萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學直線圖形

林鶴一　菅集人著

黃元吉譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

平面幾何學
直線圖形

林鶴一　菅集人著
黃元吉譯

算學小叢書

目　　次

第二章 平行線

第三章 三角形及多角形

第一節 三角形之疊合

第二節　邊角之關係

第三節　多角形

第四章 平行四邊形

記　號

幾何學普通所用之記號如次

$\angle$	角	$\perp$	垂直，正交
R$\angle$	直角	$=$	相等
$\equiv$	全等	$\neq$	不等
$>$	大於	$<$	小於
$\ngtr$	不大於	$\nless$	不小於
$\therefore$	故	$\because$	因
$\triangle$	三角形	$\square$	平行四邊形
$\parallel$	平行	$\sim$	差
ab	a, b二直線所包之矩形	$\backsim$	相似
a^2	a直線上之正方形		

平面幾何學　直線圖形

緒　論

1. 幾何學之目的　試觀種種物體，有長，有短，有厚，有薄，有大，有小，有輕，有重，其性質千差萬別，不遑枚舉；然熟察之，無論何種物體，必有其所同具者；計凡三事：卽形狀大小及位置是也．是蓋就一切物體，剔去其所組織之物質，而惟餘形骸以呈斯跡象者也，物體有種種之屬性，其由何物質組織而成，概置不論，惟就形狀大小位置，考究其眞理，是卽幾何學之目的．

2 立體　此類之物體，如不論其所組織者爲何物質，惟論形狀，大小，位置；則僅爲物體之所占空間之一部分是也，因稱之爲立體；立體有高，有

縱,有橫.

3. 面　立體爲有限之物,其立於無限之空間,必有其境界,此境界屬於立體而爲與空間最接近之部分,因稱之爲面,面有廣無厚.

4. 線　面之端爲線,面有廣無厚,故其端之爲線,有長無闊.

5. 點　線之端爲點,以無闊者之端,無復有大小之別,故點僅占一位置.

6. 體面線點之關係　體面線點云者,實皆假想物,不能見,不能觸,惟知而已;以鉛筆之尖端,着於紙上卽生一小黑印,通例所云點是也,然非幾何學上之點,因其不能無廣也.又以此尖端在紙上移動,卽生一條線,此亦非幾何學上之線,因其不能無闊也;必也小黑印之極限爲限點,而以此點移動,循其所留之跡,僅有長可紀者,乃可得幾何學上線之觀念;依同理,移動其線卽生面,移動其面卽生立體;然立體非面之集合,面非線之集合,線非點之集合,須注意於此爲要.(譯者按面無厚非體之一部,故立體非面之集合,餘類推.)

注意　移動其線有不生面,移動其面有不生立體者,此亦宜究其原因,又移動其立體又生何物乎?

7. 直線　線之中最單純者,厥惟直線,以細絲張之,卽呈其形;若嚴格言之,則任於線中截取一部分,而以疊於其餘之部分上無弗密貼者,此線

乃爲直線.

直線之長，雙方無限，截取其一部分者，稱爲有限直線，或稱線分；又直線有時單稱線，以二點爲兩端之有限直線，其長卽此二點間之距離，其線由二以上之線分接成者，此線稱爲折線；其一線有一部分，不爲直線者，此線稱爲曲線。同通過一點之二直線，稱爲相交，其點稱爲交點.

8. 平面　面之中最單純者，厥惟平面，有如鏡面是也；嚴格言之，則任於面上取二點，通過此二點之直線，無弗與面密貼者，此面乃爲平面，其面有一部分不爲平面者稱爲曲面.

9. 圖形　係由體面線點及體面線點之集合而成，其同在一平面圖形，係由點線搆成，平面幾何學專論平面圖形.

10. 幾何學之構成　幾何係就體面線點，考究眞理，而順序以致其研究者也；先由經驗而得單純若干事件，認爲眞確定爲基礎，由推理法以推及其他事理之眞確，次更依此闡發新理，就種種之眞理而次第以研究之，如是愈推愈進研求新理，或由常識，或由實驗，但旣定爲眞確者，此外不容遷就，卽其初雖由實驗認爲眞確而定爲基礎，迨其後，必全歸於演繹，蓋幾何學者務在演繹論理之嚴正而已；人之思想求其精密，對於推理法之練習，幾何

學為最適當之學科也.

11. 公理 由經驗而認為眞確,無待證明者,此稱為公理;公理分二種:屬於普通者,稱為普通公理;屬於幾何學者,稱為幾何學公理;普通公理之重要者如次:

1. 同等於某量之二量必相等.

2. 全量等於其部分之和,故全量比一部分大,而一部分比全量小.

3. 二量以上之和,其相加之次序任何變更,皆相等.

4. 等量與同量或等量之和或差,必相差.

5. 等量之同倍量或同分量,必相等.

6. 不等量與同量或等量之和或差,不相等.

7. 諸大量之和比諸小量之和大.

注意 同與等之區別,同者就一個言,等者就二個以上言也.

幾何學公理如次:

1. 任意二點間之最短距離,必為直線.

2. 通過二點之直線,有一而無二,依此公理推之,得(a) (b)二項如次:(a) 公有二點或一部分之二直線,必疊成一直線;(b)二直線祇有一交點.

3. 在直線兩側之二點,聯成直線,必與原直線相交.

4. 圖形之位置雖變,其形狀大小不變.

5. 以平面之一部分,於其中任取一直線為折

痕，而返折之，得疊合於他部分之上.

6. 平行線之公理詳後.

12. 定義 係就其所用之語，而明定其意義也.

13. 定理及系 定理由定義，公理及認爲眞確之事件依推理法，斷定此理之必爲眞確.

例如 a,b,c,d 成比例，其內項之積 bc 必等於外項之積 ad.

定理由假設終結二者而成；假設者假定之意，終結者假定之結果也.

如前例 a,b,c,d，成比例，此爲假設，以下卽終結也.

論由假設所以得終結之故者曰證明，乃證明終結之爲眞確也，其所引用之事件，必係先認爲眞確自不待言；由定理易於證明者，特稱之爲系，然系亦不外定理也.

14. 定理之關係 如前項所述，定理係由假設，終結二者而成；其普通所用之形式如次：

甲若爲乙丙必爲丁，

甲若爲乙云者，假設之詞也，丙必爲丁云者，終結之詞也；此形式可簡之如次：爲 A 者，必爲 B，爲 A 者假設，必爲 B 者終結，今於「爲 A 者爲 B」之定理，以其終結之反對「不爲 B 者」爲假設，而以其假設之反對「必不爲 A」爲終結，使別成一定理如次：不爲 B 者，必不爲 A；此定理稱爲前定理之對偶，對偶定理與原定理，祇是詞意反對，其內容之無變化可知.

一定理若爲眞確，其對偶亦必眞確.

例如:某整數之第一位爲 0「爲 A 者」,此數必爲 10 之倍數「必爲 B」;其對偶則爲某整數不爲 10 之倍數.「不爲 B 者」,其第一位必不爲0.「必不爲A」,此爲眞確明甚;次以一定理之假設終結,爲他定理之終結假設,此二定理互爲逆,卽爲 A 者必爲 B,其逆爲 B 者必爲 A;例如某數之第一位爲 0,此數必爲 10 之倍數,其逆某數爲 10 之倍數,其第一位必爲 0,又例知某數之第一位爲 5 此數必爲 5 之倍數,其逆某數爲 5 之倍數,其第一位必爲 5;由此二例觀之,某定理之逆,有眞確,(前例),有不眞確,(後例).

故一定理雖爲眞確,其逆未必眞確.

又次以一定理假設終結之反對,爲他定理之假設終結,此二定理互爲裏;卽爲 A 者必爲B,其裏不爲 A 者必不爲 B.例如:某數之第一位爲 0,此數必爲 10 之倍數,其裏某數之第一位不爲 0,此數必不爲 10 之倍數;又例如:某數之第一位爲 5,此數必爲 5 之倍數,其裏某數之第一位不爲 5,此數必不爲 5 之倍數,此二例,亦前例眞確,後例不眞確.某定理爲 A 者必爲 B,其逆爲 B 者必爲 A.其裏不爲 A 者必不爲 B.如是則某定理之逆理,有互爲對偶之關係,而對偶定理固眞否與公者也.

故一定理雖爲眞確,其裏未必眞確.

茲就定理之對偶,逆及裏相互之關係,綜列之如次:

(1)　爲 A 者必爲 B.

(2)　不爲 B 者必不爲 A.

(3)　爲 B 者必爲 A.

(4)　不爲 A 者必不爲 B.

對 偶	(1), (2)	(3), (4)
逆	(1), (2)	(3), (4)
裏	(1), (2)	(3), (4)

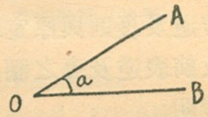
今若提出此四定理,而求其證明,則依逆,裏及對偶之關係而利用之,對於此四定理不必一一證明;蓋如前所述對偶定理,眞否與共,則證明其可也。若逆及裏則與原定理非眞否與共者須證明爲要,故前表逆及裏之欄,凡四組,無論何組,均須詳爲證明。

第一章

直線及角

定義 1. 由一點引二直線，如是所成之圖形，謂之角；其點稱爲角之頂點，二直線爲角之邊.

例如由 O 點引二直線 OA,OB，此圖形謂之角，O 爲頂角之頂點，OA，OB 爲角之邊，稱角者，以頂所記之字居中而以各邊所記之字左右之如 AOB 角，或 BOA 角是也，又或記之如次：

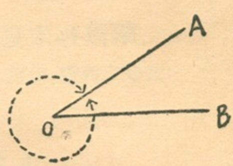


$$\angle AOB, \quad \angle BOA,$$

有時僅以頂點所記之字或角內所記之字稱之，如所稱 O 角 a 角是也，或稱 $\angle AOB$ 爲 OA,OB 所夾之角.

定義 2. AOB 角之所由成，其始 OA 係疊於 OB 之上，取與時針旋轉相反之向，以 O 爲中心，依平面旋轉，至 OA 之位置，即成 AOB 角.

又其始 OA 疊於 OB 之上，與計時針旋轉同向，以 O 爲中心，依平面旋轉，至 OA 之位置，亦成 AOB 角，故由一點引二直線實成二角，



似此公有頂點及二邊之二角稱爲**共軛角**，其大者爲優角，小者爲劣角；通常所稱角，係指劣角言也.

據此則一直線 OA，以 O 爲中心，依平面旋轉，卽成一角，是角大小由於動線旋轉之多少，而於動線 OA 之長短絕無關係。

定義 3. 公有頂點及一邊之二角，而在公有之邊之兩側者，此二角稱爲**隣角**，或稱**接角**。

定義 4. 平角云者，角之二邊在頂點之兩側而成爲一直線者也。

例如：$\angle AOB$ 之二邊 OA, OB 在頂點之兩側而成爲一直線，此 $\angle AOB$ 爲平角，似此則二共軛角相等。

定義 5. 一直線與他直線相交，所成二隣角相等者，各稱之爲**直角**，此由定義，知平角等於二直角，而直角等於平角之半，二直線相交成直角者，此二直線互爲**垂線**，或稱**垂直**，又稱**正交**，其交點稱爲**正交點**，其線不爲垂線者，稱爲**斜線**。

定義 6. 其角比直角小者，稱爲**銳角**，比直角大而比二直角小者，稱爲**鈍角**。

定義 7. 二角之和等於一直角者，此二角互爲**餘角**，二角之和等於二等角者，此二角互爲**外角**。

定義 8. 以直角爲單位，計算角之大小，所餘不免過多，因分直角爲九十等分，其每一等分謂之**度**，又分一度爲六十等分，其每一等分謂之**分**。又分

一分爲六十等分，其每一等分謂之秒，計小角者用之。

1 直角 =90 度略" ° "

1 度 =60 分略" ′ "

1 分 =60 秒略" ″ "

度，分，秒之記號爲 °，′，″，例如十五度二十一分三十秒，記之如次：

15°21′30″.

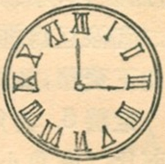
(讀者對於「以直角爲單位計算角之大小云云」或生疑問，則以此定義移於定理 1 系 1 之後學習之可也。)

例 題 1

1. 時表正六時，兩針所成之角若何？又其度若何？

答 平角，180°.

2. 時表短針指三時，兩針成角若何？又其度若何？ 答 直角，90°.



3. 四直角之度數若干？又其邊之位置若何？ 答 360°.

注意 由一點之周旋轉所成之角，爲四直角，稱爲周角。

4. 48°25′15″ 之餘角若何？ 答 41°34′45″.

5. 75°54′35″ 之外角若何？ 答 10°，45°，30°.

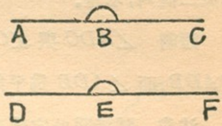
6. $\frac{1}{9}$直角，$\frac{1}{2}$直角，$\frac{1}{3}$直角各若何？ 答 10°45′30″.

7. P 爲直線 AB 上之一點，而 AB 之中點爲 M，如是則由

P 至 M 之距離，等於由 P 至 A, B 兩距離之半差；又 P 點在 AB 之延長線上，則等於半和。

8. AOB 角之二等分線爲 OM，而 ON 爲角內之一直線，如是則 MON 角，等於 AON, BON 二角之半差。

9. 互爲外角之二角，其大者爲小者之倍，問小角得四直角之若干分？



定理 1. 凡平角皆相等。

題意 $\angle ABC, DEF$ 爲二平角。

則 $\angle ABC = DEF$，求證。

證明 因 $\angle ABC, DEF$ 各爲平角，故 ABC, DEF 各成爲一直線，故以頂點 B 移疊於頂點 E 之上，而令 BA 疊於 ED 之上，如是則 BC 必適疊於 EF 之上，〔幾何學公理1(a)〕是 ABC, DEF 二平角，適可疊合，故相等。

系 1. 凡直角皆相等。

(依定理 1，定義 5，普通公理 5 證明。)

系 2. 二角相等者，其餘角必相等。

證明 相等之二角爲 α, β，其餘角爲 α', β'。

如是則 $\alpha + \alpha' =$ 直角，(定義 7)

$\beta + \beta' =$ 直角，(同上)

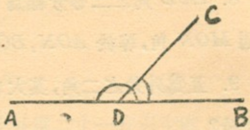
相減，則 $\alpha' - \beta' = 0$，$\therefore \alpha' = \beta$。

系 3. 二角相等者，其外角必相等。

(與系 2 證明同。)

定理 2. 一直線與他直線相交，所成二隣角之和，等於二直角.

題意　CD 直線與 AB 直線相交於 D 點.其二隣角 ADC, CDB 之和，等於二直角，求證.



證明　$\angle ADC$ 與 $\angle CDB$ 之和爲 AD, DB 所夾之角，卽 $\angle ADB$，而 $\angle ADB$ 爲平角，故等於二直角.(定義 5)

注意　試指明此定理之假設，終結.

系 1. 由直線上一點，取同側，引若干直線，其遞次所成各角之和，等於二直角.

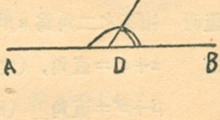
各角之和，等於平角.

系 2. 由一點引若干直線，其遞次所成各角之和，等於四直角.

(任由一線延長之，卽依系 1 證明.)

定理 3. 此一直線與彼二直線，同交於一點，所成二隣角之和，若等於二直角，則彼二直線，必係接成一直線.

題意　CD 直線與 AD, BD 二直線同交於 D 點，所成二隣角 ADC, CDB 之和，若等於二直角，則 AD, DB 必係接成一直線，求證.



證明　$\angle ADC + CDB = ADB$.

由假設　$\angle ADC + CDB = 2$ 直角.

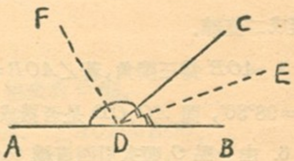
故　　$\angle ADB=2$ 直角＝平角。

故　　AD, BD 係接成一直線。

注意　定理 2, 3 之關係若何?(14)

主要問題 1.　一直線與他直線相交，成二接角，各角之二等分線，必係互爲垂直。

題意　一直線 CD 與他直線 AB 相交所成之二接角爲 FD, ED, CDB，其二等分線爲 FD, ED，此 FD, ED 必係互爲垂直求證。



證明　$\angle ADC=2FDC$

$$(\because \angle ADF=FDC).$$

$$\angle CDB=2CDE \qquad (\because \angle CDE=EDB).$$

由定理 2，　$\angle ADC+CDB=2$ 直角，

卽　$2\angle FDC+2CDE=2$ 直角，

各以 2 除之，　$\angle FDC+CDE=$ 直角，

卽　$\angle FDE=$ 直角.

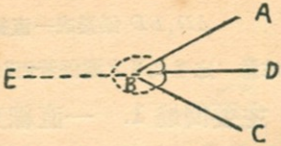
故　FD, ED 互爲垂直。　(定義 5)

注意　本題用處甚廣，宜記熟。

例　題　II

1. 二直線相交所成之角，如有一爲直角者，其他三角必皆爲

直角。



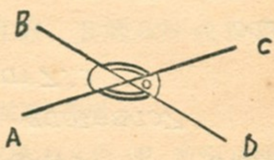
2. 角之二邊，與角之二等分線之延長線所夾成之二角，必相等。

3. 六直線同交於一點，若成相等六角，問各角得一直角幾分之幾？又其度數若干？

4. 四直線同交於一點，所成各角，若皆爲直角，則此四直線必係接成二直線。

5. AOB 爲三隣角，若$\angle AOB=57°10'$，$\angle AOC=34°20'$，$\angle COD=98°30'$，問 AO，OD 是否接成一直線？

6. 由一點 O，順次引四直線 OA,OB,OC,OD。

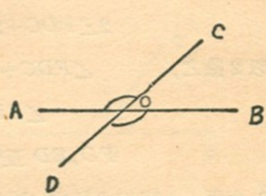


若 $\angle AOB=COD$，

$\angle BOC=DOA$；

則 AOC，BOD 必各聯接成一直線。

7. 在直線 AOB 之兩側，有二直線 OC，OD，若 $\angle AOC=BOD$，則 COD 必係接成一直線。



證明 $\angle AOC+COB=2R\angle$。 （定理 2）

$\angle AOC=BOD$， （假設）

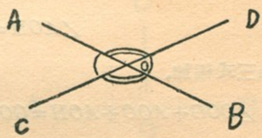
$\therefore$ $\angle BOD+COB=2R\angle$，

故 COD 係成一直線。

注意　引用本題，易至誤會，宜留意．

定義 9.　由相交二直線所成各角之中，其對向者，稱爲**對頂角**．

例如：二直線 AB, CD 相交於 O 點，其 $\angle AOC$, DOB 及 $\angle AOD$, BOC 皆爲對頂角．



定理 4.　凡相對頂角必相等．(依前題)

題意　二直線 AB, CD 相交於 O 點．

$$\angle AOC = DOB, \quad \angle AOD = BOC.$$

證明　DO 直線與 AB 直線相交於 O 點．

故　$\angle AOD + DOB = 2R\angle$,

依同理，　$\angle AOD + AOC = 2R\angle$,

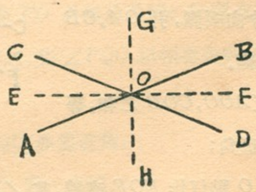
故　$\angle AOD + DOB = AOD + AOC$,

兩邊各減 $\angle AOD$，則　$\angle DOB = AOC$,

又依同理，$\angle AOD = BOC$．(學者試證明之)

注意　後段證明 $\angle AOD = BOC$ 勿與前段證明同法，試用他法證明．(定理 1 系 3 參照)

主要問題 2.　由相交二直線所成四角之二等分線必係接成二直線，且互爲垂直．



題意　AB, CD 二直線

相交成四角，其四二等分線為 OE, OF, OG, OH，而 OE, OF 及 OG, OH 必各係接成一直線，又此接成之二直線必係互為垂直。

證明　$\angle AOC = BOD$，（定理 4）

然
$$\angle COG = GOB,$$
$$\angle AOH = HOD,$$

以此三式相加。

$$\angle COG + AOC + AOH = GOB + BOD + HOD,$$

故 $\angle HOG$ 為平角，

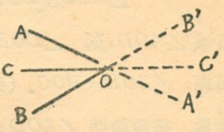
故 OG, OH 係接成一直線；

依同理，OE, OF 亦係接成一直線，

又 OE，OF 為由 AB，OC 所成兩接角之二等分線，故互為垂直。（主要問題 1）

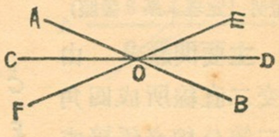
例　題　III

1. 一角之二等分線，兼分其對頂角為二等分。



2. 對頂兩角之二等分線，必係接成一直線。

3. 由 CD 直線上 O 點，分向兩側，引 OA, OB 兩直線。

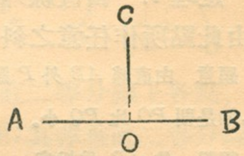


若 $\angle AOC, COB$ 之和，等於二直角；

則由 O 點任作 EOF 直線，其 $\angle AOF$ 必適與 $\angle BOE$ 相等。

4. 試就「對頂角必相等」之定理，證明其逆及裏.

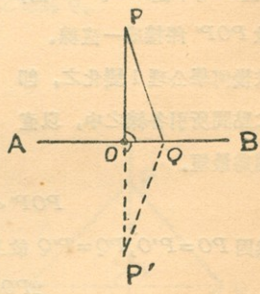
定理 5. 由直線 (AB) 上一點 (O)，作此直線之垂線，有一而無二.



證明　由 O 點作 AB 之垂線，

即如作平角 AOB 之二等分線；然凡角之二等分線，有一而無二.

定理 6. 由直線 (AB) 外一點 (P)，作此直線之垂線，有一而無二.



證明　依 AB 爲折痕，以含有 P 點之平面部分，返折於其餘之部分上，其 P 點之疊痕爲 P'，乃聯成 PP' 直線，與 AB 相交於 O，如是則 $\angle POB$，以相疊而與 $\angle P'OB$ 相等；因之 $\angle POB$ 爲直角.（定義 5）故 PO 爲由 P 點所作 AB 之垂線.

又由 P 點所作 AB 之垂線，除 PO 外無他垂線；如謂有他垂線 PQ，則試以 AB 爲折痕而返折之，其 $\angle PQO$ 以相疊而與 $\angle P'QO$ 相等，而 $PQ \perp AB$.

故 $\angle PQO$ 爲直角，因之 $\angle P'QO$ 亦爲直角.

故 $\angle PQP'$ 爲二直角，故 PQP' 爲一直線.

然 P, P' 二點間，得引 PP' 及 PQP' 二直線，是與公理相反；故 PQ 不能爲垂線。

故除 PO 外決無他垂線也。

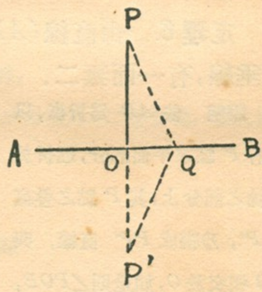
定理 7. 由直線外一點所作此直線之垂線，比由此點所作任意之斜線小。

題意　由直線 AB 外 P 點作此直線之垂線 PO，又作斜邊 PQ，如是則 PO 比 PQ 小。

證明　依 AB 爲折痕，以 OPQ 之平面返折之；其 OPQ 之疊合爲 $OP'Q$，

$\angle POQ+\angle P'OQ=2R\angle$，

故 POP' 係接成一直線。



依幾何學公理 1 變化之，即二點間所引各線之中，以直線爲最短。

$$POP'<PQ+P'Q$$

然因 $PO=P'O, PQ=P'Q$ 故上式變爲

$$2PO<2PQ,$$

$$\therefore \quad PO<PQ.$$

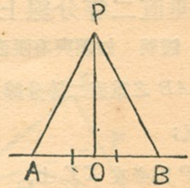
定理 8. 由直線外一點，引直線之垂線及二斜線，其垂線之正交點與二斜線之二交點相距若相等，則此二斜線亦必相等。

題意　由直線 AB 外 P 點，作垂線 PO，其正交點爲 O，又作 PA, PB 二斜邊，其交點爲 A, B，若 $OA=OB$ 則 $PA=PB$。

證明　依 PO 爲折痕，以 POB 之平面返折之，因 $\angle POB$，$\angle$

POA 皆為直角，又 $OA=OB$，故 B 點必適疊合於 A 點之上。

即 PB 與 PA 適相疊合。



注意　本題又可依定理 17 證明之。

系 1. 有限直線之垂直二等分線上各點，與有限直線之兩端，必成等距；其非垂直二等分線上之點，必不成等距於有限直線之中點作垂線，稱為垂直二等分線。

題意　於有限直線 AB 之中點 O 作垂直二等分線 XY，而 XY 線上任意之點為 P，線外任意之點為 Q。

如是則 $AP=BP$，及 $AQ \fallingdotseq BQ$。

證明　$PO \perp AB$，

$OA=OB$；

$\therefore$　$AP=BP$.（定理 8）

次點若在 $Q\angle BOY$ 內，

其 AQ 與 XY 之交點為 P'，

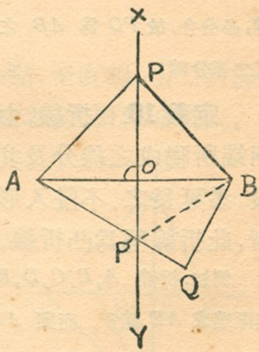
是 P' 點在 XY 上，由前證明。

$AP'=BP'$，

而　$BP'+P'Q>BQ$（公理）

故　$BP'+P'Q>BQ$

即　$AQ>BQ$



由是 Q 點無論在何角內，其證明同。

系 2. 與有限直線兩端成等距之點，必皆在

其垂直二等分線上.

證明　如謂與有限直線 AB 之兩端 A,B 成等距之點 P,不在 AB 之垂直二等分線 XY 上,則依系 1, $AP \neq BP$, 是與假設相反;

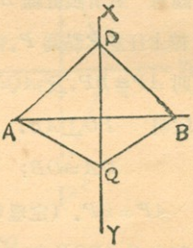
故 P 點必在 XY 上.

注意　系 1 之前段與系 2 關係若何?系 1, 系 2 用處甚廣, 宜注意.

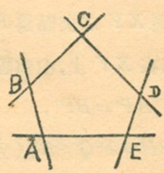
系 3.　與有限直線 AB 之兩端成等距之二點 P,Q,聯成 PQ 直線,必即為 AB 之垂直二等分線.

證明　由系 2 知 P,Q 二點,皆在 AB 之垂直二等分線 XY 上;

而 XY, PQ 為公有二點之二直線,必疊合,故 PQ 為 AB 之垂直二等分線.



定義 10.　折線,由其兩端所聯成之線分及其各段,悉延長之.不侵入形內者,此折線稱為凸折線.

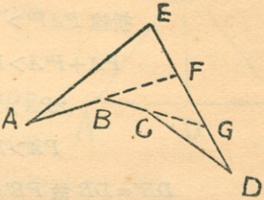


例如:折線 A,B,C,D,E 聯其兩端成 AE 線分, 而與 AB, BC,……各段,悉延長之,不侵入 $ABCDE$ 形內者; 此 $ABCDE$ 折線,稱為凸折線.

定理 9.　凸折線, 必比其兩端所引任意包圍

之線小。

題意　凸折線 $ABCD$，其兩端所引任意包圍之線，如 AED，$ABCD < AED$。



證明　AB 之延長與 ED 相交於 F，又 BC 之延長與 ED 相交於 G，

$$AB + BF < AE + EF, \quad \text{(公理)}$$

$$BC + CG < BF + FG, \quad \text{(同上)}$$

$$CD < CG + GD. \quad \text{(同上)}$$

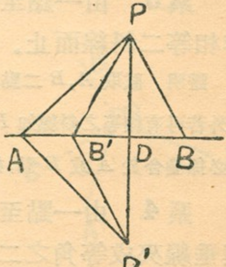
相加，$AB + BC + CD + BF + CG < AE + EF + FG + GD + BF + CG$。各去 $BF + CG$，$AB + BC + CD < AE + ED$。

$$(\because EF + FG + GD = ED)$$

故折線 $ABCD <$ 折線 AED。

定理 10. 由直線外一點，至直線，引二斜線，其交點距垂線之正交點較遠者，其斜線亦較大。

題意　由直線 AB 外 P 點，引垂線 PD 及二斜線 PA，PB。若 $DA > DB$ 則 $PA > PB$。



證明　因 $DA > DB$ 故可於 DA 內截取 $DB' = DB$，乃依 AB 爲折痕，以 APB 平面部分，返折於其餘之部上，其 PA，PB' 之疊痕爲 $P'A$，$P'B'$，

$$PA=P'A,$$

$$PB=P'B'.$$

而 折線 $PAP'>$ 折線 $PB'P'$,

卽 $PA+P'A>PB'+P'B'$,

故 $2PA>2PB'$,

故 $PA>PB'$;

然 $DB'=DB$ 故 $PB'=PB$, (定理 8)

故 $PA>PB$.

系 1. 由一點至一直線,引相等二斜線,其二交點與垂線之正交點,亦必成等距.

證明 如前圖,若 $DA>DB$ 則依前定理,必爲 $PA>PB$,是與假設相反,又若 $DA<DB$ 依同理,仍與假設相反.

系 2. 由一點至一直線,引二斜線不相等者,較大之斜線,其交點距垂線之正交點必較遠.

證明 如謂 $DA=DB$ 則 $PA=PB$, 是與假設相反, 又若 $DA<DB$ 亦與假設相反, 故$DA>DB$.

系 3. 由一點至一直線,作相等之斜線,祇能作相等二斜線而止.

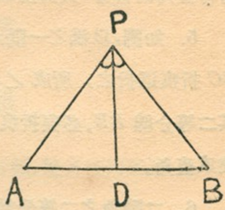
證明 截取 A,B 二點,令 $PA=PB$,故知可作相等二斜線,此外若再有相等之斜線如 PC, 則依系 1,$DC=DA=DB$, 如 C 點必係疊合於 A 或 B 點,故相等之斜線,祇限於二.

系 4. 由一點至一直線,作垂線及諸斜線,而與垂線夾成等角之二斜線,必相等.

題意 一點 P,一直線 AB.

$PD\perp AB$, 若$\angle DPA=DPB$

則　　$PA=PB$



證明　依 PD 爲折痕,以 PDB 平面部分返折之.

則$\angle DPA=DPB$,$\angle PDA=PDB$, 知 PB 與 PA 疊合,DB 與 DA 疊合,故 B 點與 A 點疊合,

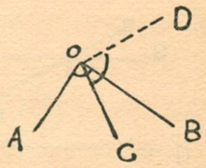
故　　$PA=PB$.

雜　題　I

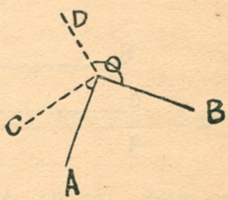
1. A,B,C 順次爲一直線上之三點,其 BC,CA,AB 之中點爲 L,M,N.

$MN=\frac{1}{2}BC$, $NL=\frac{1}{2}CA$, $LM=\frac{1}{2}AB$, 試證之.

2. AOB,COD 爲二直角,其 AOD, BOC 二角必相等或互爲外角.

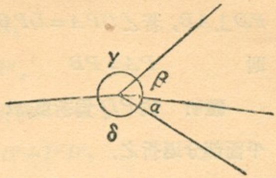


3. 通過角之頂點引一直線若與角之二等分線成垂直,則此直線與角之二等分線夾成二角,必相等.叉此直線,卽分此角之二邊爲二等分.

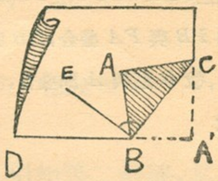


4. 一點之周圍有四隣角 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$,若 $\beta=2\alpha,\gamma=3\beta$, $\delta=\gamma$, 問各

角得直角之幾分?又其度數若干?



5. 如圖,以紙之一隅,任依 BC 折痕返折之,所成 $\angle ABD$,其二等分線 BE,必與折痕 BC 夾成直角。



6. 二隣角之二等分線,若互垂直,則其非公共之二邊,必係接成一直線。

7. 相隣二角,若互爲餘角,則各角之二等分線所夾成之角其度數若干?

8. 由一點至點直線,引相等二斜線,必與夾成等角,又與原直線成等角。

第二章

平行線

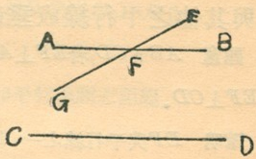
定義 11. 同在一平面上之二直線,雙方任何延長,永不相交者,此二直線互稱之爲平行線。

注意　同在一平面上之二直線,除相交及平行外,無其他之關係。

公理　由一點,準與一直線平行,得另一直線,惟祇能得此一直線而止。(平行線公理)

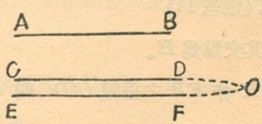
由此平行線公理之結果,得二定理如次:

定理 11. 凡直線與平行線之一相交者,必兼與其他之平行線相交。



證明　*EG* 與平行線之一 *AB* 相交於 *F*,此 *EG* 若不與其他之平行線 *CD* 相交,則由 *F* 點得與 *CD* 平行引二直線矣,與公理相反,

故 *EG* 必兼與 *CD* 相交。



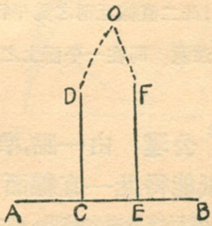
定理 12. 凡直線與平行線之一平行者,必兼與其他之平行線平行。

題意　*AB*,*CD* 爲平行線,若 *EF* 與 *AB* 平行,必兼與 *CD* 平行。

證明　如謂 CD, EF 不平行，則必相交，命其交點爲 O。然若是則由 O 點得引與 AB 平行之 CD, EF 二直線，與公理相反，故 $CD \parallel EF$。

定理 13.　同與一直線成垂直之二直線，必爲平行。

題意　同與 AB 成垂直之二直線 CD, EF 必爲平行。

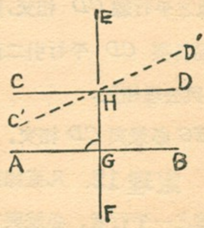


證明　若非平行，則命其交點爲 O；然若是則由 O 點得引與 AB 成垂直之 CD, EF 二垂線，是不合理，故 $CD \parallel EF$。

注意　此定理之別解，見後定理 16 系 1。

定理 14.　凡直線與平行線之一成垂直者，必兼與其他之平行線成垂直。

題意　$AB \parallel CD$，若 $EF \perp AB$，則 $EF \perp CD$。



證明　EF 與平行線之一 AB 相交，必兼與其他之平行線 CD 相交，(定理 11)

命其交點爲 H。

由 H 作 EF 之垂線 $C'D'$，則 $C'D'$ 必與 AB 平行。(定理13)

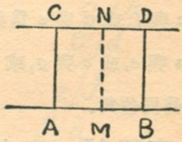
故 $CD, C'D'$ 必爲疊合，

故　$EF \perp CD$。

注意　此定理之別解，見後定理 15 系 1；所謂平行線有公共垂線者，卽此定理言也。

主要問題 3. 被截於平行線間之公共垂線，皆相等。

題意　被截於平行線 AB，CD 間之公共垂線爲 AC，BD，$AC=BD$.



證明　由 AB 之中點 M，作垂線 MN，與 CD 相交於 N，則

$MN\perp CD$　(定理 14).

今依 MN 爲折痕，以 $MBDN$ 之平面部分返折之，則

$$\angle NMB=NMA,\quad MB=MA,$$

$$\angle MAC=MBD,\quad \angle MNC=MND.$$

故 B 點適與 A 疊合，而 BD 與 AC 疊合，ND 與 NC 疊合，

故 AC，NC 之交點 C 必適與 BD，ND 之交點 D 疊合，

故 $AC=BD$.

注意　平行線公共垂線之長，卽平行線間之距離。

例　題　IV

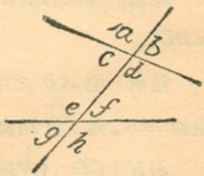
1. 由一點，引平行線之垂線，其二正交點必與此點同在一直線上。

2. 平行於一直線之諸直線，準與此諸直線中之一成垂直，引一直線，此直線必兼與其餘諸線成垂直。

3. 設有一直線與相交二直線中之一成平行，此直線必與其他一直線相交。

4. 二直線與相交二直線成平行，此二直線亦必相交.

定義 12. 一直線與二直線相交成八角，定其名稱如次：



a,b,g,h 爲外角，

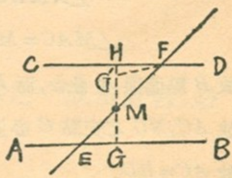
c,d,e,f 爲內角，

c 與 f，或 d 與 e 爲錯角，

a 與 e，或 c 與 g，或 b 與 f，或 d 與 h 爲同位角.

定理 15. 一直線與平行二線相交，所成錯角，必相等.

題意 一直線 EF 與平行二線 AB,CD 相交，其交點爲 E,F.



錯角 $\angle CFE=FEB$,

$\angle DFE=FEA$.

證明 由 EF 之中點 M，作公共垂線 HMG，以 M 爲中心，而令 MEG 平面部分旋轉，至 ME 達於 MF 之位置，

因 $MF=ME, \angle FMH=EMG$.

故 E 點疊於 F 點，而 MG 疊於 MH，假若爲 MG'，

然由 F 作 MH 之垂線，不應有 FH,FG' 兩垂線，

故 FG', FH 必係疊合，

故 $\angle MEG=MFH$,

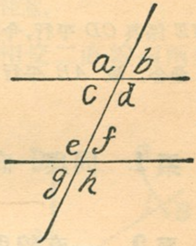
即 錯角 $FEB=CFE$,

因之 錯角 $DFE=FEA$. (定理 1 系 3)

注意 此定理及下系,甚爲緊要,宜注意.

系 1. 凡直線與平行線之一成垂直者,必兼與其他之平行線成垂直.

系 2. 一直線與平行二線相交,



(a) 同位角必相等.

(b) 同側之二內角和,必等於二直角.

證明 (a) $f=c$ (錯角)

$c=b$ (對頂角)

$\therefore$ $f=b$

又 $e=d$ (錯角)

$d=a$ (對頂角)

$\therefore$ $e=a$

其餘同位角,卽依同理證明,學者試自爲之.

(b) $c=f$ (錯角)

$f+e=2R\angle$

$\therefore$ $c+e=2R\angle$

又 $d+f=2R\angle$ 卽依同理證明.

定理 16. 一直線與二直線相交,所成錯角若相等,此二直線必爲平行.(前定理之逆)

題意 一直線 EF 與二直線 AB, CD 相交,若錯角 $AEF=EFD$ 則 $AB \parallel CD$.

證明 由 E 點,作 CD 之平行線 HK;

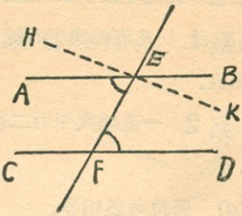
依前定理，$\angle HEF = EFD$，

今假設 $\angle AEF = EFD$；

$\therefore$ $\angle HEF = AEF$，

故 HE 必係與 AE 疊合，

而 HE 係與 CD 平行，今與 AE 疊合，故 AB 平行於 CD。

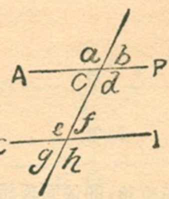


系 1. 同與一直線成垂直之二直線，必爲平行。

系 2. 一直線與二直線相交，

(a) 同位角有相等者，

(b) 同側之二內角和有相等者，其二直線必爲平行。



證明 (a) $e=a$ (假設)

$a=d$ (對頂角)

$\therefore$ $e=d$

$\therefore$ $AB \parallel CD$ (定理16)

如爲他同位角相等者，其 $AB \parallel CD$ 乃依同理證明。

(b) $c+e=2R\angle$ (假設)

$c+d=2R\angle$ (平角)

$\therefore$ $e+c=c+d$ $\therefore e=d$

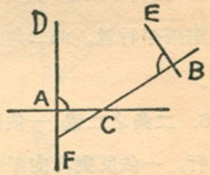
$\therefore$ $AB \parallel CD$ (定理16)

如爲其他同側之二內角和等於二直角者，仍依同理證明。

系 3. 一直線上之垂線及斜線必相交。

注意 本定理及系，甚爲緊要，宜注意。

主要問題 4. 二直線與相交二直線兩兩垂直者，此二直線必相交。



題意 與相交二直線 AC，BC 成垂直之二直線爲 AD，BE，此 AD，BE 必相交。

證明 (a) AC，BC 成正交，

$AC \parallel BE$ (定理 13)

故 AD 必與 BE 相交 (定理 11)。

(b) AC，BC 成斜交，

BC，AD 必相交，

命其交點爲 F，而 CA 爲 AD 之垂線，

故 CF 不能爲 AD 之垂線，(定理 6)

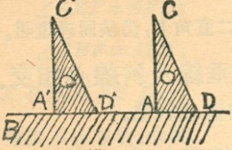
卽 AD 係與 CF 成交斜，而 BE 與 CF 固成正交，

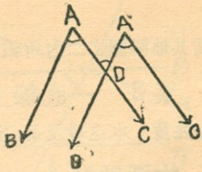
故 BE，AD 必相交，(系 3)

注意 本題易致誤解，宜注意。

例 題 V

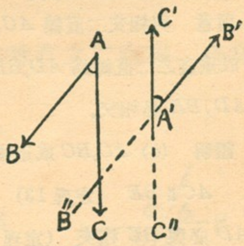
1. 試列舉二直線成平行之條件。
2. 用兩三角板作平行線，其法若何？并明其理由。
3. 二角之二邊，依同向兩兩平行者，此二角必相等。





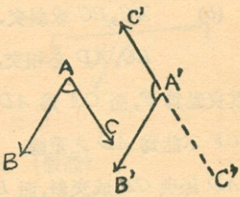
$(\because\ \angle A=D=A')$

4. 二角之二邊，依反對之向兩兩平行者，此二角必相等。

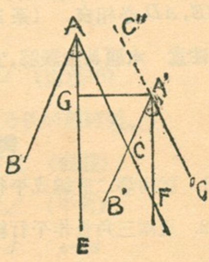


5. 二角之二邊，一依同向平行，一依反對之向平行者，

此二角必互爲外角。

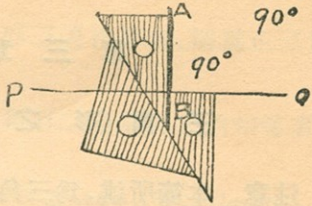


注意　以第 3,4,5,題，合成一題如次：「此相交二直線與彼相交二直線兩兩平行者，其夾角必相等，或互爲外角。」此問題，用處極廣，宜注意。

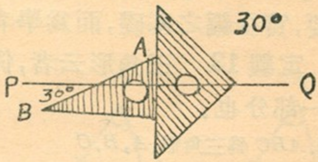


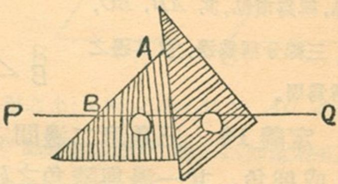
6. 二角之二邊，兩兩平行者，其二等分線必互爲平行，或互爲垂直。（依前題 3，定理 16，主要問題 1，定理 15 證明。）

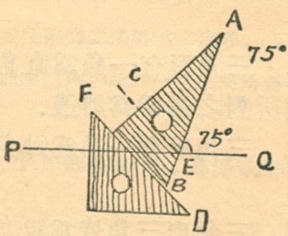
7. 此角之二邊，與他角之二邊兩兩垂直者，此二角必相等，或互爲外角。

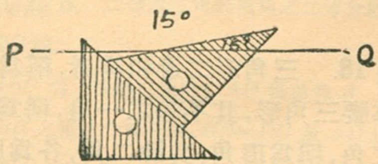


8. 三角分二種，一係成角 30°, 60°，一係成角 45°，試以此二種三角板，就所設之直線，作 90°, 30°, 45°, 60°, 75°, 15°之角。









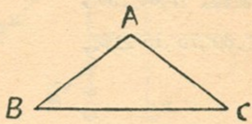
第三章

三角形之疊合

注意　本節所述,爲三角之疊合,其定理極爲重要,實全編之基礎,而爲學者之所深宜留意也.

定義 13.　三角形云者,係以三直線所圍平面之一部分也.

如圖,ABC 爲三角形,A,B,C 三點,稱爲頂點,其 AB, BC, CA 三線分稱爲邊, 又其邊之和稱爲周.



定義 14.　三角形二邊間之角,爲三角形之內角,或稱角, 其一邊與隣角之延長線所夾成之角,稱爲外角.

定義 15.　三角形有一角爲直角者,稱爲直角三角形,直角所對之邊稱爲斜邊.

定義 16.　三角形有一角爲鈍角者,稱爲鈍角三角形.

定義 17.　三角形三角皆爲銳角者,稱爲銳角三角形.

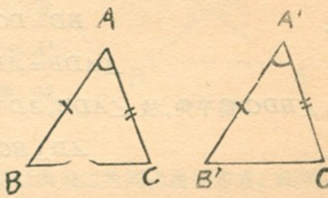
定義 18.　三角形二邊相等者,稱爲二等三角形或稱等腰三角形,其不等之一邊,稱爲底邊, 底邊所對之角,稱爲頂角,其餘二角,各爲底角.

定義 19. 三角形三邊相等者，稱爲正三角形或稱等邊三角形。

定理 17. 兩三角形二邊及其夾角相等者，此兩三角形爲全相等。

題意　$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 若 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle BAC=B'A'C'$

則$\triangle ABC\equiv A'B'C'$。



證明　以 $\triangle ABC$ 移疊於 $\triangle A'B'C'$之上，而令 A 點疊於 A'，AB 疊於 $A'B'$，因 $AB=A'B'$，故 B 點必適疊於 B' 點之上；又因 $\angle A=A'$ 故 AC 必疊於 $A'C'$，而 $AC=A'C'$，故 C 點必適疊於 C' 點之上，如是則兩三角形三頂點疊合，故二三角形爲全相等。

注意　(1) 此定理稱爲二邊夾角之定理。

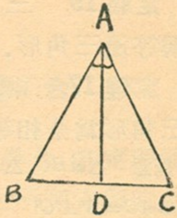
(2) 假此兩三角形如其一邊或夾角爲公有者，本定理仍爲眞確。

(3) 兩三角形爲全等形者，必係等邊等角兼而有之，勿忘。

主要問題 5. 二等邊三角形頂角之二等分線，必卽爲底邊之垂直二等分線。

題意　ABC 爲二等邊三角形，AD 爲頂角 A 之二等分線，必兼爲底邊 BC 之垂直二等分線，$BD=DC$ 及 $AD\perp BC$。

證明　以 $\triangle ADB$ 與 $\triangle ADC$ 兩相比較，



因 $\triangle ABC$ 爲二等邊三角形，

故 $AB=AC$，

AD 爲兩三角形所公有，

又 $\angle BAD=CAD$。

故依定理 17 注意 2 知此兩三角形爲全等。

$\therefore$ $BD=DC$

又 $\angle ADB=ADC$

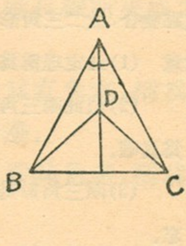
然 $\angle BDC$ 爲平角，故 $\angle ADB, ADC$ 各爲直角。

$\therefore$ $AD\perp BC$

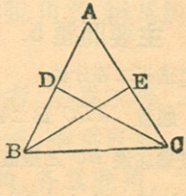
例題 VI

1. 二等邊三角形，頂角之二等分線上各點，必與底邊之兩端成等距。

2. BAC 角之二等分線上任意之點爲 D，若 $AB=AC$ 則 $\angle ADB=ADC$。



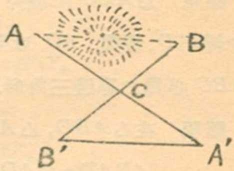
3. 由二等邊三角形等邊之中點，各與所對底角之頂點聯成二直線，必相等。



4. 於 A 角之一邊上取 B, D 二點，又於他邊上取 C, E 二點。若 $AB=AC, AD=AE$，則 $BE=CD$。

5. 由直線外一點，引直線之垂線及二斜線，其垂線之正交點與二斜線之二交點相距若相等；則此二斜線，亦必相等。（本題即定理 8)。

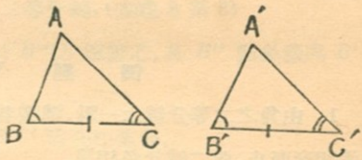
6. 如圖，山麓二點 A, B，欲測知其距離，則於得見 A, B 之處如 C 點，依 AC 之方向，取 CA' 令等於 CA。又依 BC 之方向取 CB' 令等於 CB；如是則實測 $A'B'$ 之距離，即是 AB 之距離，試明其理由。



定理 18. 兩三角形二角及二角間之邊相等者，此兩三角形爲全相等。

題意　$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$。

若 $\angle B = B'$，$\angle C = C'$，$BC = B'C'$



則　$\triangle ABC \equiv A'B'C'$。

證明　以 $\triangle ABC$ 移疊 $\triangle A'B'C'$ 之上。

令 B 點疊於 B' 點，BC 疊於 $B'C'$，因 $BC = B'C'$，

故 C 點必疊於 C' 點之上；

又 $\angle B = B'$，故 BA 必疊於 $B'A'$，

$\angle C = C'$，故 CA 必疊於 $C'A'$。

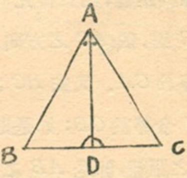
因之 BA, CA 之交點 A 必適疊於 $B'A', C'A'$ 之交點 A'。

故兩三角形爲全等形。

注意 (1)此定理稱爲二角夾邊之定理。

(2)夾邊爲兩三角形所公有者,此定理仍爲眞確。

主要問題 6. 三角形頂角之二等分線,若與底邊成垂直,此三角必爲二等邊三角形。



題意 $\triangle ABC$ 之頂角 A 之二等分線 AD,若與 BC 成垂直,則 $\triangle ABC$ 必爲二等邊三角形。

證明 在$\triangle ABD$, $\triangle ACD$上,

$\angle BAD = CAD$,

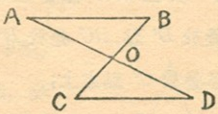
$$\angle ADB = ADC = R\angle$$

AD 爲兩形公有之邊,故依定理 18 注意 2,此二三角形爲全等形。故 $AB = AC$ 故爲二等邊三角形。

例 題 VII

1. 由角之二等分線上一點,準與各邊平行,作二線分,係各與他邊相交而止,此二線分必相等。

2. 二角相等之三角形,於其等角各作二等分線,各與對邊相交而止,此二線分必相等。

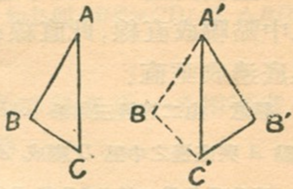


3. AB, CD 二直線若係相等且平行,則 AD, BC 必各於其中點相交。

4. 如圖,河之兩岸,有 A, B 二所,欲測其距離,則先於 A 點依直角之方向取 AA' 之距離,乃於 A' 點依直角之方向,取B' 點係適與 AA' 之中點 C 及對岸之 B 點參直,如是則實測 $A'B'$

之距離，試明其理由。

定理 19. 兩三角形三邊各相等者，此兩三角形爲全等。



題意　$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$

若　$$AB=A'B',\ BC=B'C',$$
$$AC=A'C',$$

則　$$\triangle ABC \equiv A'B'C'.$$

證明　以 $\triangle ABC$ 之 AC，移疊於 $A'C'$ 之上如 $\triangle A'B''C'$，
$$A'B''=A'B',$$
$$B''C'=B'C'.$$

故 $A'C'$ 爲 $B'B''$ 之垂直二等分線，(定理 8 系 3)

故依 $A'C'$ 爲折痕，以 $\triangle A'B''C'$ 返折之，其 B'' 點必適與 B' 點疊合。

如是則 $\triangle A'B''C', \triangle A'B'C'$ 爲全相疊合。

$\therefore$　$$\triangle ABC \equiv A'B'C'.$$

注意　如上所證明之三定理觀之，知凡兩三角形得如下列三部分相等者，其他部分亦必相等，而兩三角形爲全等。

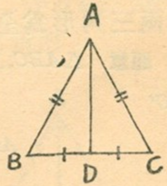
I.　二邊及其夾角。

II.　二角及二角間之邊。

III.　三邊。

此三者，卽兩三角形全等之條件也，又凡等邊所對之角必相等，等角所對之邊必相等，注意爲要。

主要問題 7. 二等邊三角形由其頂點與底邊之中點聯成直線，此直線必適分頂角爲二等分，而與底邊成垂直.



題意 由二等邊三角形 ABC 之頂點 A 與底邊之中點 D 聯成 AD 直線，適分頂角爲二等分，且與 BC 成垂直.

證明 在 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 上，

$$AB=AC,$$

$$BD=DC,$$

AD 爲兩形所公有之邊.

$$\therefore \quad \triangle ABD \equiv ACD, \text{(定理 19)}$$

$$\therefore \quad \angle BAD=CAD$$

$$\angle ADB=ADC,$$

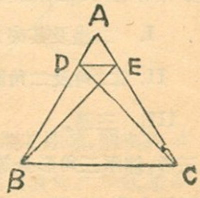
$$\therefore \quad AD \perp BC.$$

例題 VIII

1. 兩正三角形有一邊相等者，此兩正三角形必全等.

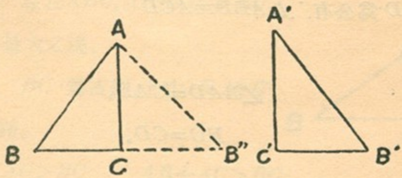
2. 四邊形每相對之邊相等者，其相對之角，亦必相等.

3. 同在一底邊上所立之兩二等邊三角形，聯其兩頂點成一直線，此直線必適分頂角爲二等分，又必爲底邊之垂直二等分線.



4. ABC 爲二等邊三角形，$AB=AC$，於 AB 上取 D 點，於 AC 上取 E 點，令 $AD=AE$，如是則 $BE=CD$，且 $\triangle BDE$，$\triangle CDE$ 必爲全等。

定理 20. 兩直角三角形斜邊及一邊相等者，此兩直角三角形必全相等。



題意　兩直角三角形 ABC, $A'B'C'$。

若 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$,

則 $\triangle ABC \equiv A'B'C'$。

證明　以 $\triangle A'B'C'$ 之 $A'C'$，移疊於 AC 之上，如 $AB''C$。因 $\angle ACB=A'C'B'=R\angle$

故 BCB'' 接成一點線，而 AB, AB'' 爲由一點 A 引於一直線上之相等兩斜線，

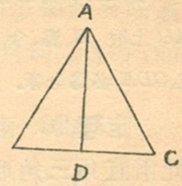
故 $BC=B''C$,　　(定理 10 系 1)

如是則三邊相等，所以 $\triangle ABC, \equiv AB''C$,

卽　　　　$\triangle ABC \equiv A'B'C'$。

注意　此爲關於直角三角形全等之定理，與前所證明兩三角形全等之三定理，均屬緊要。

主要問題 8. 二等邊三角形由頂點所作底邊之垂線，必適分頂角及底邊爲二等分。



題意　二等邊三角形 ABC,由頂點 A 所作 BC 之垂線爲 AD, 如是則 $\angle BAD=CAD$ 及 $BD=CD$.

證明　$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 爲直角三角形,斜邊 $AB=AC$.

其一邊 AD 爲公有.$\because \triangle ABD \equiv ACD$

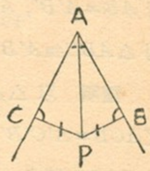
(定理 20)

$\therefore$　　　$\angle BAD=CAD$,

及　　　$BD=CD$.

例　題　IX

1. 由角內一點至二邊作垂線若相等,則由此點與角之角點所聯成之直線,必適分其角爲二等分.

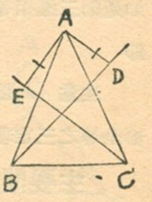


注意　由一點至一直線所作之垂線,其長卽此點與直線之距離.

2. 由正三角形之各頂點至對邊各作垂線必相等.

〔指〕 先依主要問題 8.

3. 二等邊三角形之頂點爲 A,其由B, C 兩頂點所引之直線爲 BD, CE,若由 A 至 BD,CE 作垂線 AD,AE 相等者則 $BD=CE$.



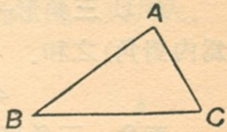
4. 由三角形一邊之兩端至對邊各作垂線若相等,則此三角形必爲二等邊三角形.

第二節

邊角之關係

定理 21. 三角形二邊之和，必比其他一邊大．

題意 在$\triangle ABC$, $AB+AC>BC$



其 BC 爲最大之邊．

證明 BC 爲直線，乃由 B 至 C 最短之徑路．

故折線 $BAC>BC$ $\therefore AB+AC>BC$.

系 三角形二邊之差，必比其他一邊小．

證明 $AB+AC>BC$

各去 AC, $AB>BC-AC$ 卽 $BC-AC<AB$,

注意 A,B,C 各角之對邊爲 a,b,c.

則 $b+c>a$, $a+c>b$, $a+b>c$

或 $a-b<c$, $b-c<a$, $c-a<b$

如上之定理及系，知以三線分爲三角形之三邊者，其中一線分爲三角形之一邊，必比其他二線分之和小而比其差大．

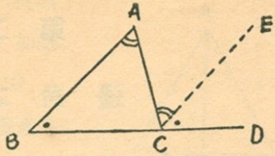
例如 7 尺, 5 尺, 3 尺三線分固可爲三角形之三邊，若 7 尺 5 尺, 1 尺三線分，卽不可爲三角形之三邊；蓋依此三線分，不能構成三角形也．

定理 22. 三角形三內角之和，等於二直角．

證明 由 C 點，作 AB 之平行線 CE,

$\angle ABC=ECD$ （同位角）

$\angle BAC = ACE$　（錯角）



$\angle ACB = ACB$

故 $\angle ABC + BAC + ACB =$

$ECD + ACE + ACB = 2R\angle$

卽內角之和$=2R\angle$。

系 1. 三角形一角之外角，等於其他二角（各爲內對角）之和。

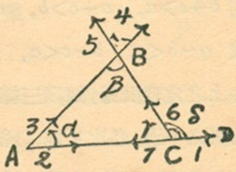
$$\angle ACD = A + B.$$

系 2. 三角形之一內角，等於一內對角之外角減其他之內對角。

$$\angle A = ACD - B, \text{或 } \angle B = ACD - A.$$

系 3. 三角形一內角之外角，必比其一內對角大。

注意　本定理之證明若以旋轉之理明之，頗饒趣味，詳之如次其解法乃 John Playfair 所發明：三角形 ABC 其內角之和，$\alpha + \beta + \gamma = 2R\angle$ 試證之。



此可以內角之旋轉而得其證明。

蓋其始如 CD 之方向，作 CD 線，爲 1 之位置，以 1 向後直移至 2 之位置，以 A 爲樞，依 α 度旋轉至 3 之位置，而成 α 角；次以 3 向前直移至 4 之位置，以 B 爲樞，依 β 度旋轉至 5 之位置，而成 β 角（對頂角），乃以 5 向後直移至 6 之位置，至是凡旋轉二次，成 α, β 二角，其旋轉之向，與時針旋轉之向相反。

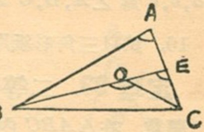
故若以 C 爲樞,逕由 1 旋轉至 6 成 δ 角,實與前旋轉二次所成 α, β 二角之和,無以異也, $\alpha+\beta=\delta$ 於是以 C 爲樞, 以 6 旋轉至 7, 成 γ 角,因 7 與 1 爲正反對向,故 $\alpha+\beta+r=2R\angle$。

主要問題 9. 由三角形一邊之兩端,與三角形內之一點,各聯成直線,此二直線之和, 必比三角形他二邊之和小;然其夾角,比他二邊之夾角大。

題意　O 爲 ABC 三角形內之一點。

則　$AB+AC>OB+OC$,

及　$\angle BAC<BOC$。



證明　OB, AC 之交點爲 E。

$$AB+AE>BE$$

卽　$AB+AE>OB+OE$　各加 CE。

則　$AB+AC>OB+OE+CE$,

故　$AB+AC>OB+OC$,

次　$\angle BOC>OEC>BAC$。 (系 3)

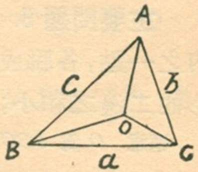
注意　依定理 9 可直捷證明 $AB+AC>OB+OC$。

例　題　X

1. 三角形三內角之中祗能有一角爲直角或鈍角,餘必爲銳角。
2. 兩三角形有二角相等者,其第三角亦必相等。
3. 兩三角形一邊及二角相等者,此兩三角形必爲全等。
4. 兩直角三角形有一銳角相等者,其餘一銳角亦必相等。
5. 兩直角三角形斜邊及一銳角相等者,必爲全等。
6. 三角板之一銳角爲 45 或 30°,其他一銳角爲若干度?

7. O 爲 ABC 三角形內之一點，其 ABC 三角形之周，必比 OBC 三角形之周大。

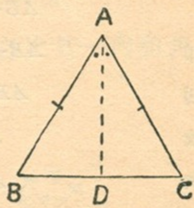
8. ABC 三角形，若 $\angle A-B=B-C=30°$，其各角之度數若干。



9. O 爲 ABC 三角形內之一點。則 $a+b+c>AO+BO+CO>\frac{1}{2}(a+b+c)$ 試證之，其 a,b,c 爲 $\angle A,B,C$ 之對邊。

10. 試以三角形紙片折疊之，證明定理 22。

定理 23. 二等邊三角形之底角必相等。



題意　在 $\triangle ABC$ 內若 $AB=AC$

則　$\angle B=C$

證明　頂角 A 之二等分線爲 AD。

於　$\triangle ABD$，$\triangle ACD$

$AB=AC$

AD 爲公有之邊，

$\therefore \quad \angle BAD=CAD$

$\therefore \quad \triangle ABD \equiv ACD$　(定理 17)

$\angle B=C$

系　正三角形之角皆相等，因正三角形迴環視之皆二等邊三角形故也。

定理 24. 三角形二角相等者，其對邊亦相等。(前定理之逆)

證明　如前圖，在 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 內，

$\angle B=C$

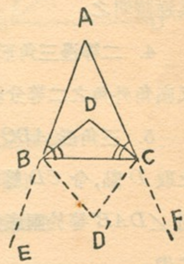
$\angle BAD=CAD$ （作圖）

AD 為公有之邊，

∴ $\triangle ABD\equiv ACD$ （定理 18）

∴ $AB=AC$.

系 三角形三角相等者，其三邊亦必相等.（視同二角相等，依二角相等之定理證明之.）



主要問題 10. 二等邊三角形兩底角之二等分線，必適與底邊構成二等邊三角形，兩底角外角之二等分線，亦必與底邊構成二等邊三角形.

題意　BD，CD 為二等邊三角形 ABC 兩底角之二等分線，其 $\triangle BDC$ 必為二等邊三角形.

證明　$AB=AC$ （假設）

∴ $\angle ABC=ACB$ （定理 23）

∴ $\angle DBC=DCB$ （公理）

∴ $CD=BD$ （定理 24）

故 $\triangle BDC$ 為二等邊三角形.

次兩底角外角之二等分線為 BD'，CD'，

故外角 $EBC=FCB$ （定理 1 系 3）

∴ $\angle D'BC=D'CB$

∴ $D'C=D'B$

故 $\angle BD'C$ 爲二等邊三角形.

例　題　XI

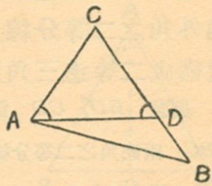
1. 正三角形一角之度數若干?

2. 三角形二邊相等，而有一角等於正三角形之一角者，此三角形必爲等邊三角形.

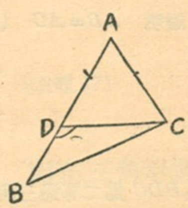
3. 等腰三角形頂角外角之二等分線，必適與底邊平行，試併其逆證明之.

4. 二等邊三角形兩底角之二等分線至對邊止，其長必相等，又底角外角之二等分線何如?

5. 三角形 ABC，於其邊 CB 上取 D 點，令 CD 等於 CA，如是則 $\angle DAB$ 等於兩底角 A,B 之差之半.



定理 25. 三角形之二邊不等者，大邊所對之角必比小邊所對之角大.



題意　在 $\triangle ABC$ 內若 $AB>AC$

則 $\angle C>B$

證明　$AB>AC$ 於 AB 上取 AD，令等於 AC，聯 C,D 成直線.

因 $AD=AC$ 故 $\angle ACD=ADC$,

而 $\angle ADC$ 爲 $\triangle CBD$ 之外角,

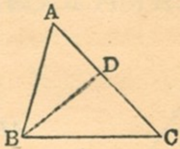
故 $\angle ADC > B$,

而　　$\angle C > ACD \quad \therefore \angle C > B$.

定理 26 三角形之二角不等者，大角所對之邊，必比小角所對之邊大.（前定理之逆）

題意　$\triangle ABC$ 若 $\angle B > C$

則　　$AC > AB$



證明　$\angle B > C$ 於 $\angle B$ 內取 $\angle CBD$ 令等於 $\angle C$，其 DB, AC 之交點爲 D,

乃於　$\triangle ADB$

$$AD + DB > AB \quad \text{（定理 21）}$$

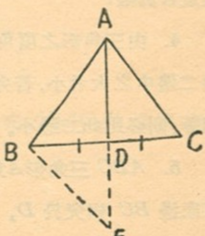
$$\angle DBC = C \quad \text{（作圖）}$$

$$\therefore \quad DB = DC \quad \text{（定理 24）}$$

$$\therefore \quad AD + DC > AB$$

$$\therefore \quad AC > AB$$

主要問題 11. 三角形二邊不等者，由其交點作一中線，此中線與大邊夾成之角必比其與小邊夾成之角小. 頂點與對邊之中點所聯成之直線，謂之中線.



題意　在 $\triangle ABC$ 內 $AB > AC$

其中線爲 AD,

$$\angle BAD < CAD$$

證明　延長 AD 至 E，令 $DE = AD$，聯成 EB 直線，乃就 $\triangle ADC$,

$\triangle BDE$ 比較,

$$DE=AD \quad (\text{作圖})$$

$$BD=CD \quad (\text{假設})$$

$$\angle BDE=CDA \quad (\text{定理 4})$$

$\therefore$ $$\triangle BDE\equiv CDA \quad (\text{定理 17})$$

$\therefore$ $$BE=AC$$

$$\angle BED=CAD$$

而 $$AB>AC \text{ 卽 } AB>BE$$

$\therefore$ $$\angle BED>BAD$$

因之 $$\angle CAD>BAD$$

卽 $$\angle BAD<CAD.$$

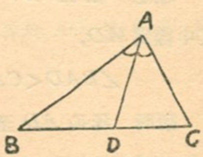
例題 XII

1. ABC 三角形若 $AB=15$ 寸,$BC=23$ 寸,$CA=21$ 寸,問何角爲最大?何角爲最小?

2. 直角三角形以何邊爲最大?

3. 三角形有一角爲鈍角者,其鈍角所對之邊,必爲最大,又其逆是否眞確?

4. 由三角形之頂角,至底邊上任意之點,作一直線,必比其夾角二邊中之大者小,若夾頂角之二邊相等,則必比此二邊小。



5. ABC 三角形 A 角之二等分線與底邊 BC 相交於 D,

$$BA>BD,$$

$CA>CD$ 試證之。

6. 四邊形 $ABCD$ 若 AD 爲最大，BC 爲最小，則 $\angle ABC>ADC$，$\angle BCD>BAD$，試證之。

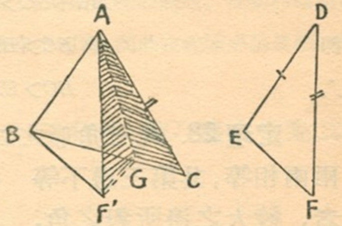
定理 27. 此三角形之二邊與他三角形之二邊兩兩相對，而其所夾之角不等者，較大之角所對之邊，亦必較大。

題意　在 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 內。

若 $AB=DE$，$AC=DF$，

$\angle A>D$

則 $BC>EF$



證明　因 $\angle A$ 大於 $\angle D$，

故於 $\angle A$ 內取 $\angle BAF'$ 令等於 $\angle D$，其 AF' 係等於 DF，聯成 BF' 直線，

$$AB=DE$$

$$AF'=DF$$

$$\angle BAF'=EDF$$

$$\therefore \quad \triangle BAF'\equiv EDF$$

$$\therefore \quad BF'=EF.$$

今作 $\angle CAF'$ 之二等分線 AG，此 AG 必在 $\angle BAC$ 內，其與 BC 之交點爲 G，聯成 GF' 直線。

乃於　$\triangle AGF'$，$\triangle AGC$

$$AF'=AC.$$

$$\angle F'AG = CAG \quad \text{(作圖)}$$

AG 爲公有之邊，

$\therefore$ $\triangle AGF' \equiv AGC$，（定理 17）

$\therefore$ $GF' = GC$

乃又於 $\triangle GBF'$

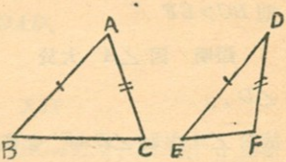
$BG + GF' > BF'$

$\therefore$ $BG + GC > BF'$

卽 $BC > BF'$

$\therefore$ $BC > EF$.

定理 28. 此三角形之二邊與他三角形之二邊兩兩相等，其第三邊不等者，較大之邊所對之角，亦必較大.（前定理之逆）



題意 在 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 內

若 $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$

則 $\angle A > D$

證明 如謂 $\angle A \not> D$

則必爲 $\angle A = D$ 或爲 $\angle A < D$,

今若 $\angle A = D$

則 $\triangle ABC \equiv DEF$

$\therefore$ $BC = EF$ 是與假設不合，

$\therefore$ $\angle A \neq D$

又 $\angle A < D$

則依前定理，$BC<EF$ 是仍與假設不合，

$\therefore$　　　　$\angle A \nless D$

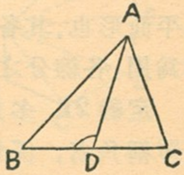
既非 $\angle A=D$，又非 $\angle A<D$

故必爲　　　　$\angle A>D$

注意　與此證明法相似者甚多，但略有不同，蓋此證明法，係就定理之終結，故爲違異，而悉與假設不合，因知此定理之必爲眞確，乃由間接而知之者也。申論之，則某定理之假設，任如何改變，求其能合於終結而見爲兩可者卒不可得，則此定理逆必爲眞確，此爲轉換之法則。

主要問題 12. ABC 三角形 BC 邊之中點爲 D，若 $\angle ADB$ 爲鈍角，

則 $AB>AC$。



證明　在 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 內

$BD=CD$

AD 爲公有之邊，

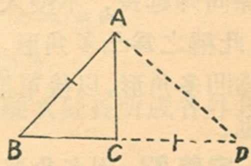
$\angle ADB>ADC$

$\therefore$　　$AB>AC$。（定理 27）

例　題　XIII

1. 三角形 ABC 之底邊 BC 延長至 D，令 $CD=AB$。

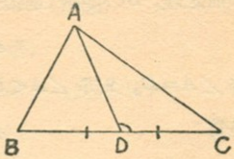
則　　$BC<AD$



2. 三角形 ABC，其 BC 之中點爲 D，

若　　$AB<AC$

則 $\angle ADC$ 必爲鈍角，



3.　二等邊三角形形內之點如非在頂角之二等分線上，其與底之兩端，必不成等距。

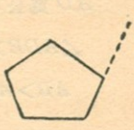
4. 如定理 27 之圖聯 CF' 直線，成 BCF' 三角形，依定理 26 證明定理 27。

第三節

多角形

定義 20. 多角形云者，係連接若干線分所圍成之平面形也。其各線分稱爲多角形之邊，各邊之和稱爲周，各線分之端稱爲頂點。

定義 21. 多角形之內角或單稱角者，係相隣二邊夾向形內之角也，長線所夾之角，稱爲外角。



定義 22. 多角形之各邊，俱係向外延長，不侵入形內者，此稱之爲凸多角形，非然者爲凹多角形，以後單稱多角形者，係指凸多角形言也。

定義 23. 因多角形之邊數 3,4,5,等，稱爲三

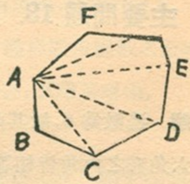
角形，四角形，五角形等，或稱三邊形，四邊形，五邊形等．

定義 24. 多角形不相隣之二頂點所聯成直線，稱爲對角形．

定義 25. 多角形凡各邊，各角皆相等者，稱爲正多角形．

注意　等邊三角形，固卽爲等角三角形，又等角三角形，雖卽爲等邊三角形，若四角以上則不然，多角形恆有等邊不等角等角不等邊者，宜注意．

定理 29. 多角形內角之和，等於若干直角，此若干必爲二倍邊數減四之餘．



題意　$ABCD\cdots\cdots F$爲 n 邊之多角形，內角 $A+B+C+D+\cdots\cdots+F=(2n-4)$ 直角．

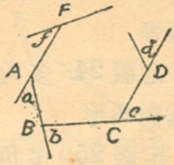
證明　由一頂點 A 與各頂點聯成各對角線，卽分本形爲 $(n-2)$ 個三角形，因除 AB, AF 外，其餘 $(n-2)$ 邊皆爲三角形之底邊，三角形內角之和爲二直角，故 $(n-2)$ 個三角形內角之和，爲 $(n-2)\times 2$ 直角卽 $(2n-4)$ 直角，而此諸三角形內角之和，卽多角形內角之和．

故 $\angle A+B+C+D+\cdots\cdots+F=(2n-4)$ 直角．

系　四邊形內角之和，等於四直角．

定理 30. 多角形各邊順次延長所成各外角之和，等於四直角．

直角.



題意 n 邊之多角形 $ABCD$ ……F, 其內角 $A,B,C,D,$……F 之外角爲 $a,b,c,$……f

$a+b+c+d+\cdots\cdots+f=4$直角

證明 在各頂點內角外角之和爲平角,然此形具 n 個頂點,故一切內角及外角之和,爲 $\angle A+a+B+b+C+c+\cdots\cdots+F+f=2\times n$ 直角兩邊各減內角之和,

則 $a+b+c+d+\cdots\cdots+f=[2n-(2n-4)]$直角,

$=4$直角,

主要問題 13. 正六角形之一角,爲四直角之 $\frac{1}{3}$.

解 邊數爲 6,故其內角之和爲 $2\times6-4=8$ 直角,然正六角形之內角皆相等,

故其一內角爲 $8\times\frac{1}{6}$ 卽 $\frac{4}{3}$ 直角.

主要問題 14. 正多角形之一內角若爲 $162°$,其邊數若干.

解 一內角爲 $162°$

故一外角$=180°-162°=18°$, 依定理 30

$n\times18°=360°$ 但 n 爲外角之數,卽邊數,

$\therefore \quad n=20$

是爲正二十邊形.

例　題　XIV

1. 多角形內角之和，若爲 10 直角，問係幾邊形？

2. 正五角形，正八角形，正十角形各角之度數若干？

3. 凸多角形之內角，有爲銳角者，但不能多至四銳角以上。

4. 正多角形之一外角爲 $45°$ 其邊數若何？

5. n 邊正多角形之一角必爲 $2-\frac{4}{n}$ 直角。

6. 公有一頂點之正三角形，問須幾個適足此一點之周圍？

7. 設正多角形之外角，等於正三角形之內角，問此正多角形之邊數若干？

8. 三角形 ABC 其在 B, C 之外角之二等分線所夾成之角，必適等在 A 之外角之半。

9. 正五角形與正十多角形之一內角之比，等於 $3:4$。

10. 問五邊形有若干對角線，幷求 n 邊形對角線數之公式。

11. 以下列正多角形湊集之，適相脗合，試明其理由。

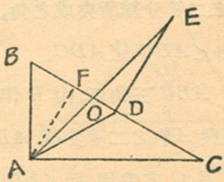
(a) 相等正六邊形三個。

(b) 正方形一個及與此正方形等邊之正八邊形四個。

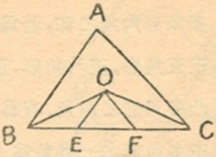
(c) 正三角形一個及與此三角形等邊之正十二邊形三個。

雜　題　II

1. 直角三角形 ABC，其直角 A 之二等分線 AE 與由斜邊之中點 D 所作斜邊之垂線 ED，相交於 E，得式如次，$DA=DE$ 試證之。

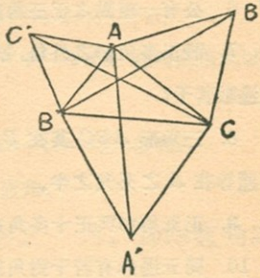


2. 由正三角形兩底角二等分線之交點，準與夾頂角之二邊平行，引二直線，必適截底邊爲三等分。



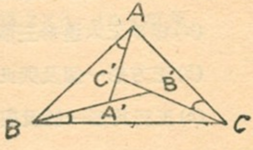
3. 於正三角形之各邊上各取一點，令順次與各頂點成等距，如是則聯成三點所成之三角形，必爲正三角形。

4. 於三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上向外各作正三角形，其頂點爲 A', B', C'，則 $AA'=BB'=CC'$ 試證之。

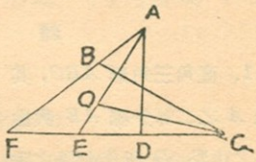


5. 三角形三高之和，比三邊之和小。

6. 三角形 ABC 由各頂點向形內引直線，若 $\angle BAA'=CBB'=ACC'$ 則 $A'B'C'$ 三角形必與原形等角。

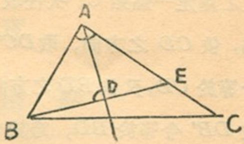


7. 二直線 AB, CD 上設四定點 A, B, C, D，其$\angle BAD, BCD$ 之二等分線所夾成之角，必等於 $\angle ABC, \angle ADC$.

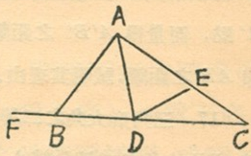


8. ABC 三角形，由 B 作 BE，係與 A角之二等分線 AD 成垂直，如是則 $\angle BEA, EBA$各等於 $\angle B, C$ 之半和，而$\angle EBC$ 等於$=B, C$ 之半差。

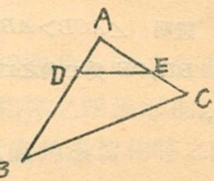
9. 三角形 ABC,其二邊 AB, AC 之中點為 E,F,延長 CE 至 G,令 EG 等於 CE,又延長 BF 至 H,令 FH 等於 BF,如是則 G,A,H 三點必同在一直線上。



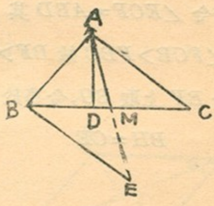
10. ABC 三角形,$AB<AC$, A 角之二等分線與 BC 相交於 D,如是則 $BD<CD$。



11. 正三角形,於其二邊上各任取一點,聯成直線,此直線必比正三角形之一邊小。

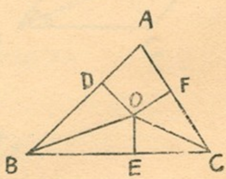


12. 三角形 ABC,其最大之角為 A,而AB,AC 上任錀之點為 D, E,如是則 $DE<BC$。



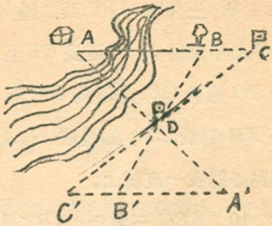
13. 在ABC 三角形內 AB 比 AC 小,A 角之二等分線為 AD,由 A 所作之中點為 AM,如是則二等分線 AD,必在 AB,AM 之間。

14. 三角形二內角之二等分線之交點與三角形之三邊必成等距。

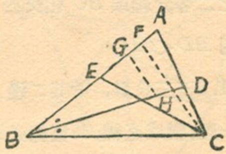


15. 三角形之二邊為 5寸,7寸,問第三邊亦為寸之整倍數,得作此三角形者,凡若干個?

16. 河之兩岸有 A,B 二地,欲測其距離,如圖,先於 A,B 二



直之處定一點如 C，次任取 D 點，依 CD 之方向，取 DC' 令等於 CD，又依 BD 之方向，取 DB' 令等於 BD，乃於 $C'B'$ 線上求與 AD 參處之直如 A' 點，而量得 $A'B'$ 之距離，卽 AB 之距離，試明其理由.



17. 三角形大角之二等分線，必比小角之二等分線小.

證明 $\angle ACB > ABC$

BD, CE 爲二角之二等分線，

$$\angle ACE > ABD$$

故若令 $\angle ECF = ABD$ 其 F 點必在 AE 之間，

又 $\angle FCB > FBC$ 故 $BF > CF$

故於 BF 上取 BG，令等於 CF 而 $GH \parallel CF$，故 $\triangle BGH \equiv CEF$

$\therefore \quad BH = CE \qquad \therefore \quad BD > CE$

第四章

平行四邊形

定義 26. 平行四邊形者，係每對邊互相平行四邊形也.

定義 27. 梯形者，係僅一對邊平行之四邊形也,其平行之二邊,稱爲底,一爲上底，一爲下底.不平行之二邊若相等,特稱之爲等腰梯形,或稱二等邊梯形.

定義 28. 矩形者,四角皆爲直角之四邊形也.

定義 29. 菱形者,四邊皆相等之四邊形也.

定義 30. 正方形者，角皆直角邊皆相等之四邊形也.

定理 31. 凡平行四邊形:

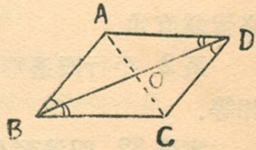
(I) 各對角線俱係截本形爲二等分.

(II) 對邊相等;

(III) 對角相等;

(IV) 相隣二角互爲外角;

(V) 對角線互截爲二等分.



證明 (1)在$\triangle ABD$,$\triangle BCD$ 內,

$$\angle ABD = BDC \quad (\text{錯角})$$

$$\angle ADB = DBC \quad \text{(同上)}$$

BD 爲兩形公有之邊,

∴ $\triangle ABD \equiv BCD$, (定理18)

依同理, $\triangle ABC \equiv ACD$

故(II) $AB = CD, AD = BC$

(III)因 $\angle ABD = BDC \qquad \angle DBC = ADB$

∴ $\angle ABC = ADC$

依同理, $\angle BAD = BCD$

(IV) 在$\triangle ABO$, $\triangle CDO$內

$$AB = CD$$

$$\angle ABO = ODC \quad \text{(錯角)}$$

$$\angle BAO = DCO \quad \text{(同上)}$$

∴ $\triangle ABO \equiv CDO$ (定理 18)

∴ $AO = OC, \quad BO = OD$.

(V)此無異於二平行線與一直線相交所成同側之二內角也.

系 1. 平行四邊形有一角爲直角者,其餘三角必皆爲直角.

系 2. 平行四邊形相隣二邊相等者,其邊必皆相等.

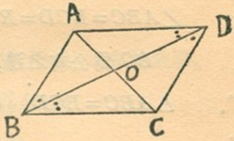
定理 32. 四邊形合於下列諸條件之一者,必爲平行四邊形.

(I) 每對邊相等;

(II) 每對角相等;

(III) 對角線互截爲二等分;

(IV)一對邊相等且平行。(前定理之逆)



證明　(I) $AB=CD$

$AD=BC$

BD 爲公共之邊；

∴　$\triangle ABD \equiv BCD$

∴　$\angle ABD=BDC$　∴ $AB \parallel CD$

又　$\angle ADB=DBC$　∴ $AD \parallel BC$

故 $ABCD$ 爲平行四邊形。

(II)　$\angle A=C$，　$\angle A=C$

$\angle B=D$　$\angle D=B$

∴　$\angle A+B=C+D=2R\angle$ 及 $\angle A+D=B+C=2R\angle$

∴　$AD \parallel BC$，　∴　$AB \parallel CD$。

故 $ABCD$ 爲平行四邊形，

(III)　$\triangle AOB \equiv COD$　(此爲何故)

∴　$\angle ABO=ODC$　∴　$AB \parallel CD$

依同理，　$AD \parallel BC$

故　$ABCD$爲平行四邊形，

(IV)　$AB \parallel CD, AB=CD$故$\triangle AOB \equiv COD$

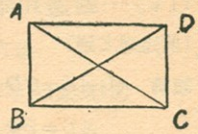
∴　$OA=OC, OB=OD$

餘卽依(III)證明可也。

系　矩形，菱形，正方形，皆爲平行四邊形。

定理 33. 矩形之對角線(AC，BD)必相等。

證明　在 $\triangle ABC \triangle BCD$內，



$AB=CD$

$\angle ABC=BCD=R\angle$

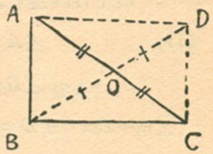
BC 爲公有之邊，

$\therefore$ $\triangle ABC=BCD$，(定理 17)

$\therefore$ $AC=BD$.

系　平行四邊形對角線相等者，此平行四邊形必爲矩形。(本定理之逆)

主要問題 15. 直角三角形(ABC)斜邊之中點(O)與三頂點成等距.



證明　延長 BO 至 D，令 $OD=BO$，又聯成 AD，CD 兩直線，如是則 $ABCD$ 爲平行四形邊，(定理 32 III)

因 $\angle ABC$ 爲直角，故爲矩形，

依定理 33，$AC=BD$，因之其半相等，

$\therefore$ $AO=CO=BO$

注意　本題用處極廣最爲緊要。

例　題　XV

1. 菱形之對角線，必互爲垂直二等分線，并分各角爲二等分.

2. 平行四邊形之對角線若互爲垂直，此平行四邊形，必爲菱形。(前問題之逆)

注意　定理 33 系及問題(1)，(2) 係關於矩形，菱形之性質，用處極多最爲緊要。

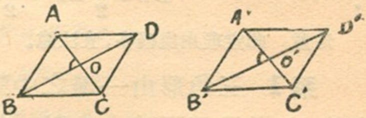
3. 平行四邊形以相對二邊之中點聯成直線，此直線必適分對角線爲二等分。

4. 二隣邊及一角兩兩相等之二平行四邊形，必爲全等。

5. 二隣邊兩兩相等之二矩形，必爲全等。

6. 兩正方形有一邊相等者必爲全等。

7. 二菱形如何方爲全等？



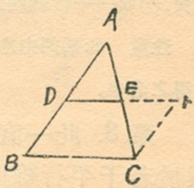
8. 二對角線及其夾角，兩兩相等之二平行四邊形必爲全等。

9. 直角三角形一銳角爲他銳角之二倍，其最小邊必等於斜邊之半，試併其逆證明之。

10. 非翻轉不能疊合之二三角形，欲不翻轉而疊合，其法若何，但一三角形必加分割。

定理 34. 三角形聯二邊之中點所成之直線必與底邊平行，且等於底邊之半.

題意　$\triangle ABC$ 二邊之中點爲 DE，其所聯成之直線 DE，必與 BC 平行，且等於 BC 之半，



證明　延長 DE 至 F 令 EF 等於 DE，又聯成 CF 直線，

乃於　$\triangle ADE$，$\triangle CEF$

$$DE=EF$$

$$AE=EC$$

$$\angle AED=CEF$$

$\therefore$ $\triangle ADE \equiv CEF$ (定理 17)

$\therefore$ $AD=CF$及$\angle DAE=ECF$

$\therefore$ $CF=BD$及$CF \parallel BD$,

故 $BDFC$ 四邊形爲平行四邊形, (定理 32 IV)

$\therefore$ $DE \parallel BC$及$DF \parallel BC$,

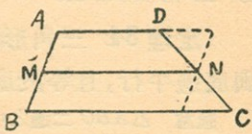
$\therefore$ $DE=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}BC$

注意　此定理用處極多,宜注意。

系 1. 三角形由一邊之中點,準與他邊平行作直線,必通過第三邊之中點。(本定理之逆)

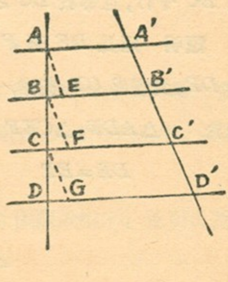
證明　如前圖,D 爲 AB 之中點,$DE \parallel BC$,而由 AC 之中點與 D 聯成之直線,亦必與 BC 平行,然由一點 D 準與 BC 平行,祇能作一平行線,故 DE 必通過 AC 之中點。(直接證明法若何)

系 2. 由梯形不平行二邊之中點所聯成之直線,必與底邊平行,且等於兩底和之半。



(指)　由 CD 之中點 N 作 AB 之平行線,與 AD 之延長線相交,卽成一平行線四邊形。

注意　此系係由本定理推廣而得之者也。



系 3. 此一直線上被截於若干平行線間之部分,若皆相等,則彼一直線上同爲被截於若干平

行線間之部分，亦必相等。

(指)　$AB = BC = CD = \cdots\cdots$

由 $A, B, C, D,$ …… 各點，作 $A'D'$ 之平行線，

如是則 $A'B' = AE$

$$B'C' = BF$$

$$\cdots\cdots$$

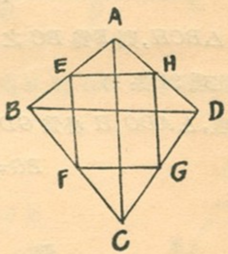
次由　$\triangle ABE \equiv BCF \equiv \cdots\cdots$

證明　$AE = BF = \cdots\cdots$

注意　此系係由系 1 推廣而得之者也。

主要問題 16. 四邊形各邊之中點，順次聯成直線必成一平行四邊形，其周等於兩對角線之和。

題意　四邊形 $ABCD$ 各邊之中點爲 E, F, G, H 聯成 $EFGH$ 爲平行四邊形，其周等於 AC, BD 之和。



證明　作對角線 BD，乃於 $\triangle ABD$ 其 EH 爲由二邊之中點所聯成之直線，

$EH \parallel BD$，$EH = \frac{1}{2}BD$

(定理 34)

依同理，$\triangle BCD$

$FG \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD$ (同上)

$\therefore$　$EH \parallel FG, EH = FG$

故 $EFGH$ 爲平行四邊形，(定理 32 IV)

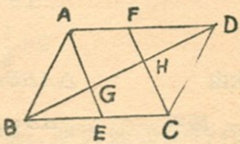
又　$EH + FG = BD$

依同理，$EF + GH = AC$

故其周等於對角線之和，

主要問題 17. 平行四邊形由相對兩頂點，各與對邊之中點聯成直線，此二直線必適截一對角線爲三等分.

點聯成直線，此二直線必適截一對角線爲三等分.



題意　$\square ABCD$ 其對邊之中點爲 E,F，而 AE,CF 必適截 BD 爲三等分.

證明　AE,CF 與 BD 相交於 G,H，因 $ABCD$ 爲平行四邊形，故 $AD \parallel BC, AD=BC$　(定理 31 II)

故　$$AF \parallel EC, AF=EC,$$

故 $AECF$ 爲平行四邊形，　(定理 32 IV)

故　$$AE=CF$$

而於 $\triangle BCH$，則 E 爲 BC 之中點，$EG \parallel CH$，故 G 爲 BH 之中點，(定理 34 系 1)

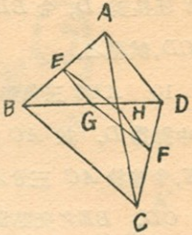
依同理，$\triangle ADG$，H 必爲 GD 之中點，

$$\therefore \quad BG=GH=HD.$$

例　題　XVI

1. 三角形以三邊之中點聯成直線，卽分原形爲四個三角形，俱全相等.

2. 三角形由一點至對邊作直線，此直線必爲他二邊中點聯成之直線所平行.



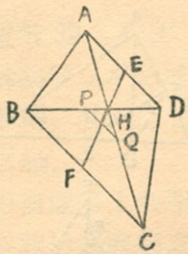
3. 四邊形一對邊之中點與兩對角線之中點聯成直線，必成一平行四邊形。

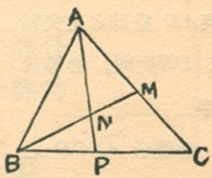
4. 四邊形 $ABCD$ 其 AB, BC, CD, DA 之中點為 P, Q, R, S,

(I) AC, BD 若相等,則 $PR \perp QS$,

(II) AC, BD 若直交則 $PR=QS$.

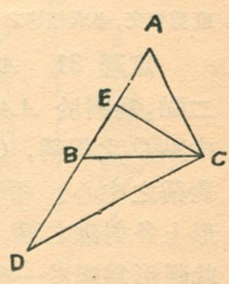
5. 四邊形每相對邊之中點所聯成兩直線之交點，必分兩對角線中點所聯成之直線為二等分。





6. ABC 三角形，AC 之中點為 M,而 BM 之中點為 N, 其 AN, BC 之交點為 P,

$PB=\frac{1}{2}CP$,試證之。



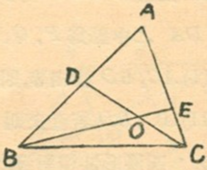
7. D, E 為 $\triangle ABC$ 之 BC, CA 上之點,若 $BD=\frac{1}{2}CD$, $CE=EA$ 則 AD 必適分 BE 為二等分。

8. 梯形下底若為上底之倍,則其兩對角線，必各於其三分之一之處相交。

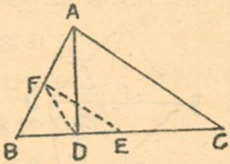
9. 以二等邊三角形 ABC,之等邊

AB 延長至 D, 令 $BD=AB$ 其AB 之中點爲 E, 如是則 $CE=\frac{1}{2}CD$, 試證之。

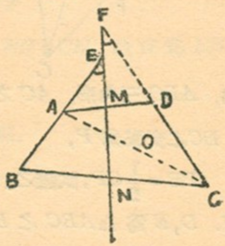
10. ABC 三角形, AB 之中點爲 D, 於 AC 上取 AE, 令等於 AC 三分之二, 其 CD, BE之交點爲 O, 如是則 OE 必爲 BE 四分之一。



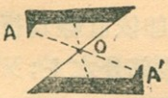
11. ABC 三角形 B 角爲 C角之二倍, 其兩邊之中點 E 與AD 垂線之正交點 D 所成 DE距離, 必等於 AB 之半。

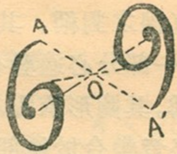


*12. 四邊形 $ABCD$ 之對邊AB, CD 若相等, 則此二邊之延長線各與 BC, AD 之中點 N, M所聯成之 MN 直線相交, 必成相等之角。

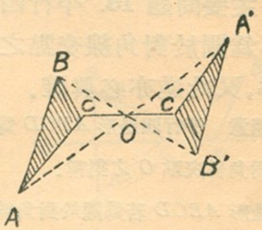


定理 31. A, A' 二點, 爲關於 AA' 之中點 O 之對稱, O 爲對稱之中心. 平面圖形上各對應之點, 若皆爲關於一點 O 之對稱, 則此圖形爲關於一點 O 之對稱。

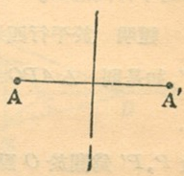




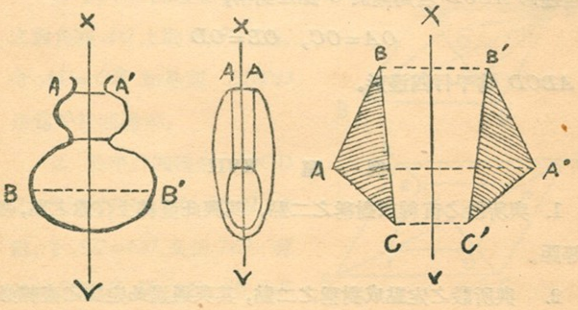
凡如此圖形上任意之點 A，定點 O，其關於 O 而為 A 之對稱點，若恆在此圖形上，則此圖形為關於O之對稱，而 O 為其對稱之中心。



定義 32. A, A' 二點為關於 AA' 之垂直二等分線之對稱，其垂直二等分線為對稱之軸。

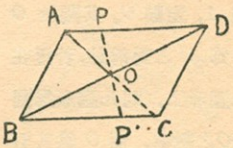


平面圖形上各對應之點，若皆為關於某直線之對稱，則此圖形為關於某直線之對稱。



故凡關於直線之對稱，其圖形卽依直線爲折痕而返折之，其一部分必適疊合於他部分之上；又凡關於點之對稱，其圖形依點之周圍旋轉至二直角，無論何部分必皆疊合於他部分之上。

主要問題 18. 平行四邊形爲關於對角線交點之對稱，又此逆亦必眞確。



題意 平行四邊形 $ABCD$ 爲關於對角線交點 O 之對稱。

又四邊形 $ABCD$ 若爲關於對角線交點 O 之對稱，則此 $ABCD$ 必爲平行四邊形。

證明 於平行四邊形之邊上任取 P 點聯成 OP，延長至對邊 P'，如是則 $\triangle APO \equiv CP'O$ （此爲何故）

$$\therefore \qquad OP=OP'$$

故 P, P' 爲關於 O 點之對稱，

故 $\square ABCD$ 爲關於 O 點之對稱，

次四邊形 $ABCD$ 若爲關於 O 點之對稱，

則 $$OA=OC, \quad OB=OD$$

故 $ABCD$ 爲平行四邊形。

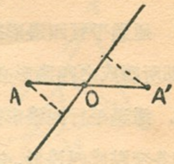
例題 XVII

1. 與所設之直線成對稱之二點，其與此直線上任意之點，必成等距。

2. 與所設之定點成對稱之二點，其與通過此定點之直線必

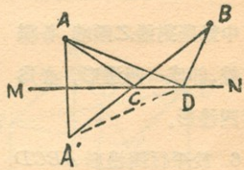
成等距。

3. 由一點至一直線作相等兩斜線，必爲關於垂線之對稱。



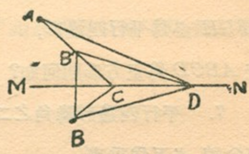
4. 菱形爲關於其對角線之對稱，又此逆亦必眞確。

5. 平行四邊形是否常有對稱之軸？矩形及菱形若何？



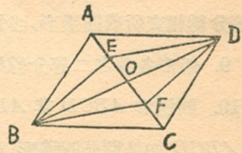
6. A, B 在 MN 之同側，C 爲 MN 上之點。若 $\angle ACM = BCN$ 則 AC, BC 之和爲最小。

*7. 如前題，A, B 在 MN 之兩側，若 $\angle ACM = BCM$ 則其差爲最大。

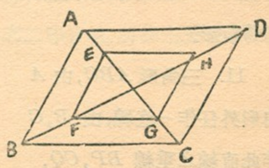


雜　題　III

1. 於平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC 上取 E, F 二點，令 $AE = CF$ 如是則 $EBFD$ 必爲平行四邊形。



2. 於平行四邊形 $ABCD$ 之 AC 對角線上取 E, G 二點，令 $AE = CG$ 又於 BD 對角線上取 F, H 二點，令 BF

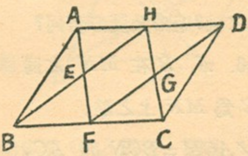


$=DH$ 如是則 $EFGH$ 必爲平行四邊形.

3. 通過平行四邊形對線之交點,作二直線,與各邊相交,由此諸交點所聯成之四邊形必爲平行四邊形.

4. 通過平行四邊形對角線之交點,作正交二直線,與各邊相交,聯各交點成四邊形,必爲菱形.

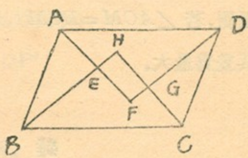
5. 平行四邊形由相對兩邊之中點與對邊之兩端,各聯成直線,卽成一四邊形,必爲平行四邊形.



6. 於平行四邊形 $ABCD$ 之各邊上取 E,F,G,H 四點,令 $AE=BF=CG=DH$ 如是則 $EFGH$ 必爲平行四邊形,

若 $ABCD$ 爲正方形則何如?

7. 平行四邊形隣角之二等分線,必互爲垂直.

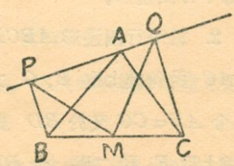


8. 平行四邊形四內角之二等分線相交所成四邊形,必爲矩形.

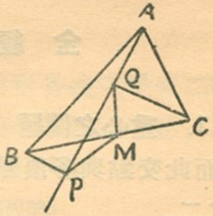
9. 矩形各角之二等分線相交必成正方形.

10. 四邊形 $ABCD$ 其 AB 邊與 CD 邊相等,而 $\angle ABC$ 等於 $\angle BCD$ 如是則此四邊形必爲矩形.

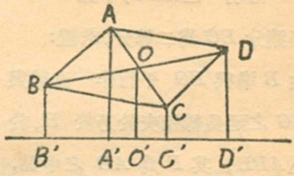
11. 三角形 ABC,由 A 向形外任作一直線,由 B,C 作此直線之垂線 BP,CQ,



其 BC 之中點爲 M，如是則 MP,MQ 必相等。

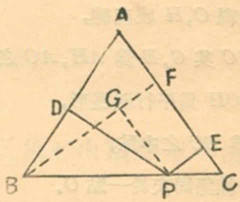


12. 三角形 ABC，由 A 向形內任作一直線，由 B,C 作此直線之垂線 BP，CQ，其 BC 之中點爲 M，如是則 MP,MQ 必相等。



13. 平行四邊形由一對角線之兩端作形外定直線之垂線，其和與由他對角線之兩端所作兩垂線之和相等。

14. 平行四邊形 $ABCD$ 以 E,F 兩點截對角線 BD 爲三等分，如是則 $AE \parallel CF$。



15. 於二等邊三角形之底邊上任取一點至二等邊各作垂線，其和必爲一定。又所取之點若在底邊之延長線上。則其差必爲一定。

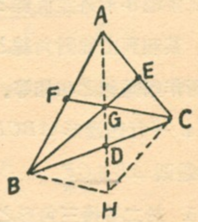
*16. 由正三角形內一點作三邊之垂線，其和必爲一定，此點若在形外若何？

*17. 等邊三角形由一點至各角之二等分線，所作三垂線之中，其二垂線之和必與他一垂線相等。

全編之雜題

1. 重心之問題　三角形三中線必同交於一點,而此交點與各頂點之距離,卽各等於其中線三分之二.

證明　$\triangle ABC$,中點 BE, CF 之交點爲 G 而 AG 之延長線,必適分 BC 爲二等分,求證:



由 B 準與 FG 平行作一直線與 AG 之延長線相交於乃於 H,於 $\triangle ABH$,其 F 爲 AB 之中點,

$FG \parallel BH$,

故 G 必爲 AH 之中點.

次聯 C, H 成直線,

$\triangle AHC$ 其 G, E 爲 AH, AC 之中點,$GE \parallel HC$ 卽 $BG \parallel HC$,

故 $BGCH$ 爲平行四邊形,

故 D 爲 BC 之中點,

故三中線係同交於一點 G.

次　　　$AG = GH = 2GD$

$\therefore$　　　$AG = \frac{2}{3}AD$

　　　$BG = HC = 2GE$

$\therefore$　　　$BG = \frac{2}{3}BE$

依同理,　　　$CG = \frac{2}{3}CF$

注意 G 點稱爲三角形之重心。

此問題甚爲緊要。

2. 外心之問題 三角形各邊之垂直二等分線，必同交於一點，此點必與三頂點成等距。

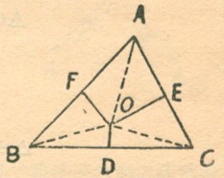
明證 D, E, F 爲 $\triangle ABC$ 三邊之中點。

由 D, E 所作二垂線必相交。〔此爲何故〕

命其交點爲 O，則

$BO=CO, \quad CO=AO$

〔此爲何故〕



$\therefore \ AO=BO$

故 O 爲 AB 之垂直二等分線上之點。〔此爲何故〕

故由 D, E, F，所作三垂線，係同交於 O 點，其與三頂點固成相等之距離者也。

注意 O 點稱爲三角形之外心。

此問題甚爲緊要。

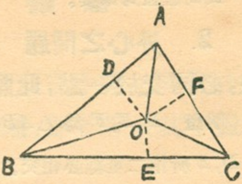
3. 垂心之問題 三角形由頂點至對邊所作三垂線必同交於一點。

〔指〕 $\triangle ABC$ 由各頂點準與對邊平行，各作一直線，卽成一 $A'B'C'$ 三角形，而原三垂線，卽 $\triangle A'B'C'$ 各邊之垂直二等分線，依前題，知必同交於一點。

注意 此交點稱爲垂心。

4. 內心之問題 三角形三內角之二等分線，必同交於一點，此點必與各邊成等距。

證明 $\triangle ABC$ 其 $\angle B, \angle C$ 之二等分線必相交.〔此爲何故〕命其交點爲 O.



由 O 作各邊之垂線 OD, OE, OF,

如是則 $\triangle ODB \equiv OEB$〔此爲何故〕

$\therefore \quad OD = OE$

又 $\quad \triangle OCE \equiv OCF$〔此爲何故〕

$\therefore \quad OE = OF$

$\therefore \quad OD = OF$

$\therefore \quad \triangle AOD \equiv AOF$

故 OA 爲頂角 A 之二等分線.

故三個二等分線,係同交於 O 點,其與各邊固成等距者也.

注意 此交點稱爲三角形之內心,用處甚多.

5. 傍心之問題 三角形一角及他二角之外角,各作二等分線必同交於一點,此點必與三邊成等距.

〔指〕 解法與前題同.

注意 此交點稱爲傍心,三角形有三傍心,宜注意.

6. 直角三角形一銳角爲他銳角之二倍,斜邊 6尺,問最小邊若干.

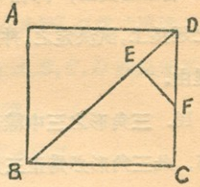
7. 證四邊形對角線之和,比其周小.

8. 證四邊形之周,比對角線和之倍小.

9. 四邊形對角線之和比其形內一點(除對角線之交點)與各

頂點聯成四直線之和小.

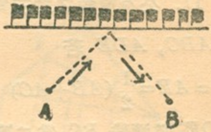
10. $ABCD$ 爲正方形,於對角線 BD 上取 BE,令等於 AB,又由 E 點作 BD 之垂線 EF,與 CD 相交於 F,則



$$EF=DE=FC$$

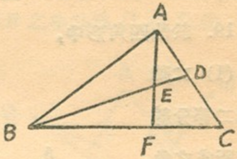
試證之.

11. 如圖,於一直線上列小旗,由 A 地起審取何旗,送至 B 地,所費時間爲最短. 但旗依一直線連續排列,其人步行速度始終一定.

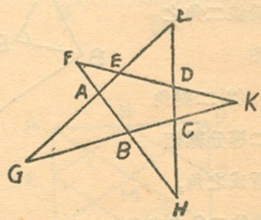


12. 凡同底等高諸三角形之中,以二等邊三角形之周爲最小.

13. ABC 三角形,A 爲直角,B 角之二等分線與 AC 相交於 D. 又由 A 所作 BC 之垂線,與 BD 相交於 E,如是則 $AD=AE$.

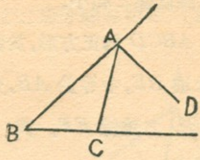


14. 五邊形之邊各延長之作星形,於其交點所成各角之和,等於二直角.

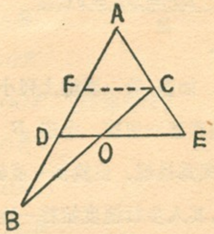


15. ABC 三角形其 AB 邊若比 AC 大,則 BAC 角外角之二等分線,必與 BC 邊之延長線相交. 問其交點在 BC

邊 B 端之延長上，抑在 C 端之延長上，試決定之，并述其理由。



16. 三角形之三中線若相等，此三角形必爲正三角形。

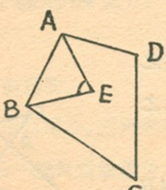


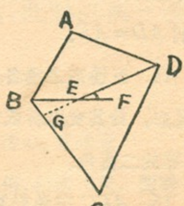
17. 公有頂角之二三角形 ABC, ADE 若 $AD=AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$ 則 DE 必適截 BC 爲二等分。

18. 四邊形每相對兩邊之中點，聯成兩直線，必與由對角線之中點所聯成之直線同交於一點。

19. 於凸四角形中，

(1) 二隣角之二等分線相交所成之角，等於他二角之半和。





(2) 二對角之二等分線相交所成之角，等於他二角之半差。

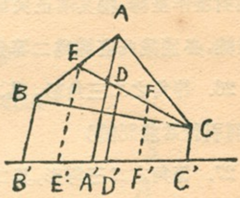
20. 正方形 $ABCD$ 由 A 與 BC 上任意之點 E，聯成 AE,

而 EAD 角之二等分線與 CD 相交於 F, 又延長 CD 至 G, 令 DG 等於 BE, 聯成 AG 直線, 如是則 $\triangle AFG$ 必爲二等邊三角形.

21. D 爲三角形 ABC 之重心, 由 A,B,C,D 四點至形外一直線, 作 AA',BB',CC',DD' 四平行線.

$$3DD'=A'A+BB'+CC',$$

試證之.



證明 CE 爲中線, F 爲 CD 之中點.

EE',FF' 係與 AA' 平行,

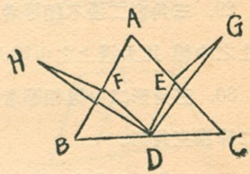
$$AA'+BB'=2EE'$$

$$EE'+FF'=2DD'$$

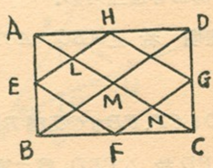
$$DD'+CC'=2FF'$$

以上三式, 消去 EE',FF', 卽可得其證明, 學者試自爲之.

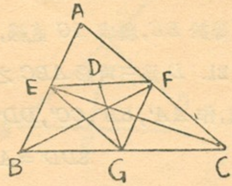
22. ABC 三角形, BC,CA,AB 之中點爲 D,E,F, 由 E,F 向形外作 AC,AB 之垂線 EG,FH 令等於 AC,AB 之半, 如是則 DEG,DFH 兩三角形全相等, 且 GDH 角必爲直角.



23. 就所設之矩形, 作其內接之平行四邊形, 令各邊與矩形兩對直角線平行, 如是則此平行四邊形之周無論位置若何必爲一定.



24. 三角形 ABC 由 B, C 各向對邊作垂線 BF, CE 而 EF 之中點為 D, 又 BC 之中點為 G, 如是則 EF 必與 GD 成垂直。

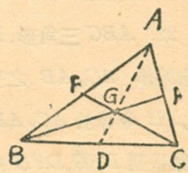


25. 三角形由底邊之兩端各向對邊作垂線,聯其兩正交點成一直線,由底邊之中點作此直線之垂線,必適截此直線為二等分。

26. 等角之二三角形,其二邊兩兩平行者,第三邊亦必平行。〔若何引證當能記憶〕

27. 等角之二三角形,其二邊兩兩垂直者,第三邊亦必互為垂直。〔同上〕

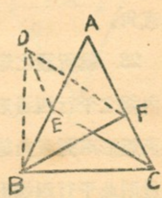
28. 三角形三邊之和,比其三中線之和大。



29. 三角形二邊不相等者,小邊上之中線,比大邊上之中線大.

30. 三角形二中線相等者,必為二等邊三角形。

31. 三角形二角之二等分線相等者,必為二等邊三角形。



證明　若 $\angle ABC > ACB$ 此不合理。

蓋 $ED \parallel CF$, $FD \parallel CE$, 聯 BD 直線, $CE = FD$ 故 $\triangle FBD$ 為二等邊三角

形。

$\therefore$ $\angle DBF = FDB$

而$\angle ABF > ACE$ 即 $\angle ABF > FDE$,

$\therefore$ $\angle EDB > EBD$

$\therefore$ $BE > DE$,即 $BE > CF$。

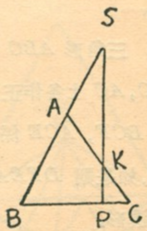
然於 $\triangle BCF$, $\triangle BEC$ 其 BC 爲公有之邊, $BF = CE$, $\angle FBC > ECB$。

$\therefore$ $BE < CF$

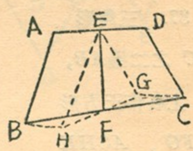
$\therefore$ $\angle ABC = ACB$

注意　別法詳後解法指針。

32. 由二等邊三角形 ABC 底邊 BC 上一點 P,作 BC 之垂線,與 CA, AB 相交於 K, S, 如是 $KP + SP$ 則必爲一定。



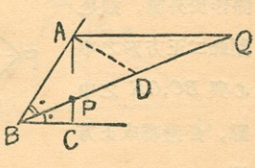
33. E, F, 爲 $ABCD$ 四邊形 AD, BC 二邊之中點,如是則 $AB + CD > 2EF$。



34. ABC 角之一邊 AB 上任取一點 A,由 A 作 BC 之垂線 AC, 以 AC 上一點 P 與 B 聯成直線,并延長之至與由 A 所作 BC 之平行線相交於 Q。

若 $PQ = 2AB$

則 $\angle PBC = \frac{1}{3} ABC$試證之。

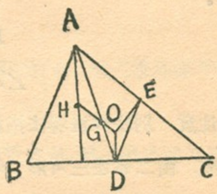


注意　此爲關於角之三等分法之問題，凡分任何角在初等幾何學,則以度數板及雙股規任意分析之,固不求甚解者也.

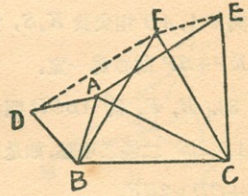
然如本題雖爲角三等分法,而欲求其 $PQ=2AB$ 則誠爲不能問題云。

研究不能問題，頗饒興味，特程度稍高，學者當就本題所述，悉心研究，又於林鶴一所著「初等幾何學作圖不能問題」熟玩之可也.

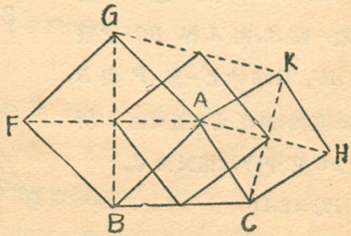
35　ABC 三角形之垂心 H，重心 G 外心 O 必同在一直線上。



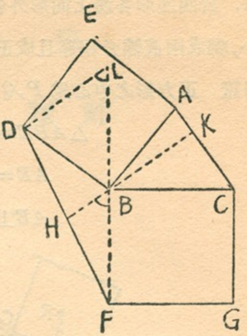
36. 三角形 ABC 之各邊 AB,BC,AC 上各作正三角形 ABD, BCF, ACE 係在 BC 之同側,如是則 $DFEA$ 必爲平行四邊形。



37. 三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上各作正方形 $ABFG$，$ACHK$ 係作於外側，如是則此二正方形之中心與 BC,GK 之中點，必適聯成正方形。

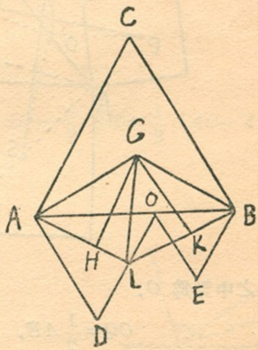


38. 三角形 ABC 之二邊 AB, BC 上向形外作正方形 $ABDE$, $BCGF$, 由 B 作 AC 之垂線, 其正交點爲 K, 而 DF 之中點爲 H, 如是則 H, B, K 三點, 必同在一直線上.

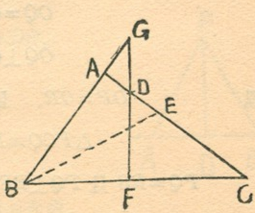


39. O 爲線分 AB 上之點, 於 AB, AO, BO, 上各作正三角形 ABC, AOD, BOE, 其三重心爲 G, H, K 如是則 $GH=GK$.

但 $\triangle ABC$ 與他二正三角形, 係在反對之側.



40. ABC 三角形 $AC>AB$, 於 AC 上取 CE, 令等於 AB, 其 AE 之中點爲 D, 而 BC 之中點爲 F, 又 BA, FD 之交點爲 G, 如是則 $AG=AD$, 試證之.



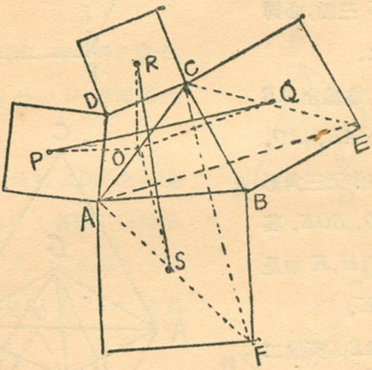
41. 於四邊形各邊上向形外各作正方形，其每對邊上正方形之中心，聯成兩直線必相等且成正交。

略證　正方形之中心爲 P,Q,R,S，$PQ=RS$，$PQ\perp RS$

蓋　$\triangle ABE\equiv BCF$

∴　$AE=CF$

且　$AE\perp CF$



CA 之中點爲 O，

$$OQ=\frac{1}{2}AE,\quad OS=\frac{1}{2}CF$$

∴　$OQ=OS$,

且　$OQ\perp OS$,

依同理　$OP=OR$，且 $OP\perp OR$

∴　$\triangle POQ\equiv ROS$

∴　$PQ=RS$ 且 $PQ\perp RS$,〔係以前題 27 屢次引用〕

附　　錄

解法指針

例題 II.

2. 二角相等者其外角必相等。

4.，6. 均依定理 3.

例題 III.

2. 兩二等分線所夾之角爲平角，故云。

4. 參照例題 II 6.

雜題 I.

1. $MN=AM-AN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AC-AB)$

$$=\frac{1}{2}BC$$

3. 等角之餘角必相等。

又對頂角必相等。

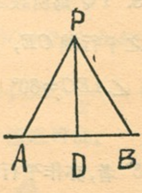
5. 與主要問題 1 同。

6. 依定理 3。

8. $PA=PB$ ∴ $DA=DB$。

而$\angle PDA=PDB$

依 PD 爲折痕而返折之。



例題 IV.

1. 如非同在一直線上，則不合理。

3.，4. 非相交則不合理。

例題 V.

2. 同位角相等.(直角)

3. $AC, A'B'$ 之交點爲 D.

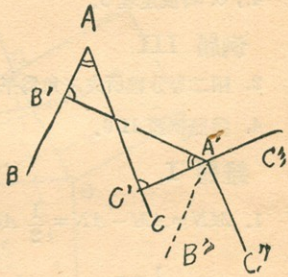
$$\angle A = ADA' = A'$$

5. $\angle A = B'A'C''$ $\quad\therefore\ \angle A + B'A'C' = 2R\angle$

7. 由 A' 依同向作 AB, AC 之平行線 $A'B'', A'C''$,

$\angle B'A'B'' = R\angle$

$\angle C'A'C'' = R\angle$



$\therefore\ \angle B'A'C' = B''A'C''$

然 $\angle BAC = B''A'C''$

$\therefore\ \angle BAC = B'A'C'$

次以 $C'A'$ 延長之,如 $A'C'''$,

則 $\angle BAC, \angle B'A'C'''$ 其二邊亦爲兩兩垂直.

然 $\angle B'A'C' + B'A'C''' = 2R\angle$

$\therefore\ \angle BAC + B'A'C''' = 2R\angle$

注意 依定理 22,較易證明.

8. PQ 爲所設之直線,AB 爲所求之直線. 求 $75°$ 者由 E 作 DF 之平行線 CE,

則 $\angle AEC = 60°$ $\quad\angle CEP = 45°$ $\quad\therefore\ \angle PEA = 60° + 45° = 105°$

$\therefore$ $\angle AEQ = 75°$,

求 $15°$ 者,亦作平行線可也.

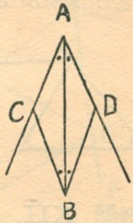
例題 VI.

1. $\triangle ABD \equiv ACD$.

3. $\triangle ABE \equiv ACD$.

6. $\triangle ABC \equiv A'B'C$

例題 VII.

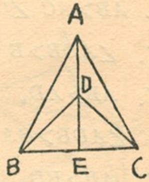


1. $\triangle ABC \equiv ABD$.

3. $\triangle ABO \equiv CDO$.

4. $\triangle ABC \equiv A'B'C$.

例題 VIII.



3. $\triangle ABD \equiv ACD$ $\therefore \angle BAD = CAD$ 故 AD 爲 BC 之垂直二等分線.

4. $\triangle ABE \equiv ACD$ $\therefore$ $BE = CD$.

例題 IX.

3. $\triangle ADB \equiv ACE$.

例題 X.

3. 二角相等者，其第三角亦必相等，故依二角夾邊之定理證之可也.

5. 與 3 同. 7. 依主要問題 9.

9. $AO+OB>c$, $OB+OC>a$, $OC+OA>b$. 相加,

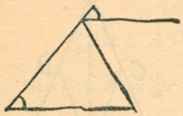
$2(AO+BO+CO)>a+b+c$. $\therefore AO+BO+CO>\frac{1}{2}(a+b+c.)$

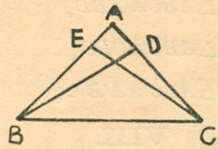
其 $a+b+c>AO+BO+CO$ 依主要問題 9 證之可也.

例題 XI.

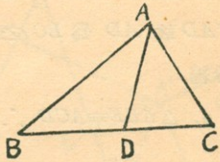
3. 同位角相等。

4. $\triangle BCE \equiv BCD$。





例題 XII.



4. $AB>AC \quad \angle C>B$

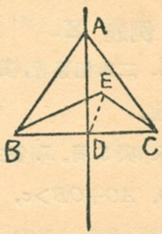
$\therefore \quad \angle ADB>B$

$\therefore \quad AB>AD$.

5. $\angle ADB>BAD$

$\therefore \quad AB>BD$.

例題 XIII.



1. 就 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ 比較。

2. 依定理 28。

3. 就 $\triangle EBD$, $\triangle ECD$ 比較。

例題 XIV.

5. n 邊形內角之和為 $(2n-4)$ 直角故，其一內角為 $\frac{2n-4}{n}$ 即 $2-\frac{4}{n}$ 直角。

6. 六個。

7. 正三角形之一內角為 $60°$，而多角形各外角之和，為 4 直

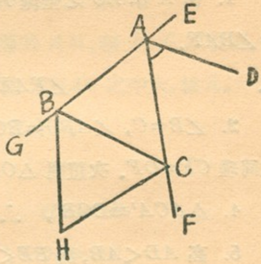
角卽 $360°$，注意於此可也。

8. $\angle EAC + FCB + CBG$

$= 4R\angle$

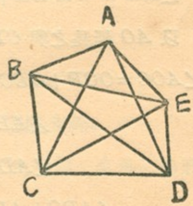
$\therefore \angle DAC + HCB + HBC$

$= 2R\angle$



以下三角形三內角之和，等於二直角。

10. 由一角點 A 得作對角線之數。除 A 及隣於 A 之 B，E 外，其餘如 $(5-3)$ 卽爲由 A 所作對角線之數。



依同理，B, C, D, E 各得作對角線之數 $(5-3)$。

故 5 個角點得作對角線之數爲 $(5-3)\times 5$，然重疊居半，故實際之數爲 $\dfrac{(5-3)\times 5}{2}$ 卽 5。

上式，5 爲邊數，以 n 代之，卽得公式如下，

$$\frac{(n-3)\times n}{2}$$

〔附言〕 單求此公式者如次：

多角形由一角點所作對角線之數，恆比邊數少 3。

故 n 邊形由一角點所作對線之數爲 $n-3$，

故 n 個頂點所作對角線之數爲 $(n-3)n$，

然其實際有半數重疊，故得式如次

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

雜題 II.

1. 由 A 作 BC 之垂線 AF, 則 $\angle E=FAE$, 又 $\angle DAC=C=\angle BAF$.

$$\therefore \qquad \angle FAE=\angle EAD.$$

2. $\angle B=C$, $\angle ABO=BOE$ $\because \angle OBE=BOE$, $\therefore BE=OE$ 依同理 $CF=OF$。次證明 $\triangle OEF$ 爲正三角形。

4. $\triangle ACA'\equiv BCB'$, $\therefore$ $AA'=BB'$。

5. 高 $AD<AB$, 高 $BE<BC$, 故云。

6. $\angle AA'B'=A'BA+BAA'=ABC$,

7. 以 AO 延長之與 CD 相交於 E,

$$\angle AOC=OCE+OEC=OCE+FAO+F\text{............}(1)$$

然
$$\angle ABC=F+BCF$$
$$\angle ADC=F+DAB$$
$$\therefore \qquad \angle ABC+ADC=2F+BCF+DAB$$
$$\therefore \qquad \frac{1}{2}(\angle ABC+ADC)=F+\frac{1}{2}(BCF+DAB)$$
$$=F+OCE+FAO\text{............}(2)$$

依(1), (2)式卽可得其證明。

8. $$\angle E=C+EBC$$
$$\therefore \qquad \angle E+ABE=C+ABC \text{ 故云,}$$

半差者 $\angle EBC=AEB-C$, 故云。

9. $\angle GAH$ 等於三角形三內角之和, 故云。

10. 取 AE, 令等於 AB, 聯成 DE,

$$\triangle ABD\equiv ADE \text{ 故云。}$$

11. 聯 D, C 成直線, $DC<BC$ 次 $\triangle DCE$ 其 $\angle E$ 比 $\angle DCE$

大，依此證明可也。〔問題 12 之圖〕

12. 聯 DC 直線，於 $\triangle BDC, BC>DC$ 故云。

13. 延長 AM 至 E，令 ME 等於 AM，聯 B, E 成直線，如是則 $\angle BAE > BEA$ 故 $\angle BAM$ 比 $\angle BAC$ 之半大，故云。

14. $\angle B, \angle C$ 之二等分線，相交於 O。

由 O 作各邊之垂線。

$$\triangle OBE \equiv OBD \qquad \therefore \quad OE = OD$$

$$\triangle OCE \equiv OCF \qquad \therefore \quad OE = OF。$$

15. 答 3,4,5,6,7,8,9,10,11。

例題 XV.

4., 8. 均可疊合。

9. 以斜邊之中點與直角之頂點，聯成直線。

10. 由頂點作底邊之垂線，分此三角形爲二直角三角形，又分二直角三角形各爲二二等邊三角形。

例題 XVI.

3. $FG \parallel BC$, $FG = \frac{1}{2}BC$,

EH 亦然。

5. 每相對邊中點所聯成之直線，係互截爲二等分，而 $EPFQ$ 爲平行四邊形，故由兩對角線之中點所聯成之 PQ，必通過 EF 之中點。

6. 由 M 作 AP 之平行線與 BC 相交於 D，乃於 $\triangle APC$，及 $\triangle BMD$，依定理 34 系 1 證明。

7. 與前題同。

8. 對角線之交點與下底之兩端所成兩距離，各取其中點聯成

直線。

9. 作中心線 BF。

10. AE 之中點 F 與 D 聯成直線,依定理 34 證明。

11. 由 AB 之中點 F 與 D,E 各聯成直線, $BF=DF$。故 $\triangle DFE$ 爲二等邊三角形。

12. AD,BC 之中點爲 M, N, 其 AB,CD 與 MN 相交於 E,F,如是則$\angle AEM=DFM$,何者,以 AC 之中點 O 聯成 OM, ON,依定理 34 證明可也。

例題 XVII.

6. 關於 MN 而爲 A 之對稱點如 A',聯成 $A'C$ 直線,

則 $\qquad \angle ACM=A'CM \quad \therefore \quad \angle A'CM=BCN$

故 $A'CB$ 成爲一直線,而 $AC=A'C$ 故 $AC+CB=A'B$

次任於 MN上 取 D 點,聯成 $AD,BD,A'D$ 諸直線, $AD=A'D$

$$\therefore \qquad AD+BD=A'D+BD$$

然 $A'D+BD>A'B$,故云最小。

7. 由 B 作 MN 之垂線與 AC 交於 B',

則 $\qquad CB=CB' \quad \therefore \quad AC-BC=AB'$

次任於 MN 上取 D 點,聯成 DA,DB,DB' 諸直線,

則 $\qquad BD=B'D \quad \therefore \quad AD-BD=AD-B'D$,

然 $AD-B'D-B'D<AB'$ 故云最大。

雜題 III.

1. $OE=OF,OB=OD$ 故 $EBFD$ 爲平行四邊形。

2. $OE=OG,OF=OH$ 故 $EFGH$ 爲平行四邊形。

3. 因平行四邊形對角線之交點,爲對稱之中心。

5. $AFCH$ 爲平行四邊形,

$HBFD$ 爲平行四邊形,

∴ $EFGH$ 爲平行四邊形。

8. 依前題,各角皆爲直角,故爲矩形。

9. 依前題,$EFGH$ 爲矩形。

$\triangle AEB \equiv CGD$ ∴ $BE=CG$, 又 $BH=CH$ ∴ $EH=HG$

故爲正方形。

10. 由 D 作 AB 之平行線。

11. 由 M 作 PQ 之垂線 MR, 以下依定理 34 系 3。

12. 由 M 作 AP 之垂線 MR, 以下依前題。

13. $AA'+CC'=200'$ $BB'+DD'=200'$。

14. 依主要問題 17。

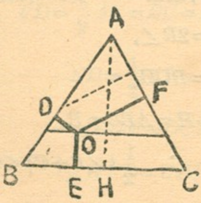
15. $PD \perp AB, PE \perp AC$, 其 $PD+PE$ 必爲一定。

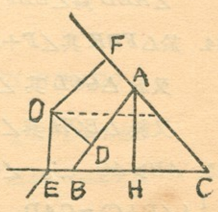
蓋 $BF \perp AC, PG \perp BF$ $\triangle PDB \equiv PBG$ ∴ $PD=BG$,

又 $PE=GF$ ∴ $PD+PE=BF$,

又 P 點在底邊之延長線上,仍依此作圖可也。

16. 由正三角形內之一點準與一邊平行,作一直線,依前題卽知三垂線之和,等於正三角形之高。此點若在形外, 其二垂線之和



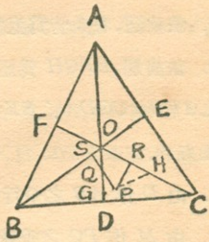


減去他一垂線之餘必爲一定(高)。

$OD+OE+OF=AH$,　　　$OE+OF-OD=AH$

17. $PR+PQ=PS$

何者,由 P 點準與 BE 平行作一直線,與他兩二等分線相交於 G,H,如是則 $\triangle OGH$ 爲正三角形,而 PS 爲其高,故依前題,$PQ+PR=PS$。



全編之雜題

6. 斜邊之中點與直角之項點聯成正三角形。

答 3 尺。

7. 以對角線爲一邊,作三角形觀之。

8. 以對角線之交點爲公共之項點,作四個三角觀之。

10. 聯 BF 直線,則 $\triangle BEF\equiv BCF$,又 $\triangle DEF$ 爲二等邊三角形。

11. 卽係求路徑之最短。參照例題 XVII. 6。

12. 參照前題。

13. $\angle ADB$ 爲 $\angle ABD$ 之餘角。

$\angle AED$ 爲 $\angle EBF$ 之餘角,故 $\triangle AED$ 爲二等邊三角形。

14. 於 $\triangle FBK$ 其 $\angle F+B+K=2R\angle$,

又於 $\triangle GCL$ 其 $\angle G+L=BCH$,

又於 $\triangle BCH$ 其 $\angle BCH+H=ABC=B$。

15. $AB>AC$　$\therefore$　$\angle C>B$　$\therefore$　$\frac{1}{2}(\angle B+C)<C$,

而　$\frac{1}{2}(\angle B+C)=CAD$,

然 $$\angle A+B+C=2R\angle$$

∴ $$\angle B+\frac{1}{2}(B+C)+A<A+B+C$$

∴ $\angle B+DAB<2R\angle$ 故在 C 端之延長上。

16. 二個中線相等者，爲二等邊三角形。

17. 由 C 準與 DE 平行作 CF，與 AD 相交於 F。

則 $CE=DF, CE=BD$ ∴ $BD=DF$，故於 $\triangle BCF$ 知 O 爲 BC 之中點。

18. 與例題 XVI. 5 同意。

19. $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}B+E=2$ 直角。

又 $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D=2$ 直角。

∴ $$\angle E=\frac{1}{2}(C+D)$$

次於四邊形 $ABED$ 其 $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}BED+\frac{1}{2}D=2$直角，

又於四邊形 $CBED$ 其

$$\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}BED+\frac{1}{2}D=2\text{直角}.$$

20. $\triangle ADG\equiv ABE$ ∴ $\angle DAG=BAE$, ∴ $\angle FAG=FAB$ $\angle FAB=AFG$ ∴ $\angle FAG=AFG$ ∴ $GA=GF$。

22. $FD=\frac{1}{2}AC=EC=EG$,

$$ED=\frac{1}{2}AB=FB=FH, BD=DC$$

∴ $\triangle BDF\equiv DCE$ ∴ $\angle BFD=DEC$

∴ $\angle HFD=GED$ ∴ $\triangle DEG\equiv DFH$

次 $\angle H+BFD+FDH=$ 直角，

而　$\angle H = EDG, \angle BFD = FDE,$

$\therefore$ $\angle EDG + FDE + FDH =$ 直角卽 $\angle GDH =$ 直角.

23. $\angle LAH = HDM$, 而 $\angle HDM = LHA$,

$\therefore$ $$\angle LAH = LHA$$

$\therefore$ $LH = LA$, 依同理, $NG = NC$

又　$HG = LN$　$\therefore$　$LH + HG + NG = AC$

依同理, $LE + EF + FN = AC$ 故 $EFGH$ 之周, 等於 $2AC$, 爲一定。

24. 聯 EG, FG 兩直線, $\triangle EBC, \triangle FBC$, 各爲直角三角形,

$$EG = \frac{1}{2} BC = FG.$$

28. 依主要問題 11, 知 $AB + AC > 2AD$.

29. $AB > AC$ 作第三之中線 AD, 先於 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 其 $\angle ADB > ADC$, 次以 $\triangle GBD, \triangle GCD$ 作比較。

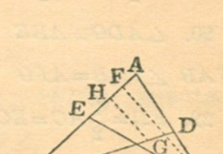
30. 作第三之中線。

31. $\angle B, \angle C$ 之二等分線 $BD = CE$.

若 $AC < AB$ 此不合理,

蓋　$AC < AB$

則 $\angle ABC < ACB$　$\therefore \angle ACE > ABD$ 取 $\angle ECF$ 等於 $\angle ABD$, 於 $\triangle FBC$ 則 $\angle FCB > FBC$ 故 $BF > CF$ 於 BF 上取 BH 等於



CF, 又 $HG \parallel CF$ 如是則 $\triangle BHG \equiv ECF$　$\therefore$　$BG = CE = BD$, 是不合理, 故必爲二等邊也。

32. 由 C 作 AB 之平行線, 其 $PS + PK$ 恆在此二行線間,

爲一定之線分。

33. 以 AE, AB 爲二隣邊，作平行四邊形 $AEHB$，又以 ED, DC 爲二隣邊，作平行四邊形 $EDCG$ 聯 G, H 成直線。

34. PQ 之中點 D 與 A 聯成 AD，則 $AD=PD=QD$，故 $\triangle DAQ$, $\triangle ADP$ 各爲二等邊三角形。

35. $\triangle ABH$, $\triangle ODE$ 爲等角，AB 爲 DE 之二倍，故 $AH=2OD$ 次聯 AD 直線與 HO 相交於 G，如是則 $\triangle AGH$, $\triangle OGD$ 爲等角，而 $AH=2OD$ 故 $AG=2GD$，故 G 爲重心。

36. $\triangle FBD \equiv ABC \quad \therefore \quad DF=AC=AE$.

又 $\quad \triangle CEF \equiv ABC \quad \therefore \quad EF=AB=AD$.

故爲平行四邊形。

37. 依主要問題 16，而 $\triangle ABK \equiv ACG \quad \therefore \quad BK=CG$，故此平行四邊形爲菱形，次 $BK \perp CG$〔前題27〕故爲正方形。

38. 將 FB 延長至 L，令 BL 等於 FB，聯成 LD, BH 兩直線，

$$\triangle DLB \equiv ABC \quad \therefore \quad \angle DLB=C, \quad \angle DLB=FBH$$

$\therefore \quad \angle C=FBH, \quad \angle C+KBC=R\angle \quad \therefore \quad \angle FBH+KBC=R\angle$

$\therefore \quad \angle HBK=2R\angle$.

39. AH, BK 之交點爲 L，聯成 LG。

$\triangle AGB \equiv ALB$ 故 $ALBG$ 爲菱形，

$\angle GAL=60^\circ$ 故 GAL 爲正三角形，$\therefore \quad AG=LG$,

$LB \parallel OH$, $LA \parallel OK$ 故 $OKLH$ 爲平行四邊形。

$\therefore LK=OH=AH \quad \therefore \triangle GHA \equiv GKL \quad \therefore GH=GK$.

40. 聯 B, E 成直線，其中點爲 O，又聯成 OF, OD 兩直線，

如是則 $\triangle ODF$ 爲二等邊故云。

(終)

王雲五主編
萬有文庫
第一集一千種

幾何學—直線圖形

林鶴一 菅集人著
黃元吉譯

發行兼印刷者 上海寶山路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

中華民國十九年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

RECTILINEAR FIGURE
By
HAYASHI and SUGA
Translated by
HUANG YUAN CHI
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930