Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2025**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Es sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 22.2. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge aller Nichtnullteiler in R ein multiplikatives System bildet.

Aufgabe 22.3. Es sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die eine abbrechende Dezimalentwicklung besitzen. Zeige, dass A ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und bestimme die Einheiten von A.

Aufgabe 22.4.*

Es sei $\mathbb{Z}_n$ die Nenneraufnahme zu n ($\mathbb{Z}_n$ besteht also aus allen rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von n als Nenner schreiben kann). Zeige, dass es nur endlich viele Unterringe R mit

$$\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Z}_n$$

gibt, und charakterisiere diese unter Verwendung der Primfaktorzerlegung von n.

Aufgabe 22.5.*

Es sei R ein Zahlbereich und seien $f, g \in \mathbb{Z}$ teilerfremde Zahlen. Zeige, dass für den (im Quotientenkörper $Q(R)$ genommenen) Durchschnitt

$$R_f \cap R_g = R$$

gilt.

AUFGABE 22.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$R_T = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben, in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkomme}$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2, 5\}$, $T = \mathbb{P}$?

AUFGABE 22.7. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

AUFGABE 22.8. Zeige, dass jeder Unterring von $\mathbb{Q}$ eine Nenneraufnahme ist.

AUFGABE 22.9. Es sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$.

(1) Zeige, dass die Nenneraufnahme zu S, also R_S mit
$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$
ein Unterring von $Q(R)$ ist.
(2) Zeige, dass nicht jeder Unterring von $Q(R)$ eine Nenneraufnahme ist.

AUFGABE 22.10. Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

AUFGABE 22.11. Es sei $D \neq 0, 1$ eine quadratfreie Zahl, sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und sei A_D der zugehörige Ganzheitsring. Zeige, dass nach Nenneraufnahme an 2 ein Ringisomorphismus
$$R_2 \longrightarrow (A_D)_2$$
vorliegt.

AUFGABE 22.12. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*
$$R_S$$
schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S, also
$$M = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\}.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ mit } trs' = tr's \text{ gibt},$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

Aufgabe 22.13. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Ringisomorphie

$$R_e \cong R/(1-e)$$

gibt.

Aufgabe 22.14. Es sei R ein kommutativer Ring, $f \in R$ ein Element und R_f die zugehörige Nenneraufnahme. Zeige, dass f genau dann nilpotent ist, wenn R_f der Nullring ist.

Aufgabe 22.15.*

Es seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei

$$\varphi\colon R \longrightarrow A$$

ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon R_S \longrightarrow A,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 22.16. Es sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Definiere die „Nenneraufnahme“

$$M_S$$

und zeige, dass sie ein R_S-Modul ist.

Aufgabe 22.17. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a+b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Lemma 22.8 gilt auch ohne die Voraussetzung, dass R ein Integritätsbereich ist.

AUFGABE 22.18.*

Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Zeige, dass die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in \mathfrak{p},\, g \notin \mathfrak{p} \right\}$$

ist.

AUFGABE 22.19. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) R ist normal.
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

AUFGABE 22.20.*

Es sei K ein Körper und sei

$$\nu\colon\ (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \mid \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

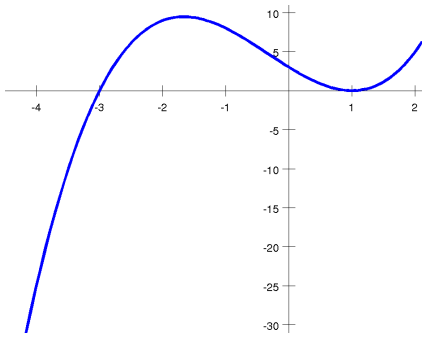
ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 22.21. Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

AUFGABE 22.22. Es sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?



AUFGABE 22.23. Es sei $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, und $a \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f in irreduzible Polynome.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$ von $\mathbb{C}[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

AUFGABE 22.24. Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ minimalen Grades, das an der Stelle 3 mit der Ordnung zwei verschwindet, das an der Stelle i mit der Ordnung fünf verschwindet und das an den Stellen $0, 3-2\mathrm{i}$ und $7\mathrm{i}$ einfach verschwindet.

AUFGABE 22.25. Es sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subseteq K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

AUFGABE 22.26.*

Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist der Restklassenring $S = R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(S)$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

vorliegt.

Den in der vorstehenden Aufgabe beschriebenen Körper nennt man auch den *Restekörper* von $\mathfrak{p}$

man bezeichnet ihn mit $\kappa(\mathfrak{p})$. Die Abbildung

$$R \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}),\, f \longmapsto f \mod \mathfrak{p},$$

(aufgefasst in diesem Körper) heißt auch die *Auswertungsabbildung* (oder *Evaluationsabbildung*) an der Stelle $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 22.27. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow K$$

ein Ringhomomorphismus in einen Körper K. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Faktorisierung

$$R \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow K$$

mit einem Restekörper $\kappa(\mathfrak{p})$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gibt.

Aufgabe 22.28. Zeige, dass zu $a \in \mathbb{C}$ der Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C},\, X \longmapsto a,$$

mit der Evaluationsabbildung (in den Restekörper $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}/(X-a)\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$) zum Primideal $(X-a)$ übereinstimmt.

Aufgabe 22.29. Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgabe 22.30. Es sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $R = \bigcap_{i\in I} R_i$, wobei die $R_i \subseteq K$, $i \in I$, alle diskrete Bewertungsringe seien. Zeige: R ist normal.

Aufgabe 22.31. Beschreibe die nilpotenten Elemente von $\mathbb{Z}/(n)$ und die Reduktion von $\mathbb{Z}/(n)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.32. (4 Punkte)

Es seien n und k teilerfremde Zahlen und sei $\mathbb{Z} \subseteq R$ ein kommutativer Ring. Zeige, dass es eine Ringisomorphie

$$R/(n) \cong (R_k)/(n)$$

gibt.

Aufgabe 22.33. (3 Punkte)

Es sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

Aufgabe 22.34. (3 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ genau dann ist, wenn für alle Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 22.35. (7 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) n ist die Potenz einer Primzahl.
(2) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist zusammenhängend.
(3) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist lokal.
(4) Die Reduktion von $\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Körper.
(5) Jeder Nullteiler von $\mathbb{Z}/(n)$ ist nilpotent.
(6) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ besitzt genau ein Primideal.
(7) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ besitzt genau ein maximales Ideal.

Aufgabe 22.36. (4 Punkte)

Es sei $D \neq 1$ quadratfrei und $D = 1 \mod 4$. Finde in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ derart, dass die Lokalisierung an $\mathfrak{p}$ kein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.37. (4 Punkte)

Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (p)$. Zeige, dass die Ordnung

$$R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},\ f \longmapsto \operatorname{ord}(f),$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) $\operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord}(f) + \operatorname{ord}(g)$.
(2) $\operatorname{ord}(f+g) \geq \min(\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g))$.
(3) Es ist $f \in \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $\operatorname{ord}(f) \geq 1$ ist.
(4) Es ist $f \in R^\times$ genau dann, wenn $\operatorname{ord}(f) = 0$ ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Brent method example.png , Autor = Benutzer Jitse Niesen auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 5

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9