9.8873(n) \\
\log a=9.4323 & \log b=9.5159 \\
a=+0.271 & b=+0.328
\end{array}$$

(2) 利用 u, v 表法:

當 $\alpha=309°31'.5$ 時自附錄之表內得:

$u=+20.6265\cos\alpha=+13.12$ $\qquad v=-20.6265\sin\alpha=+15.92$

故: $a=+\dfrac{13.12}{48.51}=+0.271$ $\qquad b=+\dfrac{15.92}{48.51}=+0.328$

(3) 對數差計算法: 對數差

$\log x_1-x=4.5730870(n)$	每一公寸	11.6
$\log y_1-y=4.4895691$	每一公寸	14.0
$\log\tan\alpha=0.0835179(n)$	每　　秒	42.9

故知 x 坐標每1公寸之變遷相當於方向 $\dfrac{11.6}{42.9}=0''.271$ 之變遷。此值卽為係數 a; 而 y 坐標每一公寸之變遷相當於方向 $\dfrac{14.0}{42.9}=0''.327$ 之變遷,此值卽為係數 b。

a 與 b 係數求得之後,可利用其二者平方之和以驗核之。按:

$$a^2+b^2=\frac{\rho^2}{100\,S^2}$$

關係，此平方和值與視線之方向無關，如以 S 之公里值列 $\frac{\rho^2}{100\,S^2}$ 之表，則查表卽可知其平方和應得之值矣。

第五節　前方交會定點法

前方交會定點法者由已知點觀測新點（未知點）而定新點之坐標之謂。觀測可分爲角度與方向二種，玆分別論述之。

（一）角度觀測：

應用角度觀測時，其改正數方程式爲式(12)，此時觀測之站 P（第三圖）爲已知點，故其點之坐標變遷恆爲零。在 P_1 與 P_2 之中一點爲已知點，一點爲未知點。若已知點之方向角小於未知點之方向角時（如第四圖雷家山之 β_1 角），則式(12)之 dx_1 與 dy_1 以及 dx 與 dy 均應爲零，而其應用之公式爲：

$$d\beta=\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy\cdots\cdots \tag{14}$$

此時之 a，S 及 dx dy 均指與新點（第四圖中大坡點）有關之各值而言。設至已知點之方向角大於未知點之方向角時（如第四圖寶華寺站之 β_2 角大寶鼎站之 β_3，β_4，角等），則式(12)之 dx_2 與 dy_2 以及 dx 與 dy 均爲零，而其應用之公式爲：

$$d\beta=-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy\cdots\cdots \tag{15}$$

今命 β' 爲觀測之角值，β 爲平差後應得之角值，β_0 爲根據新點近似坐標值所得之近似角值，則 $\beta=\beta'+v=\beta_0+d\beta$，故：

$$v=d\beta-(\beta'-\beta_0=\pm\frac{\cos\alpha}{S}dx\mp\frac{\sin\alpha}{S}dy-(\beta'-\beta_0)$$

$(\beta'-\beta_0)$ 爲常數項，以 l 表示之，並代入 a，b 之值，卽得

$$v=\pm a dx\pm b dy-l \tag{16}$$

a，b 之前置符號如下：

＋：　已知點方向在未知點之左方

－：　已知點方向在未知點之右方

式(16)爲前方交會角度觀測之改正數方程式。

本章所舉實例均係採自中國地理研究所北碚測量實驗區之三角點觀測成果，爲應用之方便計，玆將其一部觀測成果列於下表：

三角點觀測成果一覽表

視準點	(主幹網平差後) 最後方位 ν			(歸化後) 觀測方向 a			定向角 $\nu-a$ $z=\frac{(\nu-a)}{m}$			計算用方向 $a+z$		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
(a)已知點												
仐8 天台寺　$x=3627282.28$　$y=231072.1$												
仐4 巴山				0	00	00.0						
仐3 獅子岩	83	01	45.8	45	57	31.2	37	4	14.6			
仐2 五雲山				77	18	20.3				114	22	34.9
仐9 大寶鼎　$x=3635625.49$　$y=227658.43$												
仐7 沙兒崗	19	52	30.3	36	07	16.0	343	45	14.3	19	52	32.6
仐1 大坡				262	13	0.71				245	67 58	23.7 17″
仐2 五雲山				305	28	23.3				289	13	39.9
仐8 天台寺	292	15	244	308	30	05.4			19.0	29.2	15	22.0
							343	45	16.6			
仐10 雷家山　$x=3624694.89$　$y=219925.86$												
仐1 大坡				27	22	30.3				44	14	11.7
仐7 豐文山				88	50	21.9				105	42	03.3
仐8 中雲寺				120	59	44.6				137	51	26.0
仐8 天台寺	13	04	04.0	356	12	22.6	16	51	41.4	13	0.4	04.0

△11 寶華寺　$x=3635045.46$　$y=222006.75$												
△9 大寶鼎	5	51	35.2	0	00	00.0	5	51	35.2	5	51	35.2
△1 大坡				292	49	58.2				298	41	33.4
△12 小塘口　$x=3621079.88$　$y=206553.06$												
△8 中雲寺				12	58	17.7				52	45	51.1
△13 歌樂山	72	05	02.9	32	17	29.5	39	47	33.4	72	05	02.9
△13 歌樂山　$x=3637643.67$　$y=211908.68$												
△8 中雲寺				0	00	00.0				283	21	29.5
△12 小塘口	252	05	02.9	328	43	33.4	283	21	29.5	252	05	02.9
△1 大坡　$x=3629815.25$　$y=224979.63$												
△9 大寶鼎	65	58	19.0	0	00	00.0	65	58	19.5	65	58	21.3
△11 寶華寺	118	41	40.3	52	43	18.4			21.9	118	41	39.7
△7 豐文山				123	23	18.9				189	21	40.2
△10 雷家山	224	14	13.5	158	15	54.7			18.8	224	14	16.0
△8 天台寺	339	03	0.45	273	04	30.4			25.1	339	03	0.7
△2 五雲山				326	41	05.4				32	39	26.7
							65	58	21.3			
△3 獅子岩　$x=363437.74$　$y=231940.45$												
△9 大寶鼎	163	45	14.5	0	00	00.0	163	45	14.5			
△2 五雲山				52	43	10.8	163					
△8 天台寺	263	01	45.8	99	16	33.5	163	45	12.3	216	28	23.3
△7 沙兒崗	59	27	40.5	255	42	29.7			10.8			
							163	45	12.5			
△4 巴山　$x=3629983.88$　$y=234648.76$												

令8 天台寺	217	04	17.5	0	00	00.0	217	04	17.5			
令6 張家埡口	30	09	0.2	173	04	42.6			17.6			
令3 獅子岩	121	38	57.3	264	34	35.5			21.8			
令2 五雲山				302	37	40.1				159	41	59.0
							217	04	18.9			

(b)新　點

令2 五雲山

令8 天台寺				0	00	00.0						
令4 巴　山				45	19	29.3						
令3 獅子岩				102	05	48.4						
令9 大寶鼎				174	51	03.2						
令1 大　坡				278	16	54.0						

令7 豐文山

令10 雷家山				0	00	00.0						
令1 大　坡				83	39	30.0						
令11 寶華寺				138	02	22.4						
令8 中雲寺				235	17	16.4						

令8 中雲山

令12 小埡口				25	02	2.7						
令10 雷家山				110	07	42.4						
令7 豐文山				133	15	33.1						
令13 歌樂山				255	37	39.9						

表內令代表二等三角點，令代表三等三角點，此後亦有間用 II，III 符號以表示之者。所有觀測均為方向觀測，並已按蘭孛圓錐正形投影之方向改正公式改算至平面之上。今試以令9大寶鼎站點之觀測為例，其觀測值之歸化計算列如下表：

測站	視準點	觀測值	歸心值		球面改正 $T-t-\theta$	歸化後之觀測值
			測站	覘標		
△9	△3	0° 00′ 0″.0	–	−2.1	+0.11	0″.0
	△7	36° 07′ 14″.4	–	–	−0.21	16 .2
大寶鼎	△1	262° 18′ 05″.9	–	–	+0.54	07 .3
	△2	305° 28′ 21″.2	–	−1.1	+0.28	22.4 23 .5
	△8	308° 30′ 02″.9	–	–	+0.73	05 .6

其中球面改正爲式(5)之 $T-t-\theta$ 項，因 θ 爲某測站觀測共同之改正值，求其平面方向相對之關係時無須加入演算也。今更取 △9—△8 之改正值 +0.73 爲例，其計算之程序列下：

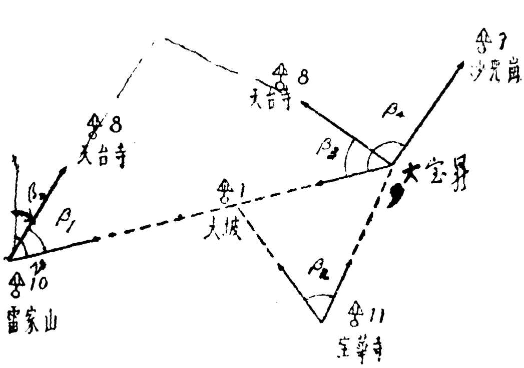
	x	y
△8	27 282.29	31 072.91
△9	35 625.49	27 658.47
	−8 343.20	+3 414.44

在此投影帶內 $y_0=194227.46$ 而 $\frac{1}{2r^2\rho^2}=25.4\times10^{-10}$

按式(5)

$$T-t-\theta=-\frac{x_2-x_1}{2\rho^2r^2}\left(y_1-y_0+\frac{y_2-y_1}{3}\right)$$

$$=-(-8343.20\times25.4\times10^{-10})\left(33431+\frac{3414}{3}\right)=+0.73$$



第十章 第四圖

例：

爲舉例以示角度觀測平差計算之過程計，今假想△1大坡爲新點，由△9大寶鼎，△10雷家山及△11寶華寺三已知點前方交會觀測以得其點位。觀測角度值得自上表各相當二方向之差，逕假想其爲直接觀測之值，共得 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 及 β_4（第四圖）等四角，其值各爲：

$$\beta'_1=31°10'07''.7\quad \beta'_2=67°10'01''.8$$

$$\beta'_3=46°16'58''.3\quad \beta'_4=133°54'08''.9$$

β'_1 β'_2 兩角之權設各爲 1/2，而 β'_3 β_4 兩角之權設各爲 1 。

平差計算共分六步：(1)新點近似坐標之計算；(2)已知點與新點間近似方向角及距離之計算（由新點之近似坐標值計算）；(3)改正數方程式之列出；(4)法方程式之解算；(5)改正數及中誤差之計算；(6)平差後方向角之計算。凡以上各步計算工作，均行之於固定格式上，此處所示者即中國地理研究所大地測量組所採用者，其第(1)(2)步計算可參閱普通測量學中之公式，更加用公式

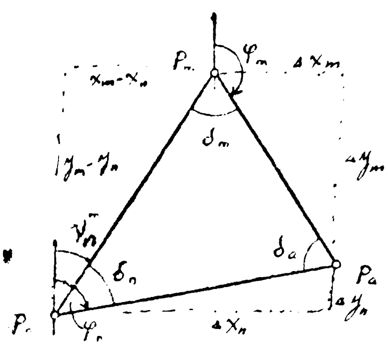
$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\nu_a{}^b\right)=\frac{\Delta y+\Delta x}{\Delta y-\Delta x}$$

關係，加算 $\frac{1}{4}\pi+\nu_a{}^b$ 以資檢核 $\nu_a{}^b$ 值之計算。第(3)表係依照式(16)所列，無庸詳釋，第(4)步列法方程式及其解算之結果，求出 dx 及 dy 後，並加於近似值 (x) (y) 上而得新點之坐標，第(5)步由改正數方程式求改正數並求其平方和，然後計算平差後坐標之中誤差，第(6)步爲平差後各方向值之計算。依上述步驟分列數表如下：

1. 由已知點 P_n：令11 寶華寺及 P_m：令 9 大寶鼎計算新點

P_a：令 1 大坡之近似坐標

應用公式：（第五圖）



第十章　第五圖

$$m_a=\frac{x_m-x_n}{\sin\delta_a\sin\nu_n{}^m}=\frac{y_m-y_n}{\sin\delta_a\cos\nu_n{}^m}$$

$$\Delta x_n=m_a\sin\delta_m\sin\varphi_n$$

$$\Delta y_n=m_a\sin\delta_m\cos\varphi_n$$

$$\Delta x_m=m_a\sin\delta_n\sin\varphi_m$$

$$\Delta y_m=m_a\sin\delta_n\cos\varphi_m$$

P_n:	令 11		x_n	3635045.46	y_n		222006.75
P_m:	令 9		x_m	3635625.49	y_m		227658.47
		+	$x_m\ -x_n$	580.03	y_m-y_n	+	5651.72

	°	′	″		°	′	″
φ_n	298	41	34	$\delta_n=\varphi_n-\nu_n^m$	292	49	59
φ_m	245	58	17	$\delta_m=\nu_n^m-\varphi_m\pm\pi$	−60	06	42
ν_n^m	5	51	35	$\delta_1=\varphi_m-\varphi_n$	−52	43	17
				$\delta_n+\delta_m+\delta_1=\pi$	180	00	00

$\log(x_m-x_n)$	2.763457	$\log(y_m-y_n)$	3.752180
colog $\sin\delta_1$	0.099251 n	colog $\sin\delta_1$	0.099251 n
colog $\sin\nu_n^m$	0.991001	colog $\cos\nu_n^m$	0.002275
$\log m_1$	3.853709 n	$\log m_1$	3.853706 n
$\log\sin\varphi_n$	9.943102 n	$\log\sin\varphi_m$	9.960633 n
$\log m_1$	3.853706 n	$\log m_1$	3.853706 n
$\log\sin\delta_m$	9.938018 n	$\log\sin\delta_n$	9.964526 n
$\log\cos\varphi_n$	9.681342	$\log\cos\varphi_m$	9.609800 n
$\log\Delta x_n$	3.734826 n	$\log\Delta x_m$	3.778901 n
$\log\Delta y_n$	3.473066	$\log\Delta y_m$	3.428068 n

	x_n		3635045.46	y_n		222006.75
	Δx_n	−	5430.33	Δy_n	+	2972.12
	x_m		3635625.49	y_m		227658.47
	Δx_m	−	6010.37	Δy_m	−	2679.59
令1	x_1		3629615.12	y_1		224978.88

2. 近似距離及方位角之計算

$\uparrow P_b$ P_a		x_b x_a $\Delta x=x_b-x_a$ $\Delta y+\Delta x$		y_b y_a $\Delta y=y_b-y_a$ $\Delta y-\Delta x$	$\log(\Delta y+\Delta x)$ $\log(\Delta y-\Delta x)$ $\log\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\nu_a^b\right)$ $\frac{1}{4}\pi+\nu_a^b$	$\log\Delta x$ $\log\Delta y$ $\log\tan\nu_a^b$ ν_a^b	$\log\sin\nu_a^b$ $\log\cos\nu_a^b$ $\log S$ S
令 1 大 坡		3629615.12		224978.88	3.9988367	3.6919855	
令 10 雷家山		3624694.89		219925.86	2.1231654	3.7035510	9.85519
	+	4920.23	+	5053.02	1.8756713	9.9884345	3.84836
	+	9973.25	+	132.79	89° 14′ 13″.9	44°14′ 13″.8	7.05 21

1大　坡		3629615.12		224978.88	3.3906190 n	3.7348270 n	9.94310
11寶華寺		3635045.46		222006.75	3.9244070	3.4730678	
	−	5430.34	+	2972.13	9.4662120 n	0.2617592 n	3.79173
	−	2458.21	+	8402.47	343° 41′ 33″.9	298°41′33″.9	6.19
1大　坡		3629615.12		224978.88	3.9390178 n	3.7789012 n	9.96063
9大寶鼎		3635625.49		227658.47	3.5225460	3.4280684 n	
	−	6010.37	−	2679.59	0.4164718 n	9.3508328	3.81827
	−	8689.96	+	3330.78	290° 58′ 16″.9	245°58′16″.9	6.58

3. 方向係數及改正數方程式之常數值

號　數	測　站	u	v	S (公里)	β'	(β)	$(\beta)-\beta'=-l$
1	雷家山	+14.78	−14.39	7.05	31°10′07″.7	31°10′09.8	+2.10
2	寶華寺	+ 9.90	+18.09	6.19	67 10 01 .8	67 10 01.3	−0.50
3	大寶鼎	− 8.40	+18.84	6.58	46 16 58 .3	46 17 07.5	+9.20
4	大寶鼎	− 8.40	+18.84	6.58	133 54 08 .9	133 54 13.4	+4.50

4. 改正數方程式，法方程式及其解算

號數	P	$a=\pm\frac{u}{S}$	$b=\pm\frac{v}{S}$	$-l$	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$
1	$\frac{1}{2}$	+2.10	−2.04	+2.10	2.20	−2.14	+ 2.20	2.08	− 2.14
2	$\frac{1}{2}$	−1.60	−2.92	−0.50	1.28	+2.34	+ 0.40	4.26	+ 0.73
3	1	+1.28	−2.86	+9.20	1.64	−3.66	+11.77	8.16	−26.32
4	1	+1.28	−2.86	+4.50	1.64	−3.66	+ 5.75	8.16	−12.87
和					6.76	−7.12	+20.12	22.06	−40.60

法方程式

$$6.76\,dx-7.12\,dy+20.12=0 \qquad dx=-1.59\text{公寸} \quad Q_{11}=1/4.46$$

$$-7.12\,dy+22.06\,dy-40.60=0 \qquad dy=+1.33\text{公寸} \quad Q_{22}=1/14.58$$

$$(x)=3629615.12 \qquad (y)=224978.88$$

$$dx=\quad 0.16 \qquad dy=\quad +0.13$$

$$x=3629614.96 \qquad y=224979.01$$

均方
5．中誤差計算

號數	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	β'	$\beta'+v$
1	−3.34	−2.71	+2.10	−3.95	$\frac{1}{2}$	7.79	2.21	31 10 07.7	31 10 03.7
2	+2.54	−3.88	−0.50	−1.84	$\frac{1}{2}$	1.70	0.12	67 10 01.8	67 10 00.0
3	−2.03	−3.80	+9.20	+3.17	1	10.01	84.64	46 16 58.3	46 17 01.5
4	−2.03	−3.80	+4.50	−1.33	1	1.76	20.25	133 54 08.9	133 54 07.6
和						21.26	107.22		

核算 $[pvv]=[pll]-[pal]dx-[pbl]dy=107.22-31.9-54.0=21.3$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\pm 3''.25$$

$m_x=\pm 3.25\sqrt{Q_{11}}=\pm 1.54$ 公寸　$m_y=\pm 3.25\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.85$ 公寸

6．最後方位角 ν 之計算

P_b P_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log\tan\nu_a^b$	ν	β
大　坡 III_1 雷家山 II_{10}	 +	3629614.96 3624694.89 4920.07	 +	224979.01 219925.86 5053.15	3.6919713 3.7035622 9.9884091	 44 14 7.8 13 04 04.0	31 10 03.8
大　坡 III_1 寶華寺 II_{11}	 −	3629614.96 3635045.46 5430.50	 +	224979.01 222006.75 2972.26	3.7348338 n 3.4730868 0.2617530 n	 335 51 35.2 298 41 35.1	67 10 0.1
大　坡 III_1 大寶鼎 II_9	 −	3629614.96 3635625.49 6010.54	 −	224979.01 227658.47 2679.46	3.7789128 n 3.4280473 n 0.3508655	 292 15 24.4 245 58 22.8	46 17 01.6
						379 52 30.3 245 58 22.8	133 54 07.5

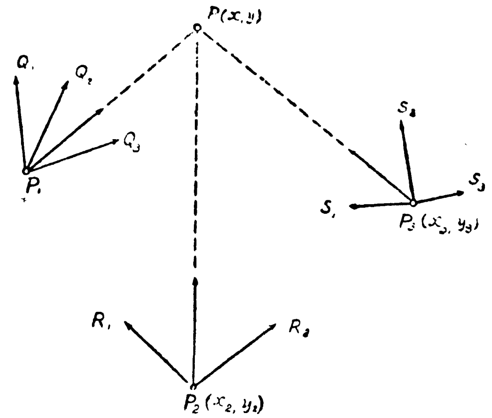
點1　大坡

$x=3629614.96\pm 0.15$ 公尺

$y=224979.01\pm 0.09$ 公尺

（二）方向觀測：

用方向觀測作前方交會定點時，在一已知點上必須觀測其他已知點之方向，以便求得其至未知點之方向。如第六圖之P點爲未知點，在已知點P_1所作之方向觀測須包括至已知點Q_1，Q_2……之已知方向，始可推算P_1P之方向。今設以α爲自已知點P_1至新點P經平差後應得之方向角值，



第十章　第六圖

α'爲自固定方向P_1Q_1，P_2Q_2……等觀測成果所推得之新點P之方向觀測值，α_0爲根據P點近似坐標所算得之近似方向角，則其誤差方程式爲：

$$v=\alpha-\alpha'=\alpha_0+d\alpha-\alpha'$$

更自式(10)取其前方交會定點時之情形，得：

$$v=+\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy=(\alpha'-\alpha_0) \tag{17}$$

以P_1點之觀測爲例，則v代表P_1P方向觀測值之改正數。但此方向觀測值乃由多數固定方向計算而得，是以在一測站上所觀測固定方向之多寡，足以決定其新點方向值P_1P之精粗，當新點P由各已知點$P_1P_2P_3$……等出發之方向線前交時，倘在各站所觀測固定方向數目不同，則其改正數v之權亦必各異，此權之計算方法可依其計算之公式推演之：

設在P_1點作一組之方向觀測，得方向角值爲$\alpha'_{Q_1}\ \alpha'_{Q_2}\ \alpha'_P\ \alpha'_{Q_3}$而其至各固定點$Q_1\ Q_2\ Q_3$已知之方向角設爲$\alpha_{Q_1}\ \alpha_{Q_2}\ \alpha_{Q_3}$，則其全組之定向值$z$應爲：

$$z=\frac{(\alpha_{Q_1}-\alpha'_{Q_1})+(\alpha_{Q_2}-\alpha'_{Q_2})+(\alpha_{Q_3}-\alpha'_{Q_3})}{3}$$

或當固定方向之數目爲n時，得：

$$z=\frac{[(\alpha_Q-\alpha'_Q)]}{n} \tag{18}$$

是以自測站至新點之方向觀測值應爲：

$$\alpha'=\alpha'_p+z=\alpha'_p+\frac{[(\alpha_Q-\alpha'_Q)]}{n}=\frac{[\alpha_Q]}{n}+\alpha'_p-\frac{[\alpha'_Q]}{n} \tag{19}$$

今命每一觀測方向之權為 1，其中誤差為 m，因式(19)中之 α'_P 及各 α'_Q 為獨立觀測值，故由此計算之 α' 值，其中誤差可按誤差傳播定律求之。

$$m_{\alpha'}^2=m^2+\frac{nm^2}{n^2}=\frac{n+1}{n}m^2$$

是以 $P_1\,P$ 方向 α' 之權為

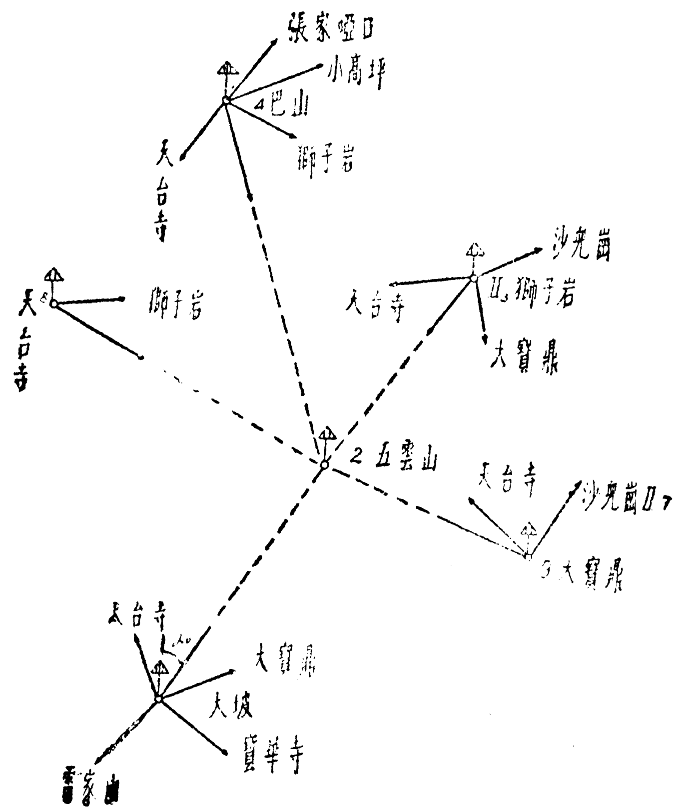
$$P_{\alpha'}=\frac{n}{n+1} \tag{20}$$

n 為在該測站所觀測固定方向之數目」

式(20)代表某外方向在理論上應得之權值，實際上因交會定點法各點輾轉互求，本非基於嚴格之理論，故權之關係亦往往不作嚴格之假定而時常假定其為相等：

例：

應用方向觀測按前方交會定點法測定新點 2 五雲山之點位。其各已知站點及在其各站點所觀測之方向線示於第七圖，各觀測值均取自前



第十章 第七圖

錄之成果表。各方向之權不因其固定方向之數目而加以區分，計算之步驟則與前例相倣。今假定新點之近似坐標爲：

$$(x)\ =3632116.72$$
$$(y)=\ 228882.10$$

由而求得之近似方位角刊於下表之 a_0 項。其餘諸步驟表列如下：

方向係數及改正數方程式之常數值

號數	測　　站	視準點	u	v	S（公里）	a'	a_0	$-(a'-a_0)$
1	III8 天台寺	III2 五雲山	$-\ 8.51$	-18.78	5.21	114°22′34″.9	114°22′42″.7	$+\ 7.8$
2	III1 大　坡	,,	$+17.37$	-11.13	4.64	32°39′26″.7	32°39′20″.6	$-\ 6.1$
3	III9 大寶鼎	,,	$+\ 6.79$	$+19.47$	3.72	289°13′39″.9	289°13′31″.6	$-\ 8.3$
4	III3 獅子岩	,,	-16.58	$+12.26$	3.30	216°28′23″.3	216°28′31″.7	$+\ 3.4$
5	III4 巴　山	,,	-19.34	$-\ 7.16$	6.15	159°41′59″.0	159°42′09″.8	$+10.8$

改正數方程式法方程式及其解算

$v = a\,dx + b\,dy - l$

號數	p	$a=\frac{+u}{S}$	$b=\frac{+v}{S}$	$-l$	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$
1	1	-1.60	-3.54	$+\ 7.80$	2.56	$+5.66$	-12.48	12.53	-27.60
2	1	$+3.75$	-2.40	$-\ 6.10$	14.06	-9.00	-22.86	5.76	$+14.64$
3	1	$+1.83$	$+5.24$	$-\ 8.30$	3.35	$+9.59$	-15.19	27.50	-43.50
4	$\frac{1}{3}$*	-4.37	$+3.23$	$+\ 8.40$	6.35	-4.70	-12.22	3.48	$+\ 9.03$
5	1	-3.15	-1.16	$+10.80$	9.92	$+3.65$	-34.02	1.35	-12.53
和					36.24	$+5.20$	-96.77	50.62	-59.96

* 方向號數 4 觀測所用儀器之權較其餘方向觀測所用儀器之權小三倍。

法方程式

$$36.24\ dx+\ 5.20\ dy-96.77=0 \qquad dx=+2.54\text{公寸} \quad Q_{11}=1/35.7$$
$$5.20\ dx+50.62\ dy-59.96=0 \qquad dy=+0.92\text{公寸} \quad Q_{22}=1/49.8$$

$$(x)=3632116.72 \qquad (y)=228882.10$$
$$\underline{dx=+\qquad 0.25} \qquad \underline{dy=\ +\quad 0.09}$$
$$x\ =3632116.97 \qquad y=228882.19$$

中誤差計算

號數	adx	bdy	$-l$	v	P	Pvv	Pll	a'			$a'+v$		
1	−4.06	−3.27	+7.80	+0.47	1	0.22	60.8	114	22	34.9	114	22	35.4
2	+9.52	−2.22	−6.10	+1.20	1	1.44	37.2	32	39	26.7	32	39	27.9
3	+4.64	+4.89	−8.30	+1.23	1	1.52	68.9	289	13	39.9	389	13	41.1
4	−11.08	+2.98	+8.40	+0.30	1/3	0.03	23.5	216	28	23.3	216	28	23.6
5	−7.99	−1.67	+10.80	+1.74	1	3.03	116.6	159	41	59.0	159	42	00.7
						6.24	307.0						

核算 $[pvv]=[pll]-[pal]dx-(pbl)dy=307.0-245.4-55.4=6.2$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\pm 1''.44$$

$m_x=\pm 1.44\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.24$公寸 $m_y=\pm 1.44\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.21$公寸

最後方位角 ν 之計算

P_b P_a	x_b x_a x_b-x_a	y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log \tan(\nu_a{}^b)$	ν
△2 △8 天台寺	3632116.97 3627282.28 + 4834.69	228882.19 231072.91 − 2190.72	3.6843686 3.3405869 n 0.3437817 n	114 22 35.4
△2 △1 大坡	3632116.97 3629615.25 + 2501.72	228882.19 224979.03 + 3903.16	3.3982387 3.5914164 9.8068223	32 39 27.9
△2 △9 大寶鼎	3632116.97 3635625.49 − 3508.52	228882.19 227658.47 + 1223.72	3.5451240 n 3.0876821 0.4574419 n	289 13 40.9
△2 △3 獅子岩	3632116.97 3634377.74 2260.77	228882.19 231940.43 − 3058.24	3.3542563 n 3.4854716 n 9.8687847	216 28 23.7
△2 △4 巴山	3632116.97 3629983.88 + 2133.09	228882.19 234648.76 − 5766.57	3.3290092 3.7609.75 n 9.5680917 n	159 42 0.9

△2 五雲山

$$x=3632116.97\pm0.02\ \text{公尺}$$
$$y=\ 228882.19\pm0.02\ \text{公尺}$$

第六節　後方交會定點法

後方交會定點法，係以未知點為測站向已知點觀測方向或角度以定該點之位置。其觀測之已知點至少須有三個，始能解算，倘觀測三點以上時，卽生平差問題。玆亦按角度與方向觀測兩情形分別論之：

（一）角度觀測：

用後方交會定點時，應用角度觀測之實例甚少，其基本關係亦可由式(12)導出，蓋此時旣以未知點為觀站測視二已知點，故式(12)內之 dx_1，dy_1，dx_2 及 dy_2 均應為零，因得

$$d\beta=\frac{-\cos\alpha_2}{S_2}dx+\frac{\sin\alpha_2}{S_2}dy+\frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx-\frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy \tag{21}$$

仍以式(13)之意義代表 $a_i\ b_i$ 時，則式(21)可寫為：

$$d\beta=-(a_2-a_1)dx-(b_2-b_1)dy \tag{22}$$

若以 β' 代表觀測之角值，v 為其改正數，β_0 代表由近似坐標所算得之角值，則其改正數方程式應為：

$$\begin{aligned}v&=\beta-\beta'=(\beta_0-d\beta)-\beta'\\&=-(a_2-a_1)dx-(b_2-b_1)dy-(\beta'-\beta_0)\end{aligned} \tag{23}$$

（二）方向觀測：

應用方向觀測後方交會定點為交會定點法中主要之一部。其改正數方程式可由式(10)導出，此時之觀測自未知點達已知點，故式(10)中之 $dx_1\ dy_1$ 應為零，因得：

$$d\alpha=-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy \tag{24}$$

而其改正數方程式為：

$$v=\alpha-\alpha'=(\alpha_0+d\alpha)-\alpha' \tag{25}$$

此時 α_0 為根據未知點近似坐標值所算得之方向角值，α' 為觀測之方向角值，v 為其改正數。但在後方交會定點時，觀測出發自未知點，無固定方向角可資以定整個方向組之方向角，故在平差計算時，須加定向值 z 為未知數。今以 z_0 為定向值之近似值，以 dz 為其改正數，而以 r 代表觀測成果中之方

向值，則得：

$$\alpha' = r + z = r + (z_0 + dz) \tag{26}$$

以式(24)及(26)代入式(25)得：

$$\begin{rcases} v = \overset{\alpha-\alpha'}{-dz} - \frac{\cos\alpha}{S}dx + \frac{\sin\alpha}{S}dy - (r + z_0 - \alpha_0) \\ v = -dz + adx + bdy - l \cdots\cdots\cdots\cdots \end{rcases} \tag{27}$$

$=(\alpha_0+d\alpha)-\alpha'$

或

此時之 a，b 係指普通改正數方程式之係數而言，與式(13)之所指者符號相反。

定向值(角) z_0 可由式（27）常數項內之關係求之。今設觀測之方向數為 n，則：

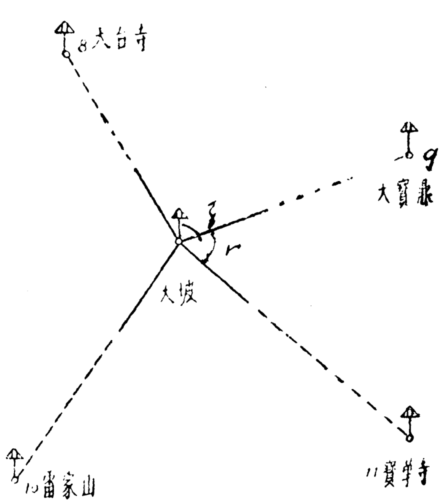
$$z_0 = \frac{[\alpha_0 - r]}{n} \tag{28}$$

相當於改正數之方程式(27)法方程式為：

$$\begin{rcases} ndz - [a]dx - [b]dy + [l] = 0 \cdots\cdots \\ -[a]dz + [aa]dx + [ab]dy - [al] = 0 \cdots\cdots \\ -[b]dz + [ab]dx + [bb]dy - [bl] = 0 \cdots\cdots \end{rcases} \tag{29}$$

關於此項法方程式之解算已於第五章第十七節及第七章第五節論及，不再贅述。

例：用方向觀測作後方交會定點，假定新點為♁1大坡。觀測方向值 r 取自前列之成果表內觀測方向一欄，其新點♁1大坡之近似坐標及由而算得至♁9大寶鼎，♁10雷家山♁11寶華寺諸點之近似方位角 α，仍可利用第五節角度觀測平差內所算得之諸值。以後諸計算步驟表列於下：



第十章　第八圖

方向係數及改正數方程式之常數值

號數	測站	視準點	u	v	S (公里)	r	a_0	a_0-r	$-(r+z_0-a_0)$
1	III1	II 9	+ 8.40	−18.84	6.58	0° 0′ 0″.0	65°58′ 16″.9	65°58′ 16″.9	− 3.6
2		II 11	− 9.90	−18.09	6.19	52°43′ 18″.4	118°41′ 33″.9	15″.5	− 5.0
3		II 10	−14.78	+14.39	14.78	158°15′ 54″.7	224°14′ 13″.8	19″.1	− 1.4
4		II 8	+19.27	+ 7.38	19.27	273°04′ 39″.4	339°03′ 10″.0	30″.6	+10.1
								$z_0=65\ 58\ 20\ .5$	

改正數方程式法方程式及其解算

號數	p	$\frac{-u}{S}=a$	$-\frac{v}{S}=b$	$a-a_0=A$	$b-b_0=B$	$-L$	AA	AB	$-AL$	BB	$-BL$
1	1	−1.28	+2.87	−1.15	+2.21	− 3.6	1.35	−2.54	+ 4.14	4.88	− 7.95
2	1	+1.60	+2.92	+1.73	+2.26	− 5.0	2.96	+3.91	− 8.65	5.11	−11.30
3	1	+2.10	−2.04	+2.23	−2.70	− 1.4	4.97	−6.02	− 3.12	7.28	+ 3.78
4	1	−2.05	−1.13	−2.82	−1.79	+10.1	7.95	+5.05	−28.48	3.21	−18.08
和		−0.53	+0.66				17.20	+0.40	−36.11	20.48	−33.55

$a_0=-0.13$　　$b_0=+0.66$

法方程式

$$17.20\ dx+\ 0.40\ dy-36.11=0\qquad dx=+2.05\qquad Q_{11}=1/17.2$$

$$0.40\ dx+20.48\ dy-33.55=0\qquad dy=+1.60\qquad Q_{22}=1/20.4$$

$$(x)=3629615.12\qquad (y)=224978.88$$

$$dx=+\quad 0.20\qquad dy=+\quad 0.16$$

$$x=3629615.32\qquad y=224979.04$$

中誤差算計

$$dz=a_0dx+b_0dy=+1.33\qquad z=z_0+dz=65°58'\ 21''.8$$

號數	$-dz$	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	r			$r+z+v$		
1	−1.33	−2.62	+4.59	− 3.6	−2.96	1	8.76	12.96	00	00	00.0	65	58	18.8
2	−1.33	+3.28	+4.67	− 5.0	+1.62	1	2.62	25.00	52	43	18.4	118	41	41.8
3	−1.33	+4.3	−3.26	− 1.4	−1.69	1	2.86	1.96	158	15	54.7	224	14	14.8
4	−1.33	−6.05	−1.81	+10.1	+0.91	1	0.83	102.01	273	04	39.4	339	03	02.1
							15.07	141.93						

核算： $[pvv]=[pll]-[pAL]dx-[pBL]dy=141.9-74.0-53.6$
$=14.3$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}=\pm 3''.88$$

$m_x=\pm 3.88\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.94$公寸　$m_y=\pm 3.88\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.86$公寸

最後方位角 ν 之計算

p_b p_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log+\tan\nu_a{}^b$	ν
仝 II_9 大寶鼎 仝 III_1 大坡	 +	3632625.49 3629615.32 6010 17	 +	227658.47 224979.04 2679.43	3.7788867 3.4280425 0.3508442	 65 58 189
仝 II_{11} 寶華寺 仝 III_1 大坡	 +	3635045.46 3629615.32 5430.14	 −	222006.75 224979.04 2972.29	3.7348110 3.4730911 n 0.2617199 n	 118 41 417
仝 II_{10} 雷家山 仝 III_1 大坡	 −	3624694.89 3629615.32 4920.43	 −	219925.86 224979.04 5053.18	3.6920030 n 3.7035648 a 9.9884382 n	 224 14 14.7
仝 II_3 天台寺 仝 III_1 大坡	 −	3627282.28 3629615.32 2333.04	 +	231072.91 224579.04 6093.87	3.3679222 n 3.7848932 9.5830290 n	 (02.0) 339 03 02.3

仝 1　大坡

$x=3629615.32\pm 0.09$ 公尺

$y=224979.04\pm 0.09$ 公尺

第七節　前後方交會定點法

前二節所論，自數已知點觀測一未知點之方向，稱之爲前方交會定點法；自未知點觀測數已知點之方向稱之爲後方交會定點法。如欲增進點位決定之精度，往往兩者混用，是爲前後方交會定點法。平差時卽採前二節所演化之改正數方程式混合於一處，所有外方向線之改正數方程式按式(17)爲：

$$v=+\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy-(\alpha'-\alpha_0) \tag{30}$$

其權爲:

$$P=\frac{n}{n+1} \tag{31}$$

所有內方向線之改正數方程式,按式(27)爲:

$$v=-dz-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy-(r+z_0-\alpha_0) \tag{32}$$

其權爲 1。但當同一方向線自兩端均曾觀測時,則外方向之方向值 α 與內方向之方向值 α_1 有下列之關係:

$$\alpha=\alpha_1+180$$

故:

$$\left.\begin{aligned}-\cos\alpha_1&=+\cos\alpha\\+\sin\alpha_1&=-\sin\alpha\end{aligned}\right. \tag{33}$$

因此則相當於兩端觀測之改正數方程式,其 dx 與 dy 之係數相等,卽:

$$\left.\begin{aligned}v&=\qquad\quad adx+bdy-l\\v_1&=-dz+adx+bdy-l_1\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

例:

應用前後方交會法測定假設爲新點♀1大坡之點位(參考第八圖)。此時內方位線之觀測值採用第六節例之所用者,外方位線則包括♀9大寶鼎♀11寶華寺及♀10雷家山三已知點之觀測,其觀測值取自第五節所列之成果表。參考式(34)之關係及第六節例內之改正數方程式,則由外方向線所成之法方程式表列於下。又因此次觀測之法規每已知點測站之觀測概以觀測固定方向二個爲原則,故當內外方向觀測併列時,內方向觀測之權如訂爲 1,則外方向觀測之權概訂爲 2/3。

外方向之改正數方程式:

號數	測站	視準點	u a	b	a'	a_0	$-l=-(a'-a_0)$
1	II 9 大寶鼎	III 1 大坡	−1.28	+2.87	245°58′23″.7	245°58′16″.9	−6.8
2	II 11 寶華寺		+1.60	+2.92	298 41 33 .4	298 41 33 .9	+0.5
3	II 10 雷家山		+2.10	−2.04	44 14 11 .7	44 14 13 .8	+2.1

外方向之法方程式:

號數	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$	
1	1.64	−2.67	+ 8.70	8.24	−19.52	$5.73\,dx-2.19\,dy+9.27=0$
2	2.56	+4.67	+ 0.80	8.52	+ 1.46	
3	4.41	−4.28	+ 4.41	4.16	− 4.28	$-2.19\,dx+13.94\,dy-14.88=0$
和	8.61	−3.28	+13.91	20.92	−22.34	
$\frac{2}{3}$和	5.73	−2.19	+ 9.27	13.94	−14.88	

自第六節例中所得內方向觀測之法方程式爲:

$$17.20\,dx+0.40\,dy-36.11=0$$
$$0.40\,dx+20.48\,dy-33.55=0$$

內外之法方程式合併得前後方交會法之法方程式爲:

$$22.93\,dx-1.79\,dy-26.84=0$$
$$-1.79\,dx+34.42\,dy-48.43=0$$

解化之得:

$dx=+1.29$ 公寸　　$dy=+1.47$ 公寸

$Q_{11}=1/22.84$　　$Q_{22}=1/34.26$

下表列中誤差之計算:

號數	$-dz$	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	a' r	$a'+v$ $r+z+v$
外方向										
1		−1.65	+4.22	− 6.8	−4.23	$\frac{2}{3}$	11.94	30.82	245°58′23″.7	245°58′19″.5
2		+2.06	+4.23	+ 0.5	+6.85	$\frac{2}{3}$	30.80	0.17	298 41 33 .4	298 41 40 .2
3		+2.71	−3.06	+ 2.1	+1.81	$\frac{2}{3}$	2.19	2.93	44 14 11 .7	44 14 13 .5
內方向 $dz=a_0\,dx+b_0\,dy=+0''.80$　$z=z_0+dz=65°58'21''.3$										
4	−0.80	−1.65	+4.2	− 3.[illegible]	−1.83	1	3.35	12.96	0° 0′ 0″.0	65°58′19″.5
5	−0.80	+2.06	+4.2	− 5.0	+0.55	1	0.30	25.00	52 43 18 .4	118 41 40 .3
6	−0.80	+2.71	−3.0	− 1.4	−2.49	1	6.20	1.96	158 15 54 .7	224 14 13 .4
7	−0.80	−3.81	−1.66	+10.1	+3.83	1	14.68	102.01	273 04 39 .4	339 03 04 .5
和							69.46	175.85		

核算：$[pvv]=[pll]-[pAL]-[pBL]=175.8-34.6-71.2=70.0$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}=\pm 4''.17$$

$m_x=\pm 4.17\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.87$ 公寸　$m_y=\pm 4.17\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.71$ 公寸

最後方位 ν 之計算：

P_b P_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	log (x_b-x_a) log (y_b-y_a) log $+a_n\nu_a{}^b$	ν
II 9 III 1	 +	3635625.49 3629615.25 6010.24	 +	227658.47 224979.03 2679.44	3.7788918 3.4280441 0.3508477	 65　58　19.5
II 11 III 1	 +	3635045.46 3629615.25 5430.21	 −	222006.75 224979.03 2972.28	3.7348166 3.4730897 n 0.2617269 n	 118　41　40.3
II 10 III 1	 −	3624694.89 3629615.25 4920.36	 −	219925.86 224979.03 5053.17	3.6919969 n 3.7035639 n 9.9884330	 224　14　13.5
II 8 III 1	 −	3627282.28 3629615.25 2332.97	 +	231072.91 224979.03 6093.88	3.3679091 n 3.7848939 9.5830152 n	 339　03　04.5

⊕1　大坡

$x=3629615.25\pm 0.09$ 公尺

$y=\ \ 224979.03\pm 0.07$ 公尺

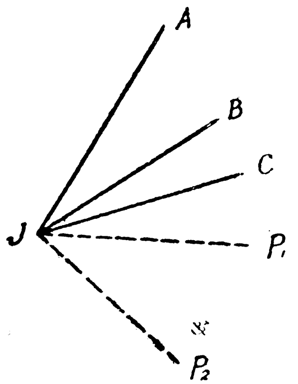
第八節　雙點交會定點法

交會法不僅可以決定一點之位置，亦可同時決定多點之位置。但點數愈多，則其所解之法方程式亦愈多，計算工作亦愈繁，而漸成為網狀交會。在小三角點之交會中，最常應用者厥為雙點定點法。當逐點交會定點之時，先求得之點，即視為固定點，以求其次之新點。因此先定之各點其交會圖形必須較強，俾使其點之誤差減小而不致傳播至以後所求之點位。今設

有二新點相隣，其各別與諸已知點之交會圖形均不甚佳而須仰賴相互間之方向時，則宜用雙點定位法，使其點位之決定加強。

在雙點交會定點時，自已知點上所測外方向線之改正數方程式不似單點定位時之簡單〔比較第五節之(17)與(20)兩式〕。第九圖示此種情形，J為一已知點，以J為測站觀測 $A\ B\ C$ 三個已知方向得 $r_A\ r_B\ r_C$，觀測 P_1，P_2 兩未知點之方向得 $r_1\ r_2$，如以 JA，JB，JC 三固定方向之方向角 $\alpha_A\ \alpha_B\ \alpha_C$ 求全組方向之初步定向值 z_0，可得：

$$z_0=\frac{1}{3}\left\{(\alpha_A-r_A)+(\alpha_B-r_B)+(\alpha_C-r_C)\right\} \tag{35}$$



第十章　第九圖

此時各觀測方向之改正數方程式應作下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
v_A&=-dz & &-l_A\\
v_B&=-dz & &-l_B\\
v_C&=-dz & &-l_C\\
v_1&=-dz+a_1dx_1+b_1dy_1 & &-l_1\\
v_2&=-dz & +a_2dx_2+b_2dy_2&-l_2
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

式中之 dz 為 z_0 應得之改正數，各 l 項為：

$$\left.\begin{aligned}
l_A&=r_A+z_0-\alpha_A & l_B&=r_B+z_0-\alpha_B\\
l_C&=r_C+z_0-\alpha_C & l_1&=r_1+z_0-\alpha_1\\
l_2&=r_2+z_0-\alpha_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

此種改正數方程式可用第五章第十九節所論之士賴伯約化法將未知數dz消去，而以其和方程式為一虛擬改正數方程式，於是得：

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=a_1dx_1+b_1dy_1 & &-l_1 \quad 權 \quad 1\\
v_2&= & a_2dx_2+b_2dy_2 &-l_2 \quad 權 \quad 1\\
v'&=a_1dx_1+b_1dy_1+a_2dx_2+b_2dy_2 & &-[l] \quad 權 -\frac{1}{s}
\end{aligned}\right\} \tag{36*}$$

虛擬改正數方程式中之 $[l]$，因由(35)及(37)之關係知 $l_A+l_B+l_C=0$，故：

$$[l]=l_1+l_2$$

又權 $-\frac{1}{s}$ 中之 s 爲在該測站觀測方向之總數，在此處如以 n 代表固定方向之數目，亦可書以 $n+2$，因新點方向共有兩個也。

若新點方向僅有一個，則相當於(36)*之改正數方程式爲：

$$v_1 = a_1 dx_1 + b_1 dy_1 - l_1 \qquad 權:\quad 1$$

$$v' = a_1 dx_1 + b_1 dy_1 - l_1 \qquad 權:\quad -\frac{1}{n+1}$$

此兩方程式之右端完全相同，故可合而爲一：

$$v_1 = a_1 dx_1 + b_1 dy_1 - l_1 \quad 權:\ 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \tag{38}$$

與第五節之(17)，(20)兩式固相同也。

式(36)爲理論上嚴格之方法，但對於普通之應用，有時不必需，亦可逕將 v_1 v_2 均用式(38)之方法列出：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 dx_1 + b_1 dy_1 \qquad\qquad - l_1 \quad 權:\ \frac{n}{n+1} \\ v_2 &= \qquad\qquad a_2 dx_2 + b_2 dy_2 - l_2 \quad 權:\ \frac{n}{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

甚或有時其權值 $\frac{n}{n+1}$ 亦不用嚴格值，而一概命之爲 $\frac{1}{2}$，蓋假定固定方向數爲 r 之情形也。此種簡略方法對於平差之結果影響固極小，而計算工作則因此減少甚多。

在雙點定位時，內方向之改正數方程式與後方交會定點法無異，惟除自已知點至已知點之方向外，此時尙有兩未知點間之方向，其改正數方程式亦可由第三節之普遍公式(10)中推得，當第三圖 P 及 P_1 均爲未知點時，自 P_1 觀測 P 之方向改正與坐標變遷之關係爲：

$$d\alpha_1 = \frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx_1 - \frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy_1 - \frac{\cos\alpha}{S}dx + \frac{\sin\alpha}{S}dy \tag{40}$$

反向觀測自 P 測視 P_1 時，以同理得：

$$d\alpha = \frac{\cos\alpha}{S}dx - \frac{\sin\alpha}{S}dy - \frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx_1 + \frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy_1 \tag{41}$$

但上二式之方向角 α 與 α_1 之間相差適爲 $180°$，自上節式(32)之關係，設自 P_1 點觀測之改正數方程式爲：

$$v_1 = -dz_1 + a dx_1 + b dy_1 + c dx + d dy - l_1 \tag{42}$$

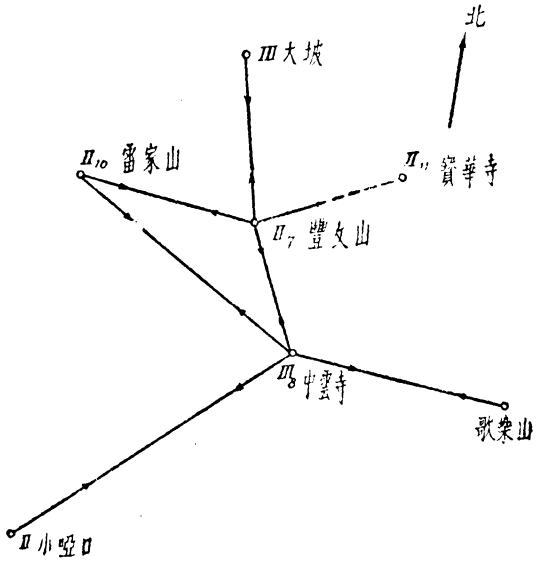
時，則自 P 點觀測之改正數方程式應爲：

$$v = -dz + adx_1 + bdy_1 + cdx + ddy - l \tag{43}$$

卽二誤差方程式除其定向值及常數項外完全相同也。

例：

應用雙點定位法由寶華山，歌樂山，小啞口，雷家山及大坡等五已知點測求豐文山及中雲寺二未知點之點位。各方向觀測值取自第五節之成



第十章　　第十圖

果表。二新點之近似坐標設求得為：

	x	y
III 7 豐文山	3628601.43	218827.71
III 8 中雲寺	3630391.90	213630.30

由而求得各方向線之近似方位角及距離表列如下：

$P_a \to P_b$	$\nu_a{}^b$	S
II 10→III 7	105° 42′ 03″.5	4.06
II 11→III 7	243° 44′ 29″.2	7.18
III 1→III 7	189° 21′ 32″.3	6.23
III 8→III 7	340° 55′ 29″.5	5.50
II 10→III 8	137° 51′ 26″.1	8.49
II 12→III 8	52° 45′ 53″.1	11.70
II 13→III 8	283° 21′ 34″.8	7.45

下表列其方向係數及改正數方程式之常數值：

號數	測站	視準點	u	v	S（公里）	a' / r			a_0 / a_0			a_0-r			$-(a'-a)$ / $-(r+z_0-a_0)$
								外方向							
1	II 10	III 7	− 5.58	− 19.86	4.06	105°	42′	03″.3	105°	42′	03″.5				+ 0″.2
2	III 1	III 7	− 20.35	+ 3.36	6.23	189	21	40.2	189	21	32.3				− 7 .9
3	II 12	III 8	+ 12.48	− 16.43	11.70	52	45	51.1	52	45	53.1				
4	II 13	III 8	+ 4.77	+ 20.07	7.45	283	21	29.5	283	21	34.8				
5	II 10	III 8	− 15.28	− 13.85	8.49	137	51	26.0	137	51	26.1				
								內方向							
6	III 7	II 10	+ 5.58	+ 19.86	4.06	00	00	00.0	285	42	03.5	285	42	03.5	− 2.9
7	III 7	III 1	+ 20.35	− 3.36	6.23	83	39	30.0	9	21	32.3			02.3	− 4.1
8	III 7	II 11	+ 9.13	− 18.50	7.18	138	02	22.4	63	44	29.2			06.8	+ 0.4
9	III 7	III 8	− 19.50	− 6.72	5.00	235	17	16.4	160	59	29.5			13.1	+ 6.7
											(z_1)	285	42	06.4	
10	III 8	II 12	− 12.48	+ 16.43	11.70	25	02	02.7	232	45	53.1	207	43	50.4	− 1.0
11		II 10	+ 15.28	+ 13.85	8.49	110	07	42.4	317	51	26.1			43.7	− 7.7
12		III 7	+ 19.50	+ 6.72	5.50	133	15	33.1	340	59	29.5			56.4	+ 5.0
13		II 13	− 4.77	− 20.07	7.45	255	37	39.9	103	21	34.8			54.9	+ 3.5
											(z_3)	207	43	51.4	

外方向之權取 2/3，內方向之權取 1，蓋按此次觀測將法規已知點固定方向概以取二個方向為準則也。又以觀測時所用儀器不同，在Ш11大坡點之觀測係用威特 T 3 號經緯儀，其餘係用威特 T 2 號經緯儀，故由二種儀器精度之不同，復給與 1:1/2 權之比例。下表列其改正數方程式之各項係數，各新點觀測之定向角係用士賴伯負權法以銷除之。

號數	$a=\frac{\pm u}{S}$ *	$b=\frac{\pm v}{S}$	$c=\frac{\pm u}{S}$	$d=\frac{\pm v}{S}$	$-l$	S	p
1	−1.37	−4.89			+0.2	− 6.06	$\frac{1}{3}$
2	−3.26	+0.54			−7.9	−10.62	$\frac{2}{3}$
3			+1.07	−1.40	+2.0	+ 1.67	$\frac{1}{3}$
4			+0.65	+2.77	+5.3	+ 8.72	$\frac{1}{3}$
5			−1.81	−1.63	−0.1	− 3.34	$\frac{1}{3}$
6	−1.37	−4.89			−2.9	− 9.16	$\frac{1}{2}$
7	−3.26	+0.54			−4.1	− 6.82	$\frac{1}{2}$
8	−1.27	+2.58			+0.4	+ 1.71	$\frac{1}{2}$
9	+3.55	+1.22	−3.55	−1.22	+6.7	+ 6.70	$\frac{1}{2}$
1′	−1.18	−0.28	−1.78	−0.61	+0.05	− 3.80	$-\frac{1}{2}$
10			+1.07	−1.40	−1.0	− 1.33	$\frac{1}{2}$
11			−1.81	−1.63	−7.7	−11.14	$\frac{1}{2}$
12	+3.55	+1.22	−3.55	−1.22	+5.0	+ 5.00	$\frac{1}{2}$
13			+0.65	+2.77	+3.5	+ 6.92	$\frac{1}{2}$
2′	+1.78	+0.61	−1.82	−0.74	−0.1	− 0.27	$-\frac{1}{3}$

* 外方向用『＋』號，內方向用『－』號，但對第二新點之係數則反是。

因得法方程式為：

$$
\begin{aligned}
+25.15\,dx_a + 5.55\,dy_a - 12.06\,dx_b - 4.03\,dy_b + 46.38 &= 0\\
+24.85\,dy_a - 4.01\,dx_b - 1.34\,dy_b + 10.49 &= 0\\
+13.40\,dx_b + 5.80\,dy_b - 11.46 &= 0\\
+11.23\,dy_b + 8.59 &= 0\\
+136.22 &= 0
\end{aligned}
$$

解算之得：

$dx_a=-2.41$公寸 $dy_a=-0.08$公寸 $dx_b=-0.809$公寸 $dy_b=-1.222$公寸

$Q_{11}=0.206$ $Q_{22}=0.268$ $Q_{33}=0.341$ $Q_{44}=0.404$

$dz_a=+2.54$ $dz_b=-1.02$

更表列其中誤差之計算：

號數	$-dz_a$ $-dz_b$		adx_a	bdy_a	cdx_b	ddy_b	-1	v	pvv	a' r			$a+v$ $r+z_{a,b}+v$		
1			+3.30	+0.39			+0.20	+3.89	5.04	105°	42′	33″			07.2
2			+7.80	−0.04			−7.90	−0.03	0.00	189	21	40.2			40.1
									5.04						
3					−0.87	+1.71	+2.0	+2.84	2.69	52	45	51.1			53.9
4					−0.53	−3.38	+5.3	+1.39	0.64	283	21	29.5			30.9
5					+1.46	+1.99	+0.1	+3.55	4.20	137	51	26.0			29.6
									7.53						
$z_{ab}=z_0+dz=285°42'06.4+2.5=285°42'8''.9$															
6	−	2.54	+3.30	+0.39			−2.9	−1.75	1.53	00	00	00.0	285	42	07.1
7	−	2.54	+7.80	−0.04			+4.1	+1.18	0.69	83	39	30.0	9	21	40.1
8	−	2.54	+3.00	−0.21			+0.4	+0.71	0.25	138	02	22.4	63	44	32.0
9	−	2.54	−8.50	−0.10	+0.87	+1.49	+6.7	−0.14	0.01	235	17	16.4	160	59	25.2
									2.48						
$z_{ab}=z_0=207°43'51''.4-1.0=207°43'50''.4$															
10	+	1.02			−0.87	+1.71	−1.0	+0.86	0.37	25	02	2.7	232	45	54.0
11	+	1.02			+1.46	+1.99	−7.7	−3.23	5.21	110	07	12.4	317	51	29.6
12	+	1.02	−8.50	−0.10	+2.87	+1.49	+5.0	+1.72	1.48	133	15	33.1	340	59	25.2
13	+	1.02			−0.53	−3.38	+3.5	+0.61	0.19	255	37	30.9	163	21	30.9
									7.25						

$$[pvv]=5.04+2.48+7.53+7.25=22.30$$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-6}}=\pm 1''.79$$

下表列最後距離及方位角之計算

P_b ↑ P_a		x_b x_a $\Delta x=x_b-x_a$		y_b $_ay$ $\Delta y=y_b-y_a$	$\log\Delta x$ $\log\Delta y$ $\log\tan P_a{}^b$ $\nu_a{}^b$
仝 II　10		5624694.89		219925.86	3.5917656 n
仝 III　7		5628601.19		218827.70	3.0406656
	−	3906.30	+	1098.16	0.5511000 n
					285°42′07″.2

仝 II 1		3629615.25		224979.03	3.0060637
仝 III 7		3628601.19		218827.70	3.7889690
	+	1014.06	+	6151.33	9.2170947
					9°21′40″.1
仝 II 11		3635045.46		222006.75	3.8091736
仝 III 7		3628601.19		218827.70	3.5022973
	+	6444.27	+	3179.05	0.3068763
					63°44′32″.0
仝 III 8		3630391.82		213630.18	3.2530059
仝 III 7		3628601.19		218827.70	3.7157962 *n*
	+	1790.63	−	5197.52	9.5372097 *n*
					160°59′25″.2
仝 II 12		3621079.88		206553.06	3.9690402 *n*
仝 III 8		3630391.82		213630.18	3.8498565 *n*
	−	9311.94	−	7077.12	0.1191837
					237°45′54″.0
仝 II 13		3637643.67		211908.08	3.8604488
仝 III 8		3630391.82		213630.18	3.2360584 *n*
	+	7251.85	−	1722.10	0.6243904
					103°21′31″.0
仝 II 10		3624694.89		219925.86	3.7556409 *n*
仝 III 8		3630391.82		213630.18	3.7990426
	−	5696.93	+	6295.68	9.9565983 *n*
					317°51′29″.5

雙點交會定點法之結果為:

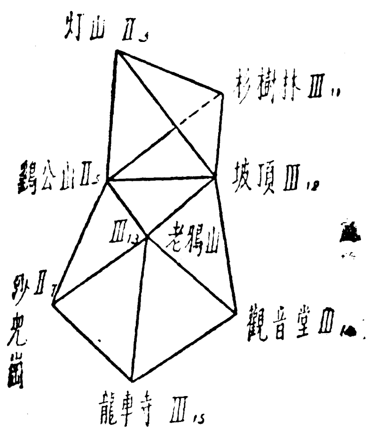
仝7 豐文山	仝8 中雲寺
$x=3628601.19\pm0.05$	$x=3630391.82\pm0.07$
$y=\ 218827.70\pm0.04$	$y=\ 213630.18\pm0.06$

第九節 網狀交會定位法

同時用交會方法決定之點數增多時卽為多點交會定位，或稱為網狀交會，其改正數方程式之排列，與雙點交會定點情形完全相同，計包括自已知點至未知點，自未知點至已知點，及自未知點至未知點之三種情形。其未知數之數目除各測站之定向值 z 可於列出方程式之前消去外，尚有

點之縱橫坐標值，共爲新點數目之兩倍。當新點數目甚多時，則是否以改用條件平差方法計算，較爲便捷，應比較其所須解算法方程式數目之多寡而定。

茲試舉中國地理研究所在四川北碚附近三角測量之例以說明之。自燈山，鷄公山與沙兒崗三個二等點（固定點）用交會法測定第十一圖之各三等點。此網如依條件平差法計算，則其條件數目應爲：



第十章　第十一圖

角度條件：

$$(S-l')-(P-P')+1=13-\ 8+6=6$$

邊長條件：　$l-2P+3\qquad=15-16+3=2$

強制附合：　$=2$

共　10

此圖形計包括未知點五個，故如依多點交會方法以坐標值爲未知數平差時，未知數共爲10個，數目與前者適相等。茲依多點交會法計算。首列其方向觀測值如下，其中所有內方向之權均爲 1，外方向之權均設爲 2/3。

測站 II 3

III 11	0° 0′ 0″.0
III 12	41° 45′ 17″.2
II 5	78° 55′ 13″.3

測站 II 5

II 3	70° 40′ 21″.4
III 11	105° 52′ 21″.5
III 12	129° 13′ 04″.6
III 13	225° 10′ 58″.3
II 7	270° 49′ 24″.6

測站 II 7

III 13	0° 00′ 0″.0
III 15	110° 22′ 24″.0
II 6*	276° 20′ 02″.2

*II6係另外已知點，未列於圖。

測站 III 11

III 12	72° 45′ 12″.1
II 3	163° 33′ 36″.2

測站 III 12

III 11	0° 00′ 00″.0
III 14	164° 31′ 18″.9
III 13	195° 25′ 52″.4
II 5	228° 16′ 01″.0
II 3	312° 33′ 19″.3

測站 III 13　　測站 III 14　　測站 III 15

II 5	0° 0′ 00″.0	III13	0° 00′ 00″.0	II 7	0° 00′ 00″.0
III12	51° 12′ 07″.1	III12	52° 14′ 13″.9	III13	41° 38′ 47″.7
III14	148° 02′ 45″.2	III15	290° 47′ 19″.2	III14	73° 54′ 55″.2
III15	226° 34′ 18″.7				
II 7	254° 33′ 05″.1				

其已知點之坐標及諸新點之近似坐標値各爲:

已知點:

點 名	坐 標 値	
	x	y
II 3 燈 山	3639508.94	243964.16
II 5 鷄 公 山	3639525.70	238422.90
II 7 沙 兒 崗	3637931.31	234036.88

新點:

點 名	近 似 坐 標 値		改 正 値
	(x)	(y)	
III 11 杉 樹 林	36 42 945.44	2 43 301.96	$dx_1 dy_1$
III 12 坡 頭	36 42 390.34	2 40 187.13	$dx_2 dy_2$
III 13 老 鴉 山	36 40 539.40	2 36 313.39	$dx_3 dy_3$
III 14 觀 音 堂	36 42 859.59	2 34 819.97	$dx_4 dy_4$
III 15 龍 濟 寺	36 38 796.82	2 31 750.88	$dx_5 dy_5$

今取新點 III12 坡頂之觀測爲例,演化其計算過程爲:

誤差方程式之常數項:

號數	測站	視準點	v	u	s	r	a_0	a_0-r	$-(r_0+z_0-a_0)$
1	III12	II 3	+16.40	+12.51	4.751	312°33′19″.3	322°39′39″.3	10°06′20″.0	+ 2″.20
2		II 5	−10.82	+17.57	3.364	228°16′01″.0	238°22′21″.2	20″.2	+ 2″.40
3		III11	+20.30	− 3.62	3.164	00°00′00″.0	10°06′19″.0	19″.0	+ 1″.20
4		III13	−18.61	+ 8.89	4.293	195°25′52″.4	205°32′21″.4	29″.0	+11″.20
5		III14	−20.54	− 1.94	5.3[illegible]	164°31′18″.9	174°37′19″.8	00″.9	−16″.90

$z_0 = 10°06′17″.8$

誤差方程式：

號數	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	$-l$	S	p
1			−3.46	−2.63					+ 2.20	+ 3.89	1
2			+3.22	−5.22					+ 2.40	− 0.40	1
3	+6.42	−1.14	−6.42	+1.14					+ 1.20	− 1.20	1
4			+4.33	−2.07	−4.33	+2.07			+11.20	−11.20	1
5			+3.81	+0.36			−3.81	−0.36	−16.90	+16.90	1
1′	+6.42	−1.14	+1.48	−8.42	−4.33	+2.07	−3.81	−0.36	+ 6.10	+ 7.99	$-\frac{1}{5}$

所組成之法方程式為：

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	$-l$	S
+32.98	− 5.86	−43.12	+18.13	+ 5.56	− 2.66	+ 4.89	+ 0.46	+ 7.57	−17.96
	+ 1.04	+ 7.66	− 3.22	− 0.99	+ 0.47	− 0.87	− 0.08	− 1.35	+ 3.19
		+96.39	−20.09	−17.46	+ 8.35	−13.40	− 1.27	−23.50	+ 6.47
			+25.70	+ 1.64	− 0.83	− 7.77	− 0.73	−46.04	+33.20
				+15.00	− 7.16	− 3.29	− 0.50	−48.41	+55.42
					+ 3.43	+ 1.57	+ 0.14	+23.14	−26.48
						+11.62	+ 1.10	+64.47	−58.30
							+ 0.10	+ 6.09	− 5.50

總列所有各測站觀測所得之法方程式，總和之即為所求之法方程式。茲僅列其居首之四項如下：

測　　站	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2
II　3　燈　山	+ 0.83	+ 4.32 +22.35	…… …… + 7.98	…… …… + 6.07 + 4.61
II　5　鷄公山	+ 5.38	− 3.77 + 2.64	…… …… + 6.91	…… …… −11.21 +18.17
II　7　沙兒崗	……	……	……	……
III　11　杉樹林	+28.43	+17.52 +10.81	−24.21 −14.92 +20.61	+ 4.30 + 2.65 − 3.66 + 0.65

III 12 坡 頂	+32.98	− 5.86 + 1.04	−43.12 + 7.66 +96.39	+18.13 − 3.22 −20.09 +25.70
III 13 老鴉山			+15.00	− 7.17 + 3.42
III 14 觀音堂			+ 9.68	+ 0.91 + 0.09
III 15 龍車寺	......	......	......	......
總　　和	+67.62	+12.21 +36.84	−67.33 − 7.26 +156.57	+22.43 − 0.57 −35.15 +52.64

解算之得：

$dx_1=-0.33$　　$dx_2=-0.44$　　$dx_3=+0.37$　　$dx_4=+4.74$　　$dx_5=+0.27$

$dy_1=+0.56$　　$dy_2=+0.27$　　$dy_3=-2.06$　　$dy_2=-1.56$　　$dy_5=+4.20$

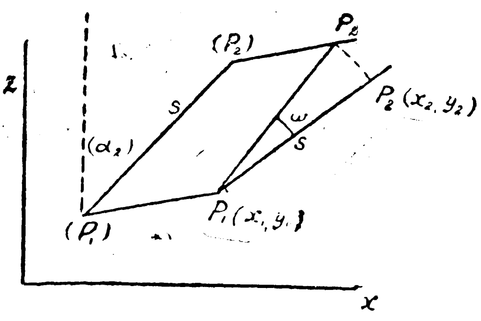
由而求得之點位坐標值及其中誤差各爲：

點	x	y
III 11 杉樹林	36 42 945.44±0.07	2 43 302.02±0.06
III 12 坡 頂	36 42 390.30±0.05	2 40 187.16±0.06
III 13 老鴉山	36 40 539.44±0.03	2 36 313.18±0.05
III 14 觀音堂	36 42 895.12±0.09	2 34 819.81±0.08
III 15 龍車寺	36 38 796.85±0.06	2 31 751.30±0.11

第十節　有距離條件之交會定位法

在雙點定位或多點定位之時，有時二新點間之距離爲已知，或其點間之距離甚近，極易直接量測而得，則此時交會定點法之計算內須附有此固定距離之條件。此條件可卽在計算新點之近似坐標時顧及之。其法：先求一未知點坐標之近似值，然後依二點間量得之距離及二點間近似之方向角計算第二點之坐標近似值。

設第十二圖 P_1 P_2 爲二未知點，其間之固定距離爲 S，而其坐標設各爲 x_1 y_1 與 x_2 y_2，(P_1) 與 (P_2) 爲其近似坐標所決定之點位，其坐標設各爲



第十章　　第十二圖

$(x_1)\,(y_1)$ 與 $(x_2)\,(y_2)$。今命 dx, dy, $dx_2\,dy_2$ 爲其近似坐標之改正數，則得：

$$\left.\begin{aligned}(y_1)+dy_1&=y_1\\(y_2)+dy_2&=y_2\\(x_1)+dx_1&=x_1\\(x_2)+dx_2&=x_2\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

按第十二圖依 $(P_1)\,(P_2)\,P_1$ 點構成平行四邊形得 P_2 點，由式(44)得：

$$\left.\begin{aligned}dx_2-dx_1&=(x_2-x_1)-[(x_2)-(x_1)]=(x_2-x_1)-(x_{P'_2}-x_1)\\&=x_2-x_{P'_2}=+S\frac{w}{\rho}\cos(\alpha_{12})\\dy_2=dy_1&=(y_2-y_1)-[(y_2)-(y_1)]=(y_2-y_1)-(y_{P'_2}-y_1)\\&=y_2-y_{P'_2}=-S\frac{w}{\rho}\sin(\alpha_{12})\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

w 爲近似方向角 (α_{12}) 在平差後所求得之改正數。由第十二圖又知

$$S\sin(\alpha_{12})=(x_2)-(x_1)\qquad S\cos(\alpha_{12})=(y_1)-(y_1)$$

故式(45)可化爲：

$$\left.\begin{aligned}dx_2&=dx_1+\frac{w}{\rho}(y_2)-(y_1)\\dy_2&=dy_1-\frac{w}{\rho}(x_2)-(x_1)\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

式(46)代表保持 $P_1\ P_2$ 點距離之條件，由此二方程式可以使二坐標未知數 $dx_2\,dy_2$ 在改正數方程式中消除，但同時增加未知數 w 一項。

平差時先將各內外方向線之改正數方程式按前數節所述之方法列出，然後用式(46)之關係，消去一未知點之兩坐標未知數，兩未知點 $P_1\ P_2$ 間之方向改正數方程式將更爲簡單。茲仍用以前習用之符號以有括弧者代表其近似値，演化如下：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1-a'=[(a_1)+w]-[r_1+(z_1)+dz_1]\\&=-dz_1+w-[r_1+(z_1)-(a_1)]=-dz_1+w-l_1\\\text{同理}\qquad v_2&=a_2-a'=-dz_2+w-[r_2+(z_2)-(a_2)]\\&=-dz_2+w-l_2\end{aligned}\right\}\qquad(45)^*$$

故在此二式中，坐標未知數已全不存在，關係更較簡單矣。

計算中誤差時，須注意法方程式中之未知數雖僅有三個，而實際之未知數則有五個，包括 $dx_1\ dy_1\ dx_2\ dy_2$ 及 w，故權單位中誤差之計算公式應爲：

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-5}} \tag{46}$$ *

坐標 $x_1\ y_1$ 及 w 之中誤差，仍可由法方程式解算所得之權係數求出；惟 x_2 與 y_2 因爲直接解算諸未知數之函數：

$$dx_2=dx_1+pw,\quad dy_2=dy_1+qw \tag{47}$$

故須依未知數函數之中誤差公式求其中誤差。其公式爲：

$$F=f_1dx_1+f_2dy_1+f_3dw \tag{48}$$

求 x_2 之權時，按式(46) f_1 爲 1，f_2 爲零，而 f_3 爲 $+\frac{(y_2)-(y_1)}{\rho}$；求 y_2 之權時，則 f_1 爲零，f_2 爲 1，而 f_3 爲 $-\frac{(x_2)-(x_1)}{\rho}$ 也。

第十一節　誤差橢圓

由平差計算直接求得之坐標中誤差 m_x，m_y，僅能代表該點在縱橫兩坐標軸方向之精度。其值隨所選坐標軸之方向而異，故不足以作普遍點位誤差之代表。今泛言點位之中誤差爲：

$$M=\sqrt{m_x^2+m_y^2} \tag{49}$$

則此 M 值與坐標軸之方向無關，但仍缺乏實際之意義，因其不能代表某任何方向之點位中誤差，且亦非各方向中誤差之平均值也。欲定一點在不同方向之中誤差，宜利用誤差橢圓以求之。茲將其理論及計算方法分爲單點定位，雙點定位及普遍情形三種論述之。

(一)單點定位

單點定位時之改正數方程式爲：

$$\left.\begin{aligned} v_1&=-l_1+a_1x+b_1y\\ v_2&=-l_2+a_2x+b_2y\\ v_3&=-l_3+a_3x+b_3y\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

相當之法方程式爲：

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y-[al]=0\\ [ab]x+[bb]y-[bl]=0\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

由此求得該點在縱橫坐標軸方向之中誤差爲：

$$\left.\begin{aligned}m_x^2&=\frac{\begin{vmatrix}1&[ab]\\0&[bb]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\ [ab]&[bb]\end{vmatrix}}m^2=\frac{[bb]}{[aa][bb]-[ab]^2}m^2=\frac{[bb]}{D}m^2\\ m_y&=\frac{\begin{vmatrix}[aa]&0\\ [ab]&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\ [ab]&[bb]\end{vmatrix}}m^2=\frac{[aa]}{[aa][bb]-[ab]^2}m^2=\frac{[aa]}{D}m^2\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

其中 m 爲權單位之中誤差，而

$$a=+\frac{\rho}{S}\cos\alpha \qquad b=-\frac{\rho}{S}\sin\alpha \tag{53}$$

$$D=[aa][bb]-[ab]^2$$

欲證明 M 與坐標軸無關，可自

$$M=m_x^2+m_y^2=\frac{[aa]+[bb]}{D}m^2 \tag{54}$$

出發，其中

$$[aa]+[bb]=\left[\frac{\rho^2}{S^2}\cos^2\alpha\right]+\left[\frac{\rho^2}{S^2}\sin^2\alpha\right]=\frac{\rho^2}{S^2} \tag{55}$$

與 α 無關，又

$$\begin{aligned}D=[aa][bb]-[ab]^2&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots)\\ &-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots)=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3\\ &-a_3b_2)^2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

若以式(53)之關係代入則得：

$$D=\rho^2\left\{\frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}{S_1^2S_2^2}+\frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_3)}{S_1^2S_3^2}+\frac{\sin^2(\alpha_2-\alpha_3)}{S_2^2S_3^2}+\right\}\cdots\cdots \tag{56}$$

由此式可知 D 值只隨各方向間之夾角而不隨方向值之本身變化，故亦與

坐標軸方向無關。(55)及(56)既均與坐標軸之方向無關，由(54)之關係可知無論坐標軸取何方向，M 值永爲不變。

今欲求點位在任意方向之中誤差值，可想像使原有坐標軸作任意 β 角之旋轉，今假定坐標軸之轉向爲時鐘方向，則式(53)所代表之方向係數爲：

$$a' = +\frac{\rho}{S}\cos(\alpha-\beta) \qquad b = -\frac{\rho}{S}\sin(\alpha-\beta) \tag{57}$$

而 $$[a'a'] = \rho^2\left\{\frac{\cos^2(\alpha_1-\beta)}{S_1^{\,2}} + \frac{\cos^2(\alpha_2-\beta)}{S_2^{\,2}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \rho^2\left\{\left[\frac{\cos\alpha^2}{S^2}\right]\cos^2\beta + \left[\frac{\sin^2\alpha}{S^2}\right]\sin^2\beta + \left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{S^2}\right]\sin2\beta\right\}$$

按式(53)之關係，上式可化爲：

$$\left.\begin{aligned}&[a'a'] = [aa]\cos^2\beta + [bb]\sin^2\beta - [ab]\sin2\beta\\ \text{同理}\quad &[b'b'] = [bb]\cos^2\beta + [aa]\sin^2\beta + [ab]\sin2\beta\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

參考式(52)，D 既與坐標軸之方向無關，則坐標軸轉動後，在此新軸方向之點位中誤差應爲：

$$\left.\begin{aligned}m_1^{\,2} &= m^2\frac{[b'b']}{D} = m^2\frac{[aa]\sin^2\beta + [bb]\cos^2\beta + [ab]\sin2\beta}{D}\\ m_2^{\,2} &= m^2\frac{[a'a']}{D} = m^2\frac{[aa]\cos^2\beta + [bb]\sin^2\beta - [ab]\sin2\beta}{D}\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

命 β 爲任何一角度，卽可求出與原來坐標軸成該角度之方向內之坐標中誤差：

欲知 β 爲何角 β_0 時 m_1 或 m_2 爲最大值或最小值，可將式(59)依 β 微分，使等於零，因 D 與 β 無關，故可命

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[a'a']}{d\beta} &= -([aa]-[bb])\sin\alpha\beta_0 - 2[ab]\cos2\beta_0 = 0\\ \frac{d[b'b']}{d\beta} &= +([aa]-[bb])\sin2\beta_0 + 2[ab]\cos2\beta_0 = 0\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由上式可得：

$$\tan 2\beta_0 = \frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]} \tag{61}$$

解式 (61) 得 $2\beta_0$ 及 $2\beta_0 \pm 180°$ 或 β_0 及 $\beta_0 \pm 90°$ 二值，二者爲相互垂直之方向，其一爲中誤差最大之方向，另一爲中誤差最小之方向。按式(59)此兩中誤差值爲：

$$\left.\begin{aligned} B^2 &= m^2 \frac{[aa]\sin^2\beta_0 + [bb]\cos^2\beta_0 + [ab]\sin 2\beta_0}{D} \\ A^2 &= m^2 \frac{[aa]\cos^2\beta_0 + [bb]\sin^2\beta_0 - [ab]\sin 2\beta_0}{D} \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

式(62)尚可化簡，因由

$$\sin^2\beta_0 = \frac{1-\cos 2\beta_0}{2}, \qquad \cos^2\beta_0 = \frac{1+\cos 2\beta_0}{2} \tag{63}$$

及

$$\cos 2\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\beta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} = \frac{[aa]-[bb]}{\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}} \tag{64}$$

若命

$$W = \sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2} \tag{65}$$

式(64)可簡書爲：

$$\cos 2\beta_0 = \frac{[aa]-[bb]}{W} \tag{66}$$

式(66)與式(61)相比，得：

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-2[ab]}{W} \tag{67}$$

此時可假定 W 值恆爲正數，以確定 $2\beta_0$ 所居之象限。

將式(66)之結果代入式(63)，得：

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\beta_0 &= \frac{1-\cos 2\beta_0}{2} = \frac{W-[aa]+[bb]}{2W} \\ \cos^2\beta_0 &= \frac{1+\cos 2\beta_0}{2} = \frac{W+[aa]-[bb]}{2W} \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

更將(67)與(68)代於式(63)內而簡化之得:

$$B^2=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}\qquad A^2=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}\tag{69}$$

前既假定 W 恆爲正值,則 $A>B$, 故 A 爲坐標中誤差之最大值, 而 B 爲其最小值。此時之坐標中誤差最小值 B 相當於式(59)之 m_1, 卽式(52)之 m_x。今如仍用原來之坐標方向, 則知此誤差最小值 B 之方向與原來 x 軸之夾角爲 β_0, 或言誤差最大值 A 方向與原來之 y 軸之夾角亦爲 β_0, 今稱此後者之夾角爲 θ_0, 則:

$$\theta_0=\beta_0\tag{70}$$

參考式(61),則　$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])}\tag{71}$$

θ_0 實卽相當於坐標中誤差最大值之方向角。

既求得 A, B, 與 θ_0 之值後,可以 A 爲長軸, θ_0 爲其方向角, B 爲短軸,作一橢圓,此橢圓卽名爲誤差橢圓,其公式爲:

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1\tag{72}$$

u, v 爲以其長短軸所決定之坐標系。今將以上所得結果再總列於下:

$$\tan 2\beta_0=\frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])},\qquad \theta_0=\beta_0\pm 90^\circ\tag{73}$$

$$W=+\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=\frac{-2[ab]}{\sin 2\beta_0}=\frac{[aa]-[bb]}{\cos 2\beta_0}\tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned}m^2_{\text{最大值}}&=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=A^2\ \text{方向角}\ \theta_0\\ m^2_{\text{最小值}}&=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=B^2\ \text{方向角}\ \theta_0\pm 90\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

其次所須求者爲各方向之坐標中誤差與誤差橢圓之關係。欲得此關係,應將式(52)之 m_x m_y 兩式亦化爲 A, B 及 θ_0 之函數:

$$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2=\frac{4W[bb]}{4WD}m^2=\frac{(W+[bb])^2-(W-[bb])^2}{4WD}m^2$$

$$=\left\{\frac{(W+[bb])^2-[aa]^2}{4WD}-\frac{(W-[bb])^2-[aa]^2}{4WD}\right\}m^2$$

$$=\left\{\left(\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}\right)\left(\frac{W-[aa]+[bb]}{2W}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}\right)\left(\frac{W+[aa]-[bb]}{2W}\right)\right\}m^2$$

應用(68)與(69)之關係,可化簡之爲:

$$m_x^2=A^2\sin^2\beta_0+B^2\cos^2\beta_0 \tag{76}$$

或以 θ_0 代 β_0, 並同理求得 m_y^2 之公式,合併書之,遂爲

$$\left.\begin{aligned} m_x^2&=A^2\sin^2\theta_0+B^2\cos^2\theta_0\\ m_y^2&=A^2\cos^2\theta_0+B^2\sin^2\theta_0\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

今如想像 θ_0 爲一變值, 以 θ 代表之, 則式(77) 中之 m_x, m_y 亦可易爲在相當於 θ 方向時之坐標中誤差 m_1, m_2, 式 (77) 遂變爲一普遍公式:

$$\left.\begin{aligned} m_1^2&=A^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta\\ m_2^2&=A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

此時須注意者, 即 θ 之零方向爲誤差橢圓之長半徑方向, 故式(78)係以誤差橢圓之 u, v 爲坐標系。如以 θ 及 m_1 (或 m_2)爲極坐標,作一曲線,將曲線上之各點與誤差橢圓之中心相連,即得該方向內之坐標中誤差。

此處所欲證明者, 即此曲線應爲誤差橢圓之垂點曲線。自橢圓形上任意一點作一切線,然後由橢圓中心作一垂線至此切線上。其相交之點名爲垂點,連接所有此等垂點之曲線即爲垂點曲線。

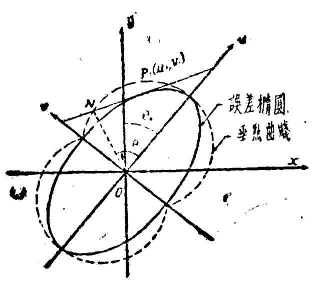
按第十三圖設 P_1 (u_1, v_1) 爲誤差橢圓上之一點, 則根據誤差橢圓公式(72),在 P_1 點之切線公式應爲:

$$\frac{u_1}{A^2}u+\frac{v_1}{B^2}v=1 \tag{79}$$

按解析幾何定理, 垂直於此切線通過橢圓中心之垂線與 u 軸所成角度 θ 之公式爲:

$$\tan\theta=\frac{A^2v_1}{B^2u_1}$$

化成 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$, 即爲



第十章　第十三圖

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{B^2u_1}{\sqrt{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}}\\ \sin\theta &= \frac{A^2v_1}{\sqrt{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}}\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

又垂距 ON 爲:

$$\overline{ON} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_1}{A^2}\right)^2+\left(\frac{v_1}{B^2}\right)^0}} = \frac{A^2B^2}{\sqrt{(B^2v_1)^2+(A^2v_1)^2}} \tag{81}$$

因 P_1 係橢圓上之一點,故按式(79)

$$B^2u_1^2+A^2v_1^2=A^2B^2 \tag{82}$$

聯合(81)與(82),得:

$$\overline{ON}^2 = \frac{A^2B^2(B^2u_1^2+A^2v_1^2)}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2} = \frac{A^2B^4u_1^2}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}$$

$$+\frac{B^2A^4v_1^2}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}$$

根據式(80),可將上式化爲:

$$\overline{ON}^2 = A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta \tag{83}$$

比較(78)與(83)卽知 ON 與 m_2 相當,因此證明式(78)之曲線卽爲誤差橢圓之垂點曲線。

實際欲求任意一方向之坐標中誤差時,先作該點之誤差橢圓,然後將該方向線 ON 繪出,作一線與 ON 垂直並切於誤差橢圓,此線與垂線相交於 N, ON 卽代表該方向之坐標中誤差。

例: 繼續第七節之例:

$$[aa]=22.93 \qquad [ab]=-1.79$$

$$[bb]=34.42 \qquad m=\pm4''.17$$

$$\tan 2\theta_0 = \frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])} = \frac{+3.58}{-11.49} = -0.3115$$

$$2\theta = 162^\circ\ 41'\ 39''$$

$$\theta = 181^\circ\ 20'\ 50''$$

$$W^2 = ([aa]-[bb])^2+4[ab]^2 = (132.018+12.816) = 144.834$$

$$W = +12.004$$

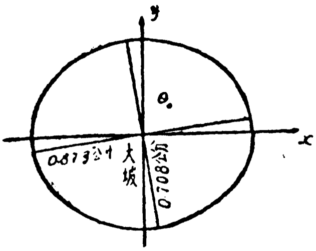
$$D=[aa][bb]-[ab]^2=+786.046,\quad 2D=+1572.092$$

$$A=\sqrt{m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}=\sqrt{17.389\frac{34.42+22.93+12.034}{1572.092}}$$

$$=\pm 0.876\text{公寸}$$

$$B=\sqrt{m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}=\sqrt{17.389\frac{34.42+22.93+12.034}{1572.092}}$$

$$=\pm 0.708\text{公寸}$$



第十章　第十四圖

（二）雙點定位

在雙點定點時其坐標之法方程式爲：

$$\begin{aligned}
\underline{[aa]}x_1+[ab]y_1+[ac]x_2+[ad]y_2-[al]&=0\\
+\underline{[bb]}y_1+[bc]x_2+[bd]y_2-[bl]&=0\\
+\underline{[cc]}x_2+[cd]y_2-[cl]&=0\\
\underline{[dd]}\quad-[dl]&=0
\end{aligned}$$

經二次約化後得：

$$\left.\begin{aligned}
[cc\cdot2]x_2+[cd\cdot2]y_2-[cl\cdot2]&=0\\
[cd\cdot2]x_2+[dd\cdot2]y_2-[dl\cdot2]&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(84)$$

式(84)與式(51)相似，故知求第二點之誤差橢圓時，可仍用單點定位時之諸公式(72－74)，惟此時以$[cc\cdot2]$代$[aa]$；$[cd\cdot2]$代$[bb]$耳。

至於解求第一點之誤差橢圓時，則必須將法方程式之未知數次序顚倒，使x_2與y_2居於前二項，而使x_1與y_1爲末二項，則經二次約化之後得相當式(84)之公式爲：

$$\left.\begin{aligned}
[aa\cdot2]x_1+[ab\cdot2]y_1-[al\cdot2]&=0\\
[ab\cdot2]x_1+[bb\cdot2]y_1-[bl\cdot2]&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(85)$$

例：繼續第八節之例題

將第八節之例題中法方程式約化，經二次後得：

$$7.54\ dx_b+\ 3.84\ dy_b+10.80=0$$

$$3.84\ dx_b+10.58\ dy_b+16.03=0$$

故 $$[aa]=+7.54,\quad [bb]=+10.58,\quad [ab]=+3.84$$

$$m=\pm 1''.79$$

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]}=\frac{-7.68}{-3.04}=+2.586$$

$$2\theta_0=248°\ 29'$$

$$\theta_0=124°\ 14'.5$$

$$W^2=([aa]-[bb])^2+4[ab]^2=9.18+58.98=68.16$$

$$W=+8.45$$

$$D=[aa][bb]-[ab]^2=64.81$$

$$2D=129.62$$

$$A=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}=\pm 0.80\text{公寸}$$

$$B=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}=\pm 0.49\text{公寸}$$

以上之計算係屬於中雲寺者。復將此組法方程式次序倒換幷約化二次，於是得:

$$14.16\ dx_a+\ 1.89\ dy_a+34.19=0$$

$$1.89\ dx_a+23.63\ dy_a+\ 6.43=0$$

故 $$[aa]=14.16,\quad [bb]=23.63,\quad [ab]=+1.89$$

$$m=\pm 1''.79$$

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]}=\frac{-3.78}{-9.47}=+0.399$$

$$2\theta_0=201°\ 45'\qquad \theta_0=100°\ 52'.5$$

$$W=\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=\sqrt{103.96}=+10.18$$

$$D=[aa][bb]-[ab]=331.0$$

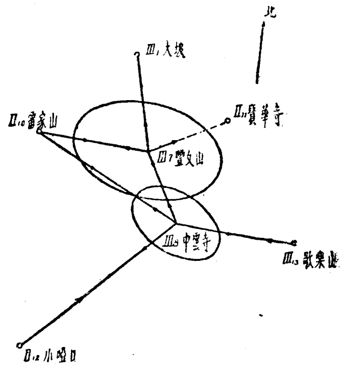
$$A=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}=\pm 0.48\text{公寸}$$

$$B=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}=\pm 0.36\text{公寸}$$

以上之計算係屬於豐文山。二新點之誤差橢圓以圖上一公分等於點位誤差爲四公分之比例尺繪示於第十五圖。

（三）普遍情形

以上所用之方法，係根據間接測觀平差法中法方程式之係數，是以欲求一點之誤差橢圓，必須將其未知數化爲（51）或（84）（85）之形式。此種方法應用於單點定位時固極方便，但多點同時定位，或以條件觀測法平差時，前述之公式卽不能適用。此困難可以改用權係數之方法克服之，蓋基本公式（52）亦可書作：



第十章　第十五圖

$$m_x^2=[\alpha\alpha]m^2 \qquad m_y^2=[\beta\beta]m^2 \tag{86}$$

α，β 爲坐標値 x，y，之權係數，卽：

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\cdots\cdots+\alpha_n l_n \\ y&=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\cdots\cdots+\beta_n l_n \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

l_1，l_2，$\cdots\cdots$ l_n 爲觀測値。

權係數平方和 $[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$ 及乘積和 $[\alpha\beta]$ 與前所應用之法方程式係數 $[aa]$ $[bb]$ $[ab]$ 有下列之關係（見第五章第十節）：

$$[\alpha\alpha]=\frac{1}{[aa\cdot 1]}, \qquad [\beta\beta]=\frac{1}{[bb\cdot 1]}, \qquad [\alpha\beta]=\frac{1}{[ab\cdot 1]}$$

或將 $[aa\cdot 1]$ $[bb\cdot 1]$ $[ab\cdot 1]$ 等展開，卽得：

$$[\alpha\alpha]=\frac{[bb]}{D}, \qquad [\beta\beta]=\frac{[aa]}{D}, \qquad [\alpha\beta]=\frac{-[ab]}{D} \tag{88}$$

今如命

$$\Delta=[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta][\alpha\beta] \tag{89}$$

則由式（88）可證明：

$$\Delta D=1$$

而式（88）亦可化爲：

$$[aa]=\frac{[\beta\beta]}{\Delta},\qquad [bb]=\frac{[\alpha\alpha]}{\Delta},\qquad [ab]=-\frac{[\alpha\beta]}{\Delta} \tag{90}$$

將式(90)之關係代入(73)(74)(75)及(69)諸式內，卽得以權係數計算之公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\tan 2\theta_0=\frac{+2[\alpha\beta]}{-([\alpha\alpha]-[\beta\beta])}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&w^2=\frac{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}{\Delta^2}=\frac{Q^2}{\Delta^2}\\
&Q=\sqrt{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}=\frac{2[\alpha\beta]}{\sin^2\theta_0}=\frac{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]}{\cos 2\theta_0}\\
&A^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]+Q}{2};\ B^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]-Q}{2}
\end{aligned}\right\}(91)$$

以上諸式雖以單點定位之例導出，但在其他情形時，亦可適用，因權係數之值，決不因平差所取之形式而異，例如由(84)(85)兩式之形式亦可化爲權係數之公式也。是以(91)爲普通之公式，無論採用何種方式平差，均可適用。

間接觀測：間接觀測之權係數總和$[\alpha\alpha]$，$[\beta\beta]$，$[\alpha\beta]$可按權方程式附於法方程式後計算之，但在多點定位時，其中許多項如$[\alpha\gamma]$ $[\alpha\delta]$ $[\beta\gamma]$. $[\beta\delta]$等均爲不需要之值，故此時以單獨計算之方法爲宜。關於$[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$之計算，已於第五章中論及，至於$[\alpha\beta]$之計算公式可導出如下：

今如有某未知數之函數設爲：

$$F=x+y=[\alpha l]+[\beta l]=[(\alpha+\beta)l]$$

則此函數之權倒數爲：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[\alpha\alpha]+2[\alpha\beta]+[\beta\beta] \tag{92}$$

易言之，亦可想像$x+y$爲未知數x，y，之函數，而應用第五章第十三節之公式算求之。此時

$$f_1=1,\ f_2=0,\ f_3=0,\ f_4=0$$
$$f'_1=0,\ f'_2=1,\ f'_3=0,\ f'_4=0$$

故 $x+y$ 之權倒數爲：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=\frac{f_1^2}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}]^2}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}]^2}{[dd\cdot3]}$$
$$+\frac{f'^2_1}{[aa]}+\frac{[f'_{2\cdot1}]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[f'_{3\cdot2}]^2}{[cc\cdot2]}+\frac{[f'_{4\cdot3}]^2}{[dd\cdot3]}$$
$$+2\left(\frac{f_1f'_1}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}][f'_{2\cdot1}]}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}][f'_{3\cdot2}]}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}][f'_{4\cdot3}]}{[dd\cdot3]}\right)\tag{93}$$

式(93)之前二項爲$[\alpha\alpha]$與$[\beta\beta]$，故比較式(93)與式(90)時，可知：

$$[\alpha\beta]=\frac{f_1f'_1}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}][f'_{2\cdot1}]}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}][f'_{3\cdot2}]}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}][f'_{4\cdot3}]}{[dd\cdot3]}\tag{94}$$

<u>條件觀測</u>：在條件觀測時，$[\alpha\alpha][\beta\beta]$之計算可按第六章第四節之公式(56)行之。

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_x}&=[\alpha\alpha]=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots\cdots\\ \frac{1}{P_y}&=[\beta\beta]=[f'f']-\frac{[af']^2}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{95}$$

今設求下列函數之權倒數：

$$F=x+y$$

應用權係數α，β，可得：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[\alpha\alpha]+2[\alpha\beta]+[\beta\beta]\tag{96}$$

同理亦可按式(96)得：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[(f+f')^2]-\frac{[af+af']^2}{[aa]}-\frac{[(bf+bf')\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}\tag{97}$$

其中

$$[(f+f')^2]=[ff]+2[ff']+[f'f']$$
$$[af+af']^2=[af]^2+2[af][af']+[af']^2$$
$$[(bf+bf')\cdot1]^2=[bf\cdot1]^2+2[bf\cdot1][bf'\cdot1]+[bf']^2$$

故式(97)可書爲

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots\cdots$$

$$+[f'f']-\frac{[af']}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot 2]}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots$$

$$+2\left([ff']-\frac{[af][af']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1][bf'\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\cdots\cdots\right) \quad (98)$$

將式(95)(96)與(98)相比較,可知:

$$[\alpha\beta]=[ff']-\frac{[af][af']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1][bf'\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \quad (99)$$

由此式可求得$[\alpha\beta]$之值,然後應用式(91)定誤差橢圓。

例: 求第八章第九節(第十七圖)點(4)之誤差橢圓。點(4)之位置係由基線(1)(2)計算而得,基線(1)(2)之長設為100000單位, 此時之二未知數可認為自點(1)至點(4)距離 ρ 之變遷 δr 及與此方向垂直之變遷 $\rho\,\delta\psi$, 設 ψ 角為 $\angle(2)(1)(4)$,因得相當於式(86)之二未知數為:

$$dx=\delta\rho \qquad\qquad dy=\rho\delta\psi$$

在後式內 ρ 為常數,可隨後附入,命第一函數 $f=\rho$ 而第二函數 $f'=\psi$。其由第八章表九結果所得之 ρ 與 φ 之數值各為:

$$\log\rho==4.99999813 \qquad \psi=90°\,0'\,0''.4755$$

今首求式(96)所代表之$[\alpha\alpha]$與$[\beta\beta]$,則

$$\text{函數}\ f=\rho=100000\frac{\sin\angle(4)(2)(1)}{\sin\angle(1)(4)(2)}$$

$$\log\rho=5+\log\sin(360-315°0'0''.6133-\eta_4)$$
$$-\log\sin(45°0'0''.6000+r_2-r_1)$$

因得:

$$f_1=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_1}=0 \qquad f_2=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_2}=0 \qquad f_3=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_3}=0$$

$$f_4=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_4}=-0.4849 \qquad f_5=\frac{d\rho}{d\lambda_5}=0 \qquad f_6=\frac{d\rho}{d\lambda_6}=0$$

$$f_7=\frac{d\rho}{d r_2}=\frac{d\rho}{d\rho_4}=-0.4849 \qquad f_8=\frac{\partial\rho}{\partial r_1}=-f_7=-0.4849$$

$$\text{函數}\ f'=\psi+\xi_4=\psi+r_2$$

因得:

$$f'_1=f'_3=f'_4=f'_5=f'_6=f'_7=f'_8=0 \qquad f'_2=\frac{\partial f'}{\partial \lambda_2}=1$$

故：

$$\left[\frac{ff}{\gamma}\right]=\frac{(-0.4849)^2}{\frac{15}{14}}+\frac{(+0.4849)^2}{1}+\frac{(-0.4849)^2}{1}=0.6897$$

$$\left[\frac{f'f'}{\gamma'}\right]=\frac{4}{3}=1.3333$$

將$f_1 f_2 \cdots\cdots f_8$，及$f'_1 f'_2 \cdots\cdots f'_8$等值列於表五，而求其各相當$\frac{+af}{p}$及$\frac{af'}{p}$之乘積則得：

$$\left[\frac{af}{p}\right]=+0.3233,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=-0.5172,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=-0.4849,$$

$$\left[\frac{df}{p}\right]=+1.4224,$$

$$\left[\frac{af'}{p}\right]=+0.6667,\quad \left[\frac{bf'}{p}\right]=+1.333,\quad \left[\frac{cf'}{p}\right]=+0.6667,$$

$$\left[\frac{df'}{p}\right]=0,$$

更參考第八章表八則得：

$$\left[\frac{bf\cdot 1}{p}\right]=-0.5172-0.40816\times 0.3233=-0.6492$$

$$\left[\frac{cf\cdot 2}{p}\right]=-0.4849+0.23471\times 0.3233+0.53179\times 0.6492=-0.0638$$

$$\left[\frac{df\cdot 3}{p}\right]=+14224-0.66329\times 0.3233-0.52413\times 0.6492-0.35322 \times 0.0638=40.8452$$

同理得：

$$\left[\frac{bf'\cdot 1}{p}\right]=+1.0612,\quad \left[\frac{cf'\cdot 2}{p}\right]=+0.2589,\quad \left[\frac{df'\cdot 3}{p}\right]=+0.2054$$

故按式(95)參考表七（第八章）得：

$$[aa]=0.6897-\frac{(0.3233)^2}{3.2666}-\frac{(-0.6492)^2}{3.7225}-\frac{(-0.0638)^2}{2.7006}+\frac{(+0.8452)^2}{3.1366}$$

$$=0.3152$$

$$[\beta\beta]=1.3333-\frac{(+0.6667)^2}{3.2666}-\frac{(+1.0612)^2}{3.7225}-\frac{(+0.2589)^2}{2.7006}-\frac{(+0.2054)^2}{3.1366}$$

$$=0.8566$$

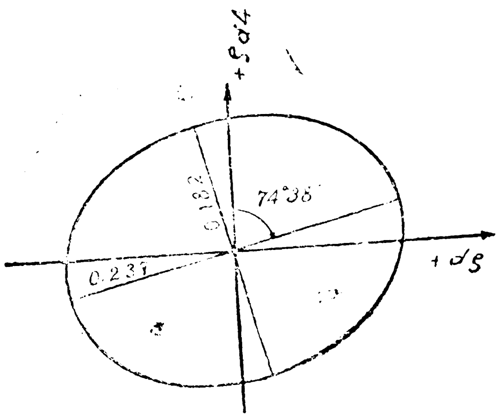
更按式(99)得：

$$[\alpha\beta]=0-\left\{\frac{0.3233\times0.6667}{3.2666}-\frac{0.6492\times1.0612}{3.7225}-\frac{0.0638\times0.2589}{2.7006}+\frac{0.8452\times0.2054}{3.1366}\right\}=+0.06986$$

此種計算係根據$f'=\psi$算求，實則此時所檢討之誤差爲$\rho\, d\psi$，故所得各值應爲：

$$[\alpha\alpha]=0.3152\qquad [\beta\beta]=0.8566\left(\frac{100000}{206265}\right)^2=0.2013$$

$$[\alpha\beta]=+0.06986\left(\frac{100000}{206265}\right)=+0.03387$$



第十章　　第十六圖

此時式(89)各項均已算出，可以據之求誤差橢圓之各值，更由第八章之例，知權單位之中誤差爲：

$m=0''.416$，按式(89)：

$$\tan 2\theta_0=\frac{+2(0.03387)}{-(0.3152-0.2013)}$$

$$=-0.5947$$

$$2\theta_0=149°16'$$

$$\theta_0=\ 74°38'$$

$$\theta_0=15°22'$$

$$Q=\frac{-([\alpha\alpha]-[\beta\beta])}{\cos 2Q_0}=\frac{0.1139}{0.8596}$$

$$=0.1325$$

$$A=0.416\sqrt{\frac{0.5165+0.1325}{2}}$$

$$=\pm0.237$$

$$B=0.416\sqrt{\frac{0.5165-0.1325}{2}}$$

$$=\pm0.182$$

第十一章　大規模三角網或三角鎖之平差

第一節　概論

昔歐美各邦所作之三角測量，其平差多採用强制附合之方法，使後作之三角測量附合於以前完成各部之上。此法實用上固極方便，且可不影響以前計算之成果，但輾轉附合，牽制漸多，以致各種系統誤差均集於後作之三角網中，其結果常使網形發生扭曲。故在大規模三角網進行至相當階段時，必須設法將所有觀測結果舉行調整之平差。此種大規模平差不僅可使一國內之三角網獲得合理之結果，其意義更可及於國際間三角網之連絡，使國際間測定地球形狀之工作亦能進入一新階段。

應用高斯約化法作大規模三角平差計算之困難有二：一爲解算法方程式工作之繁巨，一爲計算精度之不易維持。蓋三角網平差，一般均用條件法，即繫數法，網之規模愈大，則條件與法方程式之數目愈多，而法方程式解算之工作與法方程式數目之平方成比例，是以三角網之規模增大一倍，計算工作即增加三倍。至於計算精度，亦與法方程式數目有關，蓋約化次數愈多，約化後之係數値精度愈差；且約化至最後一法方程式求出最後一繫數値後，仍須代返各約化法方程式中，依次求出其他各繫數之値，直至求出第一繫數値爲止。因此第一繫數値之精度最差，而最後一繫數値之精度最高。且一般法方程式內各項係數之値均甚小，經多次約化後，其値極易不可靠，是以大規模法方程式之解算中，爲保持較好之精度，必須將各繫數計算之位數增加，因此亦增加計算之工作。

若專就理論而言，大規模三角網之平差原可同樣採用前數章所論及之方法，但因上述兩種實際困難，必須另設他法，以資補救，此即本章所欲討論之範圍。

應用高斯約化法解算法方程式之限度，約以五六十個未知數爲限。逾此限度，則上述兩種困難即將顯着。倘法方程式之數目不過多，爲補救上述困難之第二點，可採用顚倒法方程式次序之法。蓋根據上述之計算精度，最後一繫数之精度最高，而第一繫數値之精度最低。今若將法方程式

之次序完全顚倒，再算一次，則第一次計算精度較差之各繫數，此次均可得較好之精度。但應用此法時計算工作加倍而精度僅略事增高，故其應用，僅限於法方程式數目不甚多時。

此外高斯尙創用所謂分部漸近法。如有略大規模之法方程式，可將其分爲數部。先解算第一部法方程式，將其中所有其他諸部之繫數項均先取消，如此求得第一部繫數之近似値，將其代入第二部法方程式中，並將第二部法方程式中仍含有之其他各部繫數項取消，而求第二部繫數之近似値。如此繼續，直至最後一部繫數求出爲止，此爲第一次近似値。今如將所有第二以下以至最後一部繫數之近似値代入第一部法方程式內，再從而求第一部繫數之値，則必與第一次近似値不符，但必比較更接近其應得之値。如此再順序解算一遍，求出所有繫數之第二次近似値。如第二次近似値仍不能滿足法方程式至滿意之程度，則必須再解算一遍，直至求出滿意之値爲止。此種方法應用時計算工作自亦相當繁巨，但一般而論，可較全體解算大規模法方程式之工作爲少。蓋吾人如將所有法方程式分爲 n 部，則重複計算 n 次，始與全體解算之工作相當。但尙有一優點，卽每次解算時，僅常數項不同，而各繫數係數之約化則不必重算。且在計算小規模之法方程式時，如偶有小誤，其影響僅限於一小部，不若全體解算時，一小誤差之存在，致使全局重算也。

上述之方法固可解決計算困難之一部，但仍嫌過繁，且其漸近之程度亦因不同之情形而異，故不能作爲一般之應用方法。

關於解算大規模法方程式之嚴格方法，自克理格爾以後，始漸發展，博爾玆繼之創用擴展法及代替法，對於實用有極大之意義。此外愛格又用大地線法作嚴格解算之工具，對於三角鎖佈成網狀時之平差最爲適宜，本章均將分別論之。

至於用簡略法解算大規模三角網，亦有若干發展，蓋簡略法之便利在能減少計算工作至極小之限度，如能愼加選擇，其結果不致與用嚴格法者相差過多，故本章亦將普通常用之簡略法作一介紹。

此外尙須提出者，卽用坐標法作三角網平差之問題。一般情形之下，三角網平差全用繫數法，但在特殊情形下，坐標法亦自有其優點，故於章末特闢一節論之。

第二節 克里格爾分組平差法❶

克里格爾分組平差法之原理，係將條件方程分爲兩組，將第二組條件方程設法加以改化，使改化後之條件方程與第一組條件方程完全獨立，然後可分別求兩組繫數。今設兩組條件方程如下：

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_1&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_2&=0\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+w_3&=0\end{aligned}\right\}\text{第一組}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4+\varphi_1&=0\\ \beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3+\beta_4v_4+\varphi_2&=0\end{aligned}\right\}\text{第二組}\qquad(2)$$

將第一組條件保持不變，但改化第二組，使之與第一組無關。分別乘第一組各式以 ξ_1，η_1，ζ_1，而加於第二組之第一式內，再分別乘第一組各式以 ξ_2，η_2，ζ_2，而加於第二組之第二式內，即得兩改化之條件方程如下：

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha_1+a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1\zeta_1)v_1+(\alpha_2+a_2\xi_1+b_2\eta_1+c_2\zeta_1)v_2+\cdots\cdots\\ &\qquad+(\varphi_1+w_1\xi_1+w_2\eta_1+w_3\zeta_1)=0\\ &(\beta_1+a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1\zeta_2)v_1+(\beta_2+a_2\xi_2+b_2\eta_2+c_2\zeta_2)v_2+\cdots\cdots\\ &\qquad+(\varphi_2+w_1\xi_2+w_2\eta_2+w_3\zeta_2)=0\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

命

$$\left.\begin{aligned} &A_1=\alpha_1+a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1\zeta_1 && B_1=\beta_1+a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1\zeta_2\\ &A_2=\alpha_2+a_2\xi_1+b_2\eta_1+c_2\zeta_1 && B_2=\beta_2+a_2\xi_2+b_2\eta_2+c_2\zeta_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &W_1=\varphi_1+w_1\xi_1+w_2\eta_1+w_3\zeta_1 && W_2=\varphi_2+w_1\xi_2+w_2\eta_2+w_3\zeta_2\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

則式(3)可簡書爲：

$$\begin{aligned} A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3+A_4v_4+W_1&=0\\ B_1v_1+B_2v_2+B_3v_3+B_4v_4+W_2&=0\end{aligned}\qquad(5)$$

ξ_1，η_1，ζ_1，ξ_2，η_2，ζ_2，諸値當爲不定係數，其決定之條件爲須使改化後

❶見 L. Krüger: Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Veröff. Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 18, Potsdam, 1905.

之第二組條件(5)與原有之第一組(1)不發生關係。易言之,即須使

$$
\begin{aligned}
&[aA]=[bA]=[cA]=0\\
&[aB]=[bB]=[cB]=0
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

(6)內之六個方程適足以決定六個不定係數,將其寫出,即為:

$$
\begin{aligned}
&[aa]\xi_1+[ab]\eta_1+[ac]\zeta_1\ +[\alpha a]=0\\
&[ab]\xi_1+[bb]\eta_1\ +[bc]\zeta_1\ +\ [ba]=0\\
&[ac]\xi_1\ +[bc]\eta_1\ +[cc]\zeta_1\ +\ [ca]=0\\
&[aa]\xi_2+[ab]\eta_2+[ac]\zeta_2\ +[a\beta]=0\\
&[ab]\xi_2+[bb]\eta_2\ +[bc]\zeta_2\ +[b\beta]=0\\
&[ac]\xi_2\ +[bc]\eta_2\ +[cc]\ \zeta_2\ +[c\beta]=0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

式(7)與第一組之法方程式完全類似,故其解算可與第一組法方程式相併行之,由此求出 $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1\ \xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ 諸值後,代入式(4)內即可得 $A_1\ A_2\cdots$ $\cdots W_1$, $B_1\ B_2\cdots\cdots W_2$ 諸值,於是得第二組法方程式:

$$
\begin{aligned}
&[AA]K_1+[AB]K_2+w_1=0\\
&[AB]K_1+[BB]K_2+w_2=0
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

而與第一組法方程式完全無關。各改正數之值為:

$$
\begin{aligned}
&v_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\alpha_1K_1+\beta_1K_2\\
&v_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\alpha_2K_1+\beta_2K_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

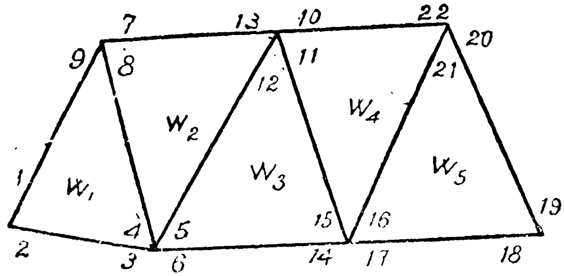
此種方法之適用與否, 全視第一組法方程式解算之難易以及式 (4) 之複雜與否而定。倘第一組法方程式極簡單而有規律, 則不定係數 ξ, η ……等之算求甚易,式亦較簡單,克氏此法應用於三角網平差時, 如以角度條件為一組,邊長條件為第二組,最為適用。

第三節 博爾茲擴展法[1]

博爾茲擴展法,係假定三角網為等權之方向觀測,其理論則由克里格爾之分組平差法所導出,但平差時不用高斯約化法解算法方程式,而將各繫數展為各條件不符值之一次函數,謂之繫數擴展式。當三角網或鎖之構

[1] 見 H. Boltz: Entwickelungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der M. d. Kl. Q. Veröff. des Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 90.

造有相當規律時,此種繫數擴展式之係數極易求得。今設一含有五個三角形之三角形單鎖如第一圖,其角度條件爲:



第十一章　第一圖

$$\left.\begin{array}{l}
-v_1+v_2-v_3+v_4\cdots\cdots\cdots\cdots-v_8+v_9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+w_1=0\\
\cdots\cdots\cdots-v_4+v_5\cdots\cdots-v_7+v_8\cdots\cdots\cdots-v_{12}+v_{13}\cdots\cdots\cdots\cdots+w_2=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots-v_5+v_6\cdots\cdots\cdots\cdots-v_{11}+v_{12}\cdots\cdots-v_{14}+v_{15}\cdots+w_3=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+w_4=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+w_5=0
\end{array}\right\}\quad(10)$$

由此組成法方程式:

$$\begin{array}{lr}
+6k_1-2k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad +w_1=0 & \\
-2k_1+6k_2-2k_3 \qquad\qquad\qquad +w_2=0 & \\
\qquad -2k_2+6k_3-2k_4 \qquad\quad +w_3=0 & (11)\\
\qquad\qquad -2k_3+6k_4-2k_5+w_4=0 & \\
\qquad\qquad\qquad -2k_4+6k_5+w_5=0 &
\end{array}$$

式(11)之形狀極有規則,故易將其化爲擴展式

$$\begin{array}{lr}
k_1=-0.191w_1-0.073w_2+0.028w_3-0.010w_4-0.003w_5 & \\
k_2=-0.073w_1-0.219w_2-0.083w_3-0.031w_4-0.010w_5 & \\
k_3=-0.028w_1-0.083w_2-0.222w_3-0.083w_4-0.028w_5 & (12)\\
k_4=-0.010w_1-0.031w_2-0.083w_3-0.219w_4-0.073w_5 & \\
k_5=-0.003w_1-0.010w_2-0.028w_3-0.073w_4-0.191w_5 &
\end{array}$$

由式(11)化至式(12)可用克里格爾之不定係數解法❶,亦可用連續分數之解法❷,在博爾茲及耶奈(Jenne)之兩專刊中,已將所有通常三角網

❶見 L. Krüger: Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze, Veröff des Kgl. Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 25.

❷見 W. Jenne: Kettenbruchformen und Korrelatentabellen. Veröff des Preuss Geod. Instituts N. F. Nr. 107.

可遇到之形狀及其繫數擴展式列成表狀。一般而論，擴展式之形狀如下：

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f_{11}w_1 + f_{12}w_2 + f_{13}w_3 + \cdots\cdots \\
k_2 &= f_{21}w_1 + f_{22}w_2 + f_{23}w_3 + \cdots\cdots \\
k_3 &= f_{31}w_1 + f_{32}w_2 + f_{33}w_3 + \cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

所有 f 稱為擴展係數，在式(13)中擴展係數亦為對稱的相等，即

$$
f_{12}=f_{21} \quad f_{13}=f_{31} \quad f_{23}=f_{32} \cdots\cdots \tag{14}
$$

蓋式(13)實即相當於第五章第十一節之法方程式不定式解法，彼處已證明此種對稱之情形，故不贅述。今仍設兩組條件方程式如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots\cdots + a_nv_n + w_1 &= 0 \\
b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots\cdots + b_nv_n + w_2 &= 0 \\
c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots\cdots + c_nv_n + w_3 &= 0
\end{aligned}
\right\}\text{第一組}
\tag{15}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots\cdots + \alpha_nv_n + w_4 &= 0 \\
\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \cdots\cdots + \beta_nv_n + w_5 &= 0
\end{aligned}
\right\}\text{第二組}
\tag{16}
$$

今如不顧第二組條件而列出第一組法方程式，即得：

$$
\begin{aligned}
[aa]k_1^0 + [ab]k_2^0 + [ac]k_3^0 + w_1 &= 0 \\
[ab]k_1^0 + [bb]k_2^0 + [bc]k_3^0 + w_2 &= 0 \\
[ac]k_1^0 + [bc]k_2^0 + [cc]k_3^0 + w_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

將其按擴展式展開，即得：

$$
\begin{aligned}
k_1^0 &= f_{11}w_1 + f_{12}w_2 + f_{13}w_3 \\
k_2^0 &= f_{21}w_1 + f_{22}w_2 + f_{23}w_3 \\
k_3^0 &= f_{31}w_1 + f_{32}w_2 + f_{33}w_3
\end{aligned}
\tag{18}
$$

但若將所有第一二兩組條件列於一處，其法方程式應為下式：

$$
\left.
\begin{array}{l|l}
[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 & + [a\alpha]k_4 + [a\beta]k_5 + w_1 = 0 \\
[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 & + [b\alpha]k_4 + [b\beta]k_5 + w_2 = 0 \\
\underline{[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3} & + [c\alpha]k_4 + [c\beta]k_5 + w_3 = 0
\end{array}
\right\}
\tag{19}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[a\alpha]k_1 + [b\alpha]k_2 + [c\alpha]k_3 & + [\alpha\alpha]k_4 + [\alpha\beta]k_5 + w_4 = 0 \\
[a\beta]k_1 + [b\beta]k_2 + [c\beta]k_3 & + [\alpha\beta]k_4 + [\beta\beta]k_5 + w_5 = 0
\end{array}
\tag{20}
$$

於第一組式(19)中，命

$$
\begin{aligned}
w'_1 &= [aa]k_4 + [a\beta]k_5 + w_1 \\
w'_2 &= [ba]k_4 + [b\beta]k_5 + w_2 \\
w'_3 &= [ca]k_4 + [c\beta]k_5 + w_3
\end{aligned}
\tag{21}
$$

於是可按式(13)將 $k_1\ k_2\ k_3$ 等化為擴展式:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f_{11}w'_1 + f_{12}w'_2 + f_{13}w'_3 \\
k_2 &= f_{21}w'_1 + f_{22}w'_2 + f_{23}w'_3 \\
k_3 &= f_{31}w'_1 + f_{32}w'_2 + f_{33}w'_3
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$k_1\ k_2\ k_3$ 為最後應得之繫數值。將式(22)與(18)相較，並顧及式(21)之關係，可知 k 與 k^0 之關係如次:

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_1^0 &+ (f_{11}[aa] + f_{12}[ba] + f_{13}[ca])k_4 \\
&+ (f_{11}[a\beta] + f_{12}[b\beta] + f_{13}[c\beta])k_5
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$k_2\ k_3$ 之式類似(23)。

今命

$$
\begin{aligned}
z_{41} &= f_{11}[aa] + f_{12}[ba] + f_{13}[ca] \\
z_{42} &= f_{21}[aa] + f_{22}[ba] + f_{23}[ca] \\
z_{43} &= f_{31}[ca] + f_{23}[ba] + f_{33}[ca]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{51} &= f_{11}[a\beta] + f_{12}[b\beta] + f_{13}[c\beta] \\
z_{52} &= f_{21}[a\beta] + f_{22}[b\beta] + f_{23}[c\beta] \\
z_{53} &= f_{31}[a\beta] + f_{23}[b\beta] + f_{33}[c\beta]
\end{aligned}
\tag{25}
$$

則式(23)可簡書為:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k_1^0 + z_{41}k_4 + z_{51}k_5 \\
k_2 &= k_2^0 + z_{42}k_4 + z_{52}k_5 \\
k_3 &= k_3^0 + z_{43}k_4 + z_{53}k_5
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$z_{41}\ z_{42}\ z_{43}\ z_{51}\ z_{52}\ z_{53}$ 等名為介繫數，實即相當於第二節中克里格爾法之不定係數，因由該節之式(7)亦可化為(24)(25)之擴展式也。將法方程式(17)之 w_1 代以$[aa]$，w_2 代以$[ba]$，w_3 代以$[ca]$，則解算之結果即得各介繫數 $z_{41}\ z_{42}\ z_{43}$，同理代之以$[a\beta]$$[b\beta]$$[c\beta]$等，則得介繫數 $z_{51}\ z_{52}\ z_{53}$，此關係可由式(24)(25)及(18)之比較得之。

將式(26)代入式(20)內，並按 k_4，k_5 集項，得

$$\left.\begin{aligned}&\{[aa]+[aa]z_{41}+[ba]z_{42}+[ca]z_{43}\}k_4+\{[a\beta]+[aa]z_{51}+[ba]z_{52}\\&\qquad+[ca]z_{53}\}k_5+\{w_4+[aa]k_1^0+[ba]k_2^0+[ca]k_3^0\}=0\\&\{[a\beta]+[a\beta]z_{41}+[b\beta]z_{42}+[c\beta]z_{43}\}k_4+\{[\beta\beta]+[a\beta]z_{51}+[b\beta]z_{52}\\&\qquad+[c\beta]z_{53}\}k_5+\{w_5+[a\beta]k_1^0+[b\beta]k_2^0+[c\beta]k_3^0\}=0\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

命

$$\left.\begin{aligned}&[AA]=[aa]+[aa]z_{41}+[ba]z_{42}+[ca]z_{43}\\&[AB]=[a\beta]+[aa]z_{51}+[ba]z_{52}+[ca]z_{53}\\&W_4=w_4+[aa]k_1^0+[ba]k_2^0+[ca]k_3^0\\&[BA]=[a\beta]+[a\beta]z_{41}+[b\beta]z_{42}+[c\beta]z_{43}\\&[BB]=[\beta\beta]+[a\beta]z_{52}+[b\beta]z+[c\beta]z_{53}\\&W_5=w_5+[a\beta]k_1^0+[b\beta]k_2^0+[c\beta]k_3^0\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

由此可將式(27)化簡爲:

$$\begin{aligned}&[AA]k_4+[AB]k_5+W_4=0\\&[BA]k_4+[BB]k_5+W_5=0\end{aligned}\tag{29}$$

在此改化之法方程式中,其係數亦有對稱之關係存在。吾人若將式(24)(25)代入式(28)之$[AB]$及$[BA]$兩式內,並顧及

$$f_{ik}=f_{ki}$$

之關係,即可證明 $[AB]=[BA]$

解式(29)後可得k_4, k_5之值,代入(26)内,即得$k_1\ k_2\ k_3$之值。

以上爲博爾茲擴展法原理之大概,此法並不限應用一次,倘吾人於計算$k_4\ k_5$時,仍用不定式解法,則可得$k_1\ k_2\ k_3\ k_4\ k_5$,對於$w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ w_5$之擴展式,如再加入其他條件,即可再度施用此法繼續行之。故擴展法之優點在可以隨時將後加入之條件與已平差之條件合併,而得有如全體平差之結果。此點對於實用上具有甚大之意義,蓋三角測量擴展時,可陸續將新條件加入,而得全體平差之結果。

擴展法之另一優點,在其計算精度之均勻。蓋擴展係數既可自表中查得,其精度完全相等,不若採用高斯約化法時各繫數精度之不等。是以擴展法應用之範圍亦可因而增大。但應用擴展法時 所有各觀測值必須等權,如兩部三角網之精度不同,即不能應用矣。

擴展法中權單位中誤差之計算與在高斯約化法時無異,以公式表之即爲:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{-[w_i\,k_i]}{r}} \tag{30}$$

但在應用擴展法時，可在任何階段求至該部爲止之權單位中誤差，從而判斷各條件對於中誤差之影響，此舉對於誤差之檢討有莫大之意義。至於平差未知數任意函數中誤差之計算，則可依擴展法特徵演化如下。今設所求之函數爲：

$$F(l_1l_2\cdots l_n)=f_0+f_1(l_1+v_1)+f_2(l_2v_2)+\cdots f_n(l_n+v_n)=F_0+F_1l_1 \\ +F_2l_2+\cdots F_nl_n \tag{31}$$

其權倒數爲：
$$\frac{1}{P_F}=[FF]$$

又由第六章之式(49)，F_i 與 f_i 之關係爲：

$$F_i=f_i-a_iL_1-b_iL_2-c_iL_3-\cdots\cdots \tag{33}$$

L 爲傳遞因數。比較第六章第四節之傳遞方程式及法方程式，即可知前者係以 $-[af]$，$-[bf]$，… 諸數代替後者之 w_1，w_2，… 諸不符值。在擴展法中，法方程式變爲繫數之擴展式(22)，故若將此擴展式中之 w'_1，w'_2 … 等代以 $-[af]-[bf]$…諸數，即得 L 之擴展式：

$$\begin{aligned}-L_1&=f_{11}[af]+f_{12}[bf]+f_{13}[cf]\\-L_2&=f_{12}[af]+f_{22}[bf]+f_{23}[cf]\\-L_3&=f_{13}[af]+f_{23}[bf]+f_{33}[cf]\end{aligned} \tag{34}$$

是以用擴展法時，各 L 之計算可用已列出之擴展係數，以 $[af]$ $[bf]$…等代 w_1，w_2，…直接計算之，與求係數 k 之法相同。至於 $[FF]$ 之計算，則仍應用第六章第四節之公式(53)，即：

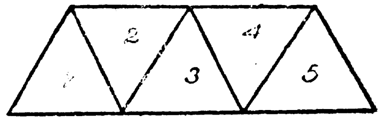
$$\frac{1}{P}=[FF]=[ff]-[af]L_1-[bf]L_2-\cdots\cdots \tag{35}$$

第四節　三角網法方程式之點線表示法

凡由簡單三角形構成之網而用方向觀測者，其角度條件所構成之法方程式，具有一種規律：即其平方和項（亦稱爲主項）之係數必爲 6，而所有其他各項係數必爲 -2。例如一簡單三角鎖（第二圖）之法方程式爲：

$$
\begin{array}{llllll}
+6k_1-2k_2 & & & & & +w_1=0\\
-2k_1+6k_2-2k_3 & & & & & +w_2=0\\
 & -2k_2+6k_3-2k_4 & & & & +w_3=0\\
 & & -2k_3+6k_4-2k_5 & & & +w_4=0\\
 & & & -2k_4+6k_5 & & +w_5=0
\end{array}
$$

於此又可以看出：因三角形 1 與三角形 2 有一公共邊，故在以 k_1 爲主項之法方程式(即第一法方程式)內，有 $-2k_2$ 一項，以 k_2 爲主項之法方程式（即第二法方程式）內，亦有 $-2k_1$ 之一項。餘可類推。

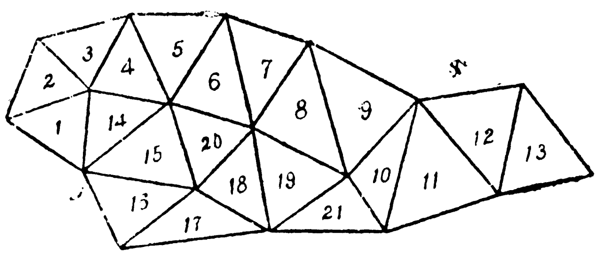


第十一章　第二圖

爲將此等關係更加明顯表示起見，德人菲德烈 (Friedrich) 創用點線表示法，以點表示每一法方程之主項，以線表示各繫數間之關係。例如第二圖之單鎖，如用點線法表示之即爲第三圖。其中以 1，2，3，4，5 所標之各點，代表法方程式中之 $6k_1$，$6k_2$，$6k_3$，$6k_4$，$6k_5$ 各主項，相連之線則代表其他各項，如點 2 與點 1 及點 3 相連，故在 $6k_2$ 之法方程式中有 $-2k_1$ 及 $-2k_3$ 兩項。餘類推。

第十一章　第三圖

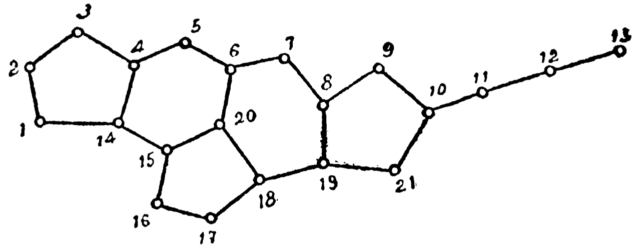
此種表示法之優點，在不必列出法方程式，而由點線圖中即可讀出任意一法方程式之各項。因此在一複雜之三角網中，其各繫數之關係可以一目了然，不似法方程式之形式，常與其排列之次序有關。例如第四圖爲一較複雜之三角網，但其法方程式之關係可由其點線圖（第五圖）中立刻讀出。例中相當於第 18 三角形條件之繫數 k_{18}，其法方程式爲：



第十一章　第四圖

$$6k_{18}-2k_{17}-2k_{19}-2k_{20}+w_{18}=0$$

蓋第五圖中之點18，有三線相連於17，19，20各點。



第十一章　　第五圖

在點線圖中不僅可看出角度條件繫數之關係，尚可看出邊長方程式之情形，因三角網圖中之每一多邊中點形均相當於點線圖中之一多邊形。例如由1，2，3，4，14所組成之多邊中點形，在第五圖中為一多邊形。因每個多邊中點形均有一個邊長條件，故在點線圖中每個閉合之多邊形即代表一個邊長條件。相當於此邊長條件之方法方程式，除其主項外，尚包括構成此多邊形各點之繫數項。但邊長法方程式中之各項係數與各角度值有關，不似角度法方程式之簡單。

點線圖對於擴展法之應用頗有幫助。蓋用擴展法時，每將一網分為若干部分，按次合併。應當如何分割，最好於點線圖中決定之，因點線圖較三角網原圖更為清晰，各繫數間之關係，可一目了然也。

點線法之應用僅限於由簡單三角形所構成之網，倘包括複雜之圖形，即不能用之表明所有法方程式之關係。例如一四邊形，包括三個角度條件及一個邊長條件，其間之關係，常因角度條件之取法而不同，此時點線表示法即不能適用矣。

第五節　三角形單鎖之擴展式

擴展法之優點已如前節所述，但欲使計算工作減少，必須利用三角鎖角度法方程式之簡單形式，使其擴展式易於列出。是以本節將三角形單鎖之擴展式求法加以說明，以備應用。

第一圖為一三角形單鎖，含有五個三角形，其法方程式已於前節列出：

$$\begin{array}{llr} M_{1x} & +6k_1-2k_2 \qquad\qquad\qquad +w_1=0 & \\ M_{2x} & -2k_1+6k_2-2k_3 \qquad\qquad +w_2=0 & \\ M_{3x} & \qquad -2k_2+6k_3-2k_4 \qquad +w_3=0 & (36) \\ M_{4x} & \qquad\qquad -2k_3+6k_4-2k_5+w_4=0 & \\ M_{5x} & \qquad\qquad\qquad -2k_4+6k_5+w_5=0 & \end{array}$$

今以不定乘數 M_1, M_2, $\cdots M_5$ 順次乘以上各式而相加之，卽得下式

$$Ak_1+Bk_2+Ck_3+Dk_4+Ek_5+L=0 \tag{37}$$

A, B, C, D, E, L 之意義如下：

$$\begin{array}{ll} A=+6M_1-2M_2 & D=-2M_3+6M_4-2M_5 \\ B=-2M_1+6M_2-2M_3 & E=-2M_4+6M_5 \\ C=-2M_2+6M_3-2M_4 & L=M_1w_1+M_2w_2+M_3w_3+M_4w_4+M_5w_5 \end{array} \tag{38}$$

如欲求 k_1 之擴展式，則應令式(37)中 k_1 之係數 A 爲 1，而其他諸係數 $B\,C\,D\,E$ 均爲零，或(38)應化爲：

$$\begin{array}{ll} (A) & +6M_1-2M_2=1 \\ (B) & -2M_1+6M_2-2M_3=0 \\ (C) & -2M_2+6M_3-2M_4=0 \\ (D) & -2M_3+6M_4-2M_5=0 \\ (E) & -2M_4+6M_5=0 \end{array} \tag{39}$$

今命式(E)中之 $M_5=1$，則由(E)(D)(C)(B)各式可順次求出：

$$M'_5=+1,\ M'_4=+3,\ M'_3=+8,\ M'_2=+21,\ M'_1=55 \tag{40}$$

如將(40)之 M'_1 M'_2 值代入(39)之(A)式中，卽得

$$A'=+6M'_1-2M'_2=288 \tag{41}$$

是以吾人若以 288 除所有各 M' 之值而代入式(39)內，必可同時滿足(39)之所有各式，卽

$$M_1=+\frac{55}{288},\ M_2=+\frac{21}{288},\ M_3=+\frac{8}{288},\ M_4=+\frac{3}{288},\ M_5=+\frac{1}{288}, \tag{42}$$

代入(38)之 L 式內，卽可得相當於 $A=1$, $B=C=D=E=0$ 時之 L 式，更因(37)之關係，求得 k_1 之擴展式：

$$288k_1=-55w_1-21w_2-8w_3-3w_4-w_1$$

應用同法亦可求得 k_2, k_3, $\cdots k_5$ 之擴展式。茲將其列表如下：

$$
\begin{aligned}
288k_1&=-55w_1-21w_2-\ \ 8w_3-\ \ 3w_4-\ \ 1w_5\\
288k_2&=-21w_1-63w_2-24w_3-\ \ 9w_4-\ \ 3w_5\\
288k_3&=-\ \ 8w_1-24w_2-64w_3-24w_4-\ \ 8w_5\\
288k_4&=-\ \ 3w_1-\ \ 9w_2-24w_3-63w_4-21w_5\\
288k_5&=-\ \ 1w_1-\ \ 3w_2-\ \ 8w_3-21w_4-55w_5
\end{aligned}
\tag{43}
$$

公式(43)僅爲五個三角形所構成單鎖之擴展式，但無論三角形數目增多或減少，法方程式之特性永遠保存，是以不難求得一普遍定律。博爾兹之專刊中曾得一結果：由式(43)之豎列係數中可列一普遍公式，能將此級數任意向前推算。其關係卽每級數中之第 i 項應爲其前一項之三倍減再前一項之值也。或以公式表示之爲：

$$a_i=3a_{i-1}-a_{i-2}\tag{44}$$

根據此公式，吾人可得下列各級數：

$$
\begin{array}{llllllll}
1, & 3, & 8, & 21, & 55, & 144, & 377, & 987,\cdots\cdots\\
3, & 9, & 24, & 63, & 165, & 432, & 1131,\cdots\cdots & \\
8, & 24, & 64, & 168, & 440, & 1152,\cdots\cdots & & \\
21, & 63, & 168, & 439, & 1149,\cdots\cdots & & & \\
55, & 165, & 438, & 1149,\cdots\cdots & & & & \\
144, & 432, & 1152, & & & & & \\
377, & 1131, & & & & & & \\
987, & & & & & & &
\end{array}
\tag{45}
$$

此外尙有相當於 A' 之級數，亦遵守同一定律：

$$6,\ 16,\ 42,\ 110,\ 288,\ 754,\ 1974,\ 5168,\cdots\cdots\tag{46}$$

應用以上諸級數可以立卽寫出包含任何數目三角形之三角形單鎖係數擴展式。例如今有六個三角形之單鎖，其繫數擴展式左方每個繫數之係數應爲級數(46)之第六項，卽754，右方 w_6 之係數由上至下按(45)之第一級數，w_5 由上至下按(45)之第二級數，餘類推，但每列均至對角線上爲止，其餘各項均可按對稱之方法求出：

$$
\begin{aligned}
754k_1&=\underline{-144w_1}-\ \ 55w_2-\ \ 21w_3-\ \ \ 8w_4-\ \ \ 3w_5-\ \ \ 1w_6\\
754k_2&=(-55w_1)\underline{-165w_2}-\ \ 63w_3-\ \ 24w_4-\ \ \ 9w_5-\ \ \ 3w_6\\
754k_3&=(-21w_1)(-63w_2)\underline{-168w_3}-\ \ 64w_4-\ \ 24w_5-\ \ \ 8w_6\\
754k_4&=(-\ \ 8w_1)(-24w_2)(-64w_3)\underline{-168w_4}-\ \ 63w_5-\ \ 21w_6\\
754k_5&=(-\ \ 3w_1)(-\ \ 9w_2)(-24w_3)(-63w_4)\underline{-165w_5}-\ \ 55w_6\\
754k_6&=(-\ \ 1w_1)(-\ \ 3w_2)(-\ \ 8w_3)(-21w_4)-(55w_5)\underline{-144w_6}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

上式中所有對稱之項均用括號表示之。

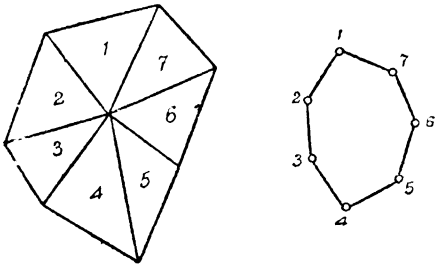
根據上述法則，每個三角形單鎖之擴展式均極易列出。但有時計算需用小數而不用分數，故博爾兹之專刊中仍列有變成小數之各表。

第六節　多邊中點形及單鎖環形網之擴展式

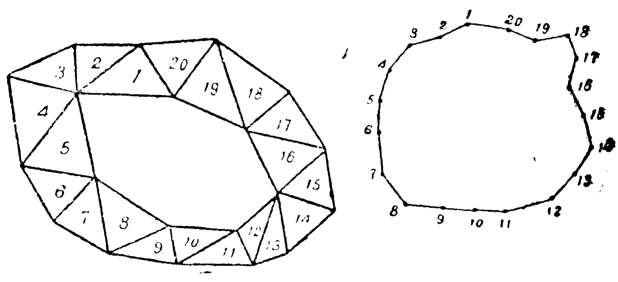
多邊中點形與單鎖環形網之法方程式形式相同，故一併論之。第六圖爲一多邊中點形，第七圖爲一單鎖環形網，其點線圖之形式完全相同，故普通言之，設有 n 個三角形其法方程式均得下列形式：

$$
\left.\begin{array}{lr}
+6k_1-2k_2 & -2k_n+w_1=0 \\
-2k_1+6k_2-2k_3 & +w_2=0 \\
\quad -2k_2+6k_3-2k_4 & +w_3=0 \\
\qquad -2k_3+6k_4-2k_5 & +w_4=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & -2k_{n-2}+6k_{n-1}-2k_n+w_{n-1}=0 \\
-2k_1 & -2k_{n-1}+6k_n+w_n=0
\end{array}\right\}(48)
$$

欲求各繫數之擴展式，可用上節同一方法，依次乘以 $M_1, M_2, \cdots M_n$ 諸不定乘數而相加之。命其和數方程式之 k_1 係數爲 A，k_2 係數爲 B，順



第十一章　第六圖



第十一章　第七圖

次以降。今如欲求 k_1 之擴展式，卽命 A 爲 1，$B=C=\cdots=0$，於是得下列各式：

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{A}) & +6M_1-2M_2-2M_n=1 \\
(\mathrm{B}) & -2M_1+6M_2-2M_3=0 \\
(\mathrm{C}) & -2M_2+6M_3-2M_4=0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

此等式與前節式(39)之異點爲每式均含三項，故不能任意假定一 M 之值，順推其餘之 M 值。但此時可利用中點形及單鎖環形網之一特徵以

求之。由第六圖及第七圖可知，在三角形(1)兩邊最相隣之三角形對於 k_1 之影響一定相同，卽 w_2 與 w_n 對於 k_1 之擴展係數必相等。同理 w_1 與 w_{n-1} 之擴展係數亦必相等。是以吾人可利用此特徵自與三角形(1)相對之三角形出發，例如在第三圖中，因 n 爲奇數此三角形有二個，卽(4)與(5)，在第四圖中 n 爲偶數，此三角形爲(11)。爲求 M_1，M_2，…諸値，玆將其分爲 n ＝奇數或偶數兩種情形，並以 $n=5$ 及 $n=6$ 兩種情形爲例分述之。當 n 爲5時，

$$\begin{array}{llll} (A) & +6M_1-2M_2-2M_5=1 & (D) & -2M_3+6M_4-2M_5=0 \\ (B) & -2M_1+6M_2-2M_3=0 & (E) & -2M_1-2M_4+6M_5=0 \\ (C) & -2M_2+6M_3-2M_4=0 & & \end{array} \tag{49}$$

因 $M_2=M_5$，$M_3=M_4$ 之關係，玆命式(C)中之 M'_3 及 M'_4 爲1，依次求得

$$\begin{aligned} M'_3&=M'_4=1 \\ M'_2&=M'_5=2 \\ M'_1&=5 \end{aligned} \tag{50}$$

代入(A)式內，得 $A'=22$。(44)之級數及 A' 亦有前節(44)之關係，故不難將其繼續推算。

當 $n=6$ 時，

$$\begin{array}{llll} (A) & +6M_1-2M_2-2M_6=1 & (D) & -2M_3+6M_4-2M_5=0 \\ (B) & -2M_1+6M_2-2M_3=0 & (E) & -2M_4+6M_5-2M_6=0 \\ (C) & -2M_2+6M_3-2M_4=0 & (F) & -2M_1-2M_5+6M_6=0 \end{array} \tag{49)*}$$

此時可命 $M'_4=2$，以求得一繫數級數，計爲

$$\begin{aligned} M'_4&=2 \\ M'_3&=M'_5=3 \\ M'_2&=M'_6=7 \\ M'_1&=18 \end{aligned} \tag{50)*}$$

又代入(A)式得 $A'=80$。(50)* 以及其相當之 A' 亦遵守同一級數定則(44)。

以上雖專論 k_1 之擴展式，但由多邊中點形及單鎖環形網之特徵，任

何三角形之繫數均應相同，蓋每個三角形均無處於中間或邊上之分別，是以上述之級數已足供寫出所有繫數之擴展式。茲將 n 爲奇數及偶數時 M' 及 A' 之級數列下：

n（奇數）	1	3	5	7	9	11	13	15……	
M' 之級數	1,	2,	5,	13,	34,	89,	283,	610……	(51)
A' 之級數		8	22	58	152	298	1042	2728 …	

n（偶數）	2	4	6	8	10	12	14	16……	
M' 之級數	3	7	18	47	123	322	843	2207……	(52)
A' 之級數		30	80	210	550	1440	3770	9870 …	

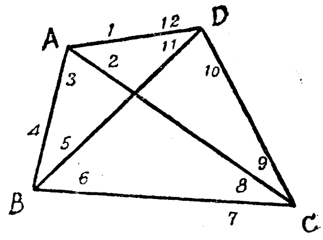
今設欲求 $n=7$ 時之擴展式，先以 k_1 爲例，左方 k_1 之係數爲 58，w_1 之係數爲 13，餘類推，今書之於下：

$$58k_1=-13w_1-5w_2-2w_3-w_4-w_5-2w_6-5w_7$$

注意 w_2 與 w_7 之係數相等，w_3 與 w_6 之係數相等，餘類推。如欲寫 k_i 之擴展式，則左方爲 $58\,k_i$，右方之係數不變；惟 w_1 改爲 w_i，w_2 改爲 w_{i+1}，然後循環寫去即得。今再舉 k_6 爲例：

$$58k_6=13w_6-5w_7-2w_1-w_2-w_3-2w_4-5w_5$$

第七節　四邊形單鎖之擴展式



第十一章　第八圖

四邊形單鎖爲我國大三角測量常用之圖形，其角度條件之繫數擴展式亦極易求得❶。茲根據第八章第五節之公式，取四邊形 $DACB$, $ABDC$ 及 $ABCD$ 爲角度條件，前二個均爲折疊之四邊形，其條件方程式爲（參考第八圖）：

$$\left.\begin{aligned}
&(a)\quad -v_1+v_2+v_5-v_6+v_7-v_8-v_{11}+v_{12}+w_a=0\\
&(b)\quad -v_2+v_3-v_4+v_5+v_8-v_9+v_{10}-v_{11}+w_b=0\\
&(c)\quad -v_1+v_3-v_4+v_6-v_7+v_9-v_{10}+v_{12}+w_c=0
\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

❶見陳永齡著『四邊形單鎖之擴展平差法』。

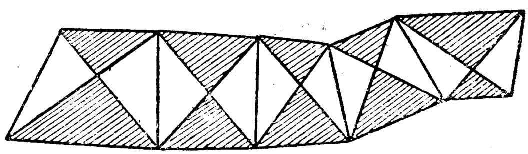
由此列出之法方程式爲:

$$8k_a+w_a=0,\qquad 8k_b+w_b=0,\qquad 8k_c+w_c=0$$

此簡易之法方程式固可極易化爲擴展式:

$$k_a=-\frac{1}{8}w_a,\qquad k_b=-\frac{1}{8}w_b,\qquad k_c=-\frac{1}{8}k_c \tag{54}$$

今再進而觀測一四邊形單鎖如第九圖，共含有五個四邊形，自左至右，號以1.2.3.4.5.每個四邊形中又有三個角度條件，相當於(53)中之條件。茲命第1個四邊形之條件爲(1a)(1b)(1c)，第二個四邊形之條件(2a)(2b)(2c)，餘類推，且每個條件之次序與正符號均遵照式(53)與第四圖之關係。即第九圖中用斜線所示之折疊四邊形相當於條件(a)，空白之折疊四邊形相當於條件(b)，全個四邊形之條件爲(c)。如此則可得下列法方程式:



第十一章　第九圖

$$\begin{array}{lllr}
(1a) & +8k_{1a} & +w_{1a}=0 & \\
(1b) & +8k_{1b}+2k_{2b}+2k_{2c} & +w_{1b}=0 & \\
(1c) & +8k_{1c}-2k_{2b}-2k_{2c} & +w_{1c}=0 & \\
(2a) & +8k_{2a} & +w_{2a}=0 & \\
(2b) & +8k_{2b}+2k_{1b}-2k_{1c}+2k_{3b}+2k_{3c} & +w_{2b}=0 & (55)\\
(2c) & +8k_{2c}+2k_{1b}-2k_{1c}-2k_{3b}-2k_{3c} & +w_{2c}=0 & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
(5a) & +8k_{5a} & +w_{5a}=0 & \\
(5b) & +8k_{5b}+2k_{4b}-2k_{4c} & +w_{5b}=0 & \\
(5c) & +8k_{5c}+2k_{4b}-2k_{4c} & +w_{5c}=0 &
\end{array}$$

由(55)可知，所有 k_{1a}，k_{2a}，$\cdots k_{5a}$ 諸式均不與他式發生關係，故其擴展式可直接書出：

$$8k_{ia} = -w_{ia}, \qquad i=1\cdots\cdots n \tag{56}$$

n 爲全鎖四邊形之總數目：

欲求(b)(c)各繫數之擴展式，將相當之(b)(c)兩式相加減，即得

$$\begin{aligned}
&8k_{1b}+8k_{1c} &&= -w_{1b}-w_{1c}\\
&8k_{1b}-8k_{1c}+4k_{2b}+4k_{2c} &&= -w_{1b}+w_{1c}\\
&4k_{1b}-4k_{1c}+8k_{2b}+8k_{2c} &&= -w_{2b}-u_{2c}\\
&8k_{2b}-8k_{2c}+4k_{3b}+4k_{3c} &&= -w_{2b}+w_{2c}\\
&4k_{2b}-4k_{2c}+8k_{3b}+8k_{3c} &&= -w_{3b}-w_{3c}\\
&8k_{3b}-8k_{3c}+4k_{4b}+4k_{4c} &&= -w_{3b}+w_{3c}\\
&4k_{3b}-4k_{3c}+8k_{4b}+8k_{4c} &&= -w_{4b}-w_{4c}\\
&8k_{4b}-8k_{4c}+4k_{5b}+4k_{5c} &&= -w_{4b}+w_{4c}\\
&4k_{4b}-4k_{4c}+8k_{5b}+8k_{5c} &&= -w_{5b}-w_{5c}\\
&8k_{5b}-8k_{5c} &&= -w_{5b}+w_{5c}
\end{aligned} \tag{57}$$

將(57)之首尾兩式乘3，其他每相鄰二式可以消去兩項，即得

$$\begin{aligned}
&24(k_{1b}+k_{1c}) = -3(w_{1b}+w_{1c})\\
&24(k_{1b}-k_{1c}) = -4(w_{1b}-w_{1c})+2(w_{2b}+w_{2c})\\
&24(k_{2b}+k_{2c}) = -4(w_{2b}+w_{2c})+2(w_{1b}-w_{1c})\\
&24(k_{2b}-k_{2c}) = -4(w_{2b}-w_{2c})+2(w_{3b}+w_{3c})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&34(k_{5b}+k_{5c}) = -4(w_{5b}+w_{5c})+2(w_{4b}-w_{4c})\\
&24(k_{5b}-k_{5c}) = -3(w_{5b}-w_{5c})
\end{aligned} \tag{58}$$

再將(58)之第一二兩式，第三四兩式等式相加減，即得

$$
\begin{aligned}
48k_{1b} &= -7w_{1b} + w_{1c} + 2w_{2b} + 2w_{2c} \\
48k_{1c} &= +w_{1b} - 7w_{1c} - 2w_{2b} - 2w_{2c} \\
48k_{2b} &= +2w_{1b} - 2w_{1c} - 8w_{2b} + 2w_{3b} + 2w_{3c} \\
48k_{2c} &= +2w_{1b} - 2w_{1c} - 8w_{2c} - 2w_{3b} - 2w_{3c} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
48k_{5b} &= +2w_{4b} - 2w_{4c} - 7w_{5b} - w_{5c} \\
48k_{5c} &= +2w_{4b} - 2w_{4c} - w_{5b} - 7w_{5c}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

(56)與(59)卽爲四邊形單鎖之角度繫數擴展式。(56)爲一般之公式，(59)之普遍公式可分爲下列數條述之：

設有一四邊形單鎖共有 n 個四邊形，其(b)(c)兩類條件方程之繫數擴展式可按下式列出：

自左至右第1個四邊形：

$$
\begin{aligned}
48k_{1b} &= -7w_{1b} + w_{1c} + 2w_{2b} + 2w_{2c} \\
48k_{1c} &= +w_{1b} - 7w_{1c} - 2w_{2b} - 2w_{2c}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

其他各中間四邊形，例如第 i 個四邊形，$i=2, 3, \cdots (n-1)$

$$
\begin{aligned}
48k_{ib} &= +2w_{(i-1)b} - 2w_{(i-1)c} - 8w_{ib} + 2w_{(i+1)b} + 2w_{(i+1)c} \\
48k_{ic} &= +2w_{(i-1)b} - 2w_{(i-1)c} - 8w_{ic} - 2w_{(i-1)b} - 2w_{(i+1)c}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

第 n 個四邊形：

$$
\begin{aligned}
48k_{nb} &= +2w_{(n-1)b} - 2w_{(n-1)c} - 7w_{nb} - w_{nc} \\
48k_{nc} &= +2w_{(n-1)b} - 2w_{(n-1)c} - w_{nb} - 7w_{nc}
\end{aligned}
\tag{62}
$$

(56)(60)(61)(62)聯合於一處卽爲四邊形單鎖之整個繫數擴展式。

例：中國地理研究所大地測量組在重慶歌樂山至北碚間所舉行之三角測量，係用等權之方向觀測，應用普通平差方法之結果，已於第八章第七節之例中作出，今試用擴展法將其平差。

由觀測結果列出條件方程及法方程之步驟，與普通方法無異。爲應用擴展法起見，茲將法方程式之次序加以改變，便符合本節所論四邊形單鎖之次序。繫數用大寫之 K 表示之。

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
a	+8						
b		+8					
c			+8				
d				+8		+2	+2
e					+8	−2	−2
f				+2	−2	+8	+8
		I					
g				+2	−2		+8
h						+2	−1
i						+2	−2
j		II		−2	−2		
k	+1.6022	III		−4.6577	−0.1251	−0.6637	−0.6637
l		−1.614	IV	−1.3120	+1.3120	−6.0529	+0.0743
m			−4.2590	V		+0.2826	−0.2826
S	+9.6022	+6.8386	+3.7410	+4.0303	+3.1869	+5.5660	+3.1280

K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	w	
			+1.6022			+0.15	1
				−1.1614		−0.74	2
					−4.2590	−0.56	3
		−2	−4.6577	−1.3120		+1.73	4
		−2	−0.1251	+1.3120		−0.84	5
+2	+2		−0.6637	−6.0529	+0.2826	−4.15	6
−2	−2		−0.6637	+0.0743	−0.2826	−1.07	7
+8				−1.6966	−1.7640	+0.02	8
	+8			−1.6966	−0.1168	+0.06	9
		+6	+1.7931			+0.52	10
		+1.7931	+35.8735	+2.9088		−1.0924	11
−1.6966	−1.6966		+2.9088	+36.2643	+3.1623	+3.1346	12
−1.7640	−0.1168			+3.1623	+35.3214	+3.0871	13
+4.5394	+6.1866	+3.7931	+36.0673	+31.8020	+32.3440		

根據上表，將法方程式分爲五組，所有四邊形之角度條件由 a 至 i，列爲第 I 組，j 爲三角形 II5－II6－II7 之角度條件，爲第 II 組，III，IV，V 三組爲四邊形之邊長條件。

根據本節所得之結果，可將第 I 組單獨之擴展式列下：

第 I 組之擴展式

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	Σ
$48\,K^0_1$	-6									-6
$48\,K^0_2$		-6								-6
$48\,K^0_3$			-6							-6
$48\,K^0_4$				-7	$+1$	$+2$	$+2$			-2
$48\,K^0_5$				$+1$	-7	-2	-2			-10
$48\,K^0_6$				$+2$	-2	-8		$+2$	$+2$	-4
$48\,K^0_7$				$+2$	-2		-8	-2	-2	-12
$48\,K^0_8$						$+2$	-2	-7	-1	-8
$48\,K^0_9$						$+2$	-2	-1	-7	-8
Σ	-6	-6	-6	-2	-10	-4	-12	-8	-8	

欲合併第 I，II 兩組，可自法方程式表中出發，法方程式 j 中 K_1 至 K_3 及 K_6 至 K_9 之係數均爲零，$K_4\,K_5$ 之係數各爲 -2。故在計算介繫數時，應命第 I 組擴展式中之 w_4，w_5 爲 -2，其餘之 w 爲零，由是求得介繫數如下：

$$z_{10\cdot1}=z_{10\cdot2}=z_{10\cdot3}=0$$

$$z_{10\cdot6}=z_{10\cdot7}=z_{10\cdot8}=z_{10\cdot9}=0$$

$$z_{10\cdot4}=\frac{(-2)\times(-7)+(-2)\times(+1)}{48}=+\frac{1}{4}$$

$$z_{10\cdot5}=\frac{(-2)(+1)+(-2)(-7)}{48}=+\frac{1}{4}$$

合併後 $K_4\,K_5$ 之值與合併前 $K_4{}^0\,K_5{}^0$ 之關係如下：

$$K_4=K_4{}^0+z_{10\cdot4}K_{10}=K_4{}^0+\frac{1}{4}K_{10}$$

$$K_5=K_5{}^0+z_{10\cdot5}K_{10}=K_5{}^0+\frac{1}{4}K_{10}$$

代入法方程式 j 內，因

$$-2K_4-2K_5=-K_{10}-2K_4^0-2K_5^0$$

又由第一組擴展式中，可得

$$-2K_4^0-2K_5^0=\frac{1}{4}w_4+\frac{1}{4}w_5$$

故 j 式可化爲：

$$(6-1)K_{10}=-\frac{1}{4}w_4-\frac{1}{4}w_5-w_{10}$$

解出得 $240K_{10}=-12w_4-12w_5-48w_{10}$

代入 K_4, K_5 之式內，卽得合併後之擴展式：

$$240K_4=-38w_4+2w_5+10w_6+10w_7-12w_{10}$$

$$240K_5=+2w_4-38w_5-10w_6-10w_7-12w_{10}$$

因其他介繫數均爲零，故其他繫數之擴展式不變。玆將 I, II 兩組合併後之擴展式再列表如下：

I, II 兩組合併之擴展式

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	Σ
240 K_1	−30										−30
240 K_2		−30									−30
240 K_3			−30								−30
240 K_4				−38	+2	+10	+10			−12	−28
240 K_5				+2	−38	−10	−10			−12	−68
240 K_6				+10	−10	−40		+10	+10		−20
240 K_7				+10	−10		−40	−10	−10		−60
420 K_8						+10	−10	−35	−5		−40
240 K_9						+10	−10	−5	−35		−40
240 K_{10}				−12	−12					−48	−72
Σ	−30	−30	−30	−28	−68	−20	−60	−40	−40	−72	

其次再將第 III 組之法方程式 k 加入，其方法與上同，但此處改用分數計算將式 k 之 K_1, K_2…各係數代入上表之 w_1, w_2, …，卽得介繫數 $z_{11\cdot1}\rightarrow z_{11\cdot10}$ 如下：

介係數 $z_{11\cdot 1}\rightarrow z_{11\cdot 10}$ 之計算(表內 $\begin{matrix} i=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \\ x=a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \end{matrix}$)

	$[ak]f_{i1}$	$[bk]f_{i2}$	$[ck]f_{i3}$	$[dk]f_{i4}$	$[ek]f_{i5}$	$[fk]f_{i6}$
$z_{11\cdot 1}$	−0.200274					
$z_{11\cdot 2}$						
$z_{11\cdot 3}$						
$z_{11\cdot 4}$				+0.737470	−0.0[illegible]43	−0.027654
$z_{11\cdot 5}$				−0.038[illegible]14	+0.0[illegible]69	+0.027654
$z_{11\cdot 6}$				−0.194671	+0.065213	+0.110616
$z_{11\cdot 7}$				−0.194671	+0.065213	
$z_{11\cdot 3}$						−0.027654
$z_{11\cdot 9}$						−0.027654
$z_{11\cdot 10}$				+0.232885	+0.006256	
Σ	−0.200274			+0.543399	+0.035448	+0.055308

	$[gk]f_{i7}$	$[hk]f_{i8}$	$[ik]f_{i9}$	$[jk]f_{i10}$	Σ	$z_{11\cdot i}[xk]$
$z_{11\cdot 1}$					−0.200274	−0.320879
$z_{11\cdot 2}$						
$z_{11\cdot 3}$						
$z_{11\cdot 4}$	−0.027654			−0.0[illegible]656	+0.5[illegible]463	−2.754857
$z_{11\cdot 5}$	+0.027654			−0.089656	−0.058853	+0.006674
$z_{11\cdot 6}$					0.078242	+0.051929
$z_{11\cdot 7}$	+0.110616				−0.078242	+0.051[illegible]29
$z_{11\cdot 3}$	+0.027654					
$z_{11\cdot 9}$	+0.027654					
$z_{11\cdot 10}$				−0.358622	−0.119[illegible]81	−0.214241
Σ	+0.165924			−0.537934	+0.061871 +0.061871	+35.873500=[ik]

Σ=+32.694055=[AA]

上表中豎列之 Σ 一列內即爲各介繫數之值，乘以法方程式內各相當 K 之係數，即得最右方之一列。由

$$[AA]_{11}=[kk]+z_{11\cdot1}[ak]+z_{11\cdot2}[bk]+\cdots\cdots$$

可得

$$[AA]_{11}=+32.694055$$

又由

$$W_{11}=w_{11}+z_{11\cdot1}w_1+z_{11\cdot2}w_2+\cdots\cdots$$

可得

$$W_{11}=w_{11}-0.200274w_1+0.591463w_2-0.053353w_5$$
$$-0.078242w_6-0.078242w_7-0.119481w_{10}$$

因是知 K_{11} 之公式爲：

$$+32.694055K_{11}=-W_{11}$$

將此化爲擴展式，又可計算其他各 K 之擴展式，其步驟與前用分數之方法初無不同之處，茲爲節省篇幅計，將此擴展式及 IV，V 兩組之合併計算均略去，而將最後之繫數擴展式列於下表：

最後繫數 $K_1\to K_{13}$ 之擴展式

在計算時須注意對稱之關係，可用以檢核計算誤差，但平方項，即對角線上之各項則不能用此法檢核，普通應於全部計算完畢後，將此諸項再算一次，以免誤差，但最可靠之檢核方法，可將每一段落之繫數值算出，代入

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
K_1	−0.126235	−0.000073	+0.000027	+0.003661	−0.000344	−0.000868	−0.000486
K_2	−0.000073	−0.125680	+0.000255	+0.000358	−0.000162	−0.003643	−0.000060
K_3	+0.000027	+0.000255	−0.133823	−0.000134	+0.000061	+0.003423	−0.002034
K_4	+0.003661	+0.000358	−0.000134	−0.169221	+0.009283	+0.044995	+0.045114
K_5	−0.000344	−0.000162	+0.000061	+0.009383	−0.158458	−0.042663	−0.041809
K_6	−0.000868	−0.003643	+0.003422	+0.04495	−0.042663	−0.186858	+0.000026
K_7	−0.000486	−0.000060	−0.002034	+0.043114	−0.041809	+0.000026	−0.167314
K_8	0	+0.000007	−0.004645	−0.000004	+0.000002	+0.042799	−0.042761
K_9	−0.000016	−0.000091	−0.001233	+0.000048	−0.000022	+0.041457	−0.041974
K_{10}	−0.000737	−0.000043	+0.000016	−0.047815	−0.050205	−0.000518	−0.000290
K_{11}	+0.006164	+0.000263	−0.000136	−0.018281	+0.001719	+0.004338	+0.002426
K_{12}	−0.000500	−0.004689	+0.001758	+0.002462	−0.001117	−0.025096	−0.000417
K_{13}	+0.000051	+0.000474	−0.016573	−0.000252	+0.000114	+0.006429	−0.003821
Σ	−0.119350	−0.132979	−0.153039	−0.131686	−0.283561	−0.116141	−0.255430

↑接上同	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	Σ
	0	−0.000010	−0.000737	+0.006164	−0.000500	+0.000051	−0.119350
	+0.000007	−0.000091	−0.000043	+0.000363	−0.004689	+0.000479	−0.132979
	−0.004646	−0.001234	+0.000017	−0.000136	+0.001758	−0.016573	−0.153039
	−0.000004	+0.000048	−0.047815	−0.018281	+0.002462	−0.000251	−0.131685
	+0.000002	−0.000022	−0.050205	+0.001719	−0.001117	+0.000114	−0.283561
	+0.042797	+0.041473	−0.000518	+0.004336	−0.025097	+0.006429	−0.116149
	−0.042761	−0.041974	−0.000290	+0.002426	−0.000417	−0.003821	−0.255430
	−0.148303	−0.021507	+0.000001	+0.000004	+0.000049	−0.008727	−0.183093
	−0.021506	−0.146029	−0.000006	−0.000047	−0.000631	−0.002317	−0.172249
	+0.000001	−0.000006	−0.200440	+0.003678	−0.000299	+0.000031	−0.296627
	−0.000004	+0.000049	+0.003678	−0.030780	+0.002500	−0.000256	−0.028220
	+0.000049	−0.000632	−0.000299	+0.002500	−0.032300	+0.003302	−0.054979
	−0.008727	−0.002317	+0.000031	−0.000356	+0.003302	−0.031131	−0.052671
	−0.183095	−0.172252	−0.296626	−0.028224	−0.054979	−0.052670	

法方程式內，觀其是否可以滿足。此種檢核在大規模計算中必須常常行之，以免一次錯誤影響全盤。此種檢核之可能，僅於擴展法中有之，是以亦為擴展法之優點。將不符值 w 之值代入上列之最後擴展式中，即可求得各繫數之值如下表：

繫數 K 值之計算:

	w_1 +0.15	w_2 −0.74	w_3 −0.56	w_4 +1.73	w_5 −0.84	w_6 −4.15	w_7 −1.07
K_1	−0.018935	+0.000054	−0.000015	+0.006334	+0.000289	+0.003602	+0.000520
K_2	−0.000011	+0.093003	−0.000143	+0.000619	+0.000336	+0.015118	+0.000064
K_3	+0.000004	−0.000189	+0.074941	−0.000232	−0.000151	−0.014205	+0.002176
K_4	+0.000549	−0.000265	+0.000075	−0.292752	−0.007882	−0.186729	−0.046132
K_5	−0.000052	+0.000120	−0.000034	+0.016233	+0.133105	+0.177051	+0.044736
K_6	−0.000130	+0.002696	−0.001916	+0.077841	+0.035837	+0.775378	−0.000028
K_7	−0.000073	+0.000044	+0.001139	+0.074587	+0.035120	−0.000108	+0.179058
K_8	0	−0.000005	+0.002601	−0.000007	−0.000002	−0.177616	+0.045754
K_9	−0.00000[illegible]	+0.000067	+0.000690	+0.000083	+0.000018	−0.172121	+0.044912
K_{10}	−0.000111	+0.000032	−0.000009	−0.082720	+0.042172	+0.002150	+0.000310
K_{11}	+0.000925	−0.000269	+0.000076	−0.031626	−0.001444	−0.018003	−0.002596
K_{12}	−0.000075	+0.003470	−0.000984	+0.004259	+0.000938	+0.104148	+0.000446
K_{13}	+0.000008	−0.000354	+0.009281	−0.000436	−0.000096	−0.026680	+0.004088
Σ	−0.017303	+0.098404	+0.085702	−0.227817	+0.238141	+0.481985	+0.273310

↑接上同	w_8 +0.02	w_9 +3.06	w_{10} +0.52	w_{11} −1.0924	w_{12} +3.1346	w_{13} +8.0871	$\Sigma = K_i$	
	0	−0.000031	−0.000383	−0.006734	−0.001567	+0.000157	−0.016709	1
	0	−0.000278	−0.000022	−0.000397	−0.014698	+0.001479	+0.094870	2
	−0.000093	−0.003776	+0.000009	+0.000149	+0.005511	−0.051163	+0.013081	3
	0	+0.000147	−0.024864	+0.019970	+0.007714	−0.000775	−0.530941	4
	0	−0.000067	−0.026107	−0.001876	−0.003501	+0.000352	+0.339958	5
	+0.000856	+0.126907	−0.000269	−0.004737	−0.078669	+0.019847	+0.953613	6
	−0.000855	−0.128440	−0.000151	−0.002650	−0.001307	−0.011796	+0.144568	7
	−0.002966	−0.065811	+0.000001	+0.000004	+0.000154	−0.026941	−0.224834	8
	−0.000430	−0.446849	−0.000003	−0.000051	−0.001978	−0.007153	−0.582817	9
	0	−0.000018	−0.104229	−0.004018	−0.000937	+0.000096	−0.147282	10
	0	+0.000150	+0.001913	+0.033624	+0.007837	−0.000790	−0.010203	11
	+0.000001	−0.001934	−0.000155	−0.002731	−0.101248	+0.010194	+0.016329	12
	−0.000175	−0.007090	+0.000016	+0.000280	+0.010350	−0.096105	−0.106913	13
	−0.003662	−0.527091	−0.154246	+0.030832	−0.172337	−0.162598	−0.057280 −0.057280	

欲將此值與第八章第七節所得之結果比較，必須注意各 k 與 K 之關係。茲再按小 k 之次序列出，以資比較：

$$k_1 = K_{11} = -0.0102$$

$$k_2 = K_{12} = +0.0163$$

$$k_3 = K_{13} = -0.1069$$

$$k_4 = K_{10} = -0.1473$$

$$k_5 = K_1 = -0.0167$$

$$k_6 = K_4 = -0.5309$$

$$k_7 = K_5 = +0.3400$$

$$k_8 = K_2 = +0.0949$$

$$k_9 = K_6 = +0.9536$$

$$k_{10} = K_7 = +0.1446$$

$$k_{11} = K_8 = -0.2248$$

$$k_{12} = K_3 = +0.0131$$

$$k_{13} = K_9 = -0.5828$$

比較兩法所得之值其差均在小數點後第四位。將此代入繫數方程內，卽求得各改正數之值（比較第八章第七節之條件方程表）。

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$K_1=-0.0102$	a				-0.0218	$+0.0329$	-0.0111
$K_2=+0.0163$	b						
$K_3=-0.1069$	c						
$K_4=-0.1473$	d	$+0.1473$	-0.1473	$+0.1473$	-0.1473		
$K_5=-0.0167$	e					-0.0167	$+0.0167$
$K_6=-0.5309$	f				$+0.5309$	-0.5309	
$K_7=+0.3400$	g				-0.3400		$+0.3400$
$K_8=+0.0949$	h						
$K_9=+0.9536$	i						
$K_{10}=+0.1446$	j						
$K_{11}=-0.2248$	k						
$K_{12}=+0.0131$	l						
$K_{13}=-0.5828$	m						
	v	$+0.1473$	-0.1473	$+0.1473$	$+0.0218$	-0.5143	$+0.3456$
測　站　檢　核		$\underbrace{\qquad\qquad}_{0}$		$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0}$			
	vv	0.0217	0.0217	0.0217	0.0005	0.2649	0.1194

續 一

c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
−0.0073	+0.0108	−0.0036		−0.0115	+0.0247	−0.0131		
						+0.0318	−0.0438	+0.0120
		+0.1473	−0.1473					
+0.0167	−0.0167			−0.0167	+0.0167			
	+0.5309	−0.5309			−0.5309	+0.5309		
−0.3400		+0.3400		−0.3400		+0.3400		
							−0.0949	+0.0949
						−0.9536	+0.9536	
						−0.1496		+0.1446
−0.3306	+0.5250	−0.0472	−0.1473	−0.3682	−0.4895	−0.2086	+0.8149	+0.2515
−0.0001				+0.0001				
0.1093	0.2756	0.0022	0.0217	0.1356	0.2396	0.0435	0.6641	0.0633

續　二

v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
		−0.0064	+0.0243	+0.0179					
−0.0142	−0.0246	+0.0104			+0.0183	−0.0551	+0.0368		
							−0.1141	+0.1430	−0.0319
			+0.0167	−0.0167					
		−0.5309	+0.5307						
		−0.3400		+0.3400					
−0.0949	−0.0949				−0.0949	+0.0949			
	−0.9536	+0.9536				+0.9536	−0.9536		
−0.1446		+0.1446			−0.1446		+0.1446		
							+0.2248	−0.2248	
								−0.0131	+0.0131
							+0.5828		−0.5828
−0.0355	−1.0731	+0.2313	+0.5719	+0.3054	0.2212	+0.9934	−0.0787	−0.0919	−0.6016
		0					0		
0.0013	1.1515	0.0535	0.3271	0.0933	0.0489	0.9868	0.0062	0.0084	0.3619

續　三

v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	wk
											+0.0111
		+0.0091	−0.0246	+0.0155							+0.0511
−0.0707	+0.2150	−0.1443			−0.2100	+0.3953	−0.1853	−0.0907	+0.2622	−0.1115	−0.3300
											−0.0766
											−0.0025
											−0.9185
											−0.2856
			+0.0949	−0.0949							−0.0702
		+0.9536	−0.9536								−3.9574
		−0.1446		+0.1446							−0.1547
	+0.2248	−0.2248				−0.2248	+0.2248	−0.2248	+0.2248		−0.0045
+0.0131	−0.0131				−0.0131	+0.0131			+0.0131	−0.0131	−0.0073
+0.5828		−0.5828			+0.5828		−0.5828	+0.5828		−0.5828	−1.7834
+0.5252	+0.4267	−0.1338	−0.8833	+0.0652	+0.3597	+0.1836	−0.5433	+0.2673	+0.4401	−0.7074	−7.5285 = [Kw]
		0				0			0		
0.2758	0.1821	0.0179	0.7802	0.0043	0.1294	0.0337	0.2952	0.0714	0.1937	0.5004	7.5278 = [vv]

此步計算之檢核共有兩種：一爲各測站所有方向改正數之和必爲零，最多差至萬分之一秒。另一檢核爲[vv]與[wk]之計算，二者均附於上表內，其結果相差亦極微，可證明計算之無誤。但最後之檢核，應將各改正數代於原有之條件方程式內，以驗其是否能完全滿足。茲將其結果列於下表：

條件方程式核算

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
$v_i=$	+0.1473	−0.1473	+0.1473	+0.0218	−0.5147	+0.3456	−0.3306	+0.5250	−0.0472	−0.1473	−0.3682	−0.4895
a				+0.0467	+1.6612	−0.3752	−0.2352	−0.5566	−0.0165		−0.4154	+1.1831
b												
c												
d	−0.1473	−0.1473	−0.1473	+0.0218					+0.0472	−0.1473		
e					−0.5147	−0.3456	+0.3306	+0.5250			−0.3682	+0.4895
f				−0.0218	−0.5147			−0.5250	−0.0472			−0.4895
g				−0.0218		+0.3456	+0.3306		−0.0472		+0.3682	
h												
i												
j												
k												
l												
m												
S	−0.1473	−0.1473	−0.1473	+0.0249	+0.6318	+0.3752	+0.4260	−0.5566	−0.0637	−0.1473	−0.4154	+1.1831

條件方程式核算(續一)

v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
−0.2086	+0.8149	+0.2515	−0.0355	−1.0731	+0.2313	+0.5719	+0.3054	−0.2212	+0.9934	−0.0787	−0.0919	−0.6016
−0.2688					+0.1446	−1.3631	+0.5370					
−0.4064	−2.1876	+0.1852	−0.0310	+1.6202	+0.1472			−0.2487	−3.3575	−0.1775		
										−0.0840	+0.1256	−0.1798
						−0.5719	+0.3054					
+0.2086					+0.2313	−0.5719						
−0.2086					−0.2313		+0.3054					
	+0.8149	+0.2515	−0.0355	+1.0731				+0.2212	+0.9934			
+0.2086	+0.8149			+1.0731	+0.2313				+0.9934	+0.0787		
+0.2086		+0.2515	+0.0355		+0.2313			+0.2212		−0.0787		
										+0.0787	−0.0919	
											+0.0919	−0.6016
										+0.0787		−0.6016
−0.2581	−2.1876	+0.6882	−0.0310	+3.7664	+0.7544	−2.5069	+1.1478	+0.1937	−1.3707	−0.1041	+0.1256	−1.3830

條件方程式核算（續二）

v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	Σ	v_i
+0.5252	+0.4267	−0.1338	−0.8833	+0.0652	+0.3597	+0.1836	−0.5433	0.2673	+0.4401	−0.4074		
											+1.0922	−1.0924
		−0.0743	+1.3340	+0.0620							−3.1349	+3.1346
+0.3472	−0.8581	−0.1806			+0.7066	−0.6789	−0.9418	0.2268	−0.8323	−0.7375	−3.0868	+3.0871
											−0.5202	+0.52
											−0.1499	+0.15
											−1.7302	+1.73
											+0.8409	−0.84
			−0.8833	−0.0652							+0.7403	−0.74
		−0.1338	+0.8833								+4.1495	−4.15
		+0.1338		+0.0652							+1.0684	−1.07
	−0.4267	−0.1338				+0.1836	+0.5433	0.2673	−0.4401		−0.0196	+0.02
+0.5252	−0.4267				−0.3597	+0.1836			+0.4401	+0.7074	+0.5602	−0.56
−0.5252		−0.1338			−0.3597		+0.5433	0.2673		−0.7074	−3.0596	+3.06
+0.3472	−1.7115	−0.5230	+1.3340	+0.0620	−0.0128	−0.3117	−0.9418	0.2268	−0.8323	−0.7375	−3.2497 −3.2498	+3.2493

由上表 Σ 及 w_i 兩列數值之比較，可知各條件經平差後完全滿足。

由[vv]之值，求得每觀測方向之中誤差爲

$$m=\sqrt{\frac{7.5278}{13}}=\pm 0''.761$$

此三角鎖係按二等方法在日間觀測，且因天氣關係未能利用回照器，是以觀測中誤差較大，但仍在二等三角網規定限度之內。

第八節　博爾茲代替法❶

第三節所述擴展法之弊在求出介繫數之後，仍須將第二組之約化法方程式列出並解算之，是以每次增加的條件不宜於過多。博氏之代替法仍承繼擴展法之原理，但不必計算第二組法方程式之全體。其理論如下：

今設有兩組條件方程式，各爲四個：

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0\\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+w_2=0\\ c_1v_1+c_2v_2+\cdots\cdots+c_nv_n+w_3=0\\ d_1v_1+d_2v_2+\cdots\cdots+d_nv_n+w_4=0 \end{aligned}\right\}\text{第一組} \tag{63}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\cdots+\alpha_nv_n+w_5=0\\ \beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots\cdots+\beta_nv_n+w_6=0\\ \gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\cdots\cdots+\gamma_nv_n+w_7=0\\ \delta_1v_1+\delta_2v_2+\cdots\cdots+\delta_nv_n+w_8=0 \end{aligned}\right\}\text{第二組} \tag{64}$$

若專以第一組條件獨自平差，得各繫數之擴展式爲：

$$\begin{aligned} k_1^0=f_{11}w_1+f_{12}w_2+f_{13}w_3+f_{14}w_4\\ k_2^0=f_{21}w_1+f_{22}w_2+f_{23}w_3+f_{24}w_4\\ k_3^0=f_{31}w_1+f_{32}w_2+f_{33}w_3+f_{34}w_4\\ k_4^0=f_{41}w_1+f_{42}w_2+f_{43}w_3+f_{44}w_4 \end{aligned} \tag{65}$$

同樣若專以第二組條件平差，即得

❶見 H. Boltz: Substitutionsverfahren Zum Ausgleichengrosser Dreiecksnetze in einem Guss nach der M. d. Kl. Q. Veröff. d. Preuss. Geod. Institute N. F. Nr. 108, Potsdam 1939.

$$\begin{aligned}
k_5{}^0&=f_{55}w_5+f_{56}w_6+f_{57}w_7+f_{58}w_8\\
k_6{}^0&=f_{65}w_5+f_{66}w_6+f_{67}w_7+f_{68}w_8\\
k_7{}^0&=f_{75}w_5+f_{76}w_6+f_{77}w_7+f_{78}w_8\\
k_8{}^0&=f_{85}w_5+f_{86}w_6+f_{87}w_7+f_{88}w_8
\end{aligned}\tag{66}$$

根據擴展法原理，如將(63)(64)兩組條件方程合併平差，則$k_1\cdots\cdots k_4$各繫數與單獨用第一組條件平差所得之繫數$k_1{}^0,\cdots\cdots k_4{}^0$有下列之關係：

$$\begin{aligned}
k_1&=k_1{}^0+z_{5\cdot1}k_5+z_{6\cdot1}k_6+z_{7\cdot1}k_7+z_{8\cdot1}k_8\\
k_2&=k_2{}^0+z_{5\cdot2}k_5+z_{6\cdot2}k_6+z_{7\cdot2}k_7+z_{8\cdot2}k_8\\
k_3&=k_3{}^0+z_{5\cdot3}k_5+z_{6\cdot3}k_6+z_{7\cdot3}k_7+z_{8\cdot3}k_8\\
k_4&=k_4{}^0+z_{5\cdot4}k_5+z_{6\cdot4}k_6+z_{7\cdot4}k_7+z_{8\cdot4}k_8
\end{aligned}\tag{67}$$

式中$z_{5\cdot1}\cdots\cdots z_{8\cdot1}$，$z_{5\cdot2}\cdots\cdots z_{8\cdot2}$，$\cdots\cdots$為介繫數，其意義可由第三節(24)(25)兩式類推，茲不贅述。

同樣亦可將$k_5\ k_6\ k_7\ k_8$之公式列出，蓋如以(64)為第一組條件，而以(63)為第二組條件，即得：

$$\begin{aligned}
k_5&=k_5{}^0+z_{1\cdot5}k_1+z_{2\cdot5}k_2+z_{3\cdot5}k_3+z_{4\cdot5}k_4\\
k_6&=k_6{}^0+z_{1\cdot6}k_1+z_{2\cdot6}k_2+z_{3\cdot6}k_3+z_{4\cdot6}k_4\\
k_7&=k_7{}^0+z_{1\cdot7}k_1+z_{2\cdot7}k_2+z_{3\cdot7}k_3+z_{4\cdot7}k_4\\
k_8&=k_8{}^0+z_{1\cdot8}k_1+z_{2\cdot8}k_2+z_{3\cdot8}k_3+z_{4\cdot8}k_4
\end{aligned}\tag{68}$$

式(67)與(68)完全相對。此處二者均為理論上之形式，實際上因三角網佈置之情形，其中之介繫數多為零，可由前節之例中看出。

為解釋代替法之理論起見，茲設第一組條件方程式內之第一二兩式與第二組之各條件完全無關，第二組內之第七八兩條件亦與第一組之條件完全無關，則下列介繫數必均為零：

$$\begin{aligned}
&z_{7\cdot1}=z_{7\cdot2}=z_{7\cdot3}=z_{7\cdot4}=z_{8\cdot1}=z_{8\cdot2}=z_{8\cdot3}=z_{8\cdot4}=0\\
&z_{1\cdot5}=z_{1\cdot6}=z_{1\cdot7}=z_{1\cdot8}=z_{2\cdot5}=z_{2\cdot6}=z_{2\cdot7}=z_{2\cdot8}=0
\end{aligned}\tag{69}$$

於是(67)(68)兩式將化為下列之形式：

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=k_1{}^0+z_{5\cdot1}k_5+z_{6\cdot1}k_6\\
k_2&=k_2{}^0+z_{5\cdot2}k_5+z_{6\cdot2}k_6\\
k_3&=k_3{}^0+z_{5\cdot3}k_5+z_{6\cdot3}k_6\\
k_4&=k_4{}^0+z_{5\cdot4}k_5+z_{6\cdot4}k_6
\end{aligned}\right\}\tag{67)*}$$

$$\left.\begin{aligned} k_5&=k_5{}^0+z_{3\cdot5}k_3+z_{4\cdot5}k_4\\ k_6&=k_6{}^0+z_{3\cdot6}k_3+z_{4\cdot6}k_4\\ k_7&=k_7{}^0+z_{3\cdot7}k_3+z_{4\cdot7}k_4\\ k_8&=k_8{}^0+z_{3\cdot8}k_3+z_{4\cdot8}k_4 \end{aligned}\right\} \tag{68)*}$$

(67)*(68)*兩組方程式名爲代替方程式。對於兩組方程均有關係之繫數,如此處之 $k_3\ k_4\ k_5\ k_6$,名爲主繫數。因上列兩組方程內之 $k_1{}^0$, $k_2{}^0$…… $k_8{}^0$ 以及各介繫數 $z_{5\cdot1}\ z_{5\cdot2}$……等均爲已知數,故吾人只須求得主繫數之值,代入代替方程式內,即可求得所有各繫數 k_1, k_2,……k_8 之值。欲求主繫數 $k_3\ k_4$, k_5, k_6,僅須 (67)*(68)* 兩組內之各主繫數代替方程式:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} k_3&=k_3{}^0+z_{5\cdot3}k_5+z_{6\cdot3}k_6\\ k_4&=k_4{}^0+z_{5\cdot4}k_5+z_{6\cdot4}k_6 \end{aligned}\right\}\text{第一組}\\ &\left.\begin{aligned} k_5&=k_5{}^0+z_{3\cdot5}k_3+z_{4\cdot5}k_4\\ k_6&=k_6{}^0+z_{3\cdot6}k_3+z_{4\cdot6}k_4 \end{aligned}\right\}\text{第二組} \end{aligned} \tag{70}$$

此處兩組各爲二個方程式,實際上兩組主繫數代替方程式之數目可以不等,故爲計算之簡便起見,最好將較多一組之主繫數代入較少一組內。今設將(70)之第二組代入第一組內,即得公式如次:

$$\begin{aligned} A_{3\cdot3}k_3+A_{3\cdot4}k_4+K_3&=0\\ A_{4\cdot3}k_3+A_{4\cdot4}k_4+K_4&=0 \end{aligned} \tag{71}$$

式中之 A_{33}, A_{34}, $A_{4\cdot3}$, $A_{4\cdot4}$, K_3, K_4 等爲下列之縮寫:

$$\begin{aligned} A_{3\cdot3}&=z_{5\cdot3}z_{3\cdot5}+z_{6\cdot3}z_{3\cdot6}-1\\ A_{3\cdot4}&=z_{5\cdot3}z_{4\cdot5}+z_{6\cdot3}z_{4\cdot6}\\ A_{4\cdot3}&=z_{5\cdot4}z_{3\cdot5}+z_{6\cdot3}z_{3\cdot6}\\ A_{4\cdot4}&=z_{5\cdot4}z_{4\cdot5}+z_{6\cdot4}z_{4\cdot6}-1\\ K_3&=k_3{}^0+z_{5\cdot3}k_5{}^0+z_{6\cdot3}k_6{}^0\\ K_4&=k_4{}^0+z_{5\cdot4}k_5{}^0+z_{6\cdot4}k_6{}^0 \end{aligned} \tag{72}$$

因普通 $z_{3\cdot5}\neq z_{5\cdot3}$, $z_{3\cdot6}\neq z_{6\cdot3}$,……故式 (71) 並不對稱。是以其解算不能用普通之高斯約化法。若按不定式解開,即得:

$$\begin{aligned} k_3&=j_{3\cdot3}k_3{}^0+j_{3\cdot4}k_4{}^0+j_{3\cdot5}k_5{}^0+j_{3\cdot6}k_6{}^0\\ k_4&=j_{4\cdot3}k_3{}^0+j_{4\cdot4}k_4{}^0+j_{4\cdot5}k_5{}^0+j_{4\cdot6}k_6{}^0 \end{aligned} \tag{73}$$

式中之 j 亦不對稱，即 $j_{4\cdot3}\neq j_{3\cdot4}$。

將(73)代入(70)之第二組內，即可得 $k_5\,k_6$ 之擴展式，再由 (67)* (68)*兩組方程式中，即可求得所有之繫數值，與全體平差之結果無異。

以上係代替法之原理。玆再將代替法與擴展法之不同點說明之：在擴展法中，求出第一組代替方程式(67)*後，即將其代入第二組法方程式中，而求約化後之法方程式，解此法方程式以得第二組之繫數值。在代替法中，則不僅求第一組代替方程式(67)*，並求第二組代替方程式(68)*。將此兩組中之主繫數代替方程式取出而解算之，以求得各主繫數值，再將各主繫數值代入代替方程式中，求出其他各繫數之值。當兩組較大三角網欲合併平差時，如暫時不顧及基線方位角等條件，兩組間互相有關之條件爲數常甚少，亦即主繫數之數目常甚小，是以此時應用代替法，解算主繫數代替方程式之工作，較用擴展法須解算第二組全體法方程之工作爲輕。此爲代替法與擴展法相較之主要優點。但吾人如顧及邊長，基線，方位角等類條件，則仍不能離開擴展法。故最適當之步驟爲先用代替法將全網各部之角度方程式及一部邊長方程式合併，然後再分別用擴展法將兩組相連之邊長條件以及基線條件等加於前已合併之結果中。

此外尙須注意者，即用一次代替法之後，各繫數已不能保留原有按條件不符值 w 所列之擴展形式，而成爲按初步繫數值擴展之形式，如式(73)。是以如欲再度應用代替法將另一部三角網合併，其介繫數之計算不復能依第三節式(24)(25)之形式，因此時 f 值已不知矣。但此時吾人可循另外一法。

將(18)與(24)或(25)比較，可知介繫數 z 與繫數 k 完全相當。在第一第二兩組未合併之前，第五條件之繫數值爲 k_5^0；既合併之後，其值爲 k_5，k_5 與 k_5^0 之關係爲：〔見式(68)*〕

$$k_5=k_5^0+z_{3\cdot5}k_3+z_{4\cdot5}k_4 \tag{74}$$

今設在(63)(64)所列八個條件之外，再加一第九個條件，並命專以第二組條件(64)而論時，第五個條件與第九個條件間之介繫數爲 $z^0_{9\cdot5}$，當第一二兩組條件合併後，第五個條件與第九個條件間之介繫數爲 $z_{9\cdot5}$，則 $z_{9\cdot5}$ 與 $z^0_{9\cdot5}$ 間之關係，亦必與式(74)中 k_5 與 k_5^0 間之關係完全相當。此理論可用與證明式(26)相同之方法證明之。實則由以上之比較，吾人已極易看出其必然性，故此處不再加以證明。依此可將 $z_{9\cdot5}$ 與 $z^0_{9\cdot5}$ 間之關係

照式(74)書出如下：

$$z_{9\cdot5}=z^0_{9\cdot5}+z_{3\cdot5}z_{9\cdot3}+z_{4\cdot5}z_{9\cdot4} \tag{75}$$

其他介繫數如 $z_{9\cdot6}$，$z_{9\cdot7}$，……亦有同樣之公式。根據同一理論，凡相當於式(73)者必有介繫數之關係方程式：

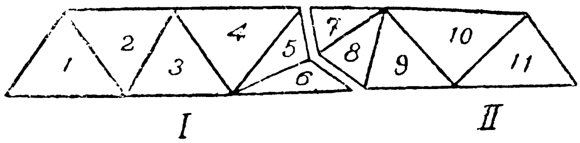
$$\begin{aligned} z_{9\cdot3}&=j_{3\cdot3}z^0_{9\cdot3}+j_{3\cdot4}z^0_{9\cdot4}+j_{3\cdot5}z^0_{9\cdot5}+j_{3\cdot6}z^0_{9\cdot6} \\ z_{9\cdot4}&=j_{4\cdot3}z^0_{9\cdot3}+j_{4\cdot4}z^0_{9\cdot4}+j_{4\cdot5}z^0_{9\cdot5}+j_{4\cdot6}z^0_{9\cdot6} \end{aligned} \tag{76}$$

由此可求出相當於主繫數 k_3 k_4 之介繫數 $z_{9\cdot3}$，$z_{9\cdot4}$，代入(75)，即可求出 $z_{9\cdot5}$。

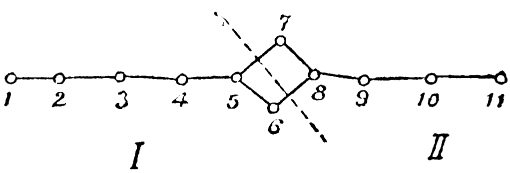
採用以上方法，吾人無需知 k_1，$k_2\cdots k_8$ 之擴展式，亦可求出新的介繫數。是以代替法之另一優點為不必永久保持冗長之擴展式。蓋在大規模之三角網中，擴展式之項數可延至數十項，對於計算，極不清楚，易生錯誤，代替法中能避免此種形式，實為一重要之進步。

代替法之應用，主要為大規模三角網之合併，但本書之目的，僅在解釋此法，故舉一小例如下，藉以示其計算之步驟，但未能盡顯此法之優點也。

例：茲有一三角鎖如第十圖之形式，係於三角形單鎖之中夾一四邊中點形，今試用代替法求其角度條件之繫數擴展式。



第十一章　　第十圖



第十一章　第十一圖

此三角鎖如以點線法表示之，即為第十一圖之形狀。由此吾人可讀出其法方程式之關係，今將此圖形分為兩部：I 部為 1，2，3，4，5，6 六個三角形；II 部為 7，8，9，10，11 五個三角形。此兩部繫數單獨之擴展式，可按第五節所述三角形單鎖之規則書出：

I 部：$k_1^0 \to k_6^0$

$$754k_1^0 = -144w_1 - 55w_2 - 21w_3 - 8w_4 - 3w_5 - 1w_6$$
$$754k_2^0 = -55w_1 - 165w_2 - 63w_3 - 24w_4 - 9w_5 - 3w_6$$
$$754k_3^0 = -21w_1 - 63w_2 - 168w_3 - 64w_4 - 24w_5 - 8w_6$$
$$754k_4^0 = -8w_1 - 24w_2 - 64w_3 - 168w_4 - 63w_5 - 21w_6$$
$$754k_5^0 = -3w_1 - 9w_2 - 24w_3 - 63w_4 - 165w_5 - 55w_6$$
$$754k_6^0 = -1w_1 - 3w_2 - 8w_3 - 21w_4 - 55w_5 - 144w_6$$

II 部：$k_7^0 \to k_{11}^0$

$$288k_7^0 = -55w_7 - 21w_8 - 8w_9 - 3w_{10} - 1w_{11}$$
$$288k_8^0 = -21w_7 - 63w_8 - 24w_9 - 9w_{10} - 3w_{11}$$
$$288k_9^0 = -8w_7 - 24w_8 - 64w_9 - 24w_{10} - 8w_{11}$$
$$288k_{10}^0 = -3w_7 - 9w_8 - 24w_9 - 63w_{10} - 21w_{11}$$
$$288k_{11}^0 = -1w_7 - 3w_8 - 8w_9 - 21w_{10} - 55w_{11}$$

由第十一圖之點線表示法，可知在以 k_5 爲主項之法方程中尚有 $-2k_7$ 一項，以 k_6 爲主項之法方程式中有 $-2k_8$ 一項；同理在以 k_7 及 k_8 爲主項之法方程式內，分別有 $-2k_5$ 及 $-2k_6$ 之項。是以在 I 部諸繫數之擴展式中，如命 $w_5=-2$，其餘之 w 爲零，卽得 $z_{7\cdot1} \to z_{7\cdot6}$ 諸介繫數之值。命 $w_6=-2$，其餘之 w 均零，卽得 $z_{8\cdot1} \to z_{8\cdot6}$ 之值，同理由 II 部之繫數擴展式中可分別求得 $z_{5\cdot7} \to z_{5\cdot11}$ 及 $z_{6\cdot7} \to z_{6\cdot11}$ 之值，此外之介繫數則均爲零。茲將各介繫數之值列下：

$377z_{7\cdot1}=3$	$377z_{8\cdot1}=1$	$144z_{5\cdot7}=55$	$144z_{6\cdot7}=21$
$377z_{7\cdot2}=9$	$377z_{8\cdot2}=4$	$144z_{5\cdot8}=21$	$144z_{6\cdot8}=63$
$377z_{7\cdot3}=24$	$377z_{8\cdot3}=8$	$144z_{5\cdot9}=8$	$144z_{6\cdot9}=24$
$377z_{7\cdot4}=63$	$377z_{8\cdot4}=21$	$144z_{5\cdot10}=3$	$144z_{6\cdot10}=9$
$377z_{7\cdot5}=165$	$377z_{8\cdot5}=55$	$144z_{5\cdot11}=1$	$144z_{6\cdot11}=3$
$377z_{7\cdot6}=55$	$377z_{8\cdot6}=144$		

由此列出代替方程式如下：

$$377k_1 = 377k_1^0 \quad + 3k_7 + 1k_8$$
$$377k_2 = 377k_2^0 \quad + 9k_7 + 3k_8$$
$$377k_3 = 377k_3^0 \quad + 24k_7 + 8k_8$$
$$377k_4 = 377k_4^0 \quad + 63k_7 + 21k_8$$

$$377k_5 = 377k_5^0 \qquad\qquad + 165k_7 + 55k_8$$

$$377k_6 = 377k_6^0 \qquad\qquad + 55k_7 + 144k_8$$

$$144k_7 = 144k_7^0 + 55k_5 + 21k_6$$

$$144k_8 = 144k_8^0 + 21k_5 + 63k_6$$

$$144k_9 = 144k_9^0 + 8k_5 + 24k_6$$

$$144k_{10} = 144k_{10}^0 + 3k_5 + 9k_6$$

$$144k_{11} = 144k_{11}^0 + 1k_5 + 3k_6$$

此中 k_5, k_6, k_7, k_8, 爲主繫數,茲將其代替方程式特別提出如下:

$$377k_5 = 377k_5^0 + 165k_7 + 55k_8$$

$$377k_6 = 377k_6^0 + 55k_7 + 144k_8$$

$$144k_7 = 144k_7^0 + 55k_5 + 21k_6$$

$$144k_8 = 144k_8^0 + 21k_5 + 63k_6$$

欲得主繫數之擴展式,可將 k_7, k_8 兩式代入 k_5、k_6 之式內,或反而行之,由此得

$$9048k_5 = 9048k_5^0 + 3960k_7^0 + 1320k_8^0 + 1705k_5 + 1155k_6$$

$$54288k_6 = 54288k_6^0 + 7920k_7^0 + 20736k_8^0 + 6049k_5 + 10227k_6$$

併項得

$$7343k_5 - 1155k_6 = 9048k_5^0 + 3960k_7^0 + 1320k_8^0$$

$$-6049k_5 + 44061k_6 = 54288k_6^0 + 7920k_7^0 + 20736k_8^0$$

此處可注意者,卽兩式幷無對稱之關係。是以不能用高斯法方程式之約化法,而必須用普通代數方法解算之。茲將其結果化爲分數式

$$k_5 = +1.259389k_5^0 + 0.198079k_6^0 + 0.580089k_7^0 + 0.259389k_8^0$$

$$k_6 = +0.172898k_5^0 + 1.259304k_6^0 + 0.259389k_7^0 + 9.506231k_8^0$$

代至 k_7, k_8 之代替方程式內,卽得:

$$k_7 = +0.506231k_5^0 + 0.259304k_6^0 + 1.259389k_7^0 + 0.172898k_8^0$$

$$k_8 = +0.259304k_5^0 + 0.579833k_6^0 + 0.198079k_7^0 + 1.259304k_8^0$$

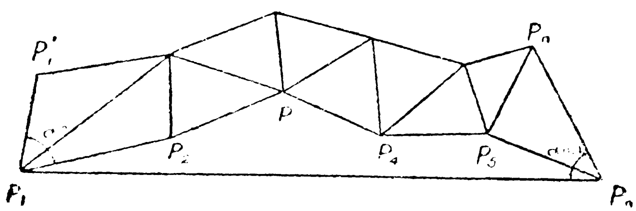
將此代入各代替方程式內,並將各 k^0 化爲初步擴展式中之 w_1, w_2, ······ 等項,卽得合併後之繫數擴展式如下:

(各係數均以小數點後第六位爲單位)

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
k_1	191005	73015	28640	11164	5274	2358	2358	1801	686	257	86
k_2	73015	219045	84119	33313	15821	7074	7074	5402	2058	772	257
k_3	28640	84119	224318	88836	42188	18865	18865	14406	5488	2058	686
k_4	11164	33313	88836	235193	110744	49520	49520	37815	14406	5402	1801
k_5	5274	15821	42188	110744	290044	129695	129695	99640	377[illegible]	14149	4716
k_6	2358	7074	18865	49520	129695	253116	86449	129652	49391	18522	6174
k_7	2358	7074	18865	49520	129695	86449	253116	129652	49391	18522	6174
k_8	1801	5402	14406	37815	99640	129652	129652	289916	110444	41417	13866
k_9	686	2058	5488	14406	377[illegible]	49391	49391	110444	23[illegible]556	87206	2[illegible]69
k_{10}	257	772	2058	5402	14149	18522	18522	41417	87206	226202	73401
k_{11}	86	257	686	1801	4716	6174	6174	13866	29[illegible]	73401	191134

第九節　以大地線代替三角鎖

當三角網之佈置,係由分段之三角鎖或四邊形鎖連接而成時,則可設想每段三角鎖由一大地線代替之。此大地線連接每鎖之兩端,其長度及兩端方位角,可以該段三角鎖獨自平差後所得之經緯度計算之。茲設第十二圖由 P_1 至 P_n 爲一三角形單鎖,當此三角鎖已經平差之後,即可由各三角形推算各邊之邊長,然後求得每點之經緯度。由 P_1 P_n 兩端點之經緯度可反算大地線 P_1P_n 之長度及其兩端方位角。此大地線即可代表由 P_1 至 P_n 之一段三角鎖。



第十一章　　第十二圖

以大地線代替三角鎖之應用,始於赫爾默特。當彼計算德國及歐洲各三角點之垂線偏差時,卽由三角網中選出若干條三角鎖,連接於所有拉伯拉斯點之間,將每個三角鎖化算爲一大地線,於是整個成爲一大地線網。當時之目的雖非爲大三角網之平差,且其所利用者亦非歐洲大三角網之全部,而係由此選出之三角鎖,但此種理想對於由三角鎖構成網狀時之平差問題頗有幫助。故 1931 年芬蘭南部之環形網卽採用此法平差,蘇俄之三角網亦採用此法,其詳細步驟雖各有不同,而原理則均係以大地線代替三角鎖也。

以大地線代替三角鎖之利點在能將平差分爲兩步進行。第一步係每段鎖之獨自平差,第二步則爲聯合各鎖之平差。第一步平差有時稱爲初步平差。第二步則稱爲主要平差。蓋第二步平差後所得者爲最後之結果,各鎖尚須以此爲強制條件再行分別平差也。第一步平差所包括者爲鎖內之各圖形條件,基線條件與拉伯拉斯條件,故與普通之平差方法初無差異。第二步平差則不復以原來之觀測值——方向或角度——爲原子,而以其函數,卽大地線之長度及兩端方位角爲虛擬觀測值舉行平差。此時之條件可分爲兩種:一爲各端點間之拉伯拉斯條件,一爲當大地線閉合時所成之多邊形條件。舉行主要平差時,如能附列各虛擬觀測值與原來觀測值之等值關係,則此種平差之結果,必與用原來觀測值全體平差之結果完全脗合,是爲嚴格方法,係愛格於 1936 年所首創。如假定虛擬觀測值猶如獨立觀測之結果,給以適當之權而直接用之以列出條件方程式,則結果必不嚴格,此爲簡略方法,赫爾默特卽用之,南芬環形三角網之平差亦用是法。

無論採用嚴格或簡略方法,其初步平差之步驟均大致相同,故本節先將其方法略述於後。但此外尚有一先決問題,卽大地線之分段問題。無論採用嚴格或簡略方法,均須以基線擴大邊爲分段之處,如第十二圖中之 P_1P' 及 P_nP_n' 均應爲由基線直接擴大之邊,其長度應視爲固定者。此種邊爲兩相鄰三角鎖之公共邊,故亦稱爲接合邊。大地線之初步長度,實卽由此兩基線出發,經過全鎖平差所求得者。大地線兩端與接合邊所成之角度名爲接合角(第十二圖中之 α_{1n} 與 α_{n1});大地線之兩端點名爲接合點(圖中之 P_1 與 P_n)。所有接合點最好均爲拉伯拉斯點。

初步平差之步驟,可分條述之於後:

(1) 列出鎖中之角度,邊長,基線,拉伯拉斯條件,及其相當之法方程

式。此數種條件之列法，已詳見第八章及第九章，茲不再述。

(2) 列出大地線長度及其兩端接合角成爲各觀測方向之函數，並求其微分式。此步工作之意義：一方面爲求得此三函數之權係數和，在嚴格與簡略平差中均將應用之；另一方面爲準備以求得之大地線長度及兩端接合角爲強制條件時之應用。故此時可將此條件列出，而無常數項，並計算其相當之法方程式，附於(1)項法方程式之後。

(3) 解算(1)項之法方程式，將(2)項之三個法方程式隨同約化，以求其權係數和。

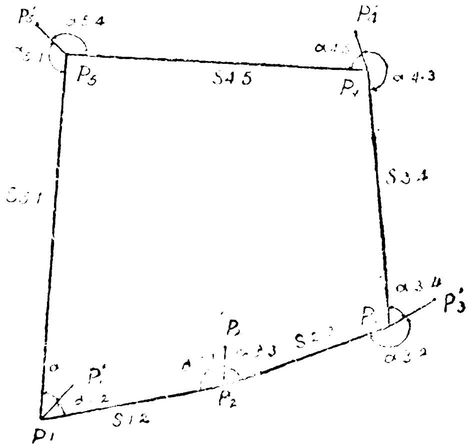
(4) 計算各方向之初步改正數，代入(1)項之法方程式中，驗其有無誤差。

(5) 以初步改正後之方向值計算大地線之長度及其兩端接合角。倘在第(2)步中已用方向之觀測值求出此三函數之初步值，此時可將各改正數代入其微分式中檢核之。

第十節　約蘭得之大地線平差法

約蘭得於舉行南芬環形三角鎖平差時，創用此法，後經波羅的海大地測量學會之採用，以平差聯接波羅的海周圍各國三角測量之東海環形鎖(Ostseering)。茲以南芬環形三角鎖爲例，概述此法之步驟。

由前節所述之初步平差求得各大地線之長度及兩端接合角後，即可由此計算各接合點之大地位置。第十三圖示南芬環形鎖化爲大地線多邊形之情形。此多邊形計共五邊，P_1, P_2, ……P_5爲接合點，$P_1P'_1$, $P_2P'_2$, ……$P_5P'_5$爲接合邊。圖中以$S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$……等示各大地線之長度，以$\alpha_{1\cdot2}$, $\alpha_{2\cdot1}$……等示各接合角。計算P_1P_2……各點之大地位置時，係以P_2爲原點，取其經緯度及$P_2P'_2$之方位角爲出發值，分兩路計算。第一路由P_2經P_3P_4至P_5；第二路由P_2經P_1至P_5。其計算大地位置之公式係採用史賴伯法，如大地線之長度過長，則分段計算。



第十一章　第十三圖

由兩路計算 P_5 之經緯度設爲 $B'_5\ L'_5$ 及 $B''_5\ L''_5$，又大地線 $P_5\ P_4$ 之方位角爲 $A'_{5\cdot4}$ 及 $A''_{5\cdot4}$，則此大地線網之閉合條件應爲：

$$
\begin{aligned}
&B'_5 - B''_5 = 0\\
&L'_5 - L''_5 = 0 \qquad\qquad (77)\\
&A'_{5\cdot4} - A''_{5\cdot4} = 0
\end{aligned}
$$

今將 $B'_5\ B''_5\ L'_5\ L''_5\ A'_{5\cdot4}\ A''_{5\cdot4}$ 對於 $S_{1\cdot2}$，$S_{2\cdot3}$……$\alpha_{1\cdot2}$，$\alpha_{2\cdot1}$……之微分式列出，設 $S_{1\cdot2}$，$S_{2\cdot3}$，……之改正數以 $s_{1\cdot2}$，$s_{2\cdot3}$……表示之，$\alpha_{1\cdot2}$，$\alpha_{2\cdot1}$，……之改正數以 $v_{1\cdot2}$，$v_{2\cdot1}$，……表示之，則 $B'_5\ B''_5\ L'_5\ L''_5\ A'_{5\cdot4}\ A''_{5\cdot4}$ 均可列爲此種改正數之函數。將此諸函數代入條件方程式(77)內，即得以各改正數所列之條件方程。

在簡略方法中，假定 $S_{1\cdot2}\ S_{2\cdot3}$……，$\alpha_{1\cdot2}$，$\alpha_{2\cdot1}$，……爲獨立觀測值，故即以各改正數之平方和應爲最小之條件，依(77)之條件方程舉行條件平差。最小條件爲：

$$[s^2]+[v^2]=\text{最小值。}$$

在約蘭得之方法中，未顧及各接合點 P_1，P_2，……間之拉伯拉斯條件。倘大地線網之情形並不如此簡單，其理論亦相同，每個大地線多邊形均有如(77)之條件三個。

當此主要平差完畢之後，所得者爲改正後之大地線長度與接合角值，以之代入上節所述之初步平差最後三條件中，得其不符值，即可再將此三角法方程式繼續於初步平差中原有法方程式之後而解算，從此可得各繫數之新值，更由此求出各方向之最後改正值。

第十一節　愛格之大地線嚴格平差法

愛格法與約蘭得法主要之分別，在前者不以大地線之長度及兩接合角爲直接觀測值，而按照等值觀測之理論，將其化爲獨立之函數。茲將其步驟述之於下：

經過初步平差後，大地線長度及其兩端接合角可列爲觀測方向值之函數：

$$
\begin{aligned}
&x = S^0_{12} + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots\cdots + f_n v_n\\
&y = \alpha^0_{12} + f'_1 v_1 + f'_2 v_2 + \cdots\cdots + f'_n v_n \qquad\qquad (78)\\
&z = \alpha^0_{21} + f''_1 v_1 + f''_2 v_2 + \cdots\cdots + f''_n v_n
\end{aligned}
$$

式中 $S^0{}_{12}, \alpha^0{}_{12}, \alpha^0{}_{21}$ 等為由觀測值計算所得之大地線長度及其兩接合角，$v_1\, v_2, \cdots\cdots v_n$ 為觀測方向值之改正數，$f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$ 為函數 x 依各改正數微分之係數，$f'_1 f'_2 \cdots\cdots f'_n$ 為函數 y 之微分係數，$f''_1, f''_2, \cdots\cdots f''_n$ 為函數 z 之微分係數。x, y, z 則為大地線長度及兩接合角之平差值，其權倒數各為：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{P_x} &= [\alpha\alpha] = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots \\
\frac{1}{P_y} &= [\beta\beta] = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf'\cdot1]^2}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots \\
\frac{1}{P_z} &= [\gamma\gamma] = [f''f''] - \frac{[af'']^2}{[aa]} - \frac{[bf''\cdot1]^2}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{79}
$$

α, β, γ 為 x, y, z, 三函數之權係數。同樣亦可求得權係數之乘積和 $[\alpha\beta]$, $[\beta\gamma]$, $[\alpha\gamma]$ 如下：〔參閱第十章之式(99)〕

$$
\begin{aligned}
[\alpha\beta] &= [ff'] - \frac{[af][af']}{[aa]} - \frac{[bf\cdot1][bf'\cdot1]}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots \\
[\beta\gamma] &= [f'f''] - \frac{[af'][af'']}{[aa]} - \frac{[bf'\cdot1][bf''\cdot1]}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots \\
[\gamma\alpha] &= [ff''] - \frac{[af][af'']}{[aa]} - \frac{[bf\cdot1][bf''\cdot1]}{[bb\cdot1]} - \cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{80}
$$

此種權係數之平方和及乘積和又可按(79)(80)兩式簡書如下：

$$
\begin{aligned}
&[\alpha\alpha] = [ff\cdot r] \qquad [\beta\beta] = [f'f'\cdot r] \qquad [\gamma\gamma] = [f''f''\cdot r] \\
&[\alpha\beta] = [ff'\cdot r] \qquad [\beta\gamma] = [f'f''\cdot r] \qquad [\alpha\gamma] = [ff''\cdot r]
\end{aligned}
\tag{81}
$$

r 為初步平差時該三角鎖條件方程之總數。$[ff\cdot r]$ 即為 $[ff]$ 經過 r 次約化後所得之值。是以(81)內之各值均可於初步平差時順帶求出。

今再設 x, y, z 為三個虛擬觀測之函數，此三個虛擬觀測之改正數命之為 $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$，則此函數可書為：

$$
\begin{aligned}
x &= S^0{}_{1\cdot2} + \alpha'_1\lambda_1 + \alpha'_2\lambda_2 + \alpha'_3\lambda_3 \\
y &= a_{1\cdot2} + \beta'_1\lambda_1 + \beta'_2\lambda_2 + \beta'_3\lambda_3 \\
z &= a_{2\cdot1} + \gamma'_1\lambda_1 + \gamma'_2\lambda_2 + \gamma'_3\lambda_3
\end{aligned}
\tag{82}
$$

α'_1, α'_2, α'_3 β'_1……γ'_3 爲九個不定係數，欲使虛擬之改正數 λ_1 λ_2 λ_3 與以前之眞正觀測改正數 v_1 v_2……v_n 完全等值，必須使此九個不定係數可以滿足下列條件：

$$\begin{array}{lll} [\alpha'\alpha']=[\alpha\alpha] & [\beta'\beta']=[\beta\beta] & [\gamma'\gamma']=[\gamma\gamma] \\ [\alpha'\beta']=[\alpha\beta] & [\alpha'\gamma']=[\alpha\gamma] & [\beta'\gamma']=[\beta\gamma] \end{array} \qquad (83)$$

(83)各式之右方爲已知數。欲使九個係數滿足六個條件，吾人可使九個中之任意三個爲零，今命 β'_1 γ'_1 γ'_2 爲零，則自(83)可得下列關係，並由此求出其他各係數：

$$\begin{array}{ll} \gamma'^2_3=[\gamma\gamma] & \text{由此求出 } \gamma'_3 \\ \beta'_3\gamma'_3=[\beta\gamma] & ,, \quad \beta'_3 \\ \alpha'_3\gamma'_3=[\alpha\gamma] & ,, \quad \alpha'_3 \\ \beta'^2_2+\beta'^2_3=[\beta\beta] & ,, \quad \beta'_2 \\ \alpha'_2\beta'_2+\alpha'_3\beta'_3=[\alpha\beta] & ,, \quad \alpha'_2 \\ \alpha'^2_1+\alpha'^2_2+\alpha'^2_3=[\alpha\alpha] & ,, \quad \alpha'_1 \end{array} \qquad (84)$$

其次一步工作爲將式(82)代入大地線之條件方程內。設第一條之大地線函數以 x_1 y_1 z_1 表示之，第二條以 x_2 y_2 z_2 表示之，則條件方程式之普遍形式爲：

$$\begin{array}{l} p_{1\cdot1}x_1+p_{1\cdot2}y_1+p_{1\cdot3}z_1+p_{2\cdot1}x_2+p_{2\cdot2}y_2+p_{2\cdot3}z_2+\cdots\cdots=0 \\ q_{1\cdot1}x_1+q_{1\cdot2}y_1+q_{1\cdot3}z_1+q_{2\cdot1}x_2+q_{2\cdot2}y_2+q_{2\cdot3}z_2+\cdots\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (85)$$

將(82)代入(85)內，卽可得以 λ_1 λ_2 λ_3 爲未知數之條件方程，其普遍式爲：

$$\begin{array}{l} p'_{1\cdot1}\lambda_{1\cdot1}+p'_{1\cdot2}\lambda_{1\cdot2}+p'_{1\cdot3}\lambda_{1\cdot3}+p'_{2\cdot1}\lambda_{2\cdot1}+p'_{2\cdot2}\lambda_{2\cdot2}+p'_{2\cdot3}\lambda_{2\cdot3}+\cdots\cdots+w_1=0 \\ q'_{1\cdot1}\lambda_{1\cdot1}+q'_{1\cdot2}\lambda_{1\cdot2}+q'_{1\cdot3}\lambda_{1\cdot3}+q'_{2\cdot1}\lambda_{2\cdot1}+q'_{2\cdot2}\lambda_{2\cdot2}+q'_{2\cdot3}\lambda_{2\cdot3}+\cdots\cdots+w_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

(86)

由式(86)以 $[\lambda\lambda]$ = 最小值爲條件舉行條件平差，卽可得各虛擬改正數 $\lambda_{1\cdot1}$ $\lambda_{1\cdot2}$，……等值，代入(82)內，得 x y z 諸函數之平差值，然後再以之爲強制附合條件將初步平差重新改作，與簡略法相同。

此法與簡略法計算工作之比較，最主要者爲：

(1) 須按式(81)求$[\alpha\beta]$ $[\beta\gamma]$ $[\alpha\gamma]$諸值,($[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$ $[\gamma\gamma]$則在簡略法中亦須求出),

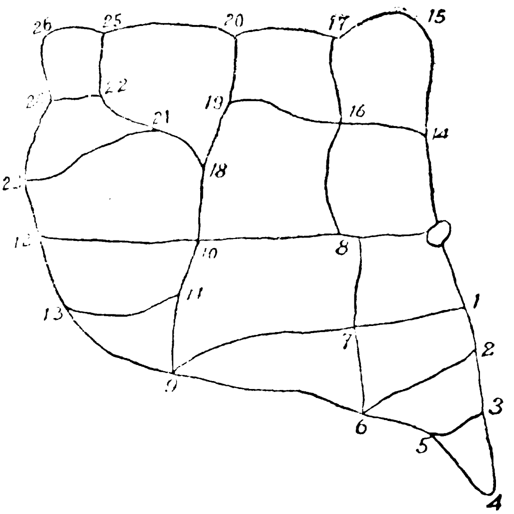
(2) 求 α' β' γ' 之工作,

(3) 將式(85)化爲式(86)之形式。

以上爲多作之計算工作，但嚴格法中可以不必求初步平差中之繫數值與改正數 v，即經過初次平差後之大地線長度與兩端接合角之值，亦不需要，蓋(82)中之 S^0_{12} α^0_{12} α^0_{21} 仍可用由觀測值計算所得之值也。

第十二節 鮑威法

美人鮑威於作美國西部大三角網之平差時(1924年)，設計一法，與大地線法頗有類似之處，惟其主要平差係用間接觀測平差法，以經緯度爲未知數，此法亦爲簡略法，因各點之經緯度差原爲觀測值之函數，而於主要平差時，則以之爲獨立觀測值。



第十一章 第十四圖 美國西部三角鎖

茲以美國西部大三角網之平差爲例以說明此法。該網係由多個四邊形鎖所組成，大略如第十四圖之形狀。在平差之前先於各鎖交合之處，即圖中以 1，2，3，……等表示之處，各選一接合圖形。接合圖形應極簡單，同時與各鎖相接合處，最好僅有一接合邊。此外則接合圖形中最好能包括一基線擴大邊及一拉伯拉斯方位角。

第一步工作爲各接合圖形之獨自平差。倘接合圖形中包括有基線擴大邊及拉伯拉斯方位角，則其比例尺及方位角可以完全確定；否則此兩種原素應由其相鄰最近之一個或多個基線及方位角遞算，而取其中數。其目的在使獨自平差後之接合圖形之比例尺與方位角爲固定值，此後不再改變。

第二步工作爲各接合圖形間四邊形鎖之單獨平差，求出兩接合點間之經緯度差。

第三步工作爲各接合圖形初步經緯度之計算。接合圖形之比例尺及方位角既已確定，故可由每個接合圖形中取出一點代表此圖形之經緯度，此點可名爲接合點。經緯度計算之出發點係以圖中之 Meades Ranch 爲原點（圖中以 O 表示之），按各點所標之次序計算，由是得接合點之初步經緯度。

第四步工作爲觀測方程式之列出。以第二步之結果爲觀測值，以各接合點之經緯度改正數爲未知數。此種方程式極爲簡單，$l_1\, l'_1$ 表示四邊形鎖（1）兩端之經緯度差，$x_1\, y_1$ 及 $x_2\, y_2$ 爲該鎖兩端接合點之經緯度（平差值），則觀測方程式爲：

$$\text{經度}\quad l_1+v_1=x_1-x_2$$

$$\text{緯度}\quad l'_1+v'_1=y_1-y_2$$

將第二步之結果代入 l_1，l'_1，又將第三步各接合點之初步經緯度代入式之右方，卽可化之爲改正數方程式，改正數方程式之數目爲 2 乘單鎖之數目。因經度之方程式與緯度之方程式互不相關，故可分別平差。

第五步爲依第四步之改正數方程式而舉行間接觀測平差，用以求各接合點之最後經緯度。

此法在計算上極爲簡單，蓋在主要平差時，較約蘭得之簡略法尚少方位角之條件，因此與嚴格之結果亦相差愈多。

第十三節　坐標平差法

關於交會三角點應用坐標平差之原理，已於第十章中論及，但一般三角網之平差則頗少採用此法。蓋此法之主要困難，在須知所有三角點之近似坐標，然後始能列改正數方程式，而在大三角網中此種近似坐標頗不易求得較精密之值。倘欲求相當精密之近似坐標值，勢必先舉行頗爲繁巨之

預備計算工作，而此種工作在平差後並無多大用處也。

所謂點之坐標者，可爲平面坐標，亦可爲經緯度坐標。在小規模三角網中如交會定點法，均用平面坐標；但在大規模三角網之平差，則以應用經緯度坐標爲宜。蓋應用平面坐標時，必須顧及方向及距離改正，在面積較大之平面投影中，此種改正值漸趨增大，勢必用較精密之公式計算，不如逕用經緯度坐標之簡單。

坐標平差之改正數方程式與第十章第三節所論大致相同，惟此處之公式係以大地線出發，故不若平面坐標時之簡單。今設一大地線兩端點之經緯度爲 $B_1\,L_1$，$B_2\,L_2$，由此所得之大地線長度爲 S_{12}，其兩端之方位角爲 A_{12} 與 A_{21}。設由平差所得之經緯度改正爲 dB_1，dL_1，dB_2，dL_2，其相當之長度與方位角變化爲 dS_{12} 與 $dA_{12}\,dA_{21}$。

此外設在測站 P_1 所測之方向以 $r_{12}\,r_{13}\,r_{14}\cdots\cdots$ 表示之，其近似定向值爲 z_1，經過平差後之方向改正數爲 $v_{12}, v_{13}, v_{14}, \cdots\cdots$ 定向改正數爲 dz_1。

凡直接由基線擴大之邊，其長度視爲直接測定者，如 $P_1\,P_2$ 爲此種之邊，其測得之長度以 s_{12} 表示之。

凡直接用天文測定之經度及方位角均於其上加一星表示之，如測站 P_1 之天文經度與方位角爲 $L_1{}^*$ 與 $A_{12}{}^*$，其改正數爲 $\delta L_1{}^*$ 與 $\delta A_{12}{}^*$。

今先求方向觀測之改正數方程式：例如方向 a_{12} 之改正數方程式爲

$$v_{12}=(A_{12}-r_{12}+z_1)+dz_1+dA_{12} \tag{87}$$

括號內之值爲常數項，其餘各方向之改正數方程式做此，可以類推。

此外尙有天文觀測之改正數，以拉伯拉斯方程列出之。拉伯拉斯條件爲

$$(A_{12}+dA_{12})-(A_{12}{}^*+\delta A_{12}{}^*)-\{(L_1+dL_1)-(L_1{}^*+\delta L_1{}^*)\}\sin B_1=0 \tag{88}$$

今如以 u 表示天文改正數，即

$$u_{12}=\delta A_{12}{}^*-\delta L_1{}^*\sin B_1 \tag{89}$$

則式(88)可化爲改正數方程之形式：

$$u_{12}=\{(A_{12}-A_{12}{}^*)-(L_1-L_1{}^*)\sin B_1\}+dA_{12}-dL_1\sin B_1 \tag{90}$$

如 P_1P_2 爲基線擴大之邊，其長度 s_{12} 應爲固定的，故可列一條件：

$$S_{12}+dS_{12}=s_{12}$$

或化爲對數式：

$$\log S_{12}+d\log S_{12}=\log s_{12} \tag{91}^*$$

此條件可用以消去 P_1P_2 兩點坐標中之一個。

改正數方程式(87)與(90)之右方尚未化爲未知數之函數。(87)中之定向改正數 dz_1 可於改正數方程內消除之,亦可於法方程式內消除之。此外尚須將 dA_{12} 及 dS_{12} 與未知數 $dB_1dL_1dB_2dL_2$ 之關係列出。此處可參考大地測量之公式,即

$$\left.\begin{aligned}dA_{12}&=\frac{1}{m_{12}}\left\{M_1\sin A_{12}\left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}dB_1-N_1\cos B_1\frac{\sin A_{12}}{\sin A_{21}}\cos A_{21}dL_1\right.\\&\qquad\left.+M_2\sin A_{21}dB_2-N_2\cos B_2\cos A_{21}dL_2\right\}\\dS_{12}&=-\frac{1}{\rho''}\left\{M_1\cos A_{12}dB_1+N_1\cos B_1\sin A_{12}dL_1\right.\\&\qquad\left.+M_2\sin A_{21}dB_2-N_2\cos B_2\cos A_{21}dL_2\right\}\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

此公式中之 M_1, M_2, N_1, N_2 各爲 P_1, P_2 兩點之子午圈與卯酉圈之曲度半徑。m_{12} 爲大地線 P_1P_2 之歸化長度,$\left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}$ 爲 m_{12} 依 S_{12} 之微分係數。m 之公式爲:

$$\left.\begin{aligned}m&=a\sin\frac{S}{a}=S-\frac{S^3}{6a^2}\\\frac{dm}{dS}&=\cos\frac{S}{a}=1-\frac{S^2}{2a^2}\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

a 爲地球橢圓體之長半徑。由以上兩式可知,當 $S\leqq50$ 公里時,右方之第二項極爲微小,故爲平差之用,可棄之不顧,於是:

$$m_{12}=S_{12},\qquad\left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}=1 \tag{93}^*$$

又爲化簡式(92)計,以四個新未知數 x_1, y_1, x_2, y_2 代原有之 $dB_1\ dL_1\ dB_2\ dL_2$,設

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{C}M_1dB_1 &\qquad x_2&=\frac{1}{C}M_2dB_2\\y_1&=\frac{1}{C}N_1\cos B_1dL_1 &\qquad y_2&=\frac{1}{C}N_2\cos B_2dL_2\end{aligned} \tag{94}$$

C 爲一任意常數,其作用爲使 $x\ y$ 之值大小適宜。倘命 $C=\rho''$,則 $x\ y$ 之

單位即爲公尺，約關得則命 $C=10^5$。

此外尚有一化簡之處，即由兩端方位角差 $\Delta A=A_{21}-A_{12}$ 之公式：

$$\sin\Delta A=\frac{S_{12}}{N_1}\tan B_1\sin A_{21}$$

得

$$\frac{\sin A_{12}}{\sin A_{21}}\cos A_{21}=\cos A_{12}-\frac{S_{12}}{N_1}\tan B_1 \tag{95}$$

將(93)(94)(95)之關係代入(92)之兩式內，並顧及

$$d\log S=\frac{u}{S}dS$$

則可得化簡之關係：

$$\begin{aligned}dA_{12}=&\left\{\frac{C}{S_{12}}\sin A_{12}\cdot x_1-\frac{C}{S_{12}}\cos A_{12}\cdot y_1+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{21}x_2-\frac{C}{S_{12}}\cos A_{21}y_2\right\}\\&+\frac{C}{N_1}\tan B_1 y_1\\d\log S_{12}=&-\frac{u}{\rho''}\left\{\frac{C}{S_{12}}\cos A_{12}\cdot x_1+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{12}y_1+\frac{C}{S_{12}}\cos A_{21}\cdot x_2\right.\\&\left.+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{21}\cdot y_2\right\}\end{aligned} \tag{92}^*$$

(92)*之最後一項可與式(87)之 dz_1 歸併，因由式(94)之 y_1 式中可知

$$\frac{C}{N_1}\tan B_1 y_1=\sin B_1\cdot dL_1$$

如命

$$\zeta_1=dz_1+\sin B_1 dL_1 \tag{96}$$

即可將該項自 dA_{12} 中取出。今以 $-l_{12}$ 代改正方程式(87)之常數項，以 $-l_{12}^*$ 代改正數方程式(90)之常數項，並將(92)*內之各係數用下列簡單方法代表之：

$$\begin{aligned}a_{12}&=\frac{C}{S_{12}}\sin A_{12} & b_{12}&=\frac{C}{S_{12}}\cos A_{12}\\a_{21}&=\frac{C}{S_{12}}\sin A_{21} & b_{21}&=\frac{C}{S_{12}}\cos A_{21}\end{aligned} \tag{97}$$

則根據(92)與(96)可將改正數方程式(87)與(90)化爲

$$\left.\begin{aligned}v_{12}&=-l_{12}+\zeta_1+a_{12}x_1-b_{12}y_1+a_{21}x_2-b_{21}y_2\\u_{12}&=-l_{12}^*\qquad+a_{12}x_1-b_{12}y_1+a_{21}x_2-b_{21}y_2\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

基線條件(91)*爲

$$O=\frac{\rho''}{u}(\log s_{12}-\log S_{12}+b_{12}x_1+a_{12}y_1+b_{21}x_2+a_{21}y_2 \qquad (99)$$

倘 P_1P_2 爲基線擴大邊，卽可列出(99)式，而利用之以消除一未知數。例如由(99)得：

$$a_{12}x_1=-\frac{a^2{}_{12}}{b_{12}}y_1-\frac{a_{12}b_{21}}{b_{12}}x_2-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{b_{12}}y_2-\frac{a_{12}\rho''}{b_{12}u}(\log s_{12}-\log S_{12}) \qquad (99)^*$$

用(99)* 可將 x_1 之項自改正數方程式(98)中約去，所有含 x_1 之其他改正數方程式亦可用此式約去。

改正數方程式(98)係以 P_1P_2 一方向爲例所列者，如將所有方向之改正數方程式均列出，卽可由之求出法方程式，其步驟與普通間接觀測之方法相同，茲不贅述。惟天文觀測之精度自不及方向觀測之精度，故在約蘭得之南芬環形網之平差中，命天文改正數 u 之權爲1/22，是以所有天文改正數方程式 u 均以 $\sqrt{\frac{1}{22}}$ 乘之。

以上已將應用坐標法平差之基本公式與作法加以說明。至於坐標法與繫數法比較之利弊，可分述如下：

利點：

(1)在網形較爲複雜之時，用坐標平差較爲有利，因其法方程式之數目較少；

(2)應用坐標法，可直接求出各點坐標之中誤差及誤差橢圓；

(3)改正數方程式甚爲簡單，不似複雜網形中之條件方程，不易列出；

(4)可以分段平差，每次約化至各段交界點之坐標改正爲止，然後相加作最後之解算，其結果與全體平差相同。

弊點：

(1)必須先求出各點坐標之近似值，此近似值之精度與平差結果之良好與否至爲有關，故於平差之前，須費許多工作以求近似坐標值；

(2)法方程式不如繫數法中由角度條件所構成法方程式之簡單。

就上述之利弊比較，似以坐標法利益較多，但其最大之阻礙爲必須有近似坐標值，此步工作，頗爲繁巨，故一般極少採用之。

第十二章　觀測誤差之檢討

第一節　檢討之目的

應用最小二乘法以求觀測之最或是值係根據偶然誤差之分佈定律。倘觀測誤差中含有系統誤差，則以最小二乘法平差之結果，必非最或是值。在此種情形內，平差後所得之觀測值改正數與眞誤差相差甚多，其分佈亦必不能與假定之分佈定律相脗合。是故欲確定觀測值中是否尚含有尚未發覺之系統誤差，必須於平差後對觀測值之改正數作一檢討。有時因觀測之性質，可求出眞誤差，則直接檢討眞誤差之分佈，更爲可靠。在一般情形內眞誤差均不能知，必須以改正數爲根據。此時多餘觀測之數目應較多，始可得較確切之分佈定律。否則改正數之分佈定律 $\varphi(v)$ 未必與眞誤差之分體定律 $\varphi(\varepsilon)$ 相同，檢討之結果恐不可靠也。

由觀測誤差之檢討，吾人可解答下列諸問題：

(一)觀測值中是否含有系統誤差，爲平差前所未發覺者；

(二)平差結果是否爲最或是值；

(三)是否某觀測值之眞確性頗爲可疑，必要時可捨棄不用，或重行觀測；

(四)平差前各觀測值所給予之權數是否適當，抑應改善。

當觀測甚少或平差問題極簡單時，觀測誤差之檢討無大意義；但在大規模之觀測，如面積甚廣之三角網或交叉甚密之水準網，平差後必須舉行檢討，庶可確定以上所列諸問題，並可因此而謀改善觀測方法，其意義固非僅限於研討平差方法之是否可靠也。

第二節　誤差前置符號數目之檢討

如誤差分佈定律爲偶次，則正誤差之數目應與負誤差之數目相等。倘誤差之總數爲奇數，則其差應爲1。今設以 V 表示誤差之前置符號，則 V 等於 $+1$ 或 -1。n 個觀測誤差前置符號之和爲

$$s=V_1+V_2+\cdots+V_n \tag{1}$$

其最或是值應爲零(n 爲奇數時 s 等於 ±1)。欲求 s 之中誤差,須設想有無數個公式(1),將其兩端平方,每個 V^2 均等於 +1,而 $[V_i V_k]$ 之平均應爲零,故結果 s 之二次冪平均值等於 n,而其中誤差爲 $\pm\sqrt{n}$,於是

$$\text{誤差正負符號之和應} = 0 \pm \sqrt{n}$$

由第九章表一中可查出介於正負兩中誤差間之或是率爲 0.6827。即 s 之值介於 $\pm\sqrt{n}$ 之間之或是率爲 0.6827。倘一組觀測誤差(n 個)之正負符號數目相差之絕對值大於$\sqrt{n}$,則該組誤差中含有系統誤差之可能性必極大。

倘據之以作上列檢討者並非眞誤差 ε 而係改正數 v,則多餘觀測之數目愈大,其檢討結果愈爲可靠。倘多餘觀測甚少,此檢討即無意義矣。

第三節　誤差前置符號順序之檢討

有時系統誤差並不影響誤差正負號之數目,故前節所述之檢討方法,仍不能求得眞象。倘懷疑系統誤差與時間或觀測者有關,則可將觀測值依時間或觀測者爲變數而排列之。若在某一時期內或某一觀測者所作之觀測值較眞值均大或均小,則其誤差必均連續爲同一符號或僅有極少數不同之符號;而在另一時期內或另一觀測者所作之觀測中,其誤差可能多相反之符號。由此亦可驗得是否有此類系統誤差存在。

在一組按上述順序排列之觀測誤差中,設以 f 表示兩相鄰誤差符號相同處之總數,w 表示兩相鄰誤差符號變換處之總數,其相差爲

$$f-w = V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_4 + \cdots + V_{n-1}V_n \tag{2}$$

因如 $V_i V_{i+1}$ 爲 +1,則此兩誤差之符號必相同,設 $V_i V_{i+1}$ 爲 −1,則兩誤差之符號必不同也。設 n 爲奇數,則 $f-w$ 之最或是值應爲零,因 $V_i V_{i+1}$ 爲 +1 或 −1 之或是率相等也。設 n 爲偶數,則 $f-w$ 之最或是值應爲 ±1。$(f-w)$ 之中誤差可用本章第二節之方法求之,將公式(2)右方平方,即得

$$V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_4^2 + \cdots + V_{n-1}^2V_n^2 \tag{3}$$

此外尙有 $2V_iV_{i+1}^2V_{i+2}$ 及 $V_iV_{i+1}V_kV_{k+1}$ 等諸項,但其平均值爲零,(3)之平均值爲 $n-1$。故 $f-w$ 爲零之中誤差爲 $\pm\sqrt{n-1}$。於是:

相鄰兩誤差符號相同之總數減符號變換之總數應爲 $0\pm\sqrt{n-1}$。$(f-w)$ 介於 $\pm\sqrt{n-1}$ 間之或是率爲 0.68270。如 $f-w$ 之絕對值大於 $\pm\sqrt{n-1}$，則與時間或觀測者有關之系統誤差，頗有存在之可能。

第四節　正負誤差大小之檢討

如誤差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 爲雙次者，則當誤差數目 n 爲無窮多時，誤差 ε 之總和 $[\varepsilon]$ 應爲零。或正誤差之和應等於負誤差之和。若 n 爲有限數值，則可以 s 表示 ε 之和：

$$s=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_n \tag{4}$$

s 之最或是值爲零。設有無窮多個式(4)將其兩端平方而求其平均值，則左端爲 $s=[\varepsilon]$ 之中誤差平方，右端爲 $[\varepsilon\varepsilon]$，因 $m^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$，故計算 $[\varepsilon]$ 之中誤差爲 $m\sqrt{n}$。此處之 m 乃觀測之中誤差，於是

$$誤差之和[\varepsilon]應=0\pm m\sqrt{n}.$$

倘檢討一組觀測誤差之結果，發現 $[\varepsilon]$ 大於 $m\sqrt{n}$，則頗可懷疑有系統誤差之存在。增加觀測次數，並不使 $[\varepsilon]$ 之值愈趨於零，因其中誤差反加大，但 $\frac{[\varepsilon]}{n}$ 之值則漸趨減少，以其中誤差爲 $\frac{m}{\sqrt{n}}$ 也。

此種檢討僅能用於眞誤差 ε，倘應用於直接觀測平差後求得之改正數 v，則因最小二乘法之原則本爲 $[v]=0$，無須檢討矣。

當各觀測之權數不等時，施行此種檢討時應用 $\sqrt{P}\cdot\varepsilon$，P 爲該誤差之權數。

除按上法檢討 ε 一次冪之和以外，吾人亦可檢討其二次冪之和，如觀測次數 n 爲無窮多，正誤差二次和應等於負誤差二次和。或以公式表示之：

$$V_1\varepsilon_1^2+V_2\varepsilon_2^2+V_3\varepsilon_3^2+\cdots\cdots+V_n\varepsilon_n^2=0 \tag{5}$$

V 爲 ε 之前置符號。如有無窮多個公式(5)而求其二次冪之平均值，則得 $n\mu^4$。

$$\mu^4=\frac{[\varepsilon^4]}{n}$$

如第九章所示，由此可得：

$$\text{正誤差平方和與負誤差平方和之較應}=:0\pm\mu^2\sqrt{n}$$

因此檢討之中誤差與 $\sqrt{n}$ 成比例，故增加觀測次數，亦不能使正負誤差平方和之差更趨於零。

第五節　阿卑❶檢討法

倘將 $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \cdots\cdots\varepsilon_n$ 按一定次序排列，而欲檢討是否有與此次序相關之系統誤差存在，最佳之法乃求 $\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$ 之值，因此值中可消去系統誤差之全部或大部，阿卑之檢討法卽以此爲根據。令

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2=A \tag{6}$$

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+\cdots\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2+(\varepsilon_n-\varepsilon_1)^2=B \tag{7}$$

則　$$C=A-\frac{B}{2}=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots\cdots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n+\varepsilon_n\varepsilon_1 \tag{8}$$

如 ε 全爲偶然性質，C 之最或是值應爲零，將式(8)兩端平方而求其平均值，則所有 $\varepsilon^2_i\ \varepsilon^2_{i+1}$ 各項之平均值均爲 m^4，共有 n 項，其和爲 nm^4，其他各項如 $\varepsilon_1\varepsilon^2_2\varepsilon_3$ 等之平均值爲零，故 C 之中誤差爲 $\sqrt{n}\cdot m_2$。依此，則阿卑檢討公式如下：

$$A-\frac{B}{2}=0\pm m^2\sqrt{n},$$

亦可化爲下式：

$$\frac{2A}{B}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}。$$

第六節　修正之阿卑檢討法

在阿卑之檢討法中，公式(7)內含有 $(\varepsilon_n-\varepsilon_1)^2$ 一項。倘有1至 n 次之觀測中，其系統誤差並不自1至 n 成循環之情形者，則 $\varepsilon_n-\varepsilon_1$ 一項毫無意義。故可將此項減去而成：

$$B^*=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+\cdots\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2 \tag{9}$$

更令：$$A^*=[\varepsilon^2]-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_n^2}{2} \tag{10}$$

則　$$C^*=A^*-\frac{B^*}{2}=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots\cdots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \tag{11}$$

---

❶ Abbe：阿卑。

將(11)與(8)比較，(11)較(8)少最後一項，故 C^* 之中誤差亦成爲 $\pm m^2\sqrt{n-1}$，於是修正之阿卑檢討公式爲：

$$A^*-\frac{B^*}{2}=0\pm m^2\sqrt{n-1}$$

或

$$\frac{2A^*}{B^*}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

亦稱爲阿卑—赫爾默特之檢討公式。

第七節　全組誤差分佈之檢討

欲知誤差之分佈是否與所假定之誤差分佈定律相符合，或與之相差若干，可將誤差按其正負大小之次序排列，選一適宜之間隔 $d\varepsilon$，計數每個間隔中誤差之個數，以間隔之中間值(ε)爲横坐標，以其在此間隔中誤差之個數爲縱坐標，將各點分別標出，而聯以一曲線，就一般而論，此曲線應與第一章所示之誤差分佈曲線相似，但如誤差數目有限，則亦可相差甚大。且所選間隔之大小，亦有時影響於曲線之形狀；如間隔過大，則點數減少，曲線不易勾繪；間隔過小時，其中數目較不可靠，將使曲線過於曲折，均不相宜，故間隔之選擇，甚應注意。

觀察此曲線是否與假定之分佈定律符合，最要者爲(1)觀察大誤差之或是率是否較小誤差之或是率爲小，卽視曲線是否自縱軸向横軸正負兩方漸漸下降；(2)觀察正負誤差出現之或是率是否大致相同，卽視曲線是否與縱軸成對稱形狀。

以上所述之圖解檢討法，較爲明顯，且能得整個之印象。但有時用數字比較，可得較精密之結果。根據第二章之表六，以表中之 w_0^{nm} 乘以觀測次數 N，可計在理論上誤差介於 0 及 n 倍中誤差 $n\cdot m$ 間之個數。使與實際所得之個數比較，視其有無較大區別，卽可知其實際分佈與理論之假定是否相近。作此種比較時，視誤差數之多寡，可更易 n 之間隔，使疏密適宜。誤差愈多，則 n 之間隔可愈減小，檢討亦可爲明顯(參考第二章第五節之例)。

第八節　改正數之檢討

以上所論全係眞誤差之檢討，如所知者爲平差後之改正數時，究竟此

種檢討有無意義殊堪置疑，因改正數之分佈受平差法之影響，固不能盡代表眞誤差之分佈也。平差後所得之未知數值與其眞值相差愈多，則改正數之分佈愈與眞誤差之分佈不同，其影響有如系統誤差。設有一值經多次直接測定而得一平均值，以平均值爲根據所求各觀測值之改正數與其眞誤差相差均相等，是卽平均值之眞誤差。倘各項觀測值均有同一之常誤差，則於其改正數中並不能看出。此時檢討改正數之分佈固與眞誤差相類似，但如欲藉此檢討是否有常誤差存在，則絕對不可能矣。

概言之，多餘觀測數目愈多，改正數之分佈愈與眞誤差之分佈相似；未知數間之條件愈多時，改正數之值愈與其誤差之值易於接近。平常最好利用未知數間之條件以求眞誤差，因所有條件方程式中之差異均爲眞誤差也，例如一三角形之和與 $180°$ 加球面角超相差之數，卽爲三角度之眞誤差，又如水準網之平差，每個環形之閉合差亦均爲眞誤差，作檢討時應以此爲根據，而不以每角度平差後之改正數爲根據。

第九節　實例

求某水準儀之水準軸與視軸之夾角時，利用直接觀測法得下列之結果：

第一日	第二日	第三日	
$+1''.27$	$+0''.03$	$-0''.90$	$-0''.60$
$-0\ .78$	$+0\ .67$	$+0\ .20$	$-0\ .90$
$+0\ .11$	$+0\ .08$	$+0\ .96$	$-0\ .17$
$-0\ .71$	$+0\ .56$	$+0\ .86$	$-0\ .03$

按上表則三日所得之總結果適爲 $0''.00$，故上表所列各值卽代表其每次觀測改正數，在此四組觀測之改正數中，第二組與第四組內似有系統之誤差存在。茲按本章所論之各種方法檢討之，則知在此整個之十六項觀測值中其誤差可認爲均係偶然性質無疑也。

上表所列均係改正數 v，其與眞誤差 ε 之較平均約爲：$\frac{m}{\sqrt{n}}$。蓋在直接觀測時，設以 X 爲觀測值之眞值，x 爲其最或是值時，則得下列之關係：

$$\varepsilon_i = v_i + (X - x)。$$

故知 ε 與 v 之較其平均值約為 $X-x$ 之中誤差，亦即最或是值 x 之中誤差 $\frac{m}{\sqrt{n}}$ 也。由此節之例，求得：

$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{6.77}{16-1}}=\pm 0''.06$$

而
$$\pm\frac{0.67}{\sqrt{n}}=\pm 0''.17$$

此值不為過鉅，故由其改正數 v 之關係亦可間接推斷其眞誤差 ε 之諸特徵。

在十六項觀測誤差中，9 項為正數，7 項為負數，故誤差前置符號數目之差為 2，由理論應為：$0\pm\sqrt{n}=0\pm 4$

兩相隔誤差符號相同處之總數 f 為 8，兩相隣誤差符號變換處之總數為 7，故 $f-w=1$。按理論則應為：

$$f-w=0\pm\sqrt{n-1}=0\pm 3.9$$

正負值誤差之和為零，此為直接觀測時 $[v]$ 之特徵。

正誤差平方之和為 3.65，負誤差平方之和為 3.12。其較得 0.53，按理論則應為：$0\pm\mu^2\sqrt{n}=0\pm 2.48$ 其中 $\mu^4=\frac{6.16}{16}=0.385$，

故 $\mu^2=\pm 0.620,\ \mu^2\sqrt{16}=\pm 2.48$。

更驗之以阿卑檢討法，則：

$$A=[\varepsilon^2]=(1.27)^2+(0.78)^2+\cdots\cdots(0.77)^2+(0.03)^2=6.77$$
$$B=(2.05)^2+(0.89)^2+\cdots\cdots+(0.14)^2+(1.30)^2=14.84$$

故：
$$A-\frac{B}{2}=6.77-7.42=-0.65$$
$$\frac{2A}{B}=\frac{13.54}{14.84}=0.91$$

按理論應各為：

$$A-\frac{B}{2}=0\pm m^2\sqrt{n}=0\pm 1.8$$
$$\frac{2A}{B}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}=1\pm 0.25$$

由各種之檢查，知其均符合於偶然誤差之諸特徵，因可斷言其不致有系統誤差存在於其間也。

附錄一　方向係數表（爲距離一公里之值）

$u=+20.6265\cos\varphi\qquad v=-20.6265\sin\varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*180°	0° 0′	+20.63	− 0.00	*188°	8° 0′	+20.43	− 2.87	*196°	16° 0′	+19.83	− 5.69
	10	20.63	0.06		10	20.42	2.93		10	19.81	5.74
	20	20.63	0.12		20	20.41	2.99		20	19.79	5.80
	30	20.63	0.18		30	20.40	3.05		30	19.78	5.86
	40	20.63	0.24		40	20.39	3.11		40	19.76	5.92
	50	20.63	0.30		50	20.38	3.17		50	19.74	5.97
*181°	1° 0′	+20.62	− 0.36	*189°	9° 0′	+20.37	− 3.23	*197°	17° 0′	+19.73	− 6.03
	10	20.62	0.42		10	20.36	3.29		10	19.71	6.09
	20	20.62	0.48		20	20.35	3.35		20	19.69	6.15
	30	20.62	0.54		30	20.34	3.40		30	19.67	6.20
	40	20.62	0.60		40	20.33	3.46		40	19.65	6.26
	50	20.62	0.66		50	20.32	3.52		50	19.64	6.32
*182°	2° 0′	+20.61	− 0.72	*190°	10° 0′	+20.31	− 3.58	*198°	18° 0′	+19.62	− 6.37
	10	20.61	0.78		10	20.30	3.64		10	19.60	6.43
	20	20.61	0.84		20	20.29	3.70		20	19.58	6.49
	30	20.61	0.90		30	20.28	3.75		30	19.56	6.54
	40	20.60	0.96		40	20.27	3.82		40	19.54	6.60
	50	20.60	1.02		50	20.26	3.88		50	19.52	6.66
*183°	3° 0′	+20.60	− 1.08	*191°	11° 0′	+20.25	− 3.94	*199°	19° 0′	+19.50	− 6.72
	10	20.59	1.14		10	20.24	3.99		10	19.48	6.77
	20	20.59	1.20		20	20.22	4.05		20	19.46	6.83
	30	20.59	1.26		30	20.21	4.11		30	19.44	6.89
	40	20.58	1.32		40	20.20	4.17		40	19.42	6.94
	50	20.58	1.38		50	20.19	4.23		50	19.40	7.00
*184°	4° 0′	+20.58	− 1.44	*192°	12° 0′	+20.18	− 4.29	*200°	20° 0	+19.38	− 7.05
	10	20.57	1.50		10	20.16	4.35		10	19.36	7.11
	20	20.57	1.56		20	20.15	4.41		20	19.34	7.17
	30	20.56	1.62		30	20.14	4.46		30	19.32	7.22
	40	20.56	1.68		40	20.12	4.52		40	19.30	7.28
	50	20.55	1.74		50	20.11	4.58		50	19.28	7.34
*185°	5° 0	+20.55	− 1.80	*193°	13° 0′	+20.10	− 4.64	*201°	21° 0	+19.26	− 7.39
	10	20.54	1.86		10	20.08	4.70		10	19.23	7.45
	20	20.54	1.92		20	20.07	4.76		20	19.21	7.50
	30	20.53	1.98		30	20.06	4.81		30	19.19	7.56
	40	20.53	2.04		40	20.04	4.87		40	19.17	7.62
	50	20.52	2.10		50	20.03	4.93		50	18.15	7.67
*186°	6° 0′	+20.51	− 2.16	*194°	14° 0′	+20.01	− 4.99	*202°	22° 0	+19.12	− 7.73
	10	20.51	2.22		10	20.00	5.05		10	19.10	7.78
	20	20.50	2.28		20	19.98	5.11		20	19.08	7.84
	30	20.49	2.33		30	19.97	5.16		30	19.06	7.89
	40	20.49	2.39		40	19.95	5.22		40	19.03	7.95
	50	20.48	2.45		50	19.94	5.28		50	19.01	8.00
*187°	7° 0′	+20.47	− 2.51	*195°	15° 0	+19.92	− 5.34	*203°	23° 0	+18.99	− 8.06
	10	20.47	2.57		10	19.91	5.40		10	18.96	8.11
	20	20.46	2.63		20	19.89	5.45		20	18.94	8.17
	30	20.45	2.69		30	19.88	5.51		30	18.92	8.22
	40	20.44	2.75		40	19.86	5.57		40	18.89	8.28
	50	20.43	2.81		50	19.84	5.63		50	18.87	8.33

$$u = +20.6265 \cos\varphi \qquad v = -20.6265 \sin\varphi$$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*204°	24°	0′	+18.84	− 8.39	*213°	33°	0′	+17.30	−11.23	*222°	42°	0′	+15.33	−13.80
		10	18.82	8.44			10	17.27	11.28			10	15.29	13.85
		20	18.79	8.50			20	17.23	11.33			20	15.25	13.89
		30	18.77	8.55			30	17.20	11.38			30	15.21	13.94
		40	18.74	8.61			40	17.17	11.43			40	15.17	13.98
		50	18.72	8.66			50	17.13	11.48			50	15.13	14.02
*205°	25°	0′	+18.69	− 8.72	*214°	34°	0′	+17.10	−11.53	*223°	43°	0′	+15.09	−14.07
		10	18.67	8.77			10	17.07	11.58			10	15.04	14.11
		20	18.64	8.83			20	17.03	11.63			20	15.00	14.15
		30	18.62	8.88			30	17.00	11.68			30	14.96	14.20
		40	18.60	8.93			40	16.96	11.73			40	14.92	14.24
		50	18.57	8.99			50	16.93	11.78			50	14.88	14.28
*206°	26°	0′	+18.54	− 9.04	*215°	35°	0′	+16.90	−11.83	*224°	44°	0′	+14.84	−14.33
		10	18.51	9.10			10	16.86	11.88			10	14.80	14.37
		20	18.49	9.15			20	16.83	11.93			20	14.75	14.41
		30	18.46	9.20			30	16.79	11.98			30	14.71	14.46
		40	18.43	9.26			40	16.76	12.03			40	14.67	14.50
		50	18.41	9.31			50	16.72	12.08			50	14.63	14.54
*207°	27°	0′	+18.38	− 9.36	*216°	36°	0′	+16.69	−12.12	*225°	45°	0′	+14.59	−14.59
		10	18.35	9.42			10	16.65	12.17			10	14.54	14.63
		20	18.32	9.47			20	16.62	12.22			20	14.50	14.67
		30	18.30	9.52			30	16.58	12.27			30	14.46	14.71
		40	18.27	9.58			40	16.54	12.32			40	14.41	14.75
		50	18.24	9.63			50	16.51	12.37			50	14.37	14.80
*208°	28°	0′	+18.21	− 9.68	*217°	37°	0′	+16.47	−12.41	*226°	46°	0′	+14.33	−14.84
		10	18.18	9.74			10	16.44	12.46			10	14.28	14.88
		20	18.16	9.79			20	16.40	12.51			20	14.24	14.92
		30	18.13	9.84			30	16.36	12.56			30	14.20	14.96
		40	18.10	9.89			40	16.33	12.60			40	14.15	15.00
		50	18.07	9.95			50	16.29	12.65			50	14.11	15.04
*209°	29°	0′	+18.04	−10.00	*218°	38°	0′	+16.25	−12.70	*227°	47°	0′	+14.07	−15.09
		10	18.01	10.05			10	16.22	12.75			10	14.02	15.13
		20	17.98	10.10			20	16.18	12.79			20	13.98	15.17
		30	17.95	10.16			30	16.14	12.84			30	13.94	15.21
		40	17.92	10.21			40	16.10	12.89			40	13.89	15.25
		50	17.89	10.26			50	16.07	12.93			50	13.85	15.29
*210°	30°	0′	+17.86	−10.31	*219°	39°	0′	+16.03	−12.98	*228°	48°	0′	+13.80	−15.33
		10	17.83	10.37			10	15.99	13.03			10	13.76	15.37
		20	17.80	10.42			20	15.95	13.07			20	13.71	15.41
		30	17.77	10.47			30	15.92	13.12			30	13.67	15.45
		40	17.74	10.52			40	15.88	13.17			40	13.62	15.49
		50	17.71	10.57			50	15.84	13.21			50	13.58	15.53
*211°	31°	0′	+17.68	−10.62	*220°	40°	0′	+15.80	−13.26	*229°	49°	0′	+13.53	−15.57
		10	17.65	10.67			10	15.76	12.30			10	13.49	15.61
		20	17.62	10.73			20	15.72	13.35			20	13.44	15.65
		30	17.59	10.78			30	15.68	13.40			30	13.40	15.68
		40	17.56	10.83			40	15.65	13.44			40	13.35	15.72
		50	17.52	10.88			50	15.61	13.49			50	12.30	15.76
*212°	32°	0′	+17.49	−10.93	*221°	41°	0′	+15.57	−13.53	*230°	50°	0′	+13.26	−15.80
		10	17.46	10.98			10	15.53	13.58			10	13.21	15.84
		20	17.43	11.03			20	15.49	13.62			20	13.17	15.88
		30	17.40	11.08			30	15.45	13.67			30	13.12	15.92
		40	17.37	11.13			40	15.41	13.71			40	13.07	15.95
		50	17.33	11.18			50	15.37	13.76			50	13.03	15.99

$u = +20.6265 \cos\varphi \qquad v = -20.6265 \sin\varphi$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*231°	51°	0′	+12.98	−16.03	*240°	60°	0′	+10.31	−17.86	*249°	69°	0′	+ 7.39	−19.26
		10	12.93	16.07			10	10.26	17.89			10	7.34	19.28
		20	12.89	16.10			20	10.21	17.92			20	7.28	19.30
		30	12.84	16.14			30	10.16	17.95			30	7.22	19.32
		40	12.79	16.18			40	10.10	17.98			40	7.17	19.34
		50	12.75	16.22			50	10.05	18.01			50	7.11	19.36
*232°	52°	0	+12.70	−16.25	*241°	61°	0′	+10.00	−18.04	*250°	70°	0′	+ 7.05	−19.38
		10	12.65	16.29			10	9.95	18.07			10	7.00	19.40
		20	12.60	16.33			20	9.89	18.10			20	6.94	19.42
		30	12.56	16.36			30	9.84	18.13			30	6.89	19.44
		40	12.51	16.40			40	9.79	18.16			40	6.83	19.46
		50	12.46	16.44			50	9.74	18.18			50	6.77	19.48
*233°	53°	0	+12.41	−16.47	*242°	62°	0′	+ 9.68	−18.21	*251°	71°	0′	+ 6.72	−19.50
		10	12.37	16.51			10	9.63	18.24			10	6.66	19.52
		20	12.32	16.54			20	9.58	18.27			20	6.60	19.54
		30	12.27	16.58			30	9.52	18.30			30	6.54	19.56
		40	12.22	16.62			40	9.47	18.32			40	6.49	19.58
		50	12.17	16.65			50	9.42	18.35			50	6.43	19.60
*234°	54°	0′	+12.12	−16.69	*243°	63°	0′	+ 9.36	−18.38	*252°	72°	0′	+ 6.37	−19.62
		10	12.08	16.72			10	9.31	18.41			10	6.32	19.64
		20	12.03	16.76			20	9.23	18.43			20	6.26	19.65
		30	11.98	16.79			30	9.20	18.46			30	6.20	19.67
		40	11.93	16.83			40	9.15	18.49			40	6.14	19.69
		50	11.88	16.86			50	9.10	18.51			50	6.09	19.71
*235°	55°	0′	+11.83	−16.90	*244	64°	0′	+ 9.04	−18.54	*253°	73°	0	+ 6.03	−19.73
		10	11.78	16.93			10	8.99	18.57			10	5.97	19.74
		20	11.73	16.96			20	8.93	18.59			20	5.92	19.76
		30	11.68	17.00			30	8.88	18.62			30	5.86	19.78
		40	11.63	17.03			40	8.83	18.64			40	5.80	19.79
		50	11.58	17.07			50	8.77	18.67			50	5.74	19.81
*236°	56°	0′	+11.53	−17.10	*245°	65°	0′	+ 8.72	−18.69	*254°	74°	0′	+ 5.69	−19.83
		10	11.48	17.13			10	8.66	18.72			10	5.63	19.84
		20	11.43	17.17			20	8.61	18.74			20	5.57	19.86
		30	11.38	17.20			30	8.55	18.77			30	5.51	19.88
		40	11.33	17.23			40	8.50	18.79			40	5.45	19.89
		50	11.28	17.27			50	8.44	18.82			50	5.40	19.91
*237°	57°	0	+11.23	−17.30	*246°	66°	0′	+ 8.39	−18.84	*255°	75°	0′	+ 5.34	−19.92
		10	11.18	17.33			10	8.33	18.87			10	5.28	19.94
		20	11.13	17.37			20	8.28	18.89			20	5.22	19.95
		30	11.08	17.40			30	8.22	18.92			30	5.16	19:97
		40	11.03	17.43			40	8.17	18.94			40	5.11	19.98
		50	10.98	17.46			50	8.11	18.96			50	5.05	20.00
*238°	58°	0′	+10.93	−17.49	*247°	67°	0′	+ 8.06	−18.99	*256°	76°	0′	+ 4.99	−20.01
		10	10.88	17.52			10	8.00	19.01			10	4.93	20.03
		20	10.83	17.56			20	7.95	19.03			20	4.87	20.04
		30	10.78	17.59			30	7.89	19.06			30	4.82	20.05
		40	10.73	17.62			40	7.84	19.08			40	4.76	20.07
		50	10.67	17.65			50	7.78	19.10			50	4.70	20.08
*239°	59°	0′	+10.62	−17.68	*248°	68°	0′	− 7.73	−19.12	*257°	77°	0′	+ 4.64	−20.10
		10	10.57	17.71			10	7.67	19.15			10	4.58	20.11
		20	10.52	17.74			20	7.62	19.17			20	4.52	20.12
		30	10.47	17.77			30	7.56	19.19			30	4.46	20.14
		40	10.42	17.80			40	7.50	19.21			40	4.41	20.15
		50	10.37	17.83			50	7.45	19.23			50	4.35	20.16

$u = +20.6265 \cos \varphi \qquad v = -20.6265 \sin \varphi$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*258°	78°	0′	+ 4.29	−20.18	*267°	87°	0′	+ 1.08	−20.60	*276°	96°	0′	− 2.16	−20.51
		10	4.23	20.19			10	1.02	20.60			10	2.22	20.51
		20	4.17	20.20			20	0.96	20.60			20	2.28	20.50
		30	4.11	20.21			30	0.90	20.61			30	2.33	20.49
		40	4.05	20.22			40	0.84	20.61			40	2.39	20.49
		50	3.99	20.24			50	0.78	20.61			50	2.45	20.48
*259°	79°	0	+ 3.94	−20.25	*268°	88°	0′	+ 0.72	−20.61	*277°	97°	0′	− 2.51	−20.47
		10	3.88	20.26			10	0.66	20.62			10	2.57	20.47
		20	3.82	20.27			20	0.60	20.62			20	2.63	20.46
		30	7.75	20.28			30	0.54	20.62			30	2.69	20.45
		40	3.70	20.29			40	0.48	20.62			40	2.75	20.44
		50	3.64	20.30			50	0.42	20.62			50	2.81	20.43
*260°	80°	0′	+ 3.58	−20.31	*269°	89°	0′	+ 0.36	−20.62	*278°	98°	0′	− 2.87	−20.43
		10	3.52	20.32			10	0.30	20.62			10	2.93	20.42
		20	3.46	20.33			20	0.24	20.63			20	2.99	20.41
		30	3.40	20.34			30	0.18	20.63			30	3.05	20.40
		40	3.35	20.35			40	0.12	20.63			40	3.11	20.39
		50	3.29	20.36			50	0.06	20.63			50	3.17	20.38
*261°	81°	0′	+ 3.23	−20.37	*270°	90°	0′	+ 0.00	−20.63	*279°	99°	0′	− 3.23	−20.37
		10	3.17	20.38			10	0.06	20.63			10	3.29	20.36
		20	3.11	20.39			20	0.12	20.63			20	3.35	20.35
		30	3.05	20.40			30	0.18	20.63			30	3.40	20.34
		40	2.99	20.41			40	0.24	20.63			40	3.46	20.33
		50	2.93	20.42			50	0.30	20.62			50	3.52	20.32
*262°	82°	0′	+ 2.87	−20.43	*271°	91°	0′	+ 0.36	−20.62	*280°	100°	0	− 3.58	−20.31
		10	2.81	20.43			10	0.42	20.62			10	3.64	20.30
		20	2.75	20.44			20	0.48	20.62			20	3.70	20.29
		30	2.69	20.45			30	0.54	20.62			30	3.76	20.28
		40	2.63	20.46			40	0.60	20.62			40	3.82	20.27
		50	2.57	20.47			50	0.66	20.62			50	3.88	20.26
*263°	83°	0′	+ 2.51	−20.47	*272°	92°	0′	− 0.72	−20.61	*281°	101°	0′	− 3.94	−20.25
		10	2.45	20.48			10	0.78	20.61			10	3.99	20.24
		20	2.39	20.49			20	0.84	20.61			20	4.05	20.22
		30	2.33	20.49			30	0.90	20.61			30	4.11	20.21
		40	2.28	20.50			40	0.96	20.60			40	4.17	20.20
		50	2.22	20.51			50	1.02	20.60			50	4.23	20.19
*264°	84°	0	+ 2.16	−20.51	*273°	93°	0′	− 1.08	−20.60	*282°	102°	0′	− 4.29	−20.18
		10	2.10	20.52			10	1.14	20.59			10	4.35	20.16
		20	2.04	20.53			20	1.20	20.59			20	4.41	20.15
		30	1.98	20.53			30	1.26	20.59			30	4.46	20.14
		40	1.92	20.54			40	1.32	20.58			40	4.52	20.12
		50	1.86	20.54			50	1.38	20.58			50	4.58	20.11
*265°	85°	0′	+ 1.80	−20.55	*274°	94°	0′	− 1.44	−20.58	*283°	103°	0′	− 4.64	−20.10
		10	1.74	20.55			10	1.50	20.57			10	4.70	20.08
		20	1.68	20.56			20	1.56	20.57			20	4.76	20.07
		30	1.62	20.56			30	1.62	20.56			30	4.82	20.06
		40	1.56	20.57			40	1.68	20.56			40	4.87	20.04
		50	1.50	20.57			50	1.74	20.55			50	4.93	20.03
*266°	86°	0′	+ 1.44	−20.58	*275°	95°	0′	− 1.80	−20.55	*284°	104°	0′	− 4.99	−20.01
		10	1.38	20.58			10	1.86	20.54			10	5.05	20.00
		20	1.32	20.58			20	1.92	20.54			20	5.11	19.98
		30	1.26	20.59			30	1.98	20.53			30	5.16	19.97
		40	1.20	20.59			40	2.04	20.53			40	5.22	19.95
		50	1.14	20.59			50	2.10	10.52			50	5.28	19.94

$u=+20.6265\cos\varphi \qquad v=-20.6265\sin\varphi$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*285°	105°	0′	−5.34	−19.92	*294°	114°	0′	−8.39	−18.84	*303°	123°	0′	−11.23	−17.30
		10	5.40	19.91			10	8.44	18.82			10	11.28	17.27
		20	5.45	19.89			20	8.50	18.79			20	11.33	17.23
		30	5.51	19.88			30	8.55	18.77			30	11.38	17.20
		40	5.57	19.86			40	8.61	18.74			40	11.43	17.17
		50	5.63	19.84			50	8.66	18.72			50	11.48	17.13
*286°	106°	0′	−5.69	−19.83	*295°	115°	0′	−8.72	−18.6	*304°	124°	0′	−11.53	−17.10
		10	5.74	19.81			10	8.77	18.67			10	11.58	17.07
		20	5.80	19.79			20	8.83	18.64			20	11.63	17.03
		30	5.86	19.78			30	8.88	18.62			30	11.68	17.00
		40	5.92	19.76			40	8.93	18.59			40	11.73	16.96
		50	5.97	19.74			50	8.99	18.57			50	11.78	16.93
*287°	107°	0′	−6.03	−19.72	*296°	116°	0′	−9.04	−18.54	*305°	125°	0′	−11.83	−16.90
		10	6.09	19.71			10	9.10	18.51			10	11.88	16.86
		20	6.15	19.69			20	9.15	18.49			20	11.93	16.83
		30	6.20	10.67			30	9.20	18.46			30	11.98	16.79
		40	6.26	19.65			40	9.26	18.43			40	12.03	16.76
		50	6.32	19.64			50	9.31	18.41			50	12.08	16.72
*288°	108°	0′	−6.37	−19.62	*297°	117°	0′	−9.36	−18.38	*306°	126°	0′	−12.12	−16.69
		10	6.43	19.60			10	9.42	18.35			10	12.17	16.65
		20	6.49	19.58			20	9.47	18.3			20	12.22	16.62
		30	6.54	19.56			30	9.52	18.30			30	12.27	16.58
		40	6.60	19.54			40	9.58	18.27			40	12.32	16.54
		50	6.66	19.5			50	9.63	18.24			50	12.37	16.51
*289°	109°	0′	−6.72	−19.50	*298°	118°	0′	−9.68	−18.21	*307°	127°	0′	−12.41	−16.47
		10	6.77	19.48			10	9.74	18.18			10	12.46	16.44
		20	6.83	19.46			20	9.79	18.16			20	12.51	16.40
		30	6.89	19.44			30	9.84	19.13			30	12.56	16.36
		40	6.94	19.42			40	9.89	18.10			40	12.60	16.33
		50	7.00	19.40			50	9.95	18.07			50	12.65	16.29
*290°	110°	0′	−7.05	−19.38	*299°	119°	0′	−10.00	−18.04	*308°	128°	0′	−12.70	−16.25
		10	7.11	19.36			10	10.05	18.01			10	12.75	16.22
		20	7.17	19.34			20	10.10	17.98			20	12.79	16.18
		30	7.22	19.32			30	10.16	17.95			30	12.84	16.14
		40	7.28	19.30			40	10.21	17.92			40	12.89	16.10
		50	7.34	19.28			50	10.26	17.89			50	12.93	16.07
*291°	111°	0′	−7.39	−19.26	*300°	120°	0′	−10.31	−17.86	*309°	129°	0′	−12.98	−16.03
		10	7.45	19.23			10	10.37	17.83			10	13.03	15.99
		20	7.50	19.21			20	10.42	17.80			20	13.07	15.95
		30	7.56	19.19			30	10.47	17.77			30	13.12	15.92
		40	7.62	19.17			40	10.52	17.74			40	13.17	15.88
		50	6.67	19.15			50	10.57	17.71			50	13.21	15.84
*292°	112°	0′	−7.73	−19.12	*301°	121°	0′	−10.62	−17.68	*310°	130°	0′	−13.26	−15.80
		10	7.78	19.10			10	10.67	17.65			10	13.30	15.76
		20	7.84	19.08			20	10.73	17.62			20	13.35	15.72
		30	7.89	19.06			30	10.78	17.59			30	13.40	15.68
		40	7.95	19.03			40	10.83	17.56			40	13.44	15.65
		50	8.00	19.01			50	10.88	17.52			50	13.49	15.61
*293°	113°	0′	−8.06	−18.99	*302°	122°	0′	−10.93	−17.49	*311°	131°	0′	−13.53	−15.57
		10	8.11	18.96			10	10.98	17.46			10	13.58	15.53
		20	8.17	19.94			20	11.03	17.43			20	13.62	15.49
		30	8.22	18.92			30	11.08	17.40			30	13.67	15.45
		40	8.28	18.89			40	11.13	17.37			40	13.71	15.41
		50	8.33	18.87			50	11.18	17.33			50	13.76	15.37

$u = +20.6265 \cos\varphi \qquad v = -20.6265 \sin\varphi$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*312°	132°	0′	−13.80	−15.33	*321°	141°	0′	−16.03	−12.98	*330°	150°	0′	−17.86	−10.31
		10	13.85	15.29			10	16.07	12.93			10	17.89	10.26
		20	13.89	15.25			20	16.10	12.89			20	17.92	10.21
		30	13.94	15.21			30	16.14	12.84			30	17.95	10.16
		40	13.98	15.17			40	16.18	12.79			40	17.98	10.10
		50	14.02	15.13			50	16.22	12.75			50	18.01	10.05
*313°	133°	0′	−14.07	−15.09	*322°	142°	0′	−16.25	−12.70	*331°	151°	0′	−18.04	−10.00
		10	14.11	15.04			10	16.29	12.65			10	18.07	9.95
		20	14.15	15.00			20	16.33	12.60			20	18.10	9.89
		30	14.20	14.96			30	16.36	12.56			30	18.13	9.84
		40	14.24	14.92			40	16.40	12.51			40	18.16	9.79
		50	14.28	14.88			50	16.44	12.46			50	18.18	9.74
*314°	134°	0′	−14.33	−14.84	*323°	143°	0′	−16.47	−12.41	*332°	152°	0′	−18.21	− 9.68
		10	14.37	14.80			10	16.51	12.37			10	18.24	9.63
		20	14.41	14.75			20	16.54	12.32			20	18.27	9.58
		30	14.46	14.71			30	16.58	12.27			30	18.30	9.52
		40	14.50	14.67			40	16.62	12.22			40	18.32	9.47
		50	14.54	14.63			5	16.65	12.17			50	18.35	9.42
*315°	135°	0′	−14.59	−14.59	*324°	144°	0′	−16.69	−12.12	*333°	153°	0′	−18.38	− 9.36
		10	14.63	14.54			10	16.72	12.08			10	18.41	9.31
		20	14.67	14.50			20	16.76	12.03			20	18.43	9.26
		30	14.71	14.46			30	16.79	11.98			30	18.46	9.20
		40	14 47	14.41			4	16.83	11.93			40	18.49	9.15
		50	14.80	14.37			50	16.86	11.88			50	18.51	9.10
*316°	136°	0′	−14.84	−14.33	*325°	145°	0	−16.90	−11.83	*334°	154°	0′	−18.54	− 9.04
		10	14.88	14.28			10	16.93	11.78			10	18.57	8.99
		20	14 92	14.24			20	16.96	11.73			20	18.59	8.93
		30	14.96	14.20			30	17.00	11.68			30	18.62	8.88
		40	15.00	14.15			40	17.03	11.63			40	18.64	8.83
		50	15.04	14.11			50	17 07	11.58			50	18.67	8.77
*317°	137°	0	−15.09	−14.07	*326°	146°	0′	−17.10	−11.53	*335°	155°	0′	−18.69	− 8.72
		10	15.13	14.02			10	17.13	11.48			10	18.72	8.66
		20	15.17	13.98			20	17.17	11.43			20	18.74	8.61
		30	15.21	13.94			30	17.20	11.38			30	18.77	8.55
		40	15.25	13.89			40	17.23	11.33			40	18.79	8.50
		50	15.29	13.85			50	17.27	11.28			50	18.82	8.44
*318	138°	0′	−15.33	−13.80	327°	147°	0	−17.30	−11.23	*336°	156°	0′	−18.84	− 8.39
		10	15.37	13.76			10	17.33	11.18			10	18.87	8.33
		20	15.41	13.71			20	17.37	11.13			20	18.8	8.28
		30	15.45	13.67			30	17.40	11.08			30	18.92	8.22
		40	15.49	13.62			40	17.43	11.03			40	18.94	8.17
		50	15.53	13.58			50	17.46	10.98			50	18.96	8.11
*319°	139°	0′	−15.57	−13.53	*328°	148°	0′	−17.49	−10.93	*337°	157°	0′	−18.99	− 8.06
		10	15.61	13.4			10	17.52	10.88			10	19.01	8.00
		20	15.65	13.44			2	17.56	10.83			20	19.03	7.95
		30	15.68	13.40			30	17.59	10.78			30	19.06	7.89
		40	15.72	13.35			40	17.62	10.73			40	19.08	7.84
		50	15.76	13.30			50	17.65	10.67			50	19.10	7.78
*320°	140°	0	−15.80	−13.26	*329°	149°	0′	−17.68	−10.62	*338°	158°	0′	−19.13	− 7.73
		10	15.84	13.21			10	17.71	10.57			10	19.15	7.67
		20	15.88	13.17			20	17.74	10.52			20	19.17	7.62
		30	15.92	13.12			30	17.77	10.47			30	19.19	7.56
		40	15.95	13.07			40	17.80	10.42			40	19.21	7.50
		50	15.99	13.03			50	17.83	10.37			50	19.23	7.45

$u=+20.6265 \cos\varphi \qquad v=-20.6265 \sin\varphi$

φ			u	v	φ			u	v	φ			u	v
*339°	159°	0′	−19.26	− 7.39	*346°	166°	0′	−20.01	− 4.99	*353°	173°	0′	−20.47	− 2.51
		10	19.28	7.34			10	20.03	4.93			10	20.48	2.45
		20	19.30	7.28			20	20.04	4.87			20	20.49	2.39
		30	19.32	7.22			30	20.06	4.82			30	20.49	2.33
		40	19.34	7.17			40	20.07	4.76			40	20.50	2.28
		50	19.36	7.11			50	20.08	4.70			50	20.51	2.22
*340°	160°	0	−19.38	− 7.05	*347°	167°	0′	−20.10	− 4.64	*354°	174°	0	−20.51	− 2.16
		10	19.40	7.00			10	20.11	4.58			10	20.52	2.10
		20	19.42	6.94			20	20.12	4.52			20	20.53	2.04
		30	19.44	6.89			30	20.14	4.46			30	20.53	1.98
		40	19.46	6.83			40	20.15	4.41			40	20.54	1.92
		50	19.48	6.77			50	20.16	4.35			50	20.54	1.86
*341°	161°	0′	−19.50	− 6.72	*348°	168°	0′	−20.18	− 4.29	*355°	175°	0′	−20.55	− 1.80
		10	19.52	6.66			10	20.19	4.23			10	20.55	1.74
		20	19.54	6.60			20	20.20	4.17			20	20.56	1.68
		30	19.56	6.54			30	20.21	4.11			30	20.56	1.62
		40	19.58	6.49			40	20.22	4.05			40	20.57	1.56
		50	19.60	6.43			50	20.24	3.99			50	20.57	1.50
*342°	162°	0	−19.62	− 6.37	*349°	169°	0	−20.25	− 3.94	*356°	176°	0′	−20.58	− 1.44
		10	19.64	6.31			10	20.26	3.88			10	20.58	1.38
		20	19.65	6.26			20	20.27	3.82			20	20.58	1.32
		30	19.67	6.20			30	20.28	3.76			30	20.59	1.26
		40	19.69	6.15			40	20.29	3.70			40	20.59	1.20
		50	19.71	6.09			50	20.30	3.64			50	20.59	1.14
*343°	163°	0′	−19.73	− 6.03	*350°	170°	0′	−20.31	− 3.58	*357°	177°	0′	−20.60	− 1.08
		10	19.74	5.97			10	20.32	3.52			10	20.60	1.02
		20	19.76	5.92			20	20.33	3.46			20	20.60	0.96
		30	19.78	5.86			30	20.34	3.40			30	20.61	0.90
		40	19.79	5.80			40	20.35	3.35			40	20.61	0.84
		50	19.81	5.74			50	20.36	3.29			50	20.61	0.78
*344°	164°	0′	−19.83	− 5.69	*351°	171°	0′	−20.37	− 3.28	*358°	178°	0′	−20.61	− 0.72
		10	19.84	0.63			10	20.38	3.17			10	20.62	0.66
		20	19.86	5.57			20	20.39	3.11			20	20.62	0.60
		30	19.88	5.51			30	20.40	3.05			30	20.62	0.54
		40	19.89	5.45			40	20.41	2.99			40	20.62	0.48
		50	19.91	5.40			50	20.42	2.93			50	20.62	0.42
*345°	165°	0′	−19.92	− 5.34	*352°	172°	0′	−20.43	− 3.87	*359°	179°	0′	−20.62	− 0.36
		10	19.94	5.28			10	20.43	2.81			10	20.62	0.30
		20	19.95	5.22			20	20.44	2.75			20	20.63	0.24
		30	19.97	5.16			30	20.45	2.69			30	20.63	0.18
		40	19.98	5.11			40	20.46	2.63			40	20.63	0.12
		50	20.00	5.05			50	20.47	2.57			50	20.63	0.06
										*360°	180°	0′	−20.63	− 0.00

凡用*號表示之φ方向係數之符號，與表內區別對照。

附錄二　中英德文名詞對照表

中文	英文	德文
一畫		
一次函數,直線函數	linear function	lineare Funktion
三畫		
三角網	triangulation net	Dreiecksnetz
三角鎖	chain of triangles	Dreieckskette
四畫		
中誤差	mean square error	mittelerer Fehler
方向	direction	Richtung
方向角	bearing, grid azimuth	Richtungswinkel
方向係數	coefficient of direction	Richtungskoeffizienten
方向觀測組	sets of direction observation	Richtungssätze
方位角	azimuth	azimut
方程式	equation	Gleichung
反方位角,反向方位角	back azimuth	
分組平差	adjustment in groups	gruppenweise Ausgleichung
不符值	discrepancy	Widerspruch
水平角總和閉差值	close of horizon	Horizontalabschluss
水準網	level net	Nivellementsnetz
不完全方向觀測組	incomplete sets of direction observation	unvollstandige Richtungssätze
內方向	inner direction	innere Richtung
內插法	interpolation	Interpolation
引數	argument	Eingangswert
五畫		
外方向	outer direction	äussere Richtung
平均值	mean value, average value	Mittelwert

中文	英文	德文
平差	adjustment of observation compensation of errors	Fehlerausgleichung
平差值	adjusted value	Ausgeglichener Wert
平差計算	computation of adjustment	Ausgleichungsrechnung
平均誤差	average error	durchschnittlicher Fehler
平面坐標	plane coordinates	Ebene Koordinaten
代替法	method of substitution	Substitutionverfahren
加常數	addition constant	Additionskonstante
四邊形	quadrilateral	Viereck
六 畫		
地理坐標	geographical co-ordinates	geographische Koordinaten
行列式	determinant	Determinaten
似眞誤差	apparent error	Scheinbarer Fehler
交會定點法	point interpolation	Punkteinschaltung
全體平差	point insertion	Ausgleichung in einem Guss
多餘觀測	redundancy in determination	Überschussige Beobachtung
多邊中點形	central figure	Zentralfigur
七 畫		
改正數	residuals	Verbesserung
改正數	correction	Korrektion, Verbesserung
改正數方程式	error equation, residual equation	Fehlergleichung
角度複測法	angle measurement by repetition	Repetitionswinkelmessung
系統誤差	systematic error	systematischer Fehler
坐標軸線	coordinate axes	Achsenkreuz
坐標原點	origin of co-ordinates	Koordinatenursprung
坐標誤差	error of co-ordinates	Koordinatenfehler
坐標平差	adjustment by means of co-ordinates	Koordinatenausgleichung
角方程式	angle equations	Winkelgleichungen
角度誤差	angulat error	Winkelfehler
完全方向觀測組	complete sets of direction observation	volle Richtungssätze

中　文	英　文	德　文
杜力特爾	Doolittle	Doolittle
克里格爾	Krueger	Krüger
八　畫		
附合三角網	annexed triangulation net	angeschlossenes Dreiecksnetz
近似値	approximate value	Näherungswert
或是率	probability	Wahrscheinlichkeit
或是誤差	probable error	Wahrscheinlicher Fehler
法方程式	normal equation	Normalgleichungen
弧度	arc-measure	Bogenmass
非一次函數	non-linear function	nicht lineare Funktion
函數	function	Funktion
直接觀測	direct observations	unmittelbare Beobachtungen
拉伯拉司	Laplace	Laplace
拉伯拉司方程式	Laplace equation	Laplace'sche Gleichung
定向値	orientation	Orientierungsunbekannte
耶奈	Jenne	Jenne
九　畫		
係數	coefficient	Koeffizient
後交會定位法	resection	Rückwärtseinschnitt
約化誤差方程式	reduced residual equation	reduzierte Fehlergleichung
約化法方程式	reduced normal equation	reduzierte Normal gleichung
約但		Jordan
約蘭得		Ielander
十　畫		
級數展開	expansion in series	Reihenentwicklung
原子誤差	elementary error	Elementarfehler
眞値	true value	wahrer Wert
眞誤差	true error	Wahrer Fehler
容許誤差	allowable error	zulässige Fehler
條件觀測	conditional observation	bedingte Beobachtungen
條件方程式	condition equation	Bedingungsgleichung

中文	英文	德文
條件間接觀測	indirect observations with condition equations	Vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen
條件不符值	discrepancy in condition equation	Bedingungswiderspruch
核檢	check	Kontrolle, Probe
閉合差	error of closure	Abschlussfehler
消去法	method of elimination	Elimainationsverfahren
條件觀測	conditioned observation	bedingte Beobachtung
泰羅	Taylor	
十一畫		
部分平差	partial adjustment, separate adjustment	partielle Ausgleichung stückweise Ausgleichung
部分消去法	partial elimination	partielle Elimination
偶然誤差	accidental error	zufällige Fehler
逐步接近解算	solution by successive approximation	Auflösung durch allmähliche Annährung
高斯約化法	Gauss algorithmus	Algorithmus von Gauss
高斯	Gauss	Gauss
高斯代替法	Gauss's method of substitution	Substitution verfahren nach Gauss
組	set	Satz
常誤差	constant error	Konstantfehler
湊整誤差	abrundy error	Abrundungsfehler
規律誤差	regular error	regelmässiger Fehler
強合,強制	constrained annexnation	Anschlusszwang
強制附合條件	condition for constrained annexation	Anschlusszwangsbedingung
基線網,基線放大網	base net	Basisnetz
球面方向角	spherical azimuth	sphärische Azimut
球面角超	spherical excess	sphärischer exzess
視距常數	Stadia constant	Konstante des Fadendistanzmessers
接合圖形	Junction figure	Verbindungsnetze
勒戎德爾	Legendre	Legendre
十二畫		

中　文	英　文	德　文
最小二乘法	method of least squares	Methode der kleinsten Quadrate
幾何平均值	geometric mean	Geometrisches Mittel
測站平差	local adjustment, station adjustment	Stationsausgleichung
剩餘誤差	residual error	Restfehler
最大誤差	maximum error	Maximalfehler
最或是值	most probable value	wahrscheinlichster Wert
最適當之權分配	most favorable distribution of weights	günstigste Gewichtsverteilung
極坐標	polar co-ordinates	Polar-Koordinaten
等值觀測	equivalent observation	Äquivalente Beobachtung
間接觀測	indirect observation	Vermittelnde Beobachtung
非德烈		Friedrich
博爾茲		Boltz
十三畫		
照準誤差	sighting error	Zielfehler
預擬中誤差	mean square error a priore	Mittlerer Fehler a priore
傳遞方程式		Übertragungsgleichungen
愛格	Eggert	Eggert
十四畫		
網	net	Netz
精度	precision, accuracy	Genauigkeit
精度之檢討	investigation of the accuracy	Genauigkeitsuntersuchung
精準率	measure of precision	Genauigkeitsmasse
誤差定律	law of error	Fehlergesetz
誤差傳播定律	law of propagation of errors	Fehlerfortpflanzungsgesetz
誤差分佈	distribution of error	Fehlerverteilung
誤差分佈曲線	Curve of probability	Fehlerkurve
誤差極限，極限誤差	limit of error	Grenzfehler
誤差橢圓	error-ellipse	Fehlerellipse
算學平均值	arithmetic mean	arithmetisches Mittel
廣義平均值	weighted mean	allgemeines Mittel, Mittel mit Gewicht, Gewichtes Mittel

中文	英文	德文
複測法	method of repetition	Repetitionsverfahren
對數解法	logarithmic solution	logarithmische Auflösung
圖形平差	figure adjustment	Netzausgleichung
赫爾默特		Helmert
十五畫		
橫坐標	abscissa	Abszisse
橫向墨卡托投影	Transverse mercator projection	Transversale Mercator Projektion
十六畫		
鮑威	Bowie	bowie
錯誤	mistake, blunder error	Grober Fehler
積分	integration	Integralrechnung
聯立方程式	simultaneous equations	
十七畫		
環形網	ring system	Kranzsysteme
檢核	check	Kontrolle Probe
總和核驗	check by summation	Sigmaprobe, Summenproben
點位中誤差	mean square error of a point	Mittlere Punktfehler
簡略法	approximate method	Annäherungsmethod
簡略平差	approximate adjustment	Näherungsausgleichung
縱坐標	ordinate	Ordinate
十八畫		
擴展法	method of development	Entwicklungsverfahren
雙點定位法	double point interpolation	Doppelpunkteinschaltung
十九畫		
邊長條件	side conditions	Seitenbedingungen
邊方程式	side equation	Seitengleichung
邊方程式之極點	pole of side equation	Zentralpunkt für Seitengleichung
繫數	correlate	Korrelate
繫數方程式	correlate equations	Korrelatengleichung

中　文	英　文	德　文
繫數法	method of correlates	Korrelatenverfahren
嚴格平差	rigorous adjustment	Strenge Ausgleichung
二十一畫		
蘭孛圓錐正形投影	Lambert conformal conic projection	Lambertsche Winkeltreue Kegelprojektion
二十二畫		
權	weight	Gewicht
權單位	unit weight	Gewichtseinheit
權倒數	weight reciprocal	Gewichtsreziproke
權係數	weight coefficient	Gewichtskoeffizienten
讀數誤差	error in reading	Ablesefehler
讀數精度	accuracy of reading	Ablesegenauigkeit
二十五畫		
觀測	observation	Beobachtung
觀測值	observed value	Beobachtungswert
觀測組	series of observations	Beobachtungsreihe
觀測誤差	error of observation	Beobachtungsfehler
觀測值差	difference of observation	Beobachtungsdifferenzen
觀測方程式	observation equation	Beobachtungsgleichung
觀測之平差	adjustment of observation	Fehlerausgleichung

中華民國三十六年五月初版
⊕(53612)

大學叢書 測量平差法一冊

定價國幣拾貳元
印刷地點外另加運費

著作者 陳永齡 夏堅白 王之卓

發行人 朱經農 上海河南中路

印刷所 商務印書館印刷廠

發行所 商務印書館 各地