*160. 二次三項式ノ最大値又ハ最小値ヲ求ムル問題ノ例

例 1. x^2-8x+5 ノ最小値ヲ求ムルコト.

第一解 $x^2-8x+5=y$ トオケバ, $x^2-8x+5-y=0$ ナリ,然ルニ x ハ實數ナルニヨリ,此方程式ノ判別式ハ負數ナル能ハズ.

$$\therefore\ 64-4(5-y)\geqq 0\quad 卽チ\quad 16-(5-y)\geqq 0$$
$$\therefore\ 9+y\geqq 0$$
$$\therefore\ y\geqq -9$$

即 y ノ値ハ -9 ヨリ大ナルカ又ハ -9 ニ等シカラザルベカラズ.

因テ $y=x^2-8x+5$ ノ最小値ハ -9 ナリ.

第二解 $x^2-8x+5=(x-4)^2-9$

然ルニ x ハ實數ナルユヱ, $(x-4)^2$ ハ 0 ヨリ小ナルコトナシ,因テ原式ノ最小値ハ -9 ナリ.

例 2. $1+6x-9x^2$ ノ最大値ヲ求ムルコト.

第一解 $1+6x-9x^2=y$ トオケバ $9x^2-6x+y-1=0$

然ルニ x ハ實數ナルニヨリ

$$9-9(y-1)\geqq 0$$
$$\therefore\ 18-9y\geqq 0$$
$$\therefore\ 18\geqq 9y$$
$$\therefore\ 2\geqq y$$

故ニ $y=1+6x-9x^2$ ノ最大値ハ 2 ナリ.

3, 4, 5, 6, 7

第二解 $-9x^2+6x+1=2-(9x^2-6x+1)=2-(3x-1)^2$

卽チ原式ハ 2 ヨリ $(3x-1)^2$ ヲ引キタルモノニ等シ,故ニ引クベキ $(3x-1)^2$ ガ最小ナルトキ原式ハ最大トナル.

然ルニ $(3x-1)^2$ ノ最小値ハ 0 ナリ,從テ原式ノ最大値ハ 2 ナリ.

例 3. 二數ノ和ガ不易ナルトキ其積ハ二數ガ相等シキトキ最大ナルコトヲ證明セヨ.

第一解 二數ノ和ヲ a トシ其中ノ一數ヲ x トスレバ今一ツノ數ハ $a-x$ ナリ. 因テ其積ハ $x(a-x)$ ニテ表ハサル.

サテ
$$x(a-x)=ax-x^2=\frac{1}{4}a^2-\left(\frac{1}{4}a^2-ax+x^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}a^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

此式ハ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$ ナルトキ卽チ $x=\frac{a}{2}$ 從テ $a-x=\frac{a}{2}$ ナルトキニ其値最大ナリ. 卽チ二數ノ和ガ不易ナルトキ其積ハ二數ガ相等シキトキ最大ナリ.

第二解 二數ヲ x 及 y ニテ表セバ其和 $x+y$ ハ不易ナリ. 之ヲ s トスレバ恒等式 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ ヨリ $4xy=s^2-(x-y)^2$ $\therefore\ xy=\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{4}(x-y)^2$

然ルニ $\frac{1}{4}s^2-(x-y)^2$ 卽チ xy ハ $(x-y)^2=0$ ナルトキ卽チ $x=y$ ナルトキ其値最大ナルコト明カナリ. 卽チ和ガ一定ナル二數ノ積ハ其二數ガ相等シキトキ最大

ナリ.

[第三解]　二數ノ和ヲ $2a$ トシ,其中ノ一數ヲ $a+x$ トスレバ今一ツノ數ハ $2a-(a+x)$ 即チ $a-x$ ナリ. 因テ此二數ノ積ハ $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ トナル,而シテ a^2+x^2 ハ $x=0$ ナルトキ最大値ヲ有スルコト明カナリ. 即チ二數ガ何レモ a ニ等シキトキ即チ二數ガ相等シキトキ其積最大トナル.

[注意]　與ヘラレタル有限直線ヲ二ツニ分チ其各ヲ二邊トスル矩形ノ面積ヲ最大ナラシムルコトノ問題ハ結局本問題ト同一ニシテ此直線ヲ二等分スベキナリ.

*161. 分子,分母ガ x ニツキ二次以下ナル分數式ノ値ノ限界ヲ定ムル問題ノ例

$\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ ナル形ノ分數式ノ値ハ x ニ種々ノ實値ヲ與フルニ從ヒテ變ズルコト明カナリ. 但シ a, b, c a', b', c' ノ値ニ依リテ x ニ如何ナル實値ヲ與フルモ吾ガ望ム所ノ値ヲ有セシムル能ハザルコトアリ(例ヘバ此分數式ヲ 3 ニ等シカラシメンニハ其分子ガ分母ノ 3 倍ニナル如キ x ノ實値アラザルベカラズ,故ニ若シ $ax^2+bx+c=3(a'x^2+b'x+c')$ ナル二次方程式ガ實根ヲ有セザレバ x ニ如何ナル實値ヲ與フルモ此分數式ノ値ヲ 3 ニ等シカラシムル能ハズ)又ハ吾ガ望ミ通リノ値ヲ

有セシメ得ルコトアリ. 今例ニツキテカヽル形ノ分數式ガ取リ得ル値ノ制限ヲ論ゼントス.

例 1.　x ガ實數ナルトキ,分數式 $\dfrac{2x-3}{x^2}$ ノ値ノ制限ヲ論ズルコト.

$\dfrac{2x-3}{x^2}=\lambda$ トオキ,其分母ヲ拂ヘバ

$$2x-3=\lambda x^2$$

之ヲ移項スレバ　$\lambda x^2-2x+3=0$

然ルニ x ハ實數ナルニヨリ

$$1-3\lambda \geqq 0$$

$$\therefore\quad 1 \geqq 3\lambda$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3} \geqq \lambda$$

故ニ此分數式ノ値ハ $\frac{1}{3}$ ヨリ小ナルカ又ハ之ニ等シカラザルベカラズ.

即チ x ニ適當ナル實數ヲ與フレバ $\frac{1}{3}$ 以下ノ任意ノ値ニ等シカラシムルコトヲ得レドモ x ニ如何ナル實數ヲ與フルモ此分數式ノ値ハ決シテ $\frac{1}{3}$ ヨリモ大ナラシムルコト能ハズ.

[注意]　此分數式ノ最大値ハ $\frac{1}{3}$ ナリ.

例 2.　x ガ實數ナルトキ $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ ノ値ノ制限ヲ論ズルコト.

$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}=\lambda$ トオキ,分母ヲ拂ヘバ

$$x^2-6x+5=\lambda(x^2+2x+1)$$

之ヲ移項スレバ

$$(1-\lambda)x^2-2(3+\lambda)x+5-\lambda=0$$

然ルニxハ實數ナルニヨリ

$$(3+\lambda)^2-(1-\lambda)(5-\lambda)\geqq 0$$

卽チ　$$9+6\lambda+\lambda^2-5+6\lambda-\lambda^2\geqq 0$$

$$\therefore\quad 4+12\lambda\geqq 0$$

$$\therefore\quad 12\lambda\geqq -4$$

$$\therefore\quad \lambda\geqq -\frac{1}{3}$$

因テ此分數式ノ數値ハ$-\frac{1}{3}$ヨリ大ナルカ又ハ之ニ等シ($-\frac{1}{3}$ヨリ小サクナルコトハ決シテナシ).

注意　此分數式ノ最小値ハ$-\frac{1}{3}$ナリ.

例 3.　xガ實數ナルトキ$\frac{1}{2x-x^2-7}$ノ數値ノ限界ヲ求ム.

$\frac{1}{2x-x^2-7}=\lambda$　トオキ,分母ヲ拂ヘバ

$$1=\lambda(2x-x^2-7)$$

之ヲ移項スレバ

$$\lambda x^2-2\lambda x+1+7\lambda=0$$

然ルニxハ實數ナルニヨリ

$$\lambda^2-\lambda(1+7\lambda)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -6\lambda^2-\lambda\geqq 0\quad 卽チ\quad 6\lambda^2+\lambda\leqq 0$$

卽チ　$6\lambda^2+\lambda=0$　カ然ラザレバ$6\lambda^2+\lambda<0$ナラザルベカラズ.

然ルニ　$6\lambda^2+\lambda=0$　ナルタメニハ$\lambda=0$又ハ$\lambda=-\frac{1}{6}$ナラザルベカラズ,サレド原式ハxニ如何ナル實値ヲ與フルモ決シテ0トナラズ,卽チ$\lambda=0$ハ棄テザルベカラズ.

又$6\lambda^2+\lambda<0$卽チ二次式$6\lambda^2+\lambda$ヲ負ナラシムルタメニハ(第158節第三)ニ依リテ$-\frac{1}{6}<\lambda<0$　ナラザルベカラズ.

卽チ與ヘラレタル分數式ノ數値ハxニ如何ナル實値ヲ與フルモ$-\frac{1}{6}$カ然ラザレバ$-\frac{1}{6}$ヨリハ大キク0ヨリハ小サキ値(卽チ$-\frac{1}{6}$ト0トノ間ニ在ル値)ノ外如何ナル値ニモ等シキ能ハズ.

此事ヲ略シテ　$-\frac{1}{6}\leqq\frac{1}{2x-x^2-7}<0$　ト書ク.

注意　此分數式ノ最小値ハ$-\frac{1}{6}$ナリ.

例 4.　xガ實數ナルトキ$\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ノ數値ノ限界如何.

$\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}=\lambda$　トオキ,分母ヲ拂ヘバ

$$x^2-2x+3=\lambda(x^2+2x-3)$$

$$\therefore\quad (1-\lambda)x^2-2(1+\lambda)x+3(1+\lambda)=0$$

然ルニxハ實數ナルニヨリ

$$(1+\lambda)^2-3(1+\lambda)(1-\lambda)\geqq 0$$

$$\therefore\quad 1+2\lambda+\lambda^2-3+3\lambda^2\geqq 0$$

$$\therefore\quad 4\lambda^2+2\lambda-2\geqq 0$$

$$\therefore \quad 2\lambda^2+\lambda-1 \geqq 0$$

$$\therefore \quad (2\lambda-1)(\lambda+1) \geqq 0$$

サテ第158節(第三)ニ依リテ $(2\lambda-1)(\lambda+1)>0$ ナルタヨニハ $\lambda>\frac{1}{2}$ カ然ラザレバ $\lambda<-1$ ナルコトヲ要シ，

又 $(2\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ナルタメニハ $\lambda=\frac{1}{2}$ カ然ラザレバ $\lambda=-1$ ナルコトヲ要ス.

即チ此分數式ハ x ニ如何ナル實値ヲ與フルモ決シテ -1 ト $\frac{1}{2}$ トノ間ニ在ル數ニ等シキコト能ハズ.

例 5. 正ノ二數ノ積ガ不易ナルトキハ其和ハ二數ガ相等シキトキニ最小ナルコトヲ證明セヨ.

第一解 二數ノ積ヲ $a^2(a>0$ トス$)$ トシ一數ヲ x $(x>0)$ ナリトスレバ今一ツノ數ハ $\frac{a^2}{x}$ ニシテ其和ハ $x+\frac{a^2}{x}=\frac{x^2+a^2}{x}$ ナリ,此式ヲ λ トスレバ

$$\frac{x^2+a^2}{x}=\lambda$$

$$\therefore \quad x^2+a^2=\lambda x$$

$$\therefore \quad x^2-\lambda x+a^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ x ハ實數ナルニヨリ

$$\lambda^2-4a^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad \lambda^2 \geqq 4a^2$$

然ルニ $\lambda>0$ ナルベキヲ以テ，$\lambda>2a$ 又ハ $\lambda=2a$ 即チ λ ノ最小値ハ $2a$ ナリ. ソコデ(1)ノ λ ヲ $2a$ トシテ此方程式ヲ解ケバ $x=a$ ヲ得従テ今一ツノ數モ亦 $\frac{a^2}{x}=a$ トナル. 即チ二數ガ何レモ a ニ等シキトキ即チ二數ガ

相等シキトキ其和最小ナリ.

第二解 二數ヲ x, y ニテ表セバ xy ハ不易ナリ,之ヲ P トスレバ恒等式

$$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$$

ヨリ

$$(x+y)^2=4P+(x-y)^2$$

然ルニ $4P+(x-y)^2$ 即チ $(x+y)^2$ ハ $(x-y)^2=0$ 即チ $x=y$ ナルトキ最小ナルコト明カナリ. 即チ積ガ一定ナル二ツノ正數ノ和ハ其二數ガ相等シキ時最小ナリ.

注意 面積ガ與ヘラレタル矩形ノ中デ其周圍ノ最小ナル者ヲ求ムルコトハ結局本問題ト同一ニシテ即チ各邊ガ相等シキ者即チ正方形ガ其周最小ナリ.

*162. 二次三項式應用雑題

1. 次ノ不等式ヲ解ケ(32年東京高等工業).

$$-3x^2+26x-35>0$$

解 先ヅ $-3x^2+26x-35=0$ 即チ $3x^2-26x+35=0$ ノ根ヲ求ムレバ

$$x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-3\times35}}{3}=\frac{13\pm\sqrt{64}}{3}=\frac{13\pm8}{3}$$

$$\therefore \quad x=\frac{13+8}{2}=7 \quad 又ハ \quad x=\frac{13-8}{3}=\frac{5}{3}$$

サテ與ヘラレタル不等式ヲ解クハ即チ三項式 $-3x^2+26x-35$ ノ符號ヲシテ此 x^2 ノ係數 -3 ノ符號ト異ナラシムレバ可ナルヲ以テ(第158節第三ニ依リ)求ムル答ハ $\frac{5}{3}<x<7$ ナリ.

2. x ニ如何ナル實數ヲ與フルモ $a^2x^2+(b-k)x+1$ ガ常ニ同ジ符號ヲ有スル爲ニハ k ノ値ヲ如何ニスベキカ.

解 原式ハ如何ナル實値ヲ與フルモ其符號ガ變ラヌ爲メニハ(第158節注意ニ依リ) $(b-k)^2-4a^2<0$ ナルヲ要ス.

即チ $$(b-k+2a)(b-k-2a)<0$$

即チ $$\{k-(b+2a)\}\{k-(b-2a)\}<0$$ ナルヲ要ス.

即チ k ハ $b+2a$ ト $b-2a$ トノ間ニアル數ナリ.

3. $x^2+px+\dfrac{p}{2}$ ガ x ノ値ニ拘ラズ正ナルタメニ p ニ與フベキ値ノ限界ヲ求ム(43年,東京工業).

解 與ヘラレタル式ノ x^2 ノ係數ハ正ナルヲ以テ原式ガ常ニ正數ナル爲ニハ(第158節注意ニヨリ)

$$p^2-4\times\frac{p}{2}=p^2-2p<0$$ ナルコトヲ要ス

即チ $$p(p-2)<0$$ ナルコトヲ要ス

即チ(第158節第三ニ依リテ) $0<p<2$ ナルコトヲ要ス,

是レ即チ求ムル p ノ限界ナリ.

4. 次ノ方程式ノ根ガ實根ナル爲ニ a ノ取ルベキ値ノ限界ヲ求ムベシ(39年,東京高等工業).

$$x^2+2(a-1)x+5a-9=0$$

解 此方程式ガ實根ヲ有スル爲ニハ

$$(a-1)^2-(5a-9)\geqq 0$$

即チ $$a^2-7a+10\geqq 0$$

即チ $$(a-2)(a-5)\geqq 0$$

ナルコトヲ要ス. 從テ $a\leqq 2$ 又ハ $a\geqq 5$ ナルコトヲ要ス.

5. 次式ノ値ヲ3ナラシムベキ x ノ實數ヲ問フ,且ツ a ノ範圍ニ就テ吟味セヨ(38年,海軍兵).

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2}$$

解 $\dfrac{x^2-ax-12}{x^2+2}=3$ トスレバ $x^2-ax-12=3x^2+6$

$\therefore$ $$2x^2+ax+18=0$$

$\therefore$ $$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times2\times18}}{4}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4^2\times3^2}}{4}$$

x^2-6x

此 x ガ實ナルタメニハ $a^2-12^2\geqq 0$ ナルヲ要ス,即チ

$$a\leqq -12 \text{ 又ハ } a\geqq 12$$ ナルヲ要ス.

是レ即チ求ムル a ノ範圍ナリ.

6. $x^2-6x+14$ ノ値ヲ最少ナラシムル x ノ實數如何(37年,海軍兵).

解 $x^2-6x+14=(x-3)^2+5$ コレニ依リテ x ガ實數ナル限リ原式ノ値ハ5ヨリ小ナル能ハズ,即チ5ガ最小値ナリ. 而シテ原式ヲ5ニ等シカラシムルニハ $x-3=0$ 即チ $x=3$ ナルヲ要ス.

故ニ求ムル x ノ値ハ3ナリ.

7. 二ツノ數ノ和ハ8ナリ,其ノ平方ノ和ノ最小値ヲ求ム(35年仙臺醫學專門).

解 一數ヲ x トスレバ今一ツノ數ハ $8-x$ ナリ. 故ニ其平方和ハ $$x^2+(8-x)^2=2x^2-16x+64$$

之ヲ λ トスレバ方程式 $2x^2-16x+64=\lambda$ 即チ $2x^2-16x+64-\lambda=0$

根(x)ハ實ナラザルベカラズ

$$\therefore\quad 64-2(64-\lambda)\geqq 0$$

$$32-64+\lambda\geqq 0$$

$$\lambda\geqq 32$$

故ニ λ ノ最小値ハ32ナリ.

$\boxed{\text{別解第一}}$ 一數ヲ $4+x$ トスレバ今一ツノ數ハ $4-x$ ナリ.

從テ二數ノ平方ノ和ハ

$$(4+x)^2+(4-x)^2=(16+8x+x^2)+(16-8x+x^2)=2(16+x^2)$$

ニシテ其値ハ $x=0$ 從テ各數ガ4ナルトキ最小ニシテ32ナリ.

$\boxed{\text{別解第二}}$ 二數ヲ x, y トスレバ $x+y=8$ ナリ.

$$\therefore\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=64-2xy$$

ヨリテ x^2+y^2 ノ値ハ xy ガ最大ナルトキニ最小ナリ. 然ルニ $x+y$ ハ不易ナルヲ以テ xy ハ(第160節ノ例3ニ依リ) $x=y=4$ ナルトキニ最大ナリ. 因テ x^2+y^2 ノ最小値ハ $64-2\times4\times4=64-32=32$ ナリ.

8. 和ガ 121 トナル二ツノ正ノ整數ニテ其積ノ最大ナル者如何.

解　一數ヲ x トスレバ今一ツノ數ハ $121-x$ ニシテ其積ハ $x(121-x)$ ナリ,之ヲ λ トスレバ

$$x(121-x)=\lambda \quad 即チ \quad x^2-121x+\lambda=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

x ハ實數ナルベキヲ以テ　$121^2-4\lambda \geqq 0$　$\therefore$　$121^2 \geqq 4\lambda$

然ルニ λ ハ整數ナルヲ以テ其値ハ 121^2 ヲ 4 ニテ割リタル商ノ整商ニ等シカラザルベカラズ. 然ルニ $\dfrac{121^2}{4}=\dfrac{14641}{4}=3660\dfrac{1}{4}$　$\therefore \lambda=3660$

λ ノ値ヲ 3660 トスレバ(1)ノ判別式ノ値ハ $121^2-14640=1$

$$\therefore \quad x=\frac{121\pm1}{2} \quad 即チ \quad x=\frac{121+1}{2}=61 \quad 又ハ \quad x=\frac{121-1}{2}=60$$

從テ $121-x=60$ 又ハ 61.

即チ求ムル二數ハ 60 ト 61 トナリ.

別解　二數ヲ x, y トスレバ　$x+y=121$

$$\therefore \quad 4xy=(x+y)^2-(x-y)^2=121^2-(x-y)^2$$

コレニ依テ xy ヲ最大ナラシムベキ x, y ノ値ハ $(x-y)^2$ ヲ最小ナラシムベキ者ナリ. 然ルニ x, y ハ何レモ整數ニシテ其和ハ奇數ナルニ依リ x, y ノ内一ツハ奇數,一ツハ偶數ナラザルベカラズ,從テ $x-y$ ノ最小値ハ 1 ナリ. 故ニ大ナル方ヲ x トスレバ　$y=x-1$

$$\therefore \quad x+x-1=121 \quad 即チ \quad 2x=122$$

$$\therefore \quad x=61 \quad 從テ \quad x-1=60$$

即チ求ムル數ハ 61 ト 60 トナリ.

9. 無稅ニテ輸入スル物品アリ,今之ニ p 割ノ稅ヲ課スルノ結果其輸入額ニ於テ $5p$ 割ヲ減ズルモノトスレバ最多額ノ稅金ヲ得ルニハ幾割ノ稅ヲ課スベキヤ(42年,大阪高等工業).

解　無稅ノトキノ輸入額ヲ a 円トスレバ,之ニ p 割ノ稅ヲ課スルトキ輸入額ハ $a\left(1-\dfrac{5p}{10}\right)$ 圓 $=a\left(1-\dfrac{p}{2}\right)$ 圓トナル,從テ其稅金ハ

$a\left(1-\dfrac{p}{2}\right)\times\dfrac{p}{10}$ 圓ナリ.

ソコデ多額ノ稅金ヲ得ル爲メノ稅率ハ $a\left(1-\dfrac{p}{2}\right)\times\dfrac{p}{10}$ ヲ最大ナラシムベキ p ノ値ナラザルベカラズ,從テ $\left(1-\dfrac{p}{2}\right)\dfrac{p}{10}$ ヲ最大ナラシムベキ p ヲ求ムレバ可ナリ.

サテ　$$\left(1-\frac{p}{2}\right)\times\frac{p}{10}=\frac{p}{10}-\frac{p^2}{20}=\frac{1}{20}(2p-p^2)=\frac{1}{20}p(2-p)$$

而シテ $p+(2-p)=2$ ニシテ不易ナルヲ以テ此積ハ此二數ガ相等シキ時最大ナリ.(第160節例3ヲ參照セヨ)　即チ求ムル p ノ値ハ $p=2-p$ ニ適スルモノナラザルベカラズ.

$$\therefore \quad p=1$$

故ニ求ムル所ノ稅率ハ 1 割ナリ.

10. 某電車ノ乘車券ノ一枚ノ代價三錢ナリシトキハ平均一日ノ發賣數 n 枚アリシト云フ,然ルニ一枚四錢トナリタルニ因リ發賣數 a 枚減少シタリ,而シテ切手發賣數ノ減少ハ代價ノ增加ニ比例ストシテ該電氣鐵道會社ノ收入額ヲ最大ナラシメンニハ一枚ノ代價ヲ幾何ニスレバ可ナルカ(38年,神戶高等商業).

解　求ムル所ノ一枚ノ乘車券ヲ $(3+x)$ 錢トスレバ其發賣數ノ減少高ハ ax 枚(發賣數ノ減少ハ代金ノ增加ニ比例シ 1 錢增加スレバ a 枚減ズルユヱ 2 錢增加スレバ $2a$ 枚減少シ,x 錢增加スレバ ax 枚減少ス)ナリ,從テ一日ノ發賣數ハ $n-ax$ 枚トナリ,一日ノ收入額ハ　$(3+x)(n-ax)$ 錢トナル. 今此積ヲ最大ナラシムル x ノ値ヲ求メンニ

$$(3+x)(n-ax)=a(3+x)\left(\frac{n}{a}-x\right)$$

ニシテ a ハ一定ノ數ナレバ,ツマリ $(3+x)\left(\dfrac{n}{a}-x\right)$ ヲ最大ナラシムル x ノ値ヲ求ムレバ可ナリ. 然ルニ此積ノ二ツノ因數ノ和ハ

$$3+x+\frac{n}{a}-x=3+\frac{n}{a}$$

ニシテ不易ナリ. 故ニ此積ヲ最大ナラシムル x ノ値ハ此二因數ヲ相等シカラシムルモノ即チ $3+x=\frac{n}{a}-x$ ニ適スルモノナラザルベカラズ.

$$\therefore\quad 2x=\frac{n}{a}-3 \qquad \therefore\quad x=\frac{n}{2a}-\frac{3}{2}$$

故ニ求ムル所ノ一枚ノ乘車賃ハ $\left(3+\frac{n}{2a}-\frac{3}{2}\right)$錢$=\left(\frac{3}{2}+\frac{n}{2a}\right)$錢ナリ.

11. $\dfrac{nE}{ax+by}$ ナル式ニ於テ $n=xy$ ナルコトヲ知ル, 此式ガ最大値ヲ有スルトキハ a, b, x, y ノ間ニ如何ナル關係アルカヲ示セ. 式中 n, E, a, b ハ正ノ定數ナリ (39年,神戸高等商業).

解　nE ハ正ノ定數ナルユエ, $\dfrac{nE}{ax+by}$ ガ最大値ヲ有スルハ $ax+by$ ガ最小値ヲ有スル時ナリ,然ルニ $(ax)(by)=abxy$ ニシテ $xy=n$ ナルユエ, $(ax)(by)=abn$ 卽チ定數ナリ.

故ニ160節例3ニ由リ $ax=by$ ナル時 $ax+by$ ガ最大値ヲ有ス, 因テ $ax=by$ ガ求ムル所ノ關係ナリ.

二次方程式ニ導キ得ル
分數方程式

163. 分數方程式解法ニ關スル注意

分數方程式ノ解キ方ハ既ニ第293頁第123節ニ於テ示セル如シ,卽チ與ヘラレタル方程式中ニアル凡テノ分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ掛ケテ得ル所ノ整方程式

ヲ解クナリ,但シ此事ニツキテハ深ク注意セザレバ不測ノ誤リニ陷ルコトアリ,今例ニツキテ其注意スベキ點ヲ說キ示サントス.

例 1. $\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}=0$ ヲ解クコト.

兩邊ニ分母 $(2x+1)(x-2)$ ヲ掛クレバ

$$(2x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2} \quad 又ハ \quad x=2$$

然レドモ原方程式ハ(分母子ヲ $x-2$ ニテ約スレバ)

$$\frac{2x-1}{2x+1}=0$$

ニ等シク,此方程式ニ適合スル x ノ値ハ唯 $x=\frac{1}{2}$ アルノミ,故ニ前ニ得タル二ツノ根ノ内 2 ハ原方程式ノ根ニアラズ. コレ豫メ約スベカリシ分母子ノ公約數 $x-2$ ヲ約セザリシガ爲メニ入リ來リタルナリ(箇樣ナル根ヲ餘分ノ根トイフ).

例 2. $\dfrac{(x-3)^2}{(x+5)(x-3)}=0$ ヲ解クコト.

兩邊ニ分母 $(x+5)(x-3)$ ヲ掛クレバ

$$(x-3)^2=0 \qquad \therefore\quad x=3 \quad 或ハ \quad x=3$$

然レドモ原方程式ハ分母子ヲ $x-3$ ニテ約スレバ

$$\frac{x-3}{x+5}=0$$

ニ等シク,此方程式ニ適合スル x ノ値ハ只一ツ 3 アルノミナルヲ以テ前ニ得タル二ツノ根 $x=3$, $x=3$ ノ内一ツハ餘分ノ根ナリ. コレ豫メ約スベカリシ分母子ノ公約數 $x-3$ ヲ約セザリシガ爲メニ入リ來レルナリ.

例 3. $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x}{1+x}+3=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ ヲ解クコト.

兩邊ニ分母ノ最小公倍數 x^2-1 ヲ掛クレバ

$$-x(1+x)+x(x-1)+3(x^2-1)=2x^2$$

$$\therefore \quad -x-x^2+x^2-x+3x^2-3=2x^2$$

$$\therefore \quad x^2-2x-3=0$$

$$\therefore \quad (x+1)(x-3)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\therefore \quad x=-1 \quad 又ハ \quad x=3$$

サテ(1)ノ左邊ハ原方程式ノ諸項ヲ悉ク左邊ニ移シ之ヲ一ツノ分數式ニ纒メタルトキノ分子ナルコト明ナリ,

卽チ $$\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}+3-\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x-3)}{x^2-1}$$

故ニ原方程式ハ $$\frac{(x+1)(x-3)}{x^2-1}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

卽チ $$\frac{x-3}{x-1}=0$$

ニ等シク,此方程式ニ適合スル x ノ値ハ只一ツ3アルノミ,故ニ上ニ得タル二ツノ根 -1 ト3トノ内 -1 ハ餘分ノ根ナリ,而シテ此餘分ノ根ハ(2)ニ於テ豫メ約スベカリシ分母分子ノ公約數 $x+1$ ヲ約セザリシガ爲メニ入リ來リタルナリ.

以上ノ諸例ニ依リテ分數方程式ヲ第293頁第123節ノ仕方ニテ解クトキハ時ニ餘分ノ根ノ入リ來ルコトアリ,而シテ其原因ハ原方程式ノ兩項ヲ一邊ニ集メ之ヲ一ツノ分數式ニ纒メタルトキ之ヲ既約分數式ニスベキヲ其儘ニナシオクニアリ乃チ分數方程式ヲ解ク完

全ナル方法ハ次節ニ述ブルガ如シ.

164. 分數方程式ノ解法 兩邊ニ分母ノ最小公倍數(分數式ヲ含ム項ガ只一ツナルトキハ其分母)ヲ掛ケテ得ル所ノ整方程式ヲ解ケ,所得ノ根ノ中デ之ヲ前ノ最小公倍數中ノ未知數ニ代用シタルトキ其値ヲ0ナラシメザルモノハ原方程式ノ根ナリ. 若シ0ナラシムルトキハ其一ツハ根ニアラズ,尤モ箇樣ニシテ得タル根ノ内ニ例ヘバ a ナル根ガ n 箇アリテ前ノ最小公倍數ヲ0ニ等シトオキテ得ル方程式ノ根ノ内ニ a ナル根ガ n ダケナクテ m 箇 $(m<n)$ ダケアリタリトスレバ $(n-m)$ 箇ダケノ a ガ原方程式ノ根ナリ,之ニ反シテ分母ノ最小公倍數ヲ0ニ等シトオキテ得ル方程式ノ根ノ内ニ a ナル根ガ n 箇以上アルトキハ前ニ得タル n 箇ノ a ハ悉ク原方程式ノ根ニアラズ.

注意 此解法ガ分リ悪キトキハ凡テノ項ヲ一邊ニ集メ之ヲ一ツノ分數式ニ纒メ,ソコデ其分數式ヲ既約分數式ニ直シテ見レバ上ノ解法ノ由テ來ル所自ラ明カナルニ至ルベシ.

例 1. $\dfrac{2x^2-1}{(x+3)(x-1)}-\dfrac{15}{4(x+3)}=\dfrac{1}{4(x-1)}$ ヲ解クコト.

兩邊ニ $4(x+3)(x-1)$ ヲ掛クレバ

$$4(2x^2-1)-15(x-1)=x+3$$

$$8x^2-16x+8=0$$

$$\therefore \quad x^2-2x+1=0 \quad 卽チ \quad (x-1)^2=0$$

$\therefore \quad x=1$ 又ハ $x=1$ (卽チ1ナル根二ツ)

然ルニ兩邊ニ掛ケタル式ヲ0ニ等シトオケル方程式 $4(x+3)(x-1)=0$ ノ根ノ內ニモ1ナル根一ツアリ. 故ニ1ナル根一ツ(2−1箇)ダケガ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ.

例 2. $\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{3}{x+7}$ ヲ解クコト.

兩邊ニ分母ノ最小公倍數 $(x-1)(x+1)(x+7)$ ヲ掛クレバ

$$5(x+1)(x+7)-4(x-1)(x+7)=3(x-1)(x+1)$$

$$\therefore \quad 5(x^2+8x+7)-4(x^2+6x-7)=3(x^2-1)$$

$$\therefore \quad -2x^2+16x+66=0$$

$$\therefore \quad x^2-8x+33=0$$

$$\therefore \quad (x+3)(x-11)=0$$

$$\therefore \quad x=-3 \quad 又ハ \quad x=11$$

此何レノ値ヲ先ニ兩邊ニ掛ケタル式 $(x-1)(x+1)(x+7)$ ニ代用スルモ其値ヲ0ナラシメズ, 故ニ此二ツガ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ.

例 3. $\dfrac{x+1}{x^2+x-2}+\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x^2-1}$ ヲ解クコト.

與ヘラレタル方程式ハ次ノ如ク書キ換ヘラル.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}+\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

ソコデ兩邊ニ $(x-1)(x+1)(x+2)$ ヲ掛クレバ

$$(x+1)^2+(x-1)^2=x+2$$

$$\therefore \quad x^2+2x+1+x^2-2x+1=x+2$$

$$\therefore \quad 2x^2-x=0 \quad 卽チ \quad x(2x-1)=0$$

$$\therefore \quad x=0 \quad 又ハ \quad x=\frac{1}{2}$$

而シテ此値ハ何レモ $(x-1)(x+1)(x+2)$ ヲ0ナラシメズ, 故ニ之ガ求ムル所ノ根ナリ.

例 4. $\dfrac{x+5}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+5}=\dfrac{3}{2}$ ヲ解クコト.

兩邊ニ $2(x+2)(x+5)$ ヲ掛ケテ例ノ如クシテ解クコトヲ得. 或ハ $\dfrac{x+5}{x+2}=y$ トオケバ原方程式ハ

$$y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$$

トナル, ソコデ其分母ヲ拂ヘバ

$$2y^2-2=3y \qquad \therefore \quad 2y^2-3y-2=0$$

$$\therefore \quad (2y+1)(y-2)=0$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{2} \quad 或ハ \quad y=2$$

ソコデ $y=-\dfrac{1}{2}$ ナルトキハ

$$\frac{x+5}{x+2}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 2x+10=-x-2$$

$$\therefore \quad 3x=-12 \qquad \therefore \quad x=-4$$

又 $y=2$ ナルトキハ

$$\frac{x+5}{x+2}=2 \qquad \therefore \quad x+5=2x+4$$

$$\therefore \quad -x=-1 \qquad \therefore \quad x=1$$

因テ求ムル所ノ根ハ −4 及 1 ナリ.

注意 原方程式ノ未知數ヲ含ム者ガ互ニ他ノ逆數ナル場合ニハ本例ノ解ニ倣ヘバ便利ナリ.

例 5. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}$　ヲ解クコト.

本例ノ如キ方程式ニ於テハ一度ニ分母ヲ拂フヨリハ先ヅ適當ナル項ヲ組合セ然ル後分母ヲ拂フ方一般ニ便利ナリ.

本例ニ於テハ各項ヲ凡テ左邊ニ集メ次ノ如ク組合ス

$$\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-2}\right)=0$$

ソコデ各括弧内ノ式ヲ別々ニ一ツニ纏ムレバ

$$\frac{5}{(x-3)(x+2)}+\frac{5}{(x-7)(x-2)}=0$$

ソコデ分母ヲ拂ヒ 5 ニテ割レバ

$$(x-7)(x-2)+(x-3)(x+2)=0$$

$$\therefore\quad x^2-9x+14+x^2-x-6=0$$

$$\therefore\quad 2x^2-10x+8=0$$

$$\therefore\quad x^2-5x+4=0$$

$$\therefore\quad (x-4)(x-1)=0$$

$$\therefore\quad x=4\quad 或ハ\quad x=1$$

而シテ之レ明カニ求ムル所ノ根ナリ.

例 6. $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}=2x$　ヲ解クコト.

左邊ノ二ツノ分數式ハ何レモ分子ガ分母ヨリモ高次ナルユヱ先ヅ分子ヲ分母ニテ割リテ次ノ如クス(第298頁例 8 ノ注意ヲ見ヨ)

$$\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)+\left(x+2+\frac{2}{x-2}\right)=2x$$

$$\therefore\quad 2x+3+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}=2x$$

$$\therefore\quad 3+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}=0$$

ソコデ $(x-1)(x-2)$ ヲ兩邊ニ掛クレバ

$$3(x-1)(x-2)+2(x-2)+2(x-1)=0$$

$$\therefore\quad 3x^2-9x+6+2x-4+2x-2=0$$

$$\therefore\quad 3x^2-5x=0\qquad\therefore\quad x(3x-5)=0$$

$$\therefore\quad x=0\quad 或ハ\quad x=\frac{5}{3}$$

此二ツガ求ムル所ノ根ナルコト明カナリ.

例 7. $\dfrac{1}{n+x}-\dfrac{1}{n-x}=\dfrac{x^2-2n-n^2}{x^2-n^2}$　ヲ解クコト.

$(x+n)(x-n)$ ヲ兩邊ニ掛クレバ

$$(x-n)+(x+n)=x^2-2n-n^2$$

$$\therefore\quad x^2-2x+1=n^2+2n+1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\quad (x-1)^2=(n+1)^2$$

$$\therefore\quad x-1=\pm(n+1)$$

$$\therefore\quad x=1\pm(n+1)$$

$$\therefore\quad x=n+2\quad 或ハ\quad x=-n$$

但シ分母ノ最小公倍數 x^2-n^2 ヲ 0 ニ等シトオケル方程式 $x^2-n^2=0$ ノ根ノ内ニモ $-n$ ナル根一ツアリ($n+2$ ナル根ハナシ). 故ニ原方程式ノ根ハ只 $n+2$ 一ツダケナリ.

一元高次方程式

165. 三次以上ノ一般ナル方程式ノ解法ヲ論ズルコトハ本講義ノ範圍外ナリ. ソコデロヽニハ一元二次方程式ノ解法ヲ利用シテ解キ得ル二三ノ高次方程式解法ノ例ヲ示スニ止ムベシ.

166. 未知數ヲ含ム或適當ナル代數式ヲ新ラシキ未知數ト見做ス法

例 1. $x^4-10x^2+9=0$ ヲ解クコト.

$x^2=y$ トスレバ $x^4=y^2$ ナルヲ以テ原方程式ハ

$$y^2-10y+9=0$$

$$\therefore \quad (y-1)(y-9)=0$$

$$\therefore \quad y=1 \quad 或ハ \quad y=9$$

$$即チ \quad x^2=1 \quad 或ハ \quad x^2=9$$

$$\therefore \quad x=\pm 1 \quad 或ハ \quad x=\pm 3$$

例 2. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$ ヲ解クコト.

$x^2+x+1=y$ トオケバ

$$y(y+1)=12$$

$$\therefore \quad y^2+y-12=0$$

$$\therefore \quad (y+4)(y-3)=0$$

$$\therefore \quad y=-4 \quad 或ハ \quad y=3$$

$y=-4$ ナルトキ

$$x^2+x+1=-4$$

$$\therefore \quad x^2+x+5=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$$

又 $y=3$ ナルトキハ

$$x^2+x+1=3$$

$$\therefore \quad x^2+x-2=0$$

$$\therefore \quad (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore \quad x=-2 \quad 或ハ \quad x=1$$

因テ求ムル所ノ根ハ

$\dfrac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$, -2, 1 ノ四ツナリ.

例 3. $x(x+1)(x+2)(x+3)=120$ ヲ解クコト.

先ヅ左邊ノ四ツノ因數ノ内兩端ノ二ツヲ取リテ一組トシ,殘ル二ツヲ他ノ一組トシ其各組ノ積ヲ求ムベシ.

即チ $\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}=120$

ト變形シテ

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=120$$

トスルナリ. ソコデ $x^2+3x=y$ トスレバ此方程式ハ

$$y(y+2)=120$$

$$\therefore \quad y^2+2y-120=0$$

$$\therefore \quad (y+12)(y-10)=0$$

$$\therefore \quad y=-12 \quad 又ハ \quad y=10$$

$y=-12$ ナルトキハ

$$x^2+3x=-12$$

$$\therefore \quad x^2+3x+12=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-48}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{39}}{2}$$

又 $y=10$ ナルトキハ

$$x^2+3x=10$$

$$\therefore \quad x^2+3x-10=0$$

$$\therefore \quad (x-2)(x+5)=0$$

$$\therefore \quad x=2 \quad 又ハ \quad x=-5$$

因テ求ムル所ノ根ハ $2,\ -5,\ \dfrac{-3\pm i\sqrt{39}}{2}$ ノ四ツナリ.

例 4. $(x+1)^4+(x+5)^4=82$ ヲ解クコト.

$\frac{1}{2}\{(x+1)+(x+5)\}=x+3=y$ トオケバ

$$(y-2)^4+(y+2)^4=82$$

然ルニ
$$(y-2)^4=y^4-8y^3+24y^2-32y+16$$
$$(y+2)^4=y^4+8y^3+24y^2+32y+16$$

$$\therefore \quad 2y^4+48y^2+32=82$$

$$\therefore \quad y^4+24y^2-25=0$$

$$\therefore \quad (y^2+25)(y^2-1)=0$$

$$\therefore \quad y^2=-25 \quad 或ハ \quad y^2=1$$

$$\therefore \quad y=\pm 5i \quad 或ハ \quad y=\pm 1$$

$$\therefore \quad x+3=\pm 5i \quad 或ハ \quad x+3=\pm 1$$

$$\therefore \quad x=-3\pm 5i \quad 或ハ \quad x=-3\pm 1$$

$$\therefore \quad x=-3\pm 5i,\ x=-4 \quad 或ハ \quad x=-2$$

167. 因數分解ヲ應用スル方法

例 1. $x^3-1=0$ ヲ解クコト.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore \quad x-1=0 \quad 或ハ \quad x^2+x+1=0$$

$$\therefore \quad x=1 \quad 或ハ \quad x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

注意 今得タル 1 及 $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ガ何レモ 1 ノ代數的立方根ナリ(コレ其立方ハ何レモ 1 ナレバナリ),此虚根ノ中ノ一ツヲ通例 ω(之ヲをめがト讀ム)ニテ表ス.然ルトキハ今一ツノ虚根ハ次ニ示ス如ク ω^2 ニテ表サル.

$$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad トスレバ$$

$$\omega^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

又 $\omega=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ トスレバ

$$\omega^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

例 2 $x^3=125$ ヲ解クコト.

$$x^3-125=x^3-5^3=(x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore \quad x-5=0 \quad 或ハ \quad x^2+5x+25=0$$

$$\therefore \quad x=5 \quad 或ハ$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{2}=\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}=5\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$$

即チ 125 ノ立方根ハ $5,\ 5\omega,\ 5\omega^2$ ナリ.

例 3. $x^3+8=0$ ヲ解クコト.

前二例ト同樣ニ左邊ヲ因數ニ分解シテ解ケバヨシ.
或ハ次ノ如クスルモ可ナリ.

$x^3=-8$ トシ,兩邊ヲ -8 ニテ割レバ

$$\frac{x^3}{-8}=1 \qquad \therefore \quad \left(-\frac{x}{2}\right)^3=1$$

故ニ $-\frac{x}{2}=y$ トスレバ此方程式ハ $y^3=1$ トナル,此方程式ノ根ハ $1, \omega, \omega^2$ ナルヲ以テ $y=1$, 或ハ $y=\omega$, 或ハ $y=\omega^2$

$\therefore \quad -\frac{x}{2}=1$, 或ハ $-\frac{x}{2}=\omega$, 或ハ $-\frac{x}{2}=\omega^2$

$\therefore \quad x=-2$ 或ハ $x=-2\omega$ 或ハ $x=-2\omega^2$

即チ -8 ノ立方根ハ $-2, -2\omega, -2\omega^2$ ノ三ツナリ.

例 4. $x^6+19x^3-216=0$ ヲ解クコト.

$x^3=y$ トオケバ

$$y^2+19y-216=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{-19\pm\sqrt{19^2+216\times4}}{2}=\frac{-19\pm\sqrt{1225}}{2}=\frac{-19\pm35}{2}$$

$$\therefore \quad y=8 \quad 或ハ \quad y=-27$$

$$\therefore \quad x^3=8 \quad 或ハ \quad x^3=-27$$

故ニ求ムル所ノ根ハ $2, 2\omega, 2\omega^2, -3, -3\omega, -3\omega^2$ ナリ.

例 5. $x^4-1=0$ ヲ解クコト.

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=0$$

$$\therefore \quad x^2-1=0 \quad 或ハ \quad x^2+1=0$$

$$\therefore \quad x^2=1 \quad 或ハ \quad x^2=-1$$

$$\therefore \quad x=\pm1 \quad 或ハ \quad x=\pm i$$

例 6. $x^3-15x^2+74x=120$ ノ一ツノ根ガ 4 ナルコトヲ知リテ他ノ根ヲ求ムルコト.

4 ガ $x^3-15x^2+74x-120=0$ ノ根ナルユヱ $x-4$ ハ此方程式ノ左邊ノ因數ナリ. ソコデ割リ算ニヨリテ他ノ因數ヲ求ムレバ,此方程式ハ次ノ如クニナル.

$$(x-4)(x^2-11x+30)=0$$

故ニ今求ムル所ノ根ハ $x^2-11x+30=0$ ノ根ナリ.

即チ $(x-5)(x-6)=0$ ノ根ナリ.

即チ 5 及 6 ナリ.

例 7. $x^4-5x^3+4x^2+8x-8=0$ ノ二根ガ $1+\sqrt5, 1-\sqrt5$ ナルコトヲ知リテ他ノ根ヲ求ムルコト.

$1+\sqrt5$ 及 $1-\sqrt5$ ガ原方程式ノ二根ナルユヱ, $x-1-\sqrt5$ 及 $x-1+\sqrt5$ ハ何レモ其左邊ノ因數ナラザルベカラズ,從テ其積

$$(x-1-\sqrt5)(x-1+\sqrt5)=(x-1)^2-(\sqrt5)^2=x^2-2x-4$$

ハ左邊ノ因數ナリ. ソコデ割リ算ニヨリテ左邊ノ今一ツノ因數ヲ求ムレバ x^2-3x+2 トナル. 即チ原方程式ハ $(x^2-2x-4)(x^2-3x+2)=0$ ニ同ジ,因テ今求ムル所ノ根ハ $x^2-3x+2=0$ 即チ $(x-1)(x-2)=0$ ノ根ニシテ即チ 1 及 2 ナリ.

$\boxed{注意}$ $a+\sqrt b$ ガ整方程式ノ一根ナラバ $a-\sqrt b$ モ其方程式ノ根ナリ. 又 $c+i\sqrt d$ ガ一根ナラバ $c-i\sqrt d$ モ亦然リ,此證明ハ六ッ箇敷ケレバコヽニハ掲ゲズ.

例 8.　$x(x-1)(x-3)=12$　ヲ解ケ(37年,札幌農科大學豫科).

原方程式ハ　$x(x-1)(x-3)=4\times3\times1$　ト書カルヽルヲ以テ $x=4$ ガ原方程式ノ一根ナルコト明カナリ. 即チ $x-4$　ハ　$x(x-1)(x-3)-12=x^3-4x^2+3x-12$　ノ一因數ナリ. ソコデ之ヲ因數ニ分解スレバ

$$x^2(x-4)+3(x-4)=(x^2+3)(x-4)$$

$$\therefore\quad \text{原方程式ハ}\quad (x^2+3)(x-4)=0$$

$$\therefore\quad x-4=0\quad \text{或ハ}\quad x^2+3=0$$

$$\therefore\quad x=4\quad \text{或ハ}\quad x=\pm i\sqrt{3}$$

此三ツガ原方程式ノ根ナリ.

168. 逆根方程式　方程式ノ各項ヲ一邊ニ集メ之ヲ未知數ニ付キ降羃ノ順ニ排列スルトキ,左右兩端ヨリ同ジ番目ノ項ノ係數相等シキ方程式,及ビ左右兩端ヨリ同ジ番目ノ項ノ係數ノ絕對値ガ等シク,其符號ガ相反スル方程式ヲ逆根方程式トイフ. 例ヘバ $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$, 及ビ $x^3-7x^2+7x-1=0$ ハ何レモ逆根方程式ナリ. コレ此第一ノ方程式ニ於テハ左邊ノ式ノ兩端ヨリ同ジ番目ノ係數相等シク(兩端ノハ 1, 二番目ノハ何レモ −2, 三番目ハ同ジ項ナレバ論ナシ), 又第二ノ方程式ニ於テハ左邊ノ式ノ兩端ヨリ同ジ番目ノ係數ハ其絕對値相等シク,符號相反スレバナリ.

サレド例ヘバ $x^4-12x^3+5x^2+12x+1=0$ ハ逆根方程式

ニアラズ,何トナレバ此方程式ニ於テハ左邊ノ式ノ兩端ノ項ノ係數ハ相等シキニ,兩端ヨリ二番目ノ項ノ係數ハ相等シカラズ只其絕對値ダケ相等シキノミナレバナリ.

次ニ簡單ナル逆根方程式ノ解法ヲ示サン.

例 1.　$6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$　ヲ解クコト.

$x\neq0$ ナルコト明カナルヲ以テ x^2 ニテ兩邊ヲ割レバ

$$6x^2-5x-38-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

ソコデ前後ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組ミ合スレバ

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

コヽニ於テ　$x+\frac{1}{x}=y$　トオケバ

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2\quad \text{從テ}\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

ナルヲ以テ上ノ方程式ハ

$$6(y^2-2)-5y-38=0$$

即チ

$$6y^2-5y-50=0$$

トナル.

$$\therefore\quad y=\frac{5\pm\sqrt{25+4\times6\times50}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{1225}}{12}=\frac{5\pm35}{12}$$

$$\therefore\quad y=\frac{5+35}{12}=\frac{10}{3}\quad \text{又ハ}\quad y=\frac{5-35}{12}=-\frac{5}{2}$$

$y=\frac{10}{3}$　ナルトキハ

$$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$$

$$\therefore\quad 3x^2+3=10x$$

$$\therefore\quad 3x^2-10x+3=0$$

$$\therefore \quad (3x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3} \quad 又ハ \quad x=3$$

又 $y=-\frac{5}{2}$ ナルトキハ

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad 2x^2+2=-5x$$

$$\therefore \quad 2x^2+5x+2=0$$

$$\therefore \quad (2x+1)(x+2)=0$$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{2} \quad 又ハ \quad x=-2$$

因ヲ求ムル所ノ根ハ $-2,\ -\frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3}$ ノ四ツナリ.

$\boxed{注意}$ 未知數ノ最高次ノ羃ガ x^{2n} ナル,兩端ヨリ同ジ番目ノ項ノ係數ガ相等シキ逆根方程式ハ常ニ本例ノ如クシテ(卽先ヅ兩邊ヲ x^n ニテ割リ,ソコデ $x+\frac{1}{x}$ ヲ新未知數ト見做シテ之ヲ變形シテ)解クベシ.

例 2. $3x^4-5x^3+5x-3=0$ ヲ解クコト.

與ヘラレタル方程式ノ兩端ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組合スレバ $\quad 3(x^4-1)-5x(x^2-1)=0$

卽チ $\quad 3(x^2+1)(x^2-1)-5x(x^2-1)=0$

$$\therefore \quad (x^2-1)\{3(x^2+1)-5x\}=0$$

$$\therefore \quad x^2-1=0 \quad 又ハ \quad 3x^2-5x+3=0$$

$x^2-1=0$ ナルトキハ $x=\pm 1$

又 $3x^2-5x+3=0$ ナルトキハ

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times3\times3}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-11}}{6}$$

因ヲ求ムル所ノ根ハ $+1,\ -1,\ \frac{5+i\sqrt{11}}{6},\ \frac{5-i\sqrt{11}}{6}$ ノ四ツナリ.

$\boxed{注意}$ 兩端ヨリ同ジ番目ノ係數ノ絕對值ガ相等シク符號ガ相反スル偶數次ノ逆根方程式ノ一邊ナル代數式ニハ必ズ x^2-1 ナル因數アルモノナレバ,此種ノ逆根方程式ヲ解クニハ本例ニ於ケルガ如ク先ヅ與ヘラレタル方程式ヲ二ツニ分チ(其一ツハ無論 $x^2-1=0$ ナリ)ヲ後之ヲ解クベシ.

例 3. $2x^3-7x^2+7x-2=0$ ヲ解クコト(43年,東京高等師範).

兩端ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組合スレバ

$$2(x^3-1)-7x(x-1)=0$$

$$\therefore \quad (x-1)\{2(x^2+x+1)-7x\}=0$$

$$\therefore \quad (x-1)(2x^2-5x+2)=0$$

$$\therefore \quad (x-1)(2x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x=1 \quad 或ハ \quad x=2 \quad 或ハ \quad x=\frac{1}{2}$$

例 4. $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6=0$ ヲ解クコト.

兩端ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組合スレバ

$$6(x^5+1)+41x(x^3+1)+97x^2(x+1)=0$$

$$\therefore \quad (x+1)\{6(x^4-x^3+x^2-x+1)+41x(x^2-x+1)+97x^2\}=0$$

$$\therefore \quad (x+1)(6x^4+35x^3+62x^2+35x+6)=0$$

$$\therefore \quad x=-1 \quad 或ハ \quad 6x^4+35x^3+62x^2+35x+6=0$$

サテ此第二ノ方程式ハ兩端ヨリ同ジ番目ノ項ノ係數相等シキ偶數次ノ逆根方程式ナリ. 故ニ例1ニ傚

ヒテ解クコト次ノ如シ.

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$$

ソコデ $x+\frac{1}{x}=y$ トオケバ

$$6(y^2-2)+35y+62=0$$

$$\therefore\quad 6y^2+35y+50=0$$

$$\therefore\quad (3y+10)(2y+5)=0$$

$$\therefore\quad y=-\frac{10}{3} \quad 或ハ \quad y=-\frac{5}{2}$$

$y=\frac{-10}{3}$ ナルトキハ

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \qquad \therefore\quad 3x^2+10x+3=0$$

$$\therefore\quad (3x+1)(x+3)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{3} \quad 或ハ \quad x=-3$$

又 $y=-\frac{5}{2}$ ナルトキハ

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore\quad 2x^2+5x+2=0$$

$$\therefore\quad (2x+1)(x+2)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2} \quad 或ハ \quad x=-2$$

因テ求ムル根ハ $-1, -3, -\frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$ ノ五ツナリ.

注意 奇數次ノ逆根方程式ノ一邊ニハ必ズ(例3又ハ例4ノ如ク) $x-1$ 又ハ $x+1$ ナル因數アルモノナレバ,此種ノ逆根方程式ヲ解クニハ上ノ二例ノ如クニ先ツ與ヘラレタル方程式ヲ二ツニ分チ(其一ツハ無論

$x-1=0$ 又ハ $x+1=0$ ナリ)テ之ヲ解クベシ.

例 5. $4x^4-12x^3+x^2+12x+4=0$ ヲ解クコト.

此方程式ハ逆根方程式ニアラザレドモ逆根方程式ノ解法ニ準ジテ解キ得ルモノナリ. 卽チ先ツ x^2 ニテ兩邊ヲ割リ,兩端ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組合スレバ

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+1=0$$

トナル,ソコデ $x-\frac{1}{x}=y$ トオケハ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ナルヲ以テ上ノ方程式ハ次ノ如クナル.

$$4(y^2+2)-12y+1=0$$

$$\therefore\quad 4y^2-12y+9=0$$

$$\therefore\quad (2y-3)^2=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{3}{2} \quad 又ハ \quad y=\frac{3}{2} \quad (卽チ同ジ根二ツ)$$

$$\therefore\quad x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \qquad \therefore\quad 2x^2-3x-2=0$$

$$\therefore\quad (2x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2} \quad 又ハ \quad x=2$$

y ノ第二ノ値ヲ取ルモ同ジコトナルヲ以テ,求ムル所ノ根ハ $2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ノ四ツナリ.

無理方程式

169. 方程式中ニ未知數ニツキテ無理式ガアルトキハ之ヲ無理方程式トイヒ,有理式ノミナルトキハ之ヲ有理方程式トイフ. 例ヘバ

$$5x-\sqrt{2x-3}=6$$

$$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b-x}=a-b$$

ハ何レモ無理方程式ナリ.

170. 一ツノ方程式ノ根ト其兩邊チ同ジ羃ニ高メテ得タル方程式ノ根トニツキテ

無理方程式ヲ解クニハ先ヅ之ヲ有理方程式ニ直ス者トス,ソレガタメニハ方程式ノ兩邊ヲ同ジ羃ニ高ムル必要アリ,ソコデ先ヅ一ツノ方程式ノ根ト其兩邊ヲ同ジ羃ニ高メテ得タル方程式ノ根トハ全ク同ジキモノナリヤ否ヤヲ研究セントス但シ本書ニ於テ論ズル無理方程式中ニ含ム無理式ハ主モニ開平ニヨリテ生ズル無理式ノミナルヲ以テ,單ニ其場合ノミニ付テ論ズベシ.

例 1. $x=2$ ノ兩邊ヲ二乘スレバ $x^2=4$ ヲ得此方程式ノ根ハ $x=2$ 或ハ $x=-2$ ナリ. 即チ $x=2$ ノ兩邊ヲ二乘シテ得タル方程式ノ根ノ内ニハ原方程式ノ根 2 ノ外ニ原方程式ノ根ニアラザル根 -2 モ有リ.

例 2. $2x+6=7x+1$ ノ根ハ 1 ナリ. 然ルニ原方程式ノ兩邊ヲ二乘シテ得ル方程式

$$(2x+6)^2=(7x+1)^2$$

即チ $$(2x+6)^2-(7x+1)^2=0$$

即チ $$(2x+6+7x+1)(2x+6-7x-1)=0$$

即チ $$(9x+7)(-5x+5)=0$$

ノ根ハ $9x+7=0$ 及ビ $-5x+5=0$

ノ根ニシテ即チ $x=-\frac{7}{9}$ 及ビ $x=1$

ナリ. 即チ此内ニハ原方程式ノ根 1 ノ外ニ原方程式ノ根ニアラザル根 $-\frac{7}{9}$ モ有リ.

一般ニ方程式ノ兩邊ヲ二乘シテ得ル方程式ノ根ノ内ニハ原方程式ノ根ハ殘ラズ存在ス,加之一般ニハ原方程式ノ根ニアラザル根(即チ原方程式ノ餘分ノ根)モ存在スルモノナリ. 無縁根モ云

如何ニモ, $$M=N \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(但シ, M, N ノ内少ナクモ其一ツハ未知數ヲ含ムモノトス)ヲ與ヘラレタル方程式トスレバ,其兩邊ヲ二乘シテ得ル方程式ハ

$$M^2=N^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナリ. 此方程式ハ

$$M^2-N^2=0$$

即チ $$(M-N)(M+N)=0$$

即チ $M-N=0$ 及ビ $M+N=0$

ト書キ直スコトヲ得ルヲ以テ(2)ノ根ハ

$M-N=0$ ノ根ト, $M+N=0$ ノ根

即チ $M=N$ ノ根ト, $M=-N$ ノ根ト

ノ二ツヲ一緒ニシタルモノニ同シ,此内 $M=N$ ノ根ダケガ(1)ノ根ニ同ジキヲ以テ(2)ノ根ノ内ニハ(1)ノ根ノ外ニ尙ホ $M=-N$ ノ根モ存在ス. 但シ $M=-N$ ニ適スル根ナキ時(即チ此方程式ガ成リ立タザルトキ)ハ(1)ノ根ト(2)ノ根ト全ク相合スルコト勿論ナリ.

例 3. $x-1=2-x$ ノ根ハ $2x=3$ ノ根即チ $\frac{3}{2}$ ナリ. 又 $(x-1)^2=(2-x)^2$ ノ根ハ $x^2-2x+1=x^2-4x+4$ ノ根即チ $2x=3$ ノ根ニシテ之レ又 $\frac{3}{2}$ ナリ.

即チ此場合ニハ原方程式ノ根ト其兩邊ヲ二乘シテ得タル方程式ノ根トガ全ク相合シタリ,是レ

$x-1+(2-x)=0$ 即チ $1=0$ トイフコトガ成リ立タザルニ因ル.

注意 一ツノ方程式ノ兩邊ヲ二乘シテ得タル方程式ノ根ノ内ニハ一般ニ原方程式ニ適セザル根ヲモ含ムヲ以テ,方程式ノ兩邊ヲ二乘シテ得タル方程式ノ根ガ原方程式ノ根ナリヤ否ヤハ之ヲ原方程式ニ當テ嵌メテ驗シタル後ニアラザレバ決定シ難キモノト知ルベシ.

171. 無理方程式解法

例 1. $x+\sqrt{(25-x^2)}=7$ ヲ解クコト.

無理ノ項ダケガ一邊ニアル樣ニ移項スレバ

$$\sqrt{(25-x^2)}=7-x$$

此兩邊ヲ二乘スレバ

$$25-x^2=49-14x+x^2$$

$$\therefore\quad 2x^2-14x+24=0$$

$$\therefore\quad x^2-7x+12=0$$

$$\therefore\quad (x-3)(x-4)=0$$

$$\therefore\quad x=3 \quad 或ハ \quad x=4$$

$x=3$ トスレバ

$$x+\sqrt{(25-x^2)}=3+\sqrt{25-9}=3+4=7$$

又 $x=4$ トスレバ

$$x+\sqrt{(25-x^2)}=4+\sqrt{25-16}=4+3=7$$

故ニ 3 及 4 ハ何レモ求ムル所ノ根ナリ.

例 2. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+5}=9$ ヲ解クコト.

無理式ガ唯一ツダケ一邊ニアル樣ニ移項スレバ

$$2\sqrt{x-1}=9-\sqrt{4x+5}$$

此兩邊ヲ平方スレバ

$$4(x-1)=81-18\sqrt{4x+5}+4x+5$$

再ビ無理式ダケガ一邊ニアル樣ニ移項スレバ

$$18\sqrt{4x+5}=90$$

$$\therefore\quad \sqrt{4x+5}=5$$

ソコデ兩邊ヲ二乘スレバ

$$4x+5=25$$

$$\therefore \quad 4x=20$$ (25−5)

$$\therefore \quad x=5$$

此値ヲ原方程式ノ左邊ニ代用スレバ

$$2\times 2+\sqrt{20+5}=4+5=9$$

因テ5ガ求ムル所ノ根ナリ.

無理方程式ハ凡テ上例ノ如クシテ解クモノトス,即チ次ノ如シ.

未知數ニツキテ無理式只一ツガ一邊ニアル樣ニシ,其レヲ有理式トスルニ必要ナル羃ニ兩邊ヲ高メ,所得ノ方程式中ニ尙ホ未知數ニツキテノ無理式アラバ,又其一ツダケガ一邊ニアル樣ニシ再ビ其レヲ有理式トスルニ必要ナル羃ニ兩邊ヲ高メ必要アラバ幾回ニテモ同法ヲ施シ有理方程式ヲ得ルニ至ツテ止メ,其有理方程式ヲ解キ其根ヲ一々原方程式ニ當テ篏メ其適合スルモノノミヲ取レ,サスレバソレガ求ムル所ノ根ナリ.

172. 無理方程式解法ノ諸例

無理方程式ノ一般ノ解法ハ前ノ如シ,サレド特別ナル場合ニハ特別ナル解法ヲ用フルガ便利ナルコトアリ,次ニ其二三ノ例ヲ示サン.

例 1. $\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x-2}}-\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-3}}=-\dfrac{7}{12}$ ヲ解クコト.

$\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x-2}}=y$ トオケバ與ヘラレタル方程式ハ

$$y-\frac{1}{y}=-\frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad 12y^2+7y-12=0$$

$$\therefore \quad (4y-3)(3y+4)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{4} \quad 或ハ \quad y=-\frac{4}{3}$$

然ルニyハ $\dfrac{2x-3}{3x-2}$ ノ平方根ノ主値ナルユエ正ノ數ナリ,故ニ $y=-\dfrac{4}{3}$ ハ本問題ニ適セズ.

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{2x-3}{3x-2}}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad 16(2x-3)=9(3x-2)$$

$$\therefore \quad 5x=30$$

$$\therefore \quad x=6$$

之レ即チ求ムル所ノ根ナリ.

例 2. $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+11}=19$ ヲ解クコト.

此方程式ヲ書キ換ヘテ

$$x^2-5x+11+\sqrt{x^2-5x+11}-11-19=0$$

即チ $\quad (x^2-5x+11)+\sqrt{x^2-5x+11}-30=0$

トナシ,ソコデ $\sqrt{x^2-5x+11}=y$ トオケバ原方程式ハ

$$y^2+y-30=0$$

即チ $\quad (y+6)(y-5)=0$

トナル.

$$\therefore \quad y=-6 \quad 或ハ \quad y=5$$

然ルニyハ正ノ數ナルベキニヨリ-6ハ問題ニ適セズ.

$$\therefore \quad \sqrt{x^2-5x+11}=5$$

$$\therefore \quad x^2-5x+11=25$$

$$\therefore \quad x^2-5x-14=0$$

$$\therefore \quad (x-7)(x+2)=0$$

$$\therefore \quad x=7 \quad 或ハ \quad x=-2$$

之レ求ムル所ノ根ナリ.

例 3. $2x^2-2x-\sqrt{x^2-x+4}+2=0$ ヲ解クコト.

此方程式ヲ書キ換ヘテ

$$2x^2-2x+8-\sqrt{x^2-x+4}+2-8=0$$

即チ $$2(x^2-x+4)-\sqrt{x^2-x+4}-6=0$$

トナシ,ソコデ $\sqrt{x^2-x+4}=y$ トオケバ,原方程式ハ

$$2y^2-y-6=0$$

即チ $$(y-2)(2y+3)=0$$

$$\therefore \quad y=2 \quad 或ハ \quad y=-\frac{3}{2}$$

然ルニyハ正ノ數ナルベキニヨリ$-\frac{3}{2}$ハ問題ニ適セズ.

$$\therefore \quad \sqrt{x^2-x+4}=2$$

$$\therefore \quad x^2-x+4=4$$

$$\therefore \quad x^2-x=0$$

$$\therefore \quad x(x-1)=0$$

$$\therefore \quad x=0 \quad 或ハ \quad x=1$$

之レガ求ムル所ノ根ナリ.

例 5. $\dfrac{1}{\sqrt{(x+4)}-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-4)}+\sqrt{x}}=\sqrt{x-4}$ ヲ解クコト.

本例ノ如ク分母ニ無理式ガアル場合ニハ先ヅ各式ノ分母ニ當ル式ヲ有理式ニ直ス方ガヨシ. 即チ左邊ノ第一式ノ分母,分子ニ相當スル式ニ $\sqrt{(x+4)}+\sqrt{x}$ ヲ掛ケ,第二式ノ分母,分子ニ相當スル式ニ $\sqrt{(x-4)}-\sqrt{x}$ ヲ掛クレバ,

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{(x+4)-x}-\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x}}{(x-4)-x}=\sqrt{x-4}$$

即チ $$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{4}+\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x}}{4}=\sqrt{x-4}$$

$$\therefore \quad \sqrt{x+4}+\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x}=4\sqrt{x-4}$$

$$\therefore \quad \sqrt{x+4}=3\sqrt{x-4}$$

$$\therefore \quad x+4=9(x-4)$$

$$\therefore \quad 8x=40$$

$$\therefore \quad x=5$$

$x=5$ トスルトキ

$$原方程式ノ左邊=\frac{1}{\sqrt{(5+4)}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{(5-4)}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\frac{4}{4}=1$$

又　其右邊$=\sqrt{5-4}=\sqrt{1}=1$

因テ 5 ガ求ムル所ノ根ナリ.

例 6.　$\sqrt[4]{(3x^2+13)}+\sqrt{(3x^2+13)}=6$　ヲ解クコト.

$\sqrt[4]{(3x^2+13)}=y$ トオケバ與ヘラレタル方程式ハ次ノ如クナル.

$$y+y^2=6$$

$$\therefore\quad y^2+y-6=0$$

$$\therefore\quad (y+3)(y-2)=0$$

$$\therefore\quad y=-3 \quad 或ハ \quad y=2$$

然ルニ y ハ正ノ數ナルベキニヨリ -3 ハ本問題ニ適セズ.

$$\therefore\quad \sqrt[4]{3x^2+13}=2$$

$$\therefore\quad 3x^2+13=2^4=16$$

$$\therefore\quad 3x^2=3 \qquad \therefore\quad x^2=1$$

$$\therefore\quad x=\pm 1$$

之レガ求ムル所ノ根ナリ.

例 7.　$2\sqrt{(x^2-9x+18)}-\sqrt{(x^2-4x-12)}=x-6$　ヲ解クコト.

根號內ノ式ヲ因數ニ分解シ,且ツ右邊ノ $x-6$ ヲ $(\sqrt{x-6})^2$ トスレバ

$$2\sqrt{(x-3)(x-6)}-\sqrt{(x-6)(x+2)}=\sqrt{x-6}\sqrt{x-6}$$

卽チ　$\sqrt{x-6}(2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6})=0$

$$\therefore\quad \sqrt{x-6}=0 \quad 或ハ \quad 2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=0$$

$\sqrt{x-6}=0$ ヨリ $x=6$ ヲ得(之レ原方程式ノ根ナルコト明カナリ).

又此第二方程式ノ左邊ノ一項 $-\sqrt{x-6}$ ヲ右邊ニ移シ後之ヲ二乘スレバ

$$4(x-3)+(x+2)-4\sqrt{(x-3)(x+2)}=x-6$$

$$\therefore\quad 4x-4=4\sqrt{(x-3)(x+2)}$$

此兩邊ヲ 4 ニテ割リ,然ル后平方スレバ

$$(x-1)^2=(x-3)(x+2)$$

$$\therefore\quad x^2-2x+1=x^2-x-6$$

$$\therefore\quad -x=-7$$

$$\therefore\quad x=7$$

此値ヲ原方程式ニ代用スレバ

左邊$=2\sqrt{49-63+18}-\sqrt{49-28-12}=2\sqrt{4}-\sqrt{9}$

$=4-3=1$

右邊$=7-6=1$

因テ 6 及 7 ガ求ムル所ノ根ナリ.

173. 高次方程式,分數方程式,無理方程式雜題

例 1.　$a^3x^6-(a^6+1)x^3+a^3=0$　ヲ解ケ(42年,盛岡高等農林).

解　$x^3=y$ トオケバ原方程式ハ

$$a^3y^2-(a^6+1)y+a^3=0 \qquad \therefore\quad (a^3y-1)(y-a^3)=0$$

$$\therefore\quad y=a^3 \quad 或ハ \quad y=\frac{1}{a^3} \quad 卽チ \quad x^3=a^3 \quad 或ハ \quad x^3=\frac{1}{a^3}$$

$\therefore\ x=\pm a$ 或ハ $x=\pm\frac{1}{a}$ 此四ツガ求ムル根ナリ.

2. 次ノ方程式ノ根ヲ求メ,之ヲ運算ニ便ナル式ニ直シ,小數點以下二位マデ計算セヨ(42年,大阪高等工業).

$$x^4-3x^2+1=0$$

解 x^2 ヲ新未知數ト見做シテ解ケバヨシ. 或ハ與ヘラレタル方程式ヲバ $x^4-2x^2+1-x^2=0$ 卽チ $(x^2-1)^2-x^2=0$

卽チ $(x^2-1+x)(x^2-1-x)=0$

卽チ $x^2+x-1=0$ 或ハ $x^2-x-1=0$

ト書キ直スコトヲ得.

而シテ $x^2+x-1=0$ ナル片ハ $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

又 $x^2-x-1=0$ ナル片ハ $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ナリ. 然ルニ $\sqrt{5}=2.23\cdots\cdots$ 故ニ原方程式ノ根ノ値ハ

$\frac{-1+2.23\cdots}{2}=0.61\cdots,\ \frac{-1-2.23\cdots}{2}=-1.61\cdots,\ \frac{1+2.23\cdots}{2}=1.61\cdots,\ \frac{1-2.23\cdots}{2}=-0.61\cdots$

卽チ求ムル根ノ値ハ $\pm0.61,\ \pm1.61$ ナリ.

3. $(x-2)(x-5)(x-7)=8.5.3$ ノ三ツノ根ヲ見出セ(32年,第五高等).

解 原方程式ハ $(x-2)(x-5)(x-7)=(10-2)(10-5)(10-7)$ ト書キ得ルヲ以テ10ハ原方程式ノ一根ナリ,因テ $x-10$ ハ

$$(x-2)(x-5)(x-7)-8.5.3=x^3-14x^2+59x-190$$

ノ一因數ナリ. ソコデ割リ算ニ依リテ他ノ因數ヲ求ムレバ $x^2-4x+19$ トナル,卽チ原方程式ハ

$$(x-10)(x^2-4x+19)=0$$

$$\therefore\ x-10=0 \quad 或ハ \quad x^2-4x+19=0$$

$x-10=0$ ナル片ハ $x=10$

又 $x^2-4x+19=0$ ナル片ハ $x=2\pm\sqrt{2^2-19}=2\pm i\sqrt{15}$

故ニ求ムル根ハ $10,\ 2\pm i\sqrt{15}$ ナリ.

4. 次ノ方程式ヲ解ケ(36年,農科大學實科).

〔a〕 $x^3-1=0$, 〔b〕 $x^4+1=0$, 〔c〕 $x^4-1=0$.

解 〔a〕ハ第167節ノ例1,〔c〕ハ同節例5ニ同ジキヲ以テコヽニハ〔b〕ノ解ノミヲ示サン.

サテ $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$

$$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

ナルヲ以テ原方程式ハ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0$$

$$\therefore\ x^2+\sqrt{2}x+1=0 \quad 或ハ \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0$$

此第一方程式ヨリ $x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$

又第二方程式ヨリ $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$

此四ツガ卽チ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ.

5. 次ノ方程式ヲ解ケ(31年,東京高等工業).

$$(1-x^2)^3=(1-x^3)^2$$

解 $(1-x^2)^3=\{(1+x)(1-x)\}^3=(1+x)^3(1-x)^3$

又 $(1-x^3)^2=\{(1-x)(1+x+x^2)\}^2=(1-x)^2(1+x+x^2)^2$

故ニ與ヘラレタル方程式ハ

$$(1+x)^3(1-x)^3-(1-x)^2(1+x+x^2)^2=0$$

卽チ $(1-x)^2\{(1+x)^3(1-x)-(1+x+x^2)^2\}=0$

$\therefore\ (1-x)^2=0$ 或ハ $(1+x)^3(1-x)-(1+x+x^2)^2=0$

$(1-x)^2=0$ ナル片ハ $x=1$ 或ハ $x=1$

又 $(1+x)^3(1-x)-(1+x+x^2)^2=0$ ハ之ヲ簡單ニスレバ

$-3x^2-4x^3-2x^4=0$ 卽チ $x^2(3+4x+2x^2)=0$

トナル. $\therefore\ x^2=0$ 又ハ $2x^2+4x+3=0$

$\therefore\ x=0,\ x=0$ 又ハ $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times3}}{2}=\frac{-2\pm i\sqrt{2}}{2}$

故ニ求ムル根ハ $0, 0, 1, 1, \frac{-2\pm i\sqrt{2}}{2}$ ノ六ツナリ.

6. 下ノ方程式ヲ解ケ(42年,海軍機關).

$$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)=144$$

解 與ヘラレタル方程式ヲ書キ直シテ

$\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}=144$ 卽チ $(x^2+x-12)(x^2+x-2)=144$

トシ,ソコデ $x^2+x-2=y$ トスレバ $x^2+x-12=y-10$ ナルユエ與ヘラレタル方程式ハ $y(y-10)=144$ 卽チ $y^2-10y-144=0$ トナル.

$$\therefore\quad (y-18)(y+8)=0$$

$$\therefore\quad y=18 \quad 又ハ \quad y=-8$$

$y=18$ ナルドハ $x^2+x-2=18$ $\therefore$ $x^2+x-20=0$

$\therefore$ $(x-4)(x+5)=0$ $\therefore$ $x=4$ 又ハ $x=-5$

$y=-8$ ナルドハ $x^2+x-2=-8$ $\therefore$ $x^2+x+6=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}$$

因テ求ムル根ハ $4,\ -5,\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}$ ノ四ツナリ.

7. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$ ヲ解ケ.

解 視察ニヨリ a 及 b ガ此方程式ノ根ナルコト明カナリ,因テ $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$ ハ $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$ ノ因數ナリ.

而シテ此式ヲ x ニ付キ降冪ノ順ニ排列スルトキノ第一項ハ $6x^3$ ナルヲ以テ此式ノ今一ツノ因數ノ第一項ハ $6x^3\div x^2=6x$ ナリ. 又同ジ式ノ末項ハ $a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)$ ナルニヨリ,此式ノ今一ツノ因數ノ末項ハ $-3ab(a+b)\div ab=-3(a+b)$ ナリ.

$\therefore$ 原方程式ハ $(x-a)(x-b)\{6x-3(a+b)\}=0$ ト書クコトヲ得.

故ニ求ムル根ハ $x=a$ 或ハ $x=b$ 或ハ $x=\dfrac{a+b}{2}$ ナリ.

別解 原方程式ハ次ノ如ク書キ直サル.

$$(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$$

$$\therefore\quad (a-x)^3+(b-x)^3=(a-x)^3+3(a-x)^2(b-x)+3(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3$$

$$\therefore\quad 3(a-x)^2(b-x)+3(a-x)(b-x)^2=0$$

$$\therefore\quad 3(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}=0$$

$\therefore$ 求ムル根ハ $a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$ ナリ.

8. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ ヲ解ケ(38年,札幌農學).

解 x^2 ニテ兩邊ヲ割リ,項ノ順序ヲ變ジテ兩端ヨリ同ジ番目ノ項ヲ組合スレバ

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=y$ トオケバ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

$$\therefore\quad 6(y^2-2)+5y-38=0$$

$$\therefore\quad 6y^2+5y-50=0$$

$$\therefore\quad (2y-5)(3y+10)=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{5}{2} \quad 或ハ \quad y=-\frac{10}{3}$$

$y=\dfrac{5}{2}$ ナルトキハ $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $2x^2-5x+2=0$ $\therefore$ $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{1}{2}$ 或ハ $x=2$

又 $y=-\dfrac{10}{3}$ ナルトキ $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$

$\therefore$ $3x^2+10x+3=0$ $\therefore$ $(3x+1)(x+3)=0$

$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{3}$ 或ハ $x=-3$

---

9. 次ノ方程式ヲ解ケ(38年專門學校入學者檢定).

$$\frac{x-3}{x-\dfrac{1}{x}}+2+\frac{1}{x+1}=0$$

解 先ヅ第一項ノ分子分母ニ x ヲ掛クレバ原方程式ハ

$$\frac{x(x-3)}{x^2-1}+2+\frac{1}{x+1}=0$$

ソコデ兩邊ニ x^2-1 掛クレバ

$$x(x-3)+2(x^2-1)+(x-1)=0 \quad \text{即チ} \quad 3x^2-2x-3=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+3\times3}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}$$

然ルニ前ニ整方程式ヲ得ルタメニ掛ケタル式 x^2-1 ハ x ガ ±1 ナルニアラザレバ0トナラズ,故ニ求ムル根ハ $\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}$ ナリ.

10. 次ノ方程式ヲ解ケ(34年,海軍機關,41年,千葉醫學專門).

$$\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}$$

解 $\frac{2x-3}{3x-5}=y$ トオケバ原方程式ハ $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ トナル.

$$\therefore \quad 2y^2+2=5y \qquad \therefore \quad 2y^2-5y+2=0$$

$$\therefore \quad (2y-1)(y-2)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2} \quad \text{又ハ} \quad y=2$$

$y=\frac{1}{2}$ ナル時ハ $\frac{2x-3}{3x-5}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad 4x-6=3x-5 \quad\therefore\quad x=1$

$y=2$ ナル時ハ $\frac{2x-3}{3x-5}=2$ $\quad\therefore\quad 2x-3=6x-10 \quad\therefore\quad x=\frac{7}{4}$

此1及ビ $\frac{7}{4}$ ガ求ムル根ナルコト明カナリ.

11. 下ノ方程式ヲ解ケ(43年,海軍機關).

$$\frac{x}{1+x}-\frac{1+x}{x}=\frac{3}{2}$$

解 $\frac{x}{1+x}=y$ トオケバ原方程式ハ $y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$

$$\therefore \quad 2y^2-2=3y \qquad \therefore \quad 2y^2-3y-2=0$$

$$\therefore \quad (2y+1)(y-2)=0 \qquad \therefore \quad y=-\frac{1}{2} \quad \text{或ハ} \quad y=2$$

$y=-\frac{1}{2}$ ナル時ハ $\frac{x}{1+x}=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad 2x=-1-x \quad\therefore\quad x=-\frac{1}{3}$

$y=2$ ナル時ハ $\frac{x}{1+x}=2$ $\quad\therefore\quad x=2+2x \quad\therefore\quad x=-2$

故ニ求ムル根ハ $-\frac{1}{3}$ ト -2 トナリ.

12. $\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=\frac{8}{3}$ ヲ解ケ(41年,千葉醫學專門).

解 前例ノ如クシテ解ケバヨシ. 或ハ次ノ如クスルモ可ナリ(10, 11モ亦之ニ倣ヒテ解クコトヲ得). 原方程式ヲ

$$\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=3-\frac{1}{3}$$

トイフ形ニ書キ直セバ視察ニヨリテ

$$\frac{3x-2}{2x-5}=3 \qquad \therefore \quad 3x-2=6x-15 \qquad \therefore \quad x=\frac{13}{3}$$

又 $\frac{8}{3}=3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}+3=-\frac{1}{3}-\frac{1}{-\frac{1}{3}}$ ナルユエ原方程式ヲ

$$\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

ナル形ニ書キ直セバ視察ニヨリ

$$\frac{3x-2}{2x-5}=-\frac{1}{3} \qquad \therefore \quad 9x-6=-2x+5 \qquad \therefore \quad x=1$$

而シテ原方程式ヲ解クタメニ普通ノ仕方ニヨリテ作ル整方程式ハ二次ナルヲ以テ此外ニ根ノナキコト明カナリ. 因テ求ムル根ハ1及ビ $\frac{13}{3}$ ナリ.

13. 次ノ方程式ヲ解ケ(39年,專門學校入學者檢定).

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$$

解 $\frac{x^2}{x+1}=y$ トオケバ原方程式ハ $y+\frac{1}{y}=2$ トナル.

$$\therefore \quad y^2+1=2y \qquad \therefore \quad y^2-2y+1=0$$

即チ $\quad (y-1)^2=0 \qquad \therefore \quad y=1 \quad \text{或ハ} \quad y=1$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{x+1}=1 \qquad \therefore \quad x^2=x+1$$

$$\therefore \quad x^2-x-1=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

他ノ二根モ之ニ同ジ,故ニ求ムル所ノ根ハ $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ノ四ツナリ.

14. 下ノ方程式ヲ解ケ(38年,海軍機關).

$$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=0$$

解 此分母ノ中 $x+7$ ト $x-7$ トノ和ハ $2x$, $x+1$ ト $x-1$ トノ和モ亦 $2x$ ニシテ相等シ,ソコデ次ノ如ク組合セ~~其各ヲ一ツニ纏メテ解~~~~クハ稍便利ナ~~リ.

即チ $\left(\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)=0$ ∴ $\frac{2x}{x^2-49}+\frac{2x}{x^2-1}=0$

即チ $2x\left(\frac{1}{x^2-49}+\frac{1}{x^2-1}\right)=0$ ∴ $x=0$ 或ハ $\frac{1}{x^2-49}+\frac{1}{x^2-1}=0$

此第二ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘバ $x^2-1+x^2-49=0$

∴ $2x^2=50$ ∴ $x^2=25$ ∴ $x=\pm 5$

因テ求ムル所ノ根ハ 0, 5, −5 ノ三ツナリ.

15. 次ノ方程式ヲ解ケ(38年,盛岡高等農林;40年,陸軍士官候補生).

$$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$$

解 兩邊ニ分母ノ最小公倍數 x^2-1 ヲ掛クレバ

$$x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)=0$$

∴ $3x^2-2x-1=0$ ∴ $(3x+1)(x-1)=0$

∴ $x=-\frac{1}{3}$ 又ハ ∴ $x=1$

然ルニ $x=1$ ハ前ニ掛ケタル式 x^2-1 ヲ0ニ等シトオキタル方程式 $x^2-1=0$ ノ根ノ內ニアリ,故ニ之ハ取ラザルベカラズ. 因テ求ムル所ノ根ハ $-\frac{1}{3}$ ノミナリ.

16. $\frac{3x^2}{(3x+1)(x+1)}+\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)=1$ ヲ解ケ(41年,第八高等).

解 $(3x+1)(x+1)$ ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$$3x^2+x(3x+1)+x=(3x+1)(x+1)$$

∴ $3x^2+3x^2+x+x=3x^2+4x+1$ ∴ $3x^2-2x-1=0$

∴ $(3x+1)(x-1)=0$ ∴ $x=1$ 或ハ $x=-\frac{1}{3}$

此內 $x=-\frac{1}{3}$ ハ前ニ掛ケタル式 $(3x+1)(x+1)$ ヲ0ニ等シトオキタル方程式ノ根ノ內ニモアリ,故ニ之ハ原方程式ノ根ニアラズ,即チ求ムル根ハ只1,一ツノミナリ.

17. $x^2+x+\frac{1}{x^2+x}=2\frac{1}{2}$ ヲ解ケ.

解 12ニ倣ヒテ x^2+x ヲ求ムレバ

$x^2+x=2$ 又ハ $x^2+x=\frac{1}{2}$ ヲ得ルコト明カナリ.

$x^2+x=2$ ナルトキハ $x^2+x-2=0$

∴ $(x+2)(x-1)=0$ ∴ $x=-2$ 或ハ $x=1$

又 $x^2+x=\frac{1}{2}$ ナル時ハ $2x^2+2x-1=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

因テ求ムル根ハ −2, 1, $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ ノ四ツナリ.

18. $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$ ヲ解ケ(38年,東京商船).

解 $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$ トオケバ

∴ $y^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}$ ∴ $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$

之ヲ原方程式ニ代用スレバ $y^2+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}y$

∴ $3y^2-10y+8=0$ ∴ $(3y-4)(y-2)=0$ ∴ $y=\frac{4}{3}$ 或ハ $y=2$

$y=\frac{4}{3}$ ナル時ハ $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$ ∴ $x^2-12=4x$

∴ $x^2-4x-12=0$ ∴ $(x-6)(x+2)=0$ ∴ $x=6$ 或ハ $x=-2$

$y=2$ ナル時ハ $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$ ∴ $x^2-12=6x$

∴ $x^2-6x-12=0$ ∴ $x=3\pm\sqrt{3^2+12}=3\pm\sqrt{21}$

ニ求ムル所ノ根ハ 6, −2, $3\pm\sqrt{21}$ ノ四ツナリ.

19. $\dfrac{5}{x^2+6x+2}=\dfrac{3}{x^2+6x+1}-\dfrac{4}{x^2+6x+8}$ ヲ解ケ.

解 $x^2+6x+2=y$ トオケバ原方程式ハ $\dfrac{5}{y}=\dfrac{3}{y-1}-\dfrac{4}{y+6}$ トナル.

$$\therefore\quad 5(y-1)(y+6)=3y(y+6)-4y(y-1)$$

$$\therefore\quad 5y^2+25y-30=3y^2+18y-4y^2+4y$$

$$\therefore\quad 6y^2+3y-30=0 \qquad \therefore\quad 2y^2+y-10=0$$

$$\therefore\quad (2y+5)(y-2)=0$$

$$\therefore\quad y=2 \quad \text{或ハ} \quad y=-\frac{5}{2}$$

$y=2$ ナルキハ $x^2+6x+2=2$ $\quad\therefore\quad x^2+6=0$

$$\therefore\quad x(x+6)=0 \qquad \therefore\quad x=0 \quad \text{或ハ} \quad x=-6$$

又 $y=-\dfrac{5}{2}$ ナルキハ $x^2+6x+2=-\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore\quad 2x^2+12x+9=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-18}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{18}}{2}=\frac{-6\pm3\sqrt{2}}{2}$$

因テ求ムル所ノ根ハ $0,\ -6,\ \dfrac{-6\pm3\sqrt{2}}{2}$ ノ四ツナリ.

20. 次ノ方程式ヲ解ケ(33年,海軍兵).

$$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$$

解 $x^2-8=y$ トスレバ $\dfrac{1}{y+11x}+\dfrac{1}{y+2x}+\dfrac{1}{y-13x}=0$

$$\therefore\quad (y+2x)(y-13x)+(y+11x)(y-13x)+(y+11x)(y+2x)=0$$

$$\therefore\quad y^2-11xy-26x^2+y^2-2xy-143x^2+y^2+13xy+22x^2=0$$

$$\therefore\quad 3y^2-147x^2=0 \qquad \therefore\quad y^2-49x^2=0$$

$$\therefore\quad y=7x \quad \text{或ハ} \quad y=-7x$$

$y=7x$ ナルトキハ $x^2-8=7x$ $\quad\therefore\quad x^2-7x-8=0$

$$\therefore\quad (x-8)(x+1)=0 \qquad \therefore\quad x=8 \quad \text{或ハ} \quad x=-1$$

又 $y=-7x$ ナルトキ $x^2-8=-7x$ $\quad\therefore\quad x^2+7x-8=0$

$$\therefore\quad (x+8)(x-1)=0 \qquad \therefore\quad x=-8 \quad \text{或ハ} \quad x=1$$

因テ求ムル所ノ根ハ $\pm8,\ \pm1$ ナリ.

21. 方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ ヲ解ケ(43年,第七高等).

解 兩邊ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ掛クレバ

$$(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$$

$$\therefore\quad x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca+x^2-(a+b)x+ab=0$$

$$\therefore\quad 3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)}}{3}$$

$$=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$$

而シテ此値ハ一般ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ0ナラシメザルヲ以テ此二ツガ(一般ニハ)求ムル所ノ根ナリ.

注意 コヽニ,一般ニハトイヘルハ特別ナル場合ニハ必ズシモ然ラズトイフ意ナリ. 例ヘバ $b=c$ ナル場合ニハ上ノ根ハ

$$\frac{a+2b\pm\sqrt{a^2+2b^2-b^2-2ab}}{3}=\frac{a+2b\pm\sqrt{(a-b)^2}}{3}=\frac{a+2b\pm(a-b)}{3}$$

即チ $\dfrac{a+2b+(a-b)}{3}=\dfrac{2a+b}{3}$ 又ハ $\dfrac{a+2b-(a-b)}{3}=b$ トナル,然ルニ此場合ニハ掛ケタル式ヲ0トオケルモノ即チ

$(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)(x-b)^2=0$ ノ根ノ内ニモ b ナル根アルヲ以テ $\dfrac{2a+b}{3}$ ト b トノ内 $\dfrac{2a+b}{3}$ ダケガ與ヘラレタル方程式ノ根トナリ即チ一ツハ餘分ノ根トナル,サレドカヽルコトヲ嚴密ニ研究スルハ稍六ツ箇敷過ギルヲ以テ今ハ一般ニ當テ嵌ルモノハ須ク原程式ノ根ト見做シオクコトヽセルナリ. 以下ノ例ニツキテモ之ニ倣フ.

22. 次ノ方程式ヲ解ケ(43年,長崎高等商業).

$$\frac{a-x}{b}-\frac{b}{a-x}=\frac{a}{b-x}-\frac{b-x}{a}$$

解 先ヅ移項シテ次ノ如ク組合ス.

$$\left(\frac{a-x}{b}-\frac{a}{b-x}\right)+\left(\frac{b-x}{a}-\frac{b}{a-x}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{(a-x)(b-x)-ab}{b(b-x)}+\frac{(b-x)(a-x)-ab}{a(a-x)}=0$$

$\therefore \quad (a-x)(b-x)-ab=0$　或ハ　$\dfrac{1}{b(b-x)}+\dfrac{1}{a(a-x)}=0$

$(a-x)(b-x)-ab=0$ ナルトキハ　$ab-(a+b)x+x^2-ab=0$

$\therefore \; x^2-x(a+b)=0 \quad \therefore \; x(x-a-b)=0 \quad \therefore \; x=0$ 又ハ $x=a+b$

又　$\dfrac{1}{b(b-x)}+\dfrac{1}{a(a-x)}=0$ ナルトキハ　$a(a-x)+b(b-x)=0$

$\therefore \; a^2-ax+b^2-bx=0 \quad \therefore \; (a+b)x=a^2+b^2 \quad \therefore \; x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

因テ求ムル根ハ $0,\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ ノ三ツナリ。

23.　次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ見出セ(38年,農科大學實科).

$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3$$

解　與ヘラレタル方程式ハ次ノ如ク書キ直サル。

$$\left(\frac{a}{x+a}-1\right)+\left(\frac{b}{x+b}-1\right)+\left(\frac{c}{x+c}-1\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}+\frac{-x}{x+c}=0$$

$\therefore \quad -x=0$　又ハ　$\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}=0$

$-x=0$ ヨリ $x=0$ ヲ得。又第二ノ方程式ハ21ノ a, b, c ノ符號ガ變リタルノミナルヲ以テ前ト同樣ニシテ次ノ答ヲ得。

$$x=\frac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$$

24.　下式ヲ解ケ(35年,東京商船).

$$\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(a+c)(a+b)}=\frac{1}{(a+c)(x-c)}+\frac{1}{(a+b)(x-b)}$$

解　兩邊ニ $(a+b)(a+c)(x-b)(x-c)$ ヲ掛クレバ

$$(a+b)(a+c)+(x-b)(x-c)=(a+b)(x-b)+(a+c)(x-c)$$

$$\therefore \quad (a+b)(a+c)+x^2-(b+c)x+bc=(a+b)x-b(a+b)+(a+c)x-(a+c)c$$

$$\therefore \quad x^2-(b+c)x-(a+b)x-(a+c)x+(a+b)(a+c)+bc+(a+b)b+(a+c)c=0$$

然ルニ絕對項 $=(a+b)(a+c)+(a+b)b+bc+(a+c)c$

$$=(a+b)(a+c+b)+c(b+a+c)=(a+b+c)(a+b+c)$$

$\therefore$　上ノ方程式ハ　$x^2-2(a+b+c)x+(a+b+c)^2=0$

$\therefore \quad \{x-(a+b+c)\}^2=0 \quad \therefore \quad x=a+b+c$　又ハ　$x=a+b+c$

25.　次ノ方程式ヲ解ケ(42年,陸軍主計候補生).

$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}, \quad x^3-7x+6=0$$

解　(第一)　先ヅ $\left(\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{a-c}{x+a-c}\right)+\left(\dfrac{b}{x+b}-\dfrac{b+c}{x+b+c}\right)=0$

トシ組合セタル各チーヅニ纏ムレバ

$$\frac{cx}{(x+a)(x+a-c)}+\frac{-cx}{(x+b)(x+b+c)}=0$$

$\therefore \quad cx=0$　又ハ　$\dfrac{1}{(x+a)(x+a-c)}-\dfrac{1}{(x+b)(x+b+c)}=0$

此第二ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$(x+b)(x+b+c)-(x+a)(x+a-c)=0$$

$$\therefore \quad x^2+(2b+c)x+b(b+c)-x^2-(2a-c)x-a(a-c)=0$$

$$\therefore \quad 2(b+c-a)x+c(a+b)-(a^2-b^2)=0$$

$\therefore \quad 2(b+c-a)x+(a+b)(c+b-a)=0 \quad \therefore \quad x=-\dfrac{a+b}{2}$

又 $cx=0$ ヨリ $x=0$ ヲ得ルヲ以テ與ヘラレタル分數方程式ノ根ハ 0 ト $-\dfrac{a+b}{2}$ トノ二ツナリ。

(第二)　x^3-7x+6 ハ $x=1$ トスレバ 0 トナルユヱ $x-1$ ハ其一因數ナリ。ソコデ x^3-7x+6 ヲ $x-1$ ニテ割レバ x^2+x-6 ヲ得。故ニ與ヘラレタル三次方程式ハ次ノ如ク書カル。

$(x-1)(x^2+x-6)=0 \quad \therefore \quad x-1=0$　又ハ　$x^2+x-6=0$

$x-1=0$ ナルトキ $x=1$

又 $x^2+x-6=0$ 即 $(x+3)(x-2)=0$ ナルトキハ $x=-3$ 又ハ $x=2$

故ニ與ヘラレタル三次方程式ノ根ハ 1, 2, −3 ノ三ツナリ。

26. 次ノ方程式ニ適スル x ノ値ヲ求ム(32年,東京高等師範).

$$x+\sqrt{5x+10}=8$$

解 $\sqrt{5x+10}=8-x$ トシテ兩邊ヲ二乘スレバ

$5x+10=64-16x+x^2$ ∴ $x^2-21x+54=0$

∴ $(x-3)(x-18)=0$ ∴ $x=3$ 或ハ $x=18$

$x=3$ トスレバ $x+\sqrt{5x+10}=3+\sqrt{15+10}=3+5=8$

又 $x=18$ トスレバ $x+\sqrt{5x+10}=18+\sqrt{90+10}=18+10=28$

因テ 3 ダケガ原方程式ノ根ナリ。

27. 次ノ方程式ヲ解ケ(42年,海軍兵).

$$x=\sqrt{x}+1$$

解 $x-1=\sqrt{x}$ トシ兩邊ヲ二乘スレバ

$x^2-2x+1=x$ ∴ $x^2-3x+1=0$

∴ $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ トスレバ $\sqrt{x}+1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+1=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}+1$

$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=x$

又 $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ トスレバ $\sqrt{x}+1=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}+1=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}+1$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\neq x$

因テ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ガ求ムル所ノ根ナリ。

28. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-7}=2$ ヲ解ケ,但シ此處ノ根號ハ平方根ノ正値ヲ示ス(41年,東京高等商業).

解 無理式ガ唯一ツダケ一邊ニアル様ニ移項スレバ

$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{4x-7}$

此兩邊ヲ平方スレバ $2x+3=4+4\sqrt{4x-7}+4x-7$

再ビ無理式ダケガ一邊ニアル様ニ移項スレバ

$6-2x=4\sqrt{4x-7}$

此兩邊ヲ 2 ニテ割リ,然ル後平方スレバ

$(3-x)^2=4(4x-7)$

∴ $9-6x+x^2=16x-28$ ∴ $x^2-22x+37=0$

∴ $x=11\pm\sqrt{121-37}=11\pm\sqrt{84}=11\pm2\sqrt{21}$

$x=11+2\sqrt{21}$ トスレバ

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-7}=\sqrt{22+4\sqrt{21}+3}-\sqrt{44+8\sqrt{21}-7}$

$=\sqrt{25+2\sqrt{21\times4}}-\sqrt{37+2\sqrt{21\times16}}$

$=2+\sqrt{21}-(4+\sqrt{21})$ 〔第331頁 第144節〕

$=-2$

又 $x=11-2\sqrt{21}$ トスレバ

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-7}=\sqrt{22-4\sqrt{21}+3}-\sqrt{44-8\sqrt{21}-7}$

$=\sqrt{25-2\sqrt{21\times4}}-\sqrt{37-2\sqrt{21\times16}}$

$=(\sqrt{21}-2)-(\sqrt{21}-4)$ 〔第331頁 第144節〕

$=2$

仍テ $11-2\sqrt{21}$ ガ求ムル所ノ根ナリ。

29. 次ノ方程式ヲ解ケ(35年,海軍兵).

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}-\sqrt{12x+1}=0$$

解 $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$ トシ兩邊ヲ平方スレバ

$x+5+2\sqrt{x+5}\sqrt{3x+4}+3x+4=12x+1$

∴ $2\sqrt{x+5}\sqrt{3x+4}=8x-8$

兩邊ヲ 2 ニテ割リ然ル後平方スレバ

$(x+5)(3x+4)=(4x-4)^2$ ∴ $3x^2+19x+20=16x^2-32x+16$

∴ $13x^2-51x-4=0$ ∴ $(13x+1)(x-4)=0$

∴ $x=-\frac{1}{13}$ 又ハ $x=4$

$x=-\frac{1}{13}$ トスレバ　$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}-\sqrt{12x+1}$

$$=\sqrt{5-\frac{1}{13}}+\sqrt{4-\frac{3}{13}}-\sqrt{1-\frac{12}{13}}$$

$$=\sqrt{\frac{64}{13}}+\sqrt{\frac{49}{13}}-\sqrt{\frac{1}{13}}=\frac{8}{\sqrt{13}}+\frac{7}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{13}}\neq 0$$

又 $x=4$ トスレバ　$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}-\sqrt{12x+1}$

$$=\sqrt{4+5}+\sqrt{12+4}-\sqrt{48+1}=3+4-7=0$$

故ニ4ガ求ムル所ノ根ナリ。

30. 次ノ方程式ヲ解ケ(37年,海軍兵).

$$\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}=0$$

解　$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$ トシテ兩邊ヲ平方スレバ

$$2x-5+2\sqrt{2x-5}\sqrt{x-3}+x-3=3x+4$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{2x-5}\sqrt{x-3}=12$$

$$\therefore\quad (2x-5)(x-3)=36 \qquad \therefore\quad 2x^2-11x+15=36$$

$$\therefore\quad 2x^2-11x-21=0 \qquad \therefore\quad (2x+3)(x-7)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{3}{2} \quad 又ハ \quad x=7$$

$x=7$ トスレバ　$\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}$

$$=\sqrt{14-5}-\sqrt{21+4}+\sqrt{7-3}=3-5+2=0$$

又 $x=-\frac{3}{2}$ トスルトキハ原方程式ノ各項ハ虚數トナリ,其正負定マラザルヲ以テ正否ヲ判定スル能ハズ。

故ニ7ダケガ求ムル所ノ根ナリ。

31. 次ノ方程式ヲ解ケ(38年,海軍兵).

$$\sqrt{2x+9}+\sqrt{3x-15}=\sqrt{7x+8}$$

解　兩邊ヲ平方スレバ $2x+9+2\sqrt{2x+9}\sqrt{3x-15}+3x-15=7x+8$

$$\therefore\quad 2\sqrt{2x+9}\sqrt{3x-15}=2x+14$$

兩邊ヲ2ニテ割リ然ル後平方スレバ

$$(2x+9)(3x-15)=(x+7)^2 \qquad \therefore\quad 6x^2-3x-135=x^2+14x+49$$

$$\therefore\quad 5x^2-17x-184=0 \qquad \therefore\quad (5x+23)(x-8)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{23}{5} \quad 又ハ \quad x=8$$

$x=8$ トスレバ原方程式ノ左邊 $=\sqrt{16+9}+\sqrt{24-15}=5+3=8$

又　　右邊 $=\sqrt{56+8}=8$

而シテ前例ト同様ニ8ダケガ原方程式ノ根ナリ。

32. $x^2+\sqrt{x^2-7x+18}=24+7x$　ノ根ヲ求メヨ(41年,東京商船).

解　此方程式ヲ書キ換ヘテ

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}-18-24=0$$

即チ　$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}-42=0$

トナル,ソコデ　$\sqrt{x^2-7x+18}=y$　トオケバ

$$y^2+y-42=0 \quad 即チ \quad (y+7)(y-6)=0 \ トナル。$$

$$\therefore\quad y=-7 \quad 或ハ \quad y=6$$

然ルニyハ正ノ數ナルベキニヨリ -7 ハ問題ニ適セズ。

$$\therefore\quad \sqrt{x^2-7x+18}=6 \qquad \therefore\quad x^2-7x+18=36$$

$$\therefore\quad x^2-7x-18=0 \qquad \therefore\quad (x-9)(x+2)=0$$

$\therefore\quad x=9$　或ハ　$x=-2$　之レ求ムル所ノ根ナリ。

33. 次ノ方程式ヲ解ケ(36年,海軍兵).

(a)　$\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3$

(b)　$x^2-5x+\sqrt{(x^2-5x+11)}=19$

解　(a) 先ヅ　$\left(\frac{x+3}{3-x}-1\right)+\left(\frac{x+6}{6-x}-1\right)+\left(\frac{x+9}{9-x}-1\right)=0$

即チ　$\frac{2x}{3-x}+\frac{2x}{6-x}+\frac{2x}{9-x}=0$　トスレバ直ニ

$x=0$　又ハ　$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{6-x}+\frac{1}{9-x}=0$　トナル。

此第二ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$(6-x)(9-x)+(3-x)(9-x)+(3-x)(6-x)=0$$

$\therefore\quad 54-15x+x^2+27-12x+x^2+18-9x+x^2=0$

$\therefore\quad 3x^2-36x+99=0 \qquad \therefore\quad x^2-12x+33=0$

$\therefore\quad x=6\pm\sqrt{36-33}=6\pm\sqrt{3}$

而シテ x ノ此値ハ前ニ掛ケタル式ヲ0ナラシメズ。

故ニ與ヘラレタル分數方程式ノ根ハ 0, $6\pm\sqrt{3}$ ナリ。

〔b〕 先ヅ $x^2-5x+11+\sqrt{(x^2-5x+11)}-30=0$ トシ,ソコデ

$\sqrt{(x^2-5x+11)}=y$ トスレバ $y^2+y-30=0$ トナル。

$\therefore\quad (y+6)(y-5)=0 \qquad \therefore\quad y=-6$ 又ハ $y=5$

然ルニ y ハ正ナルベキヲ以テ -6 ハ問題ニ適セズ。

$\therefore\quad \sqrt{(x^2-5x+11)}=5 \qquad \therefore\quad x^2-5x+11=25$

$\therefore\quad x^2-5x-14=0 \qquad \therefore\quad (x-7)(x+2)=0$

$\therefore\quad x=7$ 又ハ $x=-2$ 是レ卽チ求ムル根ナリ。

34. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$ ヲ解ケ(34年,海軍機關)。

解 先ヅ分母ヲ拂ヒ $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$ トシサテ書キ換ヘテ

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0$$

トナシ,ソコデ $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$ トオケバ $y^2-2y+1=0$

$\therefore\quad (y-1)^2=0 \qquad \therefore\quad y=1$

$\therefore\quad \sqrt{2x^2-3x+2}=1 \qquad \therefore\quad 2x^2-3x+2=1$

$\therefore\quad 2x^2-3x+1=0 \qquad \therefore\quad (x-1)(2x-1)=0$

$\therefore\quad x=1$ 或ハ $x=\dfrac{1}{2}$ 之レ求ムル所ノ根ナリ。

35. $\sqrt{x^2-5x+1}-4=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-5x+1}}$ ヲ解ケ(35年,海軍機關)。

故ニ $\sqrt{x^2-5x+1}=y$ トオケバ $y-4=\dfrac{5}{y}$

其分母ヲ拂ヘバ $y^2-4y-5=0$

$\therefore\quad (y-5)(y+1)=0 \qquad \therefore\quad y=5$ 或ハ $y=-1$

然ルニ y ハ正ノ數ナルベキニヨリ -1 ハ問題ニ適セズ。

$\therefore\quad \sqrt{x^2-5x+1}=5 \qquad \therefore\quad x^2-5x+1=25$

$\therefore\quad x^2-5x-24=0 \qquad \therefore\quad (x-8)(x+3)=0$

$\therefore\quad x=8$ 或ハ $x=-3$ 之レ求ムル所ノ根ナリ。

36. $\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}-1=\sqrt{x-1}$ ヲ解ケ。

解 左邊ニアル -1 ヲ右邊ニ移シ,然ル后兩邊ヲ平方スレバ

$$x+\sqrt{2x+4}=x-1+2\sqrt{x-1}+1$$

$\therefore\quad \sqrt{2x+4}=2\sqrt{x-1} \qquad \therefore\quad 2(x+2)=4(x-1)$

$\therefore\quad x+2=2x-2 \qquad \therefore\quad x=4$

$x=4$ トスルトキ

原方程式ノ左邊 $=\sqrt{4+\sqrt{12}}-1=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$

右邊 $=\sqrt{3}$

因テ4ガ求ムル所ノ根ナリ。

37. 次ノ方程式ヲ解ケ(コヽニ根號 $\sqrt{}$ ハ或ルモノノ平方根ニ二ツアル中其正ナルモノヲ示ス)(37年,高等)。

$$\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3}\sqrt{(a-b)x}$$

解 兩邊ヲ平方スレバ

$$3ax-x^2-2\sqrt{(3ax-x^2)(x^2-3bx)}+x^2-3bx=3(a-b)x$$

$\therefore\quad 3(a-b)x-2\sqrt{(3ax-x^2)(x^2-3bx)}=3(a-b)x$

$\therefore\quad 2x\sqrt{(3a-x)(x-3b)}=0$

$\therefore\quad x=0$ 又ハ $\sqrt{(3a-x)(x-3b)}=0$

此第二ノ方程式ヨリ $(3a-x)(x-3b)=0$

$\therefore\quad x=3a$ 或ハ $x=3b$

$x=0$ トスルトキ 原方程式ノ左邊 $=0-0=0$, 右邊 $=0$

又 $x=3a$ トスルトキ

原方程式ノ左邊 $=-\sqrt{3a(3a-3b)}=-3\sqrt{a(a-b)}$

右邊 $=\sqrt{3}\sqrt{(a-b)3a}=3\sqrt{a(a-b)}$

又 $x=3b$ トスルトキ

原方程式ノ左邊 $=\sqrt{(3a-3b)3b}=3\sqrt{(a-b)b}$

右邊 $=\sqrt{3}\sqrt{(a-b)3b}=3\sqrt{(a-b)b}$

因テ0及 $3b$ ガ求ムル所ノ根ナリ。

38. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$ ヲ解ケ。

解 兩邊ヲ立方スレバ

$$8x+4-3(\sqrt[3]{8x+4})^2\sqrt[3]{8x-4}+3\sqrt[3]{8x+4}(\sqrt[3]{8x-4})^2-(8x-4)=8$$

$$\therefore\quad -3\sqrt[3]{8x+4}\sqrt[3]{8x-4}(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4})=0$$

然ルニ此左邊ノ最右方ノ因數ハ原方程式ノ左邊ト同一ナルヲ以テ其値ハ2ナリ。

$$\therefore\quad -6\sqrt[3]{8x+4}\sqrt[3]{8x-4}=0$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{8x+4}=0 \qquad \therefore\quad 8x+4=0 \qquad \therefore\quad x=-\frac{1}{2}$$

或ハ $\sqrt[3]{8x-4}=0 \qquad \therefore\quad 8x-4=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{2}$

$x=-\frac{1}{2}$ トスルトキ

原方程式ノ左邊 $=0-\sqrt[3]{-8}=0-(-2)=2$

又 $x=\frac{1}{2}$ トスルトキ

原方程式ノ左邊 $=\sqrt[3]{8}-0=2$

因テ $\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ ガ求ムル所ノ根ナリ。

***39.** 次ノ方程式ヲ解ケ(42年,水產講習所).

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{c}{d}$$

解 兩邊ヲ二乘スレバ

$$\frac{a^2-x^2-2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}+b^2+x^2}{a^2-x^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}+b^2+x^2}=\frac{c^2}{d^2}$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2-2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}{a^2+b^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}=\frac{c^2}{d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

*初メテ代數學ヲ學ブ者ハ本問ハ後廻ニスルガヨシ

(1)ノ兩邊ヲ1ヨリ引ケバ

$$1-\frac{a^2+b^2-2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}{a^2+b^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}=1-\frac{c^2}{d^2}$$

即チ
$$\frac{4\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}{a^2+b^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}=\frac{d^2-c^2}{d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又(1)ノ兩邊ニ1ヲ加フレバ

$$1+\frac{a^2+b^2-2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}{a^2+b^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}=1+\frac{c^2}{d^2}$$

即チ
$$\frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}=\frac{d^2+c^2}{d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)ノ兩邊ヲ夫夫(3)ノ兩邊ニテ割レバ

$$\frac{2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}}{a^2+b^2}=\frac{d^2-c^2}{d^2+c^2}$$

$$\therefore\quad 2(d^2+c^2)\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}=(a^2+b^2)(d^2-c^2)$$

兩邊ヲ二乘スレバ

$$4(d^2+c^2)^2(a^2-x^2)(b^2+x^2)=(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2$$

$$\therefore\quad 4(d^2+c^2)^2[a^2b^2+(a^2-b^2)x^2-x^4]=(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2$$

$$\therefore\quad 4(d^2+c^2)^2x^4-4(a^2-b^2)(d^2+c^2)^2x^2+(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2-4a^2b^2(d^2+c^2)^2=0\cdots(4)$$

x^2 ヲ新未知數 y トスレバ此方程式ハ y ノ二次方程式ナリ,而シテ其判別式ハ

$$16(a^2-b^2)^2(d^2+c^2)^4-16(d^2+c^2)^2(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2+64a^2b^2(d^2+c^2)^4$$
$$=16(d^2+c^2)^2[(a^2-b^2)^2(d^2+c^2)^2-(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2+4a^2b^2(d^2+c^2)^2]$$
$$=16(d^2+c^2)^2[\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}(d^2+c^2)^2-(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2]$$
$$=16(d^2+c^2)^2[(a^2+b^2)^2(d^2+c^2)^2-(a^2+b^2)^2(d^2-c^2)^2]$$
$$=16(d^2+c^2)^2(a^2+b^2)^2[(d^2+c^2)^2-(d^2-c^2)^2]$$
$$=16(d^2+c^2)^2(a^2+b^2)^2 4c^2d^2$$

$\therefore$ 其平方根ハ $\pm 8(a^2+b^2)(d^2+c^2)cd$

$\therefore$ (4)ノ x^2 ノ値ハ次ノ如シ.

$$x^2=\frac{2(a^2-b^2)(d^2+c^2)^2\pm 4(a^2+b^2)(d^2+c^2)cd}{4(d^2+c^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(c^2+d^2)\pm 2(a^2+b^2)cd}{2(d^2+c^2)}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{(a^2-b^2)(c^2+d^2)+2(a^2+b^2)cd}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2(c+d)^2-b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(5)$$

又ハ
$$x^2=\frac{(a^2-b^2)(c^2+d^2)-2(a^2+b^2)cd}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2(c-d)^2-b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(6)$$

吟味 （第一）(5)ナルx^2ノ値ヲ取レバ

$$a^2-x^2=a^2-\frac{a^2(c+d)^2-b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2[2(d^2+c^2)-(c+d)^2]+b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}$$

$$=\frac{a^2(c-d)^2+b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(7)$$

又
$$b^2+x^2=b^2+\frac{a^2(c+d)^2-b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2(c+d)^2+b^2[2(d^2+c^2)-(c-d)^2]}{2(d^2+c^2)}$$

$$=\frac{a^2(c+d)^2+b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{(a^2+b^2)(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(8)$$

サテ與ヘラレタル方程式ノ左邊ノ分母ハ正ナルヲ以テ右邊ノ分母モ亦正ト假定スルモ毫モ問題ノ一般的ナルコトヲ害セザルユヱ,dハ常ニ正即チ$d>0$ト見做スベシ.

又$x^2-a^2<x^2+b^2$ナルヲ以テ原方程式ノ左邊ノ分子ハ負ナリ,而シテ分母ハ正ナルヲ以テ,原方程式ノ左邊ハ常ニ負ナリ,從テ右邊モ亦負ナラザルベカラズ. 然ルニ$d>0$ト假定セルヲ以テ$\frac{c}{d}<0$ナルタメニハ$c<0$ナラザルベカラズ.

箇樣ニdハ正,cハ負ナルヲ以テ$d-c>0$ナリ.

從テ(7)ヨリ
$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{(d-c)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

dハ正,cハ負ナルヲ以テ$c+d$ハ正ナルコトアリ又負ナルコトアリ,何レトモ決定シ難シ.

若シ$c+d>0$ナラバ(8)ヨリ
$$\sqrt{b^2+x^2}=\frac{(c+d)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}=\frac{-2c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}},\quad \sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=\frac{2d\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}\quad\text{（原方程式ノ右邊）}$$

若シ$c+d<0$ナラバ(8)ヨリ
$$\sqrt{b^2+x^2}=\frac{-(c+d)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}=\frac{2d\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}},\quad \sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=\frac{-2c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=-\frac{d}{c}\neq\frac{c}{d}\quad\text{（原方程式ノ右邊）}$$

何レニシテモ(5)ノx^2ノ値ハ原方程式ニ適セズ

（第二）(6)ナルx^2ノ値ヲ取レバ

$$a^2-x^2=a^2-\frac{a^2(c-d)^2-b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2[2(d^2+c^2)-(c-d)^2]+b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}$$

$$=\frac{a^2(c+d)^2+b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{(a^2+b^2)(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(9)$$

$$b^2+x^2=b^2+\frac{a^2(c-d)^2-b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{a^2(c-d)^2+b^2[2(d^2+c^2)-(c+d)^2]}{2(d^2+c^2)}$$

$$=\frac{a^2(c-d)^2+b^2(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)^2}{2(d^2+c^2)}\cdots\cdots(10)$$

然ルニ$d-c>0$ナルヲ以テ(10)ヨリ
$$\sqrt{b^2+x^2}=\frac{(d-c)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

而シテ若シ$c+d>0$ナルトキハ(9)ヨリ
$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{(c+d)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{c}{d}\quad\text{（原方程式ノ右邊）}$$

又若シ$c+d<0$ナルトキハ(9)ヨリ
$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{-(c+d)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(d^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{d}{c}\neq\frac{c}{d}\quad\text{（原方程式ノ右邊）}$$

（第三）$c=d$ナルトキ (5)ハ$x^2=a^2$トナリ,(6)ハ$x^2=-b^2$トナル

$x^2=a^2$ナルトキハ原方程式ノ左邊ハ
$$\frac{-\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}}=-1\neq\frac{c}{c}=\frac{c}{d}$$

$x^2=-b^2$ナルトキハ原方程式ノ左邊ハ
$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}=1=\frac{c}{c}=\frac{c}{d}$$

是ニ由テ$c+d>0$ニシテ$c-d<0$ナル時($d>0$ナルコトハ此內ニ含マル)及ビ$c=d$ナルトキニ限リ原方程式ニ根アリ,即チ(6)ヨリ得ラルル$x=\pm\sqrt{\frac{a^2(c-d)^2-b^2(c+d)^2}{2(d^2+c^2)}}$ナリ. 他ノ場合ニハ根ナシ.

二次方程式ノ解法ニ導キ得ル聯立方程式

174. 一次及二次ノ聯立方程式

此場合ニ於テハ一般ニ一次方程式ニヨリテ一ツノ未知數ヲ今一ツノ未知數ニテ表シ,之ヲ二次方程式ノ中ヘ代用シテ一元二次方程式ヲ作リ,之ヲ解ケバ求ムル所ノ根ヲ得ベシ.

例 1. $\left.\begin{array}{r} y^2-x^2+2x+2y+4=0 \cdots\cdots(1) \\ 2x-y-7=0 \cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

(2) ヨリ $\qquad y=2x-7 \cdots\cdots\cdots(3)$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$(2x-7)^2-x^2+2x+2(2x-7)+4=0$$

即チ $\qquad 3x^2-22x+39=0$

即チ $\qquad (3x-13)(x-3)=0$

$\therefore \qquad x=\frac{13}{3}$ 或ハ $x=3$

$x=\frac{13}{3}$ ナルトキハ(3)ヨリ $\quad y=2\times\frac{13}{3}-7=\frac{26}{3}-7=\frac{5}{3}$

又 $x=3$ ナルトキハ(3)ヨリ $\quad y=2\times3-7=6-7=-1$

因テ求ムル所ノ答ハ

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{13}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{array}\right\} \text{ 及 } \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}$$

ノ二組ナリ.

例 2. $\left.\begin{array}{r} 5x+6y=11 \cdots\cdots(1) \\ 3x^2+4y^2=7 \cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

(1) ヨリ $\qquad x=\frac{1}{5}(11-6y) \cdots\cdots\cdots(3)$

之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{3}{25}(11-6y)^2+4y^2=7$$

$\therefore \qquad 3(11-6y)^2+100y^2=175$

即チ $\qquad 363-396y+108y^2+100y^2=175$

$\therefore \qquad 208y^2-396y+188=0$

兩邊ヲ4デ割レバ

$$52y^2-99y+47=0$$

$\therefore \qquad (52y-47)(y-1)=0$

$\therefore \qquad y=\frac{47}{52}$ 或ハ $y=1$

$y=\frac{47}{52}$ ナルトキハ(3)ヨリ

$$x=\frac{1}{5}\left(11-6\times\frac{47}{52}\right)=\frac{1}{5}\left(11-\frac{141}{26}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{145}{26}=\frac{29}{26}$$

$y=1$ ナルトキハ(3)ヨリ

$$x=\frac{1}{5}(11-6\times1)=\frac{1}{5}\times5=1$$

故ニ求ムル所ノ答ハ

$$x=\frac{29}{26},\ y=\frac{47}{52} \text{ 及 } x=1,\ y=1$$

ノ二組ナリ.

175. 二次ト二次トノ聯立方程式

此一般ナル場合ハ本書ノ程度ニテハ之ヲ解クコト能ハズ,ソコデ爰ニ二三ノ容易ナル場合ノ解法ノ例ヲ示サン.

(第一) 加法若クハ減法ニヨリテ未知數ノ何レカ一ツ若クハ二次ノ項ガ消去サルル場合

例 1. $\left.\begin{array}{l} 9x^2-8y^2=28\cdots\cdots(1) \\ 7x^2+3y^2=31\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times3+(2)\times8 \qquad 27x^2+56x^2=84+248$

即チ $\qquad 83x^2=332$

$\therefore \qquad x^2=4$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$36-8y^2=28$$

$$\therefore \quad 8y^2=8$$

$$\therefore \quad y^2=1$$

$\therefore \quad x^2=4,\ y^2=1,$ 即チ $x=+2,\ y^2=1;\ x=-2,\ y^2=1$

即チ $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-1 \end{array}\right\}$

ナル四組ノ根ヲ得.

例 2. $\left.\begin{array}{l} x^2+3y=18\cdots\cdots(1) \\ 2x^2-5y=\ 3\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times2-(2) \qquad 6y+5y=36-3$

$\therefore \quad 11y=33 \qquad \therefore \quad y=3$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$x^2+9=18$$

$\therefore \quad x^2=9 \qquad \therefore \quad x=\pm3$

$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=3 \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=3 \end{array}\right\}$ ナル二組ノ根ヲ得.

例 3. $\left.\begin{array}{l} 3x^2-\dfrac{1}{y^2}=2\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x^2+\dfrac{3}{y^2}=120\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

コヽニテハ先ヅ x ト $\dfrac{1}{y}$ トヲ未知數ト見テ解クガヨシ.

$(1)\times3+(2) \qquad 14x^2=126$

$\therefore \quad x^2=9 \qquad \therefore \quad x=\pm3$

此 x^2 ヲ(1)ニ代用スレバ

$$27-\frac{1}{y^2}=2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y^2}=27-2=25$$

$\therefore \quad y^2=\dfrac{1}{25} \qquad \therefore \quad y=\pm\dfrac{1}{5}$

即チ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$

ナル四組ノ根ヲ得.

例 4. $\left.\begin{array}{l} 3xy=5x-3y-1\cdots\cdots(1) \\ 2xy=3x+5y-7\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times2-(2)\times3 \qquad 0=10x-9x-6y-15y-2+21$

$$\therefore \qquad 0=x-21y+19$$

$$\therefore \qquad x=21y-19\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得. 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$3(21y-19)y=5(21y-19)-3y-1$$

即チ $$63y^2-57y=105y-95-3y-1$$

$$\therefore \qquad 63y^2-159y+96=0$$

$$\therefore \qquad 21y^2-53y+32=0$$

$$\therefore \qquad y=\frac{53\pm\sqrt{53^2-4\times21\times32}}{42}=\frac{\overset{53}{\cancel{35}}\pm\sqrt{121}}{\underset{42}{\cancel{58}}}=\frac{53\pm11}{42}$$

$y=\frac{53+11}{42}=\frac{32}{21}$ ナルトキハ(3)ヨリ

$$x=21\times\frac{32}{21}-19=13$$

又 $y=\frac{53-11}{42}=1$ ナルトキハ(3)ヨリ

$$x=21-19=2$$

$$\therefore \qquad x=13,\quad y=\frac{32}{21};\quad 及\quad x=2,\quad y=1$$

ノ二組ガ求ムル所ノ根ナリ.

例 5. $\left.\begin{array}{r}2x^2+4xy-2x-y+2=0\cdots\cdots(1)\\ 3x^2+6xy-x+3y=0\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$$\begin{array}{ll}(1)\times3 & 6x^2+12xy-6x-3y+6=0\\ (2)\times2 & 6x^2+12xy-2x+6y=0\quad(-\\ \hline & -4x-9y+6=0\end{array}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{6-9y}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\;$$

之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{3(36-108y+81y^2)}{16}+\frac{6(6-9y)y}{4}-\frac{6-9}{4}\quad=0$$

$$\therefore \qquad 108-324y+243y^2+144y-216y^2-24+36y+48y=0$$

$$\therefore \qquad 27y^2-96y+84=0$$

$$\therefore \qquad 9y^2-32y+28=0$$

$$\therefore \qquad (9y-14)(y-2)=0$$

$$\therefore \qquad y=\frac{14}{9}\quad 或ハ\quad y=2$$

之ヲ(3)ニ代用スレバ次ノ二組ノ答ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{14}{9}\\ x=-2\end{array}\right\}\quad 及\quad \left.\begin{array}{l}y=2\\ x=-3\end{array}\right\}$$

(第二) 一ツノ方程式ノ一邊ヲ0トシタルトキ他邊ガ因數ニ分解サルヽ場合

例 1. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2+x-11y-2=0\cdots\cdots(1)\\ x^2-5xy+6y^2=0\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

(2)ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-2y)(x-3y)=0$$

$$\begin{array}{ll}\therefore & \left\{\begin{array}{l}x=2y\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ x=3y\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{array}\right.\\ 或ハ & \end{array}$$

$x=2y$ ヲ(1)ニ代用スレバ

$$4y^2+y^2+2y-11y-2=0$$

即チ $$5y^2-9y-2=0$$

$$\therefore \qquad (5y+1)(y-2)=0$$

$$\therefore \qquad y=-\frac{1}{5}\quad 或ハ\quad y=2$$

ソコデ之ヲ(3)ニ代用スレバ

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{5}\\[2mm] x=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{array}{l} y=2\\[2mm] x=4\end{array}\right\} \quad ヲ得.$$

次ニ　$x=3y$　ヲ(1)ニ代用スレバ

$$9y^2+y^2+3y-11y-2=0$$

即チ　$$10y^2-8y-2=0$$

∴　$$5y^2-4y-1=0$$

$$(5y+1)(y-1)=0$$

∴　$y=-\dfrac{1}{5}$　或ハ　$y=1$

之ヲ(4)ニ代用スレバ

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{5}\\[2mm] x=-\dfrac{3}{5}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=1\\[2mm] x=3\end{array}\right\} \quad ヲ得.$$

因テ原方程式ニハ四組ノ根アリ.

注意　一ツノ方程式ガ $ax^2+bxy+cy^2=0$ ナル形ナルトキ,本例ノ如ク此左邊ヲ因數ニ分解シテ之ヲ解クナリ.

例 2.
$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0 \cdots\cdots(1)\\ 3x^2-32y^2+5=0 \cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$$

ヲ解クコト.

(1)ヲ書キ換フレバ次ノ如クナル.

$$2(x+y)^2+3(x+y)-2=0$$

∴　$$\{2(x+y)-1\}\{(x+y)+2\}=0$$

$$\begin{array}{ll} ∴ & x+y=\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ 或ハ & x+y=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{array}$$

(3)ヨリ　$x=\dfrac{1}{2}-y=\dfrac{1-2y}{2}$ ………(5)

之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$3\left(\frac{1-2y}{2}\right)^2-32y^2+5=0$$

∴　$$3(1-2y)^2-128y^2+20=0$$

∴　$$3-12y+12y^2-128y^2+20=0$$

∴　$$116y^2+12y-23=0$$

∴　$$(58y-23)(2y+1)=0$$

∴　$y=\dfrac{23}{58}$　或ハ　$y=-\dfrac{1}{2}$

之ヲ(5)ニ代用スレバ

$x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{23}{58}$　又ハ　$x=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

故ニ
$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{29}\\[2mm] y=\dfrac{23}{58}\end{array}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{array}{l} x=1\\[2mm] y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

次ニ(4)ヨリ　$x=-(y+2)$ ………………(6)

之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$3(y^2+4y+4)-32y^2+5=0$$

∴　$$29y^2-12y-17=0$$

∴　$$(29y+17)(y-1)=0$$

∴　$y=-\dfrac{17}{29}$　或ハ　$y=1$

之ヲ(6)ニ代用スレバ

$x=-\left(-\dfrac{17}{29}+2\right)=-\dfrac{41}{29}$　又ハ　$x=-(1+2)=-3$

故ニ $\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{41}{29} \\ y=-\dfrac{17}{29} \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=1 \end{array}\right\}$

因ヲ原方程式ニハ四組ノ根アリ.

注意 一ツノ方程式ガ $au^2+bu+c=0$ (コヽニ u ハ x,y ヲ含ム或式) ナルトキハ本例ノ如ク此左邊ヲ因數ニ分解シテ之ヲ解クナリ.

(第三) 二ツノ方程式ヲ加減スルコトニヨリテ得ル方程式ガ因數ニ分解サレ得ル場合

例 1. $\left.\begin{array}{l} x^2+xy+2y^2=74 \dotfill (1) \\ 2x^2+2xy+y^2=73 \dotfill (2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

先ヅ兩方程式ノ未知數ヲ含マザル項ヲ等シクスベシ. 卽チ

$$\begin{array}{ll} (1)\times 73 & 73x^2+\ \ 73xy+146y^2=74\times 73 \dotfill (3) \\ (2)\times 74 & 148x^2+148xy+\ \ 74y^2=73\times 74 \dotfill (4) \\ \hline (3)-(4) & -75x^2-\ \ 75xy+\ \ 72y^2=0 \end{array} \quad (-$$

$$\therefore \quad 25x^2+25xy-24y^2=0$$

$$\therefore \quad (5x-3y)(5x+8y)=0$$

$$\therefore \quad 5x-3y=0 \dotfill (5)$$

或ハ $\quad 5x+8y=0 \dotfill (6)$

(5) ヨリ $\quad x=\dfrac{3}{5}y \dotfill (7)$

之ヲ (1) ニ代用スレバ

$$\frac{9}{25}y^2+\frac{3}{5}y^2+2y^2=74$$

$$\therefore \quad 9y^2+15y^2+50y^2=74\times 25$$

$$\therefore \quad 74y^2=74\times 25$$

$$\therefore \quad y^2=25$$

$$\therefore \quad y=\pm 5$$

之ヲ (7) ニ代用スレバ

$\left.\begin{array}{l} y=5 \\ x=3 \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} y=-5 \\ x=-3 \end{array}\right\}$ ヲ得.

次ニ (6) ヨリ $\quad x=-\dfrac{8}{5}y \dotfill (8)$

之ヲ (1) ニ代用スレバ

$$\frac{64}{25}y^2-\frac{8}{5}y^2+2y^2=74$$

$$\therefore \quad 64y^2-40y^2+50y^2=74\times 25$$

$$\therefore \quad 74y^2=74\times 25$$

$$\therefore \quad y^2=25$$

$$\therefore \quad y=\pm 5$$

之ヲ (8) ニ代用スレバ

$\left.\begin{array}{l} y=5 \\ x=-8 \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} y=-5 \\ x=8 \end{array}\right\}$ ヲ得.

因ヲ原方程式ニハ四組ノ根アリ.

例 2. $\left.\begin{array}{l} 2x^2-3xy+y^2=4y \dotfill (1) \\ 8x^2+2xy-3y^2=-12y \dotfill (2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times 3+(2) \qquad 14x^2-7xy=0$

$$\therefore \quad 7x(2x-y)=0$$

$$\therefore \quad x=0 \dotfill (3)$$

或ハ $y=2x$ ....(4)

(1)ニ $x=0$ ヲ代用スレバ

$$y^2=4y$$

$\therefore$ $y=0$ 又ハ $y=4$

$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=4\end{array}\right\}$

ナル二組ノ根ヲ得.

次ニ $y=2x$ ヲ(1)ニ代用スレバ

$$2x^2-6x^2+4x^2=8x$$

$\therefore$ $0=8x$

$\therefore$ $x=0$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $y=0$

因テ原方程式ニハ上ニ求メタル二組ノ外ニハ異ナル根ナシ.

注意 上ノ二例ノ如ク

$$ax^2+bxy+cy^2=d,\qquad a'x^2+b'xy+c'y^2=d'$$

又ハ $ax^2+bxy+cy^2=dy,\qquad a'x^2+b'xy+c'y^2=d'y$

ナル形ノ聯立方程式ヲ解クニハ各方程式ノ兩邊ニ適當ナル數ヲ掛ケテ,右邊ノ常數項(又ハ y ノ係數)ノ絕對値ヲ同シクナシ,夫レガ同符號ナレバ邊邊相減シ,異符號ナレバ邊邊相加ヘ得ル所ノ方程式ノ左邊ヲ因數ニ分解シテ之ヲ解クナリ.

176. 特別ナル解法ヲ用フル例

(第一) 公式ヲ應用シテ解ク聯立方程式

例 1. $\left.\begin{array}{l}x+y=7\text{..............}(1)\\xy=12\text{ ....}(2)\end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

(1)ノ兩邊ヲ平方スレバ

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=49\text{ ....}(3)$$

(2)×4 $\qquad 4xy=48\text{............}(4)$

(3)−(4) $\qquad x^2-2xy+y^2=1$

$\therefore$ $(x-y)^2=1\text{..............}(5)$

$\therefore$ $x-y=1$ 又ハ $x-y=-1$

ソコデ $x+y=7,\quad x-y=1$ ヨリ

$x=4,\quad y=3$ ヲ得.

又 $x+y=7,\quad x-y=-1$ ヨリ

$x=3,\quad y=4$ ヲ得.

注意 方程式ノ兩邊ヲ二乘スレバ一般ニハ餘分ノ根ノ入リ來ル者ナレバ本例ノ解キ方ハ十分ノ注意ヲ要ス,例ヘバ二乘シテ作リタル方程式(5)ヲ(1)ノ代リニ用ヒテ原方程式ヲ

$$(x-y)^2=1,\qquad xy=12$$

即チ $\left.\begin{array}{l}x-y=1\\xy=12\end{array}\right\}$ 又ハ $\left.\begin{array}{l}x-y=-1\\xy=12\end{array}\right\}$

トシ,ソコデ此各ヲ解カンニ,第一ノ組ニ於テハ

$x=y+1$ ナルヲ以テ

$$(y+1)y=12 \qquad \therefore \quad y^2+y-12=0$$

$$\therefore \quad (y+4)(y-3)=0$$

$$\therefore \quad y=-4 \quad 又ハ \quad y=3$$

之ヲ $x=y+1$ ニ代用スレバ

$$x=-4+1=-3 \quad 又ハ \quad x=3+1=4$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

同様ニ第二ノ組ヨリ次ノ答ヲ得.

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

此四組ノ答ノ内 $x=-3,\ y=-4$; 及 $x=-4,\ y=-3$ ナル二組ハ原方程ニ適合セズ.(1)ニ代用スレバ直ニ明カナリ之レ即チ(1)ノ兩邊ヲ二乘シタルガ爲メニ入リ來リタルモノナリ. 但シココニテハ二乘シテ作リタル方程式(5)ヲ二乘セザル方程式(2)ノ代リニ用ヒ(1)ト(5)トニヨリテ根ヲ求メタルタメ不都合ナカリシナリ. 一般ニ二乘シテ作リタル方程式ヲ二乘セラレタル方程式ノ代リニ用フレバ餘分ノ根入リ來ルモノト知ルベシ.

例 2. $\left.\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=21 \text{.........}(1) \\ x^2+xy+y^2=7 \text{.........}(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

ナルユヱ(2)ニヨリ(1)ハ次ノ如クナル.

$$7(x^2-xy+y^2)=21$$

$\therefore \qquad x^2-xy+y^2=3 \text{..........}(3)$

$(2)+(3) \qquad 2(x^2+y^2)=10$

$\therefore \qquad x^2+y^2=5 \text{..........}(4)$

$(2)-(3) \qquad 2xy=4 \text{..........}(5)$

$(4)+(5) \qquad (x+y)^2=9$

$\therefore \qquad x+y=+3 \text{..........}(6)$

又ハ $\qquad x+y=-3 \text{..........}(7)$

$(4)-(5) \qquad (x-y)^2=1$

$\therefore \qquad x-y=+1 \text{..........}(8)$

又ハ $\qquad x-y=-1 \text{..........}(9)$

(6),(7)ナル方程式ト(8),(9)ナル方程式トヲ組合セテ解ケバ次ノ如ク四組ノ答ヲ得.

(6),(8)ノ組即チ $x+y=3,\ x-y=1$ ヲ解ケバ

$$x=2,\ y=1$$

(6),(9)ノ組即チ $x+y=3,\ x-y=-1$ ヲ解ケバ

$$x=1,\ y=2$$

(7),(8)ノ組即チ $x+y=-3,\ x-y=1$ ヲ解ケバ

$$x=-1,\ y=-2$$

(7),(9)ノ組即チ $x+y=-3,\ x-y=-1$ ヲ解ケバ

$$x=-2,\ y=-1$$

$\boxed{注意}$ (1)ノ兩邊ヲ(2)ノ兩邊ニテ割リテモ(3)ヲ得. 箇様ニ一ツノ方程式ノ兩邊ヲ他ノ方程式ノ兩邊ヲ割リタル場合ニハ除數ハ0ナラズトイフ條件(本

例ニテハ $x^2+xy+y^2=7\neq0$ ナルニ此條件成リ立チ居ル次第ナリ)ガ必要ナリ。若シコヽニ注意セズシテ卽チ0トナルカモ知レヌ式ナルニ之ニ頓着セズ無關ニ割リ算ヲ行ヒ得タル方程式ヲ原方程式ノ一ツニ代用スルトキハ一般ニハ原方程式ノ或根ヲ失フ者ナリ.倘例4ニ於テ之ヲ説明セン.

例 3. $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3-y^3=117 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$(2)\div(1)$ $$x^2+xy+y^2=39 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又(1)ノ兩邊ヲ乘スレバ

$$x^2-2xy+y^2=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$(3)-(4)$ $$3xy=30$$

$$\therefore \quad xy=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$(3)+(5)$ $$(x+y)^2=49$$

$$\therefore \quad x+y=+7 \quad 又ハ \quad x+y=-7$$

ソコデ $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$ ヲ解ケバ

$x=5,\ y=2$ ヲ得.

又 $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y=-7 \end{array}\right\}$ ヲ解ケバ

$x=-2,\ y=-5$ ヲ得.

因テ原方程式ニハ二組ノ根アリ.

例 4. $\left.\begin{array}{l} x^3-y^3=-3(x+1)y \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=x+1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$\therefore$ (1)ハ次ノ如クナル.

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=-3(x+1)y$$

ソコデ(2)ヲ代用スレバ

$$(x-y)(x+1)=-3(x+1)y$$

$$\therefore \quad (x+1)\{(x-y)+3y\}=0$$

$$\therefore \quad x+1=0 \quad \therefore \quad x=-1 \cdots\cdots\cdots(3)$$

或ハ $$x-y+3y=0 \quad \therefore \quad x=-2y \cdots\cdots\cdots(4)$$

ソコデ(2)ニ $x=-1$ ヲ代用スレバ

$$1-y+y^2=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2} \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2} \end{array}\right\}$ ヲ得.

次ニ(2)ニ $x=-2y$ ヲ代用スレバ

$$4y^2-2y^2+y^2=-2y+1$$

$$\therefore \quad 3y^2+2y-1=0$$

$$\therefore \quad (3y-1)(y+1)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{3} \quad 或ハ \quad y=-1$$

之ヲ(4)ニ代用スレバ

$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=2 \end{array}\right\}$ ヲ得.

因テ原方程式ニハ四組ノ根アリ.

注意 若シ(1)ノ兩邊ヲ(2)ノ兩邊ニテ割レバ

$$x-y=-3y \qquad \therefore \quad x=-2y$$

之ヲ(1)ノ代リニ用フレバ上ニ得タル二組ノ根ノ中ノ一組ダケヲ求ムルコトヲ得. ソハ(1)ヲ(2)ニテ割ルトキ除數ガ0トナルコトモアルタメ今一組ノ根ヲ失ヒタルナリ. 因テ此場合ニハ除數 x^2+xy+y^2 即チ $x+1$ ヲ 0 ニ等シクオキタル場合ヲモ考ヘザルベカラズ.

例 5.

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)^2=x \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=-6y \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$$

ヲ解クコト.

$y=0$ ナレバ $x=0$ ナルコト明カナリ. ソコデ $y\neq0$ ナルトキノ根ヲ求メン.

$$(1)\div(2) \qquad \frac{x+y}{x-y}=-\frac{x}{6y}$$

$$\therefore \quad 6xy+6y^2=-x^2+xy$$

$$\therefore \quad x^2+5xy+6y^2=0$$

$$\therefore \quad (x+2y)(x+3y)=0$$

$$\therefore \quad x=-2y \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\text{或ハ} \quad x=-3y \cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)ヲ(1)ニ代用スレバ

$$y^2=-2y$$

然ルニ $y\neq0$ ∴ $y=-2$ 從テ $x=4$ ヲ得.

次ニ(4)ヲ(1)ニ代用スレバ

$$4y^2=-3y$$

然ルニ $y\neq0$ ∴ $4y=-3$

∴ $y=-\frac{3}{4}$ 從テ $x=\frac{9}{4}$

因テ原方程式ニハ次ノ三組ノ根アリ.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=-2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=\frac{9}{4} \\ y=-\frac{3}{4} \end{array}\right\}$$

(第二) 二元對稱聯立方程式

x ト y トヲ入レ換ヘテモ全體トシテ少シモ變化ナキ方程式ヲ二元聯立對稱方程式トイフ. 次ニ其解法ヲ說明スベシ.

例ヘバ聯立方程式 $x+y=a,\ xy=b$

又ハ $2x^2+2y^2+3x+3y=5,\ x^2y^2+xy+1=0$

ニ於テハ x ノ代リニ y ヲ, y ノ代リニ x ヲ用フルモ得ル所ノ各方程式ハ初ノ方程式ニ同ジ,從テ各聯立方程式ニハ何等ノ變化ナシ.

又例ヘバ $x^2=2x+3y,\ y^2=2y+3x$

ニ於テ x ノ代リニ y ヲ, y ノ代リニ x ヲ用フレバソレゾレ $y^2=2y+3x,\ x^2=2x+3y$

トナリ各方程式ハ何レモ初ノ方程式ト異ナレドモ聯立方程式トシテ考フレバ單ニ兩方程式ガ入リ換リタルノミナレバ之レ又何等ノ變化ナシ.

(甲) x, y ヲ交換スルモ各方程式ニ變化ナキ場合ノ解法

此場合ニハ $x+y=u,\ xy=v$ トオクカ,若クハ $x=u+v,\ y=u-v$ トオキ先ヅ u, v ヲ求メ,然ル後 x, y ヲ求ムルモノトス.

例 1. $\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ xy=b \end{array}\right\}$ ヲ解クコト.

之レ二元聯立對稱方程式ノ最モ簡單ナル場合ナリ.此方程式ハ一次ト二次トノ聯立方程式トシテ解クモ可ナリ,或ハ本節(第一)ニヨリテ解クモ可ナリ.又或ハ次ノ如クシテ解クモ可ナリ.

x, y ハ其和ハ a, 其積ハ b ナルヲ以テ次ノ二次方程式ノ根ナリ.

$$z^2-az+b=0$$

然ルニ $$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

∴ $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

又 $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

注意 $x=m,\ y=n$ ガ或對稱方程式ノ一ツノ根ナルトキハ $x=n,\ y=m$ モ亦然リ,是レ對稱方程式ノ特徴ナリ

例 2. $\left.\begin{array}{l} 2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0 \ldots\ldots(1) \\ x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0 \ldots\ldots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解クコト

先ヅ $x+y=u,\ xy=v$ トシテ(1),(2)ヲ變形セシニ

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=u^2-2v$$

ヲ(1),(2)ニ代用スレバ

(1)ハ $2(x^2+y^2)+5xy+(x+y)+1=0$

ナルヲ以テ $2(u^2-2v)+5v+u+1=0$

即チ $2u^2+u+v+1=0 \ldots\ldots(3)$

又(2)ハ $x^2+y^2+4xy+12(x+y)+10=0$

ナルヲ以テ $u^2-2v+4v+12u+10=0$

即チ $u^2+12u+2v+10=0 \ldots\ldots(4)$

サテ (3)×2 $4u^2+2u+2v+2=0 \ldots\ldots(5)$

(4)−(5) $-3u^2+10u+8=0$

∴ $3u^2-10u-8=0$

∴ $(3u+2)(u-4)=0$

∴ $u=-\dfrac{2}{3}$ 即チ $x+y=-\dfrac{2}{3} \ldots\ldots(6)$

或ハ $u=4$ 即チ $x+y=4 \ldots\ldots(7)$

$u=-\dfrac{2}{3}$ トスレバ(3)ヨリ $2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}+v+1=0$

∴ $v=-\dfrac{11}{9}$ 即チ $xy=-\dfrac{11}{9} \ldots\ldots(8)$

(6)ト(8)トヨリ x, y ハ $z^2+\dfrac{2}{3}z-\dfrac{11}{9}=0$

即チ $9z^2+6z-11=0$ ノ根ナリ.

然ルニ $$z=\frac{-3\pm\sqrt{9+99}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{108}}{9}=\frac{-3\pm6\sqrt{3}}{9}=\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{-1+2\sqrt{3}}{3} \\ y&=\frac{-1-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{-1-2\sqrt{3}}{3} \\ y&=\frac{-1+2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\}$$

又 $u=4$ トスレバ(3)ニヨリ　$2\times4^2+4+v+1=0$

$\therefore$　$v=-37$　卽チ　$xy=-37 \dots\dots (9)$

(7)ト(9)トヨリ x, y ハ $z^2-4z-37=0$ ノ根ナリ.

然ルニ　$z=2\pm\sqrt{2^2+37}=2\pm\sqrt{41}$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x&=2+\sqrt{41} \\ y&=2-\sqrt{41} \end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x&=2-\sqrt{41} \\ y&=2+\sqrt{41} \end{aligned}\right\}$$

卽チ求ムル所ノ根ハ四組ナリ.

例 3.　$\left.\begin{aligned} x^5+y^5&=32 \dots\dots (1) \\ x+y&=2 \dots\dots (2) \end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

(2)ニ於テ $x=u+v,\ y=u-v$ トオケバ

$u+v+u-v=2 \qquad \therefore \quad u=1$

$\therefore \quad x=1+v, \quad y=1-v$

サテ　$(1+v)^5=1+5v+10v^2+10v^3+5v^4+v^5$

又　$(1-v)^5=1-5v+10v^2-10v^3+5v^4-v^5$

$\therefore$ (1)ヨリ　$10v^4+20v^2+2=32$

$\therefore \quad v^4+2v^2-3=0$

$\therefore \quad (v^2-1)(v^2+3)=0$

$\therefore \quad v^2=1 \qquad \therefore \quad v=\pm1$

或ハ　$v^2=-3 \qquad \therefore \quad v=\pm\sqrt{-3}$

$\therefore$　$v=1$ ナルトキハ　$x=1+1=2,\ \ y=1-1=0$

$v=-1$ ナルトキハ　$x=1-1=0,\ \ y=1-(-1)=2$

$v=+\sqrt{-3}$ ナルトキハ　$x=1+\sqrt{-3},\ \ y=1-\sqrt{-3}$

$v=-\sqrt{-3}$ ナルトキハ　$x=1-\sqrt{-3},\ \ y=1+\sqrt{-3}$

此四組ガ原方程式ノ根ナリ.

乙) x, y ヲ交換スルトキ各方程式ガ變化

例 1.　$\left.\begin{aligned} x^2&=5x+6y \dots\dots (1) \\ y^2&=6x+5y \dots\dots (2) \end{aligned}\right\}$ ヲ解

(1)−(2)　$x^2-y^2=-(x-y$

$\therefore \quad (x+y)(x-$

$\therefore \quad (x-$

因テ原方程式ハ

$x-y=0$.

$x^2=5x+6$

サテ(4)ヨ

$y=($

$y=$

$y=\frac{-1+i\sqrt{23}}{2}$ ナルトキハ(6)ヨリ $x=\frac{-1-i\sqrt{23}}{2}$

… $i\sqrt{23}$ ナルトキハ(6)ヨリ $x=\frac{-1+i\sqrt{23}}{2}$

…式ニハ次ノ四組ノ答アリ.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{-1-i\sqrt{23}}{2} \\ y=\frac{-1+i\sqrt{23}}{2} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=\frac{-1+i\sqrt{23}}{2} \\ y=\frac{-1-i\sqrt{23}}{2} \end{array}\right\}$$

… (1) … ヲ解クコト.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \cdots\cdots(7) \\ x-y=0 \cdots\cdots(8) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=0 \cdots\cdots(9) \\ x^2+xy+y^2=4 \cdots\cdots(10) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=10 \cdots(11) \\ x-y=0 \cdots(12) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=10 \cdots(13) \\ x^2+xy+y^2=4 \cdots(14) \end{array}\right\}$$

先ヅ(7)ト(8)トヨリハ $x=0,\ y=0$ ....(A)

次ニ(9)ヨリ $x=-y$ ヲ得之ヲ(10)ニ代用スレバ

$$y^2-y^2+y^2=4$$

$$\therefore\ y^2=4 \qquad \therefore\ y=\pm 2$$

然ルニ $x=-y$ ナルユヱ

$$\left.\begin{array}{l} y=2 \\ x=-2 \end{array}\right\} \text{ 及 } \left.\begin{array}{l} y=-2 \\ x=2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

又(12)ヨリ $x=y$ ヲ得之ヲ(11)ニ代用スレバ

$$y^2-y^2+y^2=10$$

$$\therefore\ y^2=10 \qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{10}$$

然ルニ $x=y$ ナルユヱ

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{10} \\ x=\sqrt{10} \end{array}\right\} \text{ 及 } \left.\begin{array}{l} y=-\sqrt{10} \\ x=-\sqrt{10} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

最後ニ (13)+(14) $2(x^2+y^2)=14$

∴ $x^2+y^2=7$ ....(15)

又 (14)−(13) $2xy=-6$ ....(16)

ソコデ (15)+(16) $(x+y)^2=1$

∴ $x+y=\pm 1$ ....(17)

又 (15)−(16) $(x-y)^2=13$

$$\therefore \qquad x-y=\pm\sqrt{13}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

(17), (18) ノ組合セ方ハ次ノ四通リアリ.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=1\\ x-y=\sqrt{13}\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x+y=1\\ x-y=-\sqrt{13}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=-1\\ x-y=\sqrt{13}\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x+y=-1\\ x-y=-\sqrt{13}\end{array}\right\}$$

此各ヨリ次ノ四組ノ答ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots(D)$$

因ヲ原方程式ニハ (A), (B), (C), (D) ニテ示セル九組ノ根アリ.

三元聯立方程式

177. 未知數ノ積ヲ含ム場合

例 1.

$$\left.\begin{array}{r}3y+2z=2yz\cdots\cdots\cdots(1)\\ 4z+x=zx\ \cdots\cdots\cdots(2)\\ 3x+2y=xy\ \cdots\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$$ ヲ解クコト.

$x=0$ トスレバ (2), (3) ヨリ $z=0,\ y=0$ ヲ得. 故ニ $x=y=z=0$ ハ一ツノ根ナリ. 同樣ニ $y=0$ トスルモ $z=0$ トスルモ他ノ未知數ハ何レモ 0 トナル. 故ニ x, y, z ノ内ニ 0 ナル値ヲ有スル根ハ此外ニハナシ. ソコデ次ニハ x, y, z ノ何レモ 0 ナラザル根ヲ求メン.

x, y, z ガ何レモ 0 ナラザレバ yz, zx, xy モ亦 0 ナラザルヲ以テ之ヲ以テ夫夫 (1), (2), (3) ヲ割レバ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{3}{z}+\frac{2}{y}=2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{4}{x}+\frac{1}{z}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{3}{y}+\frac{2}{x}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ソコデ $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ ヲ新未知數トシテ解ケバ可ナリ.

即チ　(5)×3−(4)　$\dfrac{12}{x}-\dfrac{2}{y}=1\cdots\cdots\cdots(7)$

(6)×6　$\dfrac{18}{y}+\dfrac{12}{x}=6\cdots\cdots\cdots(8)$

(7)−(8) $$-\frac{2}{y}-\frac{18}{y}=-5$$

∴ $$\frac{20}{y}=5$$

∴ $$y=\frac{20}{5}=4$$

之ヲ(6)ニ代用スレバ $\frac{2}{x}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

∴ $$x=8$$

$y=4$ ヲ(4)ニ代用スレバ $\frac{3}{z}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

∴ $$z=3\div\frac{3}{2}=2$$

∴ $x=y=z=0$ 及 $x=8,\ y=4,\ z=2$ ガ求ムル所ノ根ナリ.

例 2. $\left.\begin{aligned}x(x+y+z)&=6\ldots\ldots\ldots(1)\\y(x+y+z)&=12\ldots\ldots\ldots(2)\\z(x+y+z)&=18\ldots\ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

(1)+(2)+(3) $$(x+y+z)^2=36$$

∴ $$x+y+z=\pm 6$$

$x+y+z=6$ ヲ(1),(2),(3)ニ代用スレバ

$x=1,\ y=2,\ z=3$ ヲ得.

又 $x+y+z=-6$ ヲ(1),(2),(3)ニ代用スレバ

$x=-1,\ y=-2,\ z=-3$ ヲ得.

例 3. $\left.\begin{aligned}(y+z)(x+y+z)&=1\ldots\ldots\ldots(1)\\(z+x)(x+y+z)&=3\ldots\ldots\ldots(2)\\(x+y)(x+y+z)&=4\ldots\ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

(1)+(2)+(3) $$2(x+y+z)^2=8$$

∴ $$(x+y+z)^2=4$$

∴ $$x+y+z=\pm 2$$

$$x+y+z=2\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ヲ(1),(2),(3)ニ代用スレバ

$$y+z=\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$z+x=\frac{3}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$x+y=2\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

∴ (4)−(5) $x=\frac{3}{2}$

(4)−(6) $y=\frac{1}{2}$

(4)−(7) $z=0$

次ニ $$x+y+z=-2\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

ヲ(1),(2),(3)ニ代用スレバ

$$y+z=-\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$z+x=-\frac{3}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$x+y=-2\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

∴ (8)−(9) $x=-\frac{3}{2}$

(8)−(10) $y=-\frac{1}{2}$

(8)−(11) $z=0$

例 4. $\left.\begin{aligned}x(px+qy+rz)&=a\ldots\ldots\ldots(1)\\y(px+qy+rz)&=b\ldots\ldots\ldots(2)\\z(px+qy+rz)&=c\ldots\ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times p+(2)\times q+(3)\times r \qquad (px+qy+rz)^2=ap+bq+cr$

$$\therefore \qquad px+qy+rz=\pm\sqrt{ap+bq+cr}$$

之ヲ原方程式ニ代用スレバ次ノ二組ノ根ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a}{\sqrt{ap+bq+cr}}\\ y&=\frac{b}{\sqrt{ap+bq+cr}}\\ z&=\frac{c}{\sqrt{ap+bq+cr}}\end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{-a}{\sqrt{ap+bq+cr}}\\ y&=\frac{-b}{\sqrt{ap+bq+cr}}\\ z&=\frac{-c}{\sqrt{ap+bq+cr}}\end{aligned}\right\}$$

例 5. $\left.\begin{aligned} xy&=6 \ldots\ldots(1)\\ xz&=8 \ldots\ldots(2)\\ yz&=12 \ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)\times(2)\div(3) \qquad \dfrac{xy\times xz}{yz}=\dfrac{6\times 8}{12}$

$$\therefore \qquad x^2=4$$

$$\therefore \qquad x=\pm 2$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=3\\ z&=4\end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x&=-2\\ y&=-3\\ z&=-4\end{aligned}\right\}.$$

例 6. $\left.\begin{aligned} x(y+z)&=11 \ldots\ldots(1)\\ y(z+x)&=35 \ldots\ldots(2)\\ z(x+y)&=36 \ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}$ ヲ解クコト.

$(1)+(2)-(3) \qquad xy+xz+yz+xy-zx-zy=11+35-36$

$$\therefore \qquad 2xy=10$$

$$\therefore \qquad xy=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

之ヲ(1)及(2)ノ括弧ヲ取リテ得ル方程式ニ代用ス

レバ

$$xz=6 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$yz=20 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$(4)\times(5)\div(6) \qquad x^2=1$

$$\therefore \qquad x=\pm 1$$

之ヲ(4),(5)ニ代用スレバ次ノ二組ノ根ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} x&=1\\ y&=5\\ z&=6\end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x&=-1\\ y&=-5\\ z&=-6\end{aligned}\right\}$$

例 7. $yz+zx+xy=12-x^2=15-y^2=20-z^2$ ヲ解クコト.

$yz+zx+xy=12-x^2$ ヨリ $x^2+xy+xz+yz=12$ ヲ得.

$$\therefore \qquad (x+y)(x+z)=12 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

同様ニ $yz+zx+xy=15-y^2$

及 $yz+zx+xy=20-z^2$ ヨリ

$$(y+x)(y+z)=15 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(z+x)(z+y)=20 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$(1)\times(2)\div(3) \qquad (x+y)^2=9.$

$$\therefore \qquad x+y=\pm 3$$

之ヲ(1),(2)ニ代用スレバ次ノ二組ノ聯立方程式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3 \ldots\ldots(4)\\ x+z&=4 \ldots\ldots(5)\\ y+z&=5 \ldots\ldots(6)\end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} x+y&=-3 \ldots\ldots(7)\\ x+z&=-4 \ldots\ldots(8)\\ y+z&=-5 \ldots\ldots(9)\end{aligned}\right\}$$

$(4)+(5)+(6)$　　$2(x+y+z)=12$

$\therefore$　　$x+y+z=6$ ……………………(10)

$$\left.\begin{aligned}(10)-(4)\quad & z=3\\(10)-(5)\quad & y=2\\(10)-(6)\quad & x=1\end{aligned}\right\}\text{ヲ得.}$$

同様ニ(7), (8), (9)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}z&=-3\\y&=-2\\x&=-1\end{aligned}\right\}\text{ヲ得.}$$

例 8.

$$\left.\begin{aligned}xy+5(x+y)&=47\cdots\cdots(1)\\yz+5(y+z)&=65\cdots\cdots(2)\\zx+5(z+x)&=55\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}\text{ヲ解クコト.}$$

(1)ノ兩邊ニ25ヲ加フレバ

$$xy+5(x+y)+25=47+25$$

$\therefore$　　$(x+5)(y+5)=72$ ……………… (4)

同様ニ(2)ヨリ　$(y+5)(z+5)=90$ ……………… (5)

又　(3)ヨリ　$(z+5)(x+5)=80$ ……………… (6)

$(4)\times(5)\div(6)$　　$(y+5)^2=81$

$\therefore$　　$y+5=\pm 9$

之ヲ(4)及(5)ニ代用スレバ次ノ二組ノ方程式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}y+5&=9\\x+5&=8\\z+5&=10\end{aligned}\right\}\quad\text{及}\quad\left.\begin{aligned}y+5&=-9\\x+5&=-8\\z+5&=-10\end{aligned}\right\}$$

或ハ

$$\left.\begin{aligned}y&=4\\x&=3\\z&=5\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}y&=-14\\x&=-13\\z&=-15\end{aligned}\right\}$$

178. 二ツガ一次方程式ニシテ他ガ二次方程式ナル場合

例 1.

$$\left.\begin{aligned}2x+4y-7z&=0\cdots\cdots(1)\\4x-5y-z&=0\cdots\cdots(2)\\x^2+y^2+z^2&=17\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}\text{ヲ解クコト.}$$

先ヅ假リニzヲ既知數ト見做シ(1), (2)ニ依リテx, yヲ求メン, 即チ

$(1)\times 2-(2)$　　$13y-13z=0$

$\therefore$　　$y=z$ ……………………(4)

$(1)\times 5+(2)\times 4$　　$26x-39z=0$

$\therefore$　　$x=\frac{3}{2}z$ ……………………(5)

之ヲ(3)ニ代用スレバ

$$\frac{9}{4}z^2+z^2+z^2=17$$

$\therefore$　　$17z^2=17\times 4$

$\therefore$　　$z^2=4$　　$\therefore$　　$z=\pm 2$

之ヲ(4)及(5)ニ代用スレバ次ノ方程式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}z&=2\\y&=2\\x&=3\end{aligned}\right\}\quad\text{及}\quad\left.\begin{aligned}z&=-2\\y&=-2\\x&=-3\end{aligned}\right\}\text{ヲ得.}$$

例 2.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3z \cdots\cdots(1)\\ 4x+3y&=10z\cdots\cdots(2)\\ x^2+x+yz+y&=z+5\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$ ヲ解クコト.

$(1)\times4-(2)$　　$y=2z\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(2)-(1)\times3$　　$x=z\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

之ヲ(3)ニ代用スレバ

$$z^2+z+2z^2+2z=z+5$$

$$\therefore\quad 3z^2+2z-5=0$$

$$\therefore\quad (3z+5)(z-1)=0$$

$$\therefore\quad z=-\frac{5}{3}\quad 或ハ\quad z=1$$

之ヲ(4),(5)ニ代用スレバ次ノ二組ノ根ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} z&=-\frac{5}{3}\\ y&=-\frac{10}{3}\\ x&=-\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}\quad 及\quad \left.\begin{aligned} z&=1\\ y&=2\\ x&=1\end{aligned}\right\}$$

例 3.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=3\cdots\cdots(1)\\ 3x+y+2z&=7\cdots\cdots(2)\\ xy+y^2+z&=7\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$ ヲ解クコト.

$(2)-(1)$　　$x+3z=4$

$\therefore$　　$x=4-3z\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(1)\times3-(2)\times2$　　$y-7z=-5$

$\therefore$　　$y=7z-5\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)及(5)ノ x, y ノ値ヲ(3)ニ代用スレバ

$$(4-3z)(7z-5)+(7z-5)^2+z=7$$

$$-20+43z-21z^2+49z^2-70z+25+z=7$$

$$\therefore\quad 28z^2-26z-2=0$$

$$\therefore\quad 14z^2-13z-1=0$$

$$\therefore\quad (14z+1)(z-1)=0$$

$$\therefore\quad z=-\frac{1}{14}\quad 或ハ\quad z=1$$

之ヲ(4)及(5)ニ代用スレバ次ノ二組ノ根ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} z&=-\frac{1}{14}\\ x&=4\frac{3}{14}\\ y&=-5\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} z&=1\\ x&=1\\ y&=2\end{aligned}\right\}$$

注意 二ツガ一次方程式ニシテ他ガ二次方程式ナル三元聯立方程式ヲ解クニハ,マヅ二ツノ一次方程式ヨリ未知數ノ中ノ一ツ例ヘハ z ヲ已知數ト見做シテ他ノ二ツ x, y ノ値ヲ求メ之ヲ二次方程式ニ代用シテ先ヅ z ノ値ヲ求メ,然ル後之ヲ先ニ求メタレ z ニテ表セル x, y ノ値ニ代用シテ根ヲ求ムベシ.

179. 二次方程式ノ解法ニ導キ得ル二元聯立方程式雜題

1. $2y-3x=1$, $13x^2-8xy+3=0$ ヲ解ケ(35年,陸軍士官候補生).

解 第一ノ方程式ヨリ $2y=3x+1$ 故ニ第二ノ方程式ヨリ

$$13x^3-4x(3x+1)+3=0\qquad\therefore\quad x^2-4x+3=0$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\therefore\ (x-1)(x-3)=0 \quad \therefore\ x=1$ 又ハ $x=3$

$x=1$ ナルトキハ $2y=3+1=4 \quad \therefore\ y=2$

$x=3$ ナルトキハ $2y=9+1=10 \quad \therefore\ y=5$

因テ求ムル答ハ $x=1,\ y=2;\ x=3,\ y=5$ ノ二組ナリ。

2. $4x-2y=3,\ 3x^2+5y=2xy$ ヨリ x, y ヲ求メヨ(33年,外國語).

解 第一ノ方程式ヨリ $y=\dfrac{4x-3}{2}$ 之ヲ第二ノ方程式ニ代用スレバ

$$3x^2+5\left(\frac{4x-3}{2}\right)=2x\frac{4x-3}{2}$$

$\therefore\ 6x^2+5(4x-3)=2x(4x-3) \quad \therefore\ 2x^2-26x+15=0$

$$\therefore\ x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-2\times 15}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{139}}{2}$$

$x=\dfrac{13+\sqrt{139}}{2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{4x-3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(4\times\dfrac{13+\sqrt{139}}{2}-3\right)$

$$=\frac{1}{2}(23+2\sqrt{139})$$

同様ニ $x=\dfrac{13-\sqrt{139}}{2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{1}{2}(23-2\sqrt{139})$

因テ求ムル答ハ $x=\dfrac{13+\sqrt{139}}{2},\ y=\dfrac{23+2\sqrt{139}}{2},$

$x=\dfrac{13-\sqrt{139}}{2},\ y=\dfrac{23-2\sqrt{139}}{2}$

ノ二組ナリ。

3. 下ノ方程式ヲ解ケ(41年,仙臺高等工業).

$$\begin{cases}(x-7)^3+(5-y)^3=9 \cdots\cdots(1)\\ x-y=5 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解 (2)ヨリ $-y=5-x \quad \therefore\ 5-y=10-x$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $(x-7)^3+(10-x)^3=9$

$\therefore\ x^3-21x^2+147x-343+1000-300x+30x^2-x^3=9$

$\therefore\ 9x^2-153x+648=0 \quad \therefore\ x^2-17x+72=0$

$\therefore\ (x-8)(x-9)=0 \quad \therefore\ x=8$ 又ハ $x=9$

$x=8$ ナルトキハ(2)ヨリ $8-y=5 \quad \therefore\ y=3$

$x=9$ ナルトキハ(2)ヨリ $9-y=5 \quad \therefore\ y=4$

因テ求ムル答ハ $x=8,\ y=3$ 及 $x=9,\ y=4$ ノ二組ナリ。

4. 次ノ方程式ヲ解ケ(40年,札幌農學校).

$$x+y=13, \qquad x^3+y^3=559$$

解 第二ノ方程式ノ兩邊ヲ第一ノ方程式ノ兩邊ニテ割レバ

$\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{559}{13} \quad \therefore\ x^2-xy+y^2=43 \cdots\cdots(1)$

又第一ノ方程式ヨリ $y=13-x$ 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$x^2-x(13-x)+(13-x)^2=43 \quad \therefore\ 3x^2-39x+126=0$

$\therefore\ x^2-13x+42=0 \quad \therefore\ (x-6)(x-7)=0 \quad \therefore\ x=6$ 又ハ $x=7$

$x=6$ ナルトキハ $6+y=13 \quad \therefore\ y=7$

$x=7$ ナルトキハ $7+y=13 \quad \therefore\ y=6$

故ニ求ムル答ハ $x=6,\ y=7$ 及 $x=7,\ y=6$ ノ二組ナリ。

5. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(41年,名古屋高等工業).

$$x^3+4xy+y^3=38, \qquad x+y=2$$

解 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$ ナルヲ以テ第一方程式ハ $(x+y)[(x+y)^2-3xy]+4xy=38$ ト書クコトヲ得,之ニ $x+y=2$ ヲ代用スレバ $2(2^2-3xy)+4xy=38$

$\therefore\ 8-6xy+4xy=38 \quad \therefore\ -2xy=30 \quad \therefore\ xy=-15$

之ニ $y=2-x$ ヲ代用スレバ $x(2-x)=-15 \quad \therefore\ x^2-2x-15=0$

$\therefore\ (x-5)(x+3)=0$

$\therefore\ x=5$ 或ハ $x=-3$

$x=5$ ナルトキハ $y=2-5=-3$

$x=-3$ ナルトキハ $y=5$

故ニ答ハ $x=5,\ y=-3;\ x=-3,\ y=5$ ノ二組ナリ。

6. $x^2-4y^2=8x+100,\ x+3y=6.$ x 及 y ノ値ヲ問フ(小數三位マデ計算セヨ)(37年,東京高等商業).

解 第二方程式ヨリ $x=6-3y$ ヲ得,之ヲ第一方程式ニ代用スレバ $(6-3y)^2-4y^2=8(6-3y)+100 \quad \therefore\ 5y^2-12y-112=0.$

$$\therefore\quad y=\frac{6\pm\sqrt{36+5\times112}}{5}=\frac{6\pm\sqrt{596}}{5}$$

$$\therefore\quad x=6-3y=6-\frac{18\pm3\sqrt{596}}{5}=\frac{30-18\mp3\sqrt{596}}{5}=\frac{12\mp3\sqrt{596}}{5}$$

$$=2.4\mp\frac{3}{5}\sqrt{596}$$

然ルニ $\sqrt{596}=24.4131\cdots$ $\therefore$ $\frac{1}{5}\sqrt{596}=4.8826$ $\frac{3}{5}\sqrt{596}=14.647$

故ニ求ムル $y=1.2+4.882=6.082$ 及 $y=1.2-4.882=-3.682$

之ニ應ズル $x=2.4-14.647=-12.247$ 及 $x=2.4+14.647=17.047$

因テ求ムル答ハ $y=6.082,\ x=-12.247$ 及 $y=-3.682,\ x=17.047$ ノ二組ナリ.

注意 $\sqrt{596}=2\sqrt{149}$ ナレドモ,コトニテハ斯様ニ變形スルモ何等ノ効ナキヲ以テ其儘ニナシオキテ可ナリ. 又 $\frac{1}{5}\sqrt{596}$ ヲ小數第三位マデ計算スルニハ $\sqrt{596}$ ヲ小數第三位マデ求ムレバ可ナレドモ $\frac{3}{5}\sqrt{596}$ ヲ小數第三位マデ求ムルニハ $\sqrt{596}$ ヲ小數第四位マデ求メザルベカラザルコト 注意スベシ.

7. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(40年,海軍機關).

$$x+\frac{3}{y}=3,\qquad y+\frac{2}{x}=4$$

解 x, y ノ 0 ニアラザルコトハ明カナルヲ以テ第一方程式ノ兩邊ニ y ヲ,第二方程式ノ兩邊ニ x ヲ掛クレバ次ノ如クナル.

$$xy+3=3y\ \cdots\cdots(1)\qquad xy+2=4x\ \cdots\cdots(2)$$

(1)−(2) $1=3y-4x$ $\therefore$ $y=\frac{1}{3}(1+4x)\cdots\cdots(3)$

之ヲ(2)ニ代用スレバ $\frac{x}{3}(1+4x)+2=4x$ $\therefore$ $x(1+4x)+6=12x$

$\therefore$ $4x^2-11x+6=0$ $(4x-3)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=\frac{3}{4}$ 又ハ $x=2$

$x=\frac{3}{4}$ ナルトキハ(3)ヨリ $y=\frac{1}{3}(1+3)=\frac{4}{3}$

$x=2$ ナルトキハ(3)ヨリ $y=\frac{1}{3}(1+8)=3$

故ニ求ムル答ハ $x=\frac{3}{4},\ y=\frac{4}{3}$ 及ビ $x=2,\ y=3$ ナリ.

8. 次ノ方程式ヲ解ケ(38年名古屋高等工業).

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=91,\qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$$

解 先ヅ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ ヲ新未知數ト見做シテ之ヲ求ムルガヨシ,第一方程式ノ兩邊ヲ第二方程式ノ兩邊ニテ割レバ

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=91\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $\frac{1}{x}=1+\frac{1}{y}$, 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y^2}=91\quad\therefore\quad\frac{3}{y^2}+\frac{3}{y}-90=0$$

$$\therefore\quad\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-30=0\qquad\therefore\quad\left(\frac{1}{y}-5\right)\left(\frac{1}{y}+6\right)=0$$

$\therefore$ $\frac{1}{y}=5$ 又ハ $\frac{1}{y}=-6$ $\therefore$ $y=\frac{1}{5}$ 又ハ $y=-\frac{1}{6}$

$y=\frac{1}{5}$ トスレバ $\frac{1}{x}=1+\frac{1}{y}$ ヨリ $\frac{1}{x}=1+5=6$ $\therefore$ $x=\frac{1}{6}$

$y=-\frac{1}{6}$ トスレバ $\frac{1}{x}=1+\frac{1}{y}$ ヨリ $\frac{1}{x}=1-6=-5$ $\therefore$ $x=-\frac{1}{5}$

故ニ答ハ $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{5}$; 及ビ $x=-\frac{1}{5},\ y=-\frac{1}{6}$ ノ二組ナリ.

9. 通同方程式 $(x-1)^2+(y+2)^2=4,\ x^2+y^2=5$ ヲ解クベシ(31年,海軍機關).

解 第一方程式ノ兩邊ヨリ第二方程式ノ兩邊ヲ引ケバ

$-2x+1+4y+4=4-5$ $\therefore$ $-2x+4y=-6$ $\therefore$ $x=2y+3$

之ヲ $x^2+y^2=5$ ニ代用スレバ $(2y+3)^2+y^2=5$

$\therefore$ $5y^2+12y+4=0$ $\therefore$ $(5y+2)(y+2)=0$

$\therefore$ $y=-\frac{2}{5}$ 又ハ $y=-2$

$y=-\frac{2}{5}$ ナルトキハ $x=2\times\left(-\frac{2}{5}\right)+3=\frac{11}{5}$

$y=-2$ ナルトキハ $x=2\times(-2)+3=-1$

$\therefore$ 答ハ $x=\frac{11}{5},\ y=-\frac{2}{5}$ 及ビ $x=-1,\ y=-2$ ナリ.

10. 次ノ方程式ヲ解ケ(38年,海軍兵).

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \qquad xy=ab$$

解 第一方程式ヨリ $\frac{x}{a}=2-\frac{y}{b}$ $\therefore\ x=a\left(2-\frac{y}{b}\right)$ ………(1)

之ヲ第二方程式ニ代用スレバ $a\left(2-\frac{y}{b}\right)y=ab$

$\therefore\ (2b-y)y=b^2$ $\therefore\ y^2-2by+b^2=0$ $\therefore\ (y-b)^2=0$

$\therefore\ y=b$ 又ハ $y=b$ 從ヲ(1)ヨリ $x=a\left(2-\frac{b}{b}\right)=a$

$\therefore\ x=a,\ y=b$ 及ビ $x=a,\ y=b$ ガ求ムル答ナリ.

11. $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{1}{3},\ \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=\frac{5}{9}$ ヲ解ケ(41年,海軍兵).

解 $\frac{a}{x}=X,\ \frac{b}{y}=Y$ トオケバ與ヘラレタル方程式ハ

$$X-Y=\frac{1}{3}\cdots\cdots(1) \qquad X^2+Y^2=\frac{5}{9}\cdots\cdots(2)$$

トナル. (1)ヨリ $X=Y+\frac{1}{3}$, 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$\left(Y+\frac{1}{3}\right)^2+Y^2=\frac{5}{9}$ $\therefore\ 2Y^2+\frac{2}{3}Y+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

$\therefore\ 18Y^2+6Y-4=0$, $\therefore\ 9Y^2+3Y-2=0$

$\therefore\ (3Y-1)(3Y+2)=0$ $\therefore\ Y=\frac{1}{3}$ 或ハ $Y=-\frac{2}{3}$

$Y=\frac{1}{3}$ ナルトキハ $X=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$Y=-\frac{2}{3}$ ナルトキハ $X=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ X=\frac{2}{3},\ Y=\frac{1}{3}$ 或ハ $X=-\frac{1}{3},\ Y=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{a}{x}=\frac{2}{3},\ \frac{b}{y}=\frac{1}{3}$ 或ハ $\frac{a}{x}=-\frac{1}{3},\ \frac{b}{y}=-\frac{2}{3}$

$\therefore$ 答ハ $x=\frac{3a}{2},\ y=3b$ 或ハ $x=-3a,\ y=-\frac{3b}{2}$.

12. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ(32年,東京高等師範).

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2, \qquad x^2+y^3=ax-by$$

解 第一ノ方程式ヨリ $\frac{x}{a}=2+\frac{y}{b}$, $\therefore\ x=a\left(2+\frac{y}{b}\right)$ ………(1)

之ヲ第二方程式ニ代用スレバ $a^2\left(2+\frac{y}{b}\right)^2+y^2=a^2\left(2+\frac{y}{b}\right)-by$

$\therefore\ a^2(2b+y)^2+b^2y^2=a^2b(2b+y)-b^3y$

$\therefore\ a^2(4b^2+4by+y^2)+b^2y^2=2a^2b^2+a^2by-b^3y$

$\therefore\ (a^2+b^2)y^2+(3a^2b+b^3)y+2a^2b^2=0$

$\therefore\ y=\frac{-3a^2b-b^3\pm\sqrt{(3a^2b+b^3)^2-8a^2b^2(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$

$=\frac{-3a^2b-b^3\pm\sqrt{a^4b^2-2a^2b^4+b^6}}{2(a^2+b^2)}=\frac{-3a^2b-b^3\pm(a^2b-b^3)}{2(a^2+b^2)}$

$\therefore\ y=\frac{-3a^2b-b^3+a^2b-b^3}{2(a^2+b^2)}=\frac{-2a^2b-2b^3}{2(a^2+b^2)}=\frac{-2b(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}=-b$

又ハ $y=\frac{-3a^2b-b^3-a^2b+b^3}{2(a^2+b^2)}=\frac{-4a^2b}{2(a^2+b^2)}=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$

$y=-b$ ナルトキハ(1)ヨリ $x=a(2-1)=a$

$y=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$ ナルトキハ(1)ヨリ $x=a\left(2-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$

故ニ答ハ $x=a,\ y=-b$ 及ビ $x=\frac{2ab^2}{a^2+b^2},\ y=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$ ナリ.

13 次ノ聯立方程式

$$3x^2+5y^2=15, \qquad y=mx$$

ニ適スル x, y ノ値ノ一組ヲ α, β トシ又聯立方程式

$$3x^2+5y^2=15, \qquad y=\frac{3}{5m}x$$

ニ適スル x, y ノ値ノ一組ヲ γ, δ トセヨ.

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ ハ m ノ値ノ如何ニ係ラズ常ニ同ジキコトヲ證明セヨ.

解 $x=\alpha,\ y=\beta$ ハ $3x^2+5y^2=15,\ y=mx$ ニ適スルヲ以テ

$3\alpha^2+5\beta^2=15,\ \beta=m\alpha$ $\therefore\ 3\alpha^2+5m^2\alpha^2=15$. $\therefore\ \alpha^2=\frac{15}{3+5m^2}$ ………(1)

又 $x=\gamma,\ y=\delta$ ハ $3x^2+5y^2=15,\ y=\frac{3}{5m}x$ ニ適スルヲ以テ

$3\gamma^2+5\delta^2=15,\ \delta=\frac{3}{5m}\gamma$ $\therefore\ 3\gamma^2+5\times\frac{9\gamma^2}{25m^2}=15$ $\therefore\ \gamma^2=\frac{25m^2}{3+5m^2}$

又 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\alpha^2+m^2\alpha^2+\gamma^2+\dfrac{9\gamma^2}{25m^2}=(1+m^2)\alpha^2+\left(1+\dfrac{9}{25m^2}\right)\gamma^2$

$$=\frac{15(1+m^2)}{3+5m^2}+\frac{9+25m^2}{25m^2}\cdot\frac{25m^2}{3+5m^2}=\frac{15+15m^2+9+25m^2}{3+5m^2}$$

$$=\frac{24+40m^2}{3+5m^2}=8$$

14. 次ノ方程式ヲ解ケ(42年,海軍兵).

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{29}{20},\qquad xy=21$$

解 第一方程式ヨリ $20(x^2+y^2)=29(x^2-y^2)$

$\therefore\ 9x^2=49y^2$ $\therefore\ 3x=\pm7y$ $\therefore\ x=\pm\dfrac{7}{3}y$

$x=\dfrac{7}{3}y$ トスレバ $xy=21$ ヨリ $\dfrac{7}{3}y^2=21$ $\therefore\ y^2=9$ $\therefore\ y=\pm3$

之ヲ $x=\dfrac{7}{3}y$ ニ代用スレバ $x=\pm7$

又 $x=-\dfrac{7}{3}y$ トスレバ $xy=21$ ヨリ $-\dfrac{7}{3}y^2=21$ $\therefore\ y^2=-9$ $\therefore\ y=\pm3i$

之ヲ $x=-\dfrac{7}{3}y$ ニ代用スレバ $x=\mp7i$

故ニ求ムル答ハ $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-7\\y=-3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=7i\\y=-3i\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-7i\\y=3i\end{array}\right\}$ ノ四通リナリ.

15. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(41年,專門學校入學者檢定).

$$x^2+xy=12,\qquad xy-2y^2=1$$

解 第二方程式ノ兩邊ニ12ヲ掛ケ,其兩邊ヲ夫夫第一方程式ノ兩邊ヨリ引ケバ $x^2-11xy+24y^2=0$

$\therefore\ (x-3y)(x-8y)=0$ $\therefore\ x=3y$ 又ハ $x=8y$

$x=3y$ トスレバ $xy-2y^2=1$ ヨリ $3y^2-2y^2=1$ $\therefore\ y^2=1$ $\therefore\ y=\pm1$

之ヲ $x=3y$ ニ代用スレバ $x=\pm3$

$x=8y$ トスレバ $xy-2y^2=1$ ヨリ $8y^2-2y^2=1$ $\therefore\ 6y^2=1$ $\therefore\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

之ヲ $x=8y$ ニ代用スレバ $x=\pm\dfrac{8}{\sqrt{6}}$

故ニ求ムル答ハ $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{8}{\sqrt{6}}\\y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{8}{\sqrt{6}}\\y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right\}$ ノ四組ナリ.

16. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(34年,高等).

$$3x^2-2xy+y^2=2\qquad 2x^2+xy-y^2=2$$

解 第一方程式ノ兩邊ヨリ第二方程式ノ兩邊ヲ引ケバ

$x^2-3xy+2y^2=0$ $\therefore\ (x-y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x=y\cdots\cdots(1)$ 又ハ $x=2y\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ得ルxノ値ヲ $3x^2-2xy+y^2=2$ ニ代用スレバ

$3y^2-2y^2+y^2=2$ $\therefore\ 2y^2=2$ $\therefore\ y=\pm1$ 從テ(1)ヨリ $x=\pm1$

又(2)ヨリ得ルxノ値ヲ $3x^2-2xy+y^2=2$ ニ代用スレバ

$12y^2-4y^2+y^2=2$ $\therefore\ 9y^2=2$ $\therefore\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 從テ(1)ヨリ $x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

因テ答ハ $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{array}\right\}$ ノ四通リナリ.

17. $x^2+2xy-3y^2=5,\ 2x^2-xy+y^2=7$ ナル聯立方程式ヲ解ケ(41年,海軍機關).

解 第一方程式ノ兩邊ニ7ヲ掛ケ,第二方程式ノ兩邊ニ5ヲ掛ケ,邊邊相減ズレバ $-3x^2+19xy-26y^2=0$ $\therefore\ 3x^2-19xy+26y^2=0$

$\therefore\ (3x-13y)(x-2y)=0$ $\therefore\ 3x=13y\cdots\cdots(1)$ 又ハ $x=2y\cdots\cdots(2)$

(1)ヨリ $x=\dfrac{13}{3}y$, 之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$\dfrac{169}{9}y^2+\dfrac{26}{3}y^2-3y^2=5$ $\therefore\ (169+26\times3-3\times9)y^2=5\times9$ $\therefore\ 220y^2=5\times9$

$\therefore\ y^2=\dfrac{9}{44}$ $\therefore\ y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{44}}$ 因テ(1)ヨリ $x=\pm\dfrac{13}{\sqrt{44}}$

又(2)ノxヲ第一方程式ニ代用スレバ

$4y^2+4y^2-3y^2=5$ $\therefore\ 5y^2=5$ $\therefore\ y^2=1$ $\therefore\ y=\pm1$

之ヲ(2)ニ代用スレバ $x=\pm2$

因テ求ムル答ハ $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{13}{\sqrt{44}}\\y=\dfrac{3}{\sqrt{44}}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{13}{\sqrt{44}}\\y=-\dfrac{3}{\sqrt{44}}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-1\end{array}\right\}$ ノ四組ナリ.

18. $\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}=x,\ y^2-3xy=36$ ヲ解ケ(33年,美術).

解 第一方程式ハ $\sqrt{(2x+3y)^2}=x$ ト書クヲ得,而シテxハ正ナ

ルベキヲ以テ此方程式ハ

$2x+3y>0$ ナラバ $2x+3y=x$ 即チ $x=-3y$ ………(1)

又 $2x+3y<0$ ナラバ $-2x-3y=x$ 即チ $x=-y$ ………(2)

(1) ノ x ノ値ヲ $y^2-3xy=36$ ニ代用スレバ $9y^2+9y^2=36$

$\therefore\ 18y^2=36$ $\therefore\ y^2=2$ $\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$ $\therefore$ (1)ヨリ $x=\mp3\sqrt{2}$

然ルニ $x>0$ ナルヲ以テ此場合ノ答ハ $x=3\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$ ノミナリ。

又(2) ノ x ノ値ヲ $y^2-3xy=36$ ニ代用スレバ $y^2+3y^2=36$ $\therefore\ y^2=9$

$\therefore\ y=\pm3$ $\therefore$ (2) ヨリ $x=\mp3$ 故ニ此場合ノ答ハ $x=3,\ y=-3$

因テ求ムル答ハ $x=3\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$; 及ビ $x=3,\ y=-3$ ナリ。

19. $(x+2y)(x-3y)=20,\quad \dfrac{2y-5}{y-x}=\dfrac{x+3y}{2y+5}$ ヨリ x 及 y ノ値ヲ求ム(34年,東京高等商業).

解 第二方程式ヨリ $(2y-5)(2y+5)=(x+3y)(y-x)$

$\therefore\ 4y^2-25=-x^2-2xy+3y^2$ $\therefore\ x^2+2xy+y^2=25$ $\therefore\ (x+y)^2=25$

$\therefore\ x+y=5$ ………(1) 或ハ $x+y=-5$ ………(2)

(1) ヨリ $x=5-y$, 之ヲ $(x+2y)(x-3y)=20$ ニ代用スレバ

$(5+y)(5-4y)=20$ $\therefore\ 25-15y-4y^2=20$

$\therefore\ 4y^2+15y-5=0$ $\therefore\ y=\dfrac{-15\pm\sqrt{15^2+4\times4\times5}}{8}=\dfrac{-15\pm\sqrt{305}}{8}$

$\therefore\ x=5-\dfrac{-15\pm\sqrt{305}}{8}=\dfrac{55\mp\sqrt{305}}{8}$

又(2)ヨリ x ノ値ヲ求メ上ト同様ニスレバ今二組ノ答ヲ得. 或ハ次ノ如ク考フルモ可ナリ. 上ニ得タル根ハ

$$x+y=5,\qquad (x+2y)(x-3y)=20$$

ノ根ナリ. 然ルニ此 x, y ノ符號ヲ變ヘタルモノヲ x', y' 即チ

$x'=-x,\ y'=-y$ トスレバ $x'+y'=-(x+y)=-5$

$(x'+2y')(x'-3y')=(-x-2y)(-x+3y)$

$=\{-(x+2y)\}\{-(x-3y)\}=(x+2y)(x-3y)=20$

ナルヲ以テ x', y' ハ $x+y=-5,\ (x+2y)(x-3y)=20$ ニ適ス. 故ニ(2) ト $(x+2y)(x-3y)=20$ トヨリ x, y ヲ求ムレバ上ニ得タル x, y ノ符號ヲ變ヘタルモノヲ得ルコト明カナリ. 故ニ求ムル答ハ

$$\left.\begin{matrix}x=\dfrac{55+\sqrt{305}}{8}\\ y=\dfrac{-15-\sqrt{305}}{8}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{55-\sqrt{305}}{8}\\ y=\dfrac{-15+\sqrt{305}}{8}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{-55-\sqrt{305}}{8}\\ y=\dfrac{15+\sqrt{305}}{8}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{-55+\sqrt{305}}{8}\\ y=\dfrac{15-\sqrt{305}}{8}\end{matrix}\right\}$$

ナリ。 18-1

20. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ(35年,東京高等工業).

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3},\qquad x^2-y^2=3$$

解 第一方程式ハ $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=3+\dfrac{1}{3}$ ト書キ得ルヲ以テ第437頁,問題12ニ説明セルガ如ク

$$\frac{x+y}{x-y}=3 \quad 又ハ \quad \frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ x+y=3(x-y)$ ………(1) 又ハ $x+y=\dfrac{1}{3}(x-y)$ ………(2)

然ルニ與ヘラレタル第二方程式ハ $(x+y)(x-y)=3$

$\therefore$ (1) ヨリ $3(x-y).(x-y)=3$ $\therefore\ (x-y)^2=1$ $\therefore\ x-y=\pm1$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $x+y=\pm3$

$x+y=3,\ x-y=1$ ヨリ $x=2,\ y=1$ ヲ得.

又 $x+y=-3,\ x-y=-1$ ヨリ $x=-2,\ y=-1$ ヲ得.

次ニ(2) ト $(x+y)(x-y)=3$ トヨリ

$\dfrac{1}{3}(x-y).(x-y)=3$ $\therefore\ (x-y)^2=9$ $\therefore\ x-y=\pm3$

之ヲ(2)ニ代用スレバ $x+y=\pm1$

$x+y=1,\ x-y=3$ ヨリ $x=2,\ y=-1$ ヲ得.

$x+y=-1,\ x-y=-3$ ヨリ $x=-2,\ y=1$ ヲ得.

故ニ答ハ $\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=-2\\y=-1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=-1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=-2\\y=1\end{matrix}\right\}$ ノ四組ナリ。

21. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ(41年,東京商船).

$$x^2+xy=6y,\qquad x^2+y^2=5y$$

解 第一方程式ノ兩邊ニ5ヲ,第二方程式ノ兩邊ニ6ヲ掛ケ引キ算ヲ行ヘバ $-x^2+5xy-6y^2=0$ $\therefore\ x^2-5xy+6y^2=0$

$\therefore\ (x-2y)(x-3y)=0$ $\therefore\ x=2y$ 又ハ $x=3y$

$x=2y$ ナルトキハ $x^2+y^2=5y$ ハ $4y^2+y^2=5y$ $\therefore\ 5y^2=5y$

$\therefore\ y^2-y=0 \quad \therefore\ y(y-1)=0 \quad \therefore\ y=0$ 又ハ $y=1$

$y=0$ ナルトキハ $x=2y=0$, $y=1$ ナルトキハ $x=2y=2$

又 $x=3y$ ナルトキハ $x^2+y^2=5y$ ハ $9y^2+y^2=5y \quad \therefore\ 10y^2=5y$

$\therefore\ 2y^2-y=0 \quad \therefore\ y(2y-1)=0 \quad \therefore\ y=0$ 又ハ $y=\frac{1}{2}$

$y=0$ ナルトキハ $x=3y=0$; $y=\frac{1}{2}$ ナルトキハ $x=3y=\frac{3}{2}$

故ニ答ハ $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ ノ四組ナリ.

22. 下ノ方程式ヲ解ケ(42年,陸軍主計候補生).

$$2x^2-xy+y^2=2y, \qquad 2x^2+4xy=5y$$

解 第一方程式ノ兩邊ニ5ヲ,第二方程式ノ兩邊ニ2ヲ掛ケ引キ算ヲ行ヘバ $6x^2-13xy+5y^2=0$

$\therefore\ (3x-5y)(2x-y)=0 \quad \therefore\ 5y=3x$ 又ハ $y=2x$

$5y=3x$ ヨリ $y=\frac{3}{5}x$ 之ヲ $2x^2+4xy=5y$ ニ代用スレバ

$2x^2+4x\times\frac{3}{5}x=5\times\frac{3}{5}x \quad \therefore\ 10x^3+12x^2=15x \quad \therefore\ 22x^2=15x$

$\therefore\ x(22x-15)=0 \quad \therefore\ x=0$ 又ハ $x=\frac{15}{22}$

$x=0$ ナルトキハ $y=\frac{3}{5}x=0$; $x=\frac{15}{22}$ ナルトキハ $y=\frac{3}{5}\times\frac{15}{22}=\frac{9}{22}$

又 $y=2x$ ヲ $2x^2+4xy=5y$ ニ代用スレバ $2x^2+4x\times2x=5\times2x$

$\therefore\ 10x(x-1)=0 \quad \therefore\ x=0$ 又ハ $x=1$

$x=0$ ナルトキハ $y=2x=0$; $x=1$ ナルトキハ $y=2\times1=2$

故ニ答ハ $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=\frac{15}{22}\\y=\frac{9}{22}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$ ノ四組ナリ.

23. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(41年第五高等).

$$y-(20-x^2)^{\frac{1}{2}}=(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 3(20-x^2)^{\frac{1}{2}}=2(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

($A^{\frac{1}{2}}$ ハ A ノ平方根ノ內正ナルモノヲ表スモノトス)

解 第二方程式ヨリ $(20-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 之ヲ第一方程式ニ

代用スレバ $y-\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \therefore\ y=\frac{5}{3}(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ……(1)

$\therefore\ y^2=\frac{25}{9}(y^2-x^2) \quad \therefore\ 9y^2=25(y^2-x^2) \quad \therefore\ 25x^2=16y^2$

$\therefore\ y^2=\frac{25}{16}x^2$ ……(2) 之ヲ第二方程式ニ代用スレバ

$3(20-x^2)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{25}{16}x^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{9}{16}x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \therefore\ 9(20-x^2)=4\times\frac{9}{16}x^2$

$\therefore\ 4(20-x^2)=x^2 \quad \therefore\ 80-4x^2=x^2 \quad \therefore\ 80=5x^2$

$\therefore\ x^2=16 \quad \therefore\ x=\pm4$

$x=\pm4$ トスレバ(2)ヨリ $y^2=\frac{25}{16}\times16=25$

然ルニ(1)ニ依リテyハ正ナリ. $\therefore\ y=5$

故ニ答ハ $x=4$, $y=5$ 及ビ $x=-4$, $y=5$ ナリ.

24. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(40年,水產講習所).

$$x^2y^2+400=41xy \qquad (2x-y)^2=xy$$

解 第一方程式ハ xy ノ二次方程式ナリ,卽チ $(xy)^2-41xy+400=0$

$\therefore\ (xy-25)(xy-16)=0 \quad \therefore\ xy=25$ 又ハ $xy=16$

故ニ原方程式ハ次ノ二組ニ同シ.

$(2x-y)^2=xy,\ xy=25$ 及ビ $(2x-y)^2=xy,\ xy=16$

卽チ $(2x-y)^2=25,\ xy=25$ 及ビ $(2x-y)^2=16,\ xy=16$

然ルニ此最初ノ組ハ

$\left.\begin{matrix}2x-y=5\text{……(1)}\\xy=25\text{……(2)}\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}2x-y=-5\text{……(3)}\\xy=25\text{……(4)}\end{matrix}\right\}$

ノ二組ニ同ジク,後ノ組ハ

$\left.\begin{matrix}2x-y=4\text{……(5)}\\xy=16\text{……(6)}\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}2x-y=-4\text{……(7)}\\xy=16\text{……(8)}\end{matrix}\right\}$

ノ二組ニ同ジキヲ以テ原方程式ハ上ノ四組ノ方程式ニ同ジ.

扨(1)ヨリ $y=2x-5 \quad \therefore$ (2)ヨリ $x(2x-5)=25$

$\therefore\ 2x^2-5x-25=0 \quad \therefore\ (2x+5)(x-5)=0 \quad \therefore\ x=-\frac{5}{2}$ 又ハ $x=5$

$x=-\frac{5}{2}$ ナルトキハ(1)ヨリ $y=2\left(-\frac{5}{2}\right)-5=-10$

$x=5$ ナルトキハ(1)ヨリ $y=2\times5-5=5$

同樣ニ(3),(4)ノ組ヨリハ $x=\frac{5}{2}$, $y=10$ 又ハ $x=-5$, $y=-5$ ヲ得.

次ニ(5)ヨリ $y=2x-4$ ∴ (6)ヨリ $x(2x-4)=25$

∴ $2x^2-4x-25=0$ ∴ $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2+2\times25}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{54}}{2}=\dfrac{2\pm3\sqrt{6}}{2}$

∴ (5)ヨリ $y=2x-4=2\pm3\sqrt{6}-4=-2\pm3\sqrt{6}$

(7),(8)ノ組ヨリ得ル答ハ(5),(6)ヨリ得ル答ト只符號ダケニテ相異ナルコト明カナリ．故ニ求ムル答ハ次ノ八通リナリ．

$$\left.\begin{matrix}x=-\dfrac{5}{2}\\ y=-10\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=5\\ y=5\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{5}{2}\\ y=10\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=-5\\ y=-5\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{2}\\ y=-2+3\sqrt{6}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{2-3\sqrt{6}}{2}\\ y=-2-3\sqrt{6}\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}x=-\dfrac{2+3\sqrt{6}}{2}\\ y=2-3\sqrt{6}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=-\dfrac{2-3\sqrt{6}}{2}\\ y=2+3\sqrt{6}\end{matrix}\right\}$$

25. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(37年,盛岡農林).

$$x^2+x+y^2=15,\qquad 2xy+y=15$$

解　此二ツノ方程式ヲ邊邊相加ヘ變形スレバ

$(x+y)^2+(x+y)-30=0$ ∴ $[(x+y)-5][(x+y)+6]=0$

∴ $x+y=5$……(1) 又ハ $x+y=-6$……(2)

(1)ヨリ $x=5-y$ 之ヲ $2xy+y=15$ ニ代用スレバ

$2y(5-y)+y=15$ ∴ $2y^2-11y+15=0$

∴ $(2y-5)(y-3)=0$ ∴ $y=\dfrac{5}{2}$ 又ハ $y=3$

之ヲ(1)ニ代用スレバ次ノ二組ノ答ヲ得．

$x=\dfrac{5}{2},\ y=\dfrac{5}{2}$ 又ハ $x=2,\ y=3$……(A)

(2)ヨリ $x=-y-6$, 之ヲ $2xy+y=15$ ニ代用スレバ

$2y(-y-6)+y=15$ ∴ $2y^2+11y+15=0$

∴ $(2y+5)(y+3)=0$ ∴ $y=-\dfrac{5}{2}$ 又ハ $y=-3$

之ヲ(2)ニ代用スレバ次ノ二組ノ答ヲ得．

$x=-\dfrac{7}{2},\ y=-\dfrac{5}{2}$ 又ハ $x=-3,\ y=-3$……(B)

故ニ原方程式ノ根ハ(A),(B)ニテ示セル四組ナリ．

26. 下ノ聯立二次方程式ヲ解ケ(43年,東京商船).

$$x^2+xy=4x-2,\qquad y^2+xy=4y-1$$

解　此二ツノ方程式ヲ邊邊相加ヘ變形スレバ

$(x+y)^2-4(x+y)+3=0$ $[(x+y)-1][(x+y)-3]=0$

∴ $x+y=1$……(1) 或ハ $x+y=3$……(2)

(1)ヨリ $y=1-x$ 之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$x^2+x(1-x)=4x-2$ ∴ $0=3x-2$ ∴ $x=\dfrac{2}{3}$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $y=\dfrac{1}{3}$ ヲ得．

又(2)ヨリ $y=3-x$ 之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$x^2+x(3-x)=4x-2$ ∴ $0=x-2$ ∴ $x=2$

之ヲ(2)ニ代用スレバ $y=1$ ヲ得．

故ニ求ムル答ハ $x=\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{1}{3}$ 及ビ $x=2,\ y=1$ ノ二組ナリ．

27. $\left.\begin{matrix}x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0\ \cdots\cdots(1)\\ 2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0\ \cdots\cdots(2)\end{matrix}\right\}$ ヲ解クコト．

解　(1)×2−(2) $3y^2+4y+1=0$

∴ $(3y+1)(y+1)=0$ ∴ $y=-\dfrac{1}{3}$ 或ハ $y=-1$

$y=-\dfrac{1}{3}$ ヲ(1)ニ代用スレバ $x^2+x+\dfrac{2}{9}+4x-1-1=0$

∴ $9x^2+45x-16=0$ $(3x-1)(3x+16)=0$ ∴ $x=\dfrac{1}{3}$ 或ハ $x=-\dfrac{16}{3}$

∴ $\left.\begin{matrix}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{1}{3}\end{matrix}\right\}$ 及 $\left.\begin{matrix}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=-\dfrac{16}{3}\end{matrix}\right\}$ ナル二組ノ根ヲ得．

次ニ $y=-1$ ヲ(1)ニ代用スレバ $x^2+3x+2+4x-3-1=0$

∴ $x^2+7x-2=0$ ∴ $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+8}}{2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{57}}{2}$

∴ $\left.\begin{matrix}y=-1\\ x=\dfrac{-7+\sqrt{57}}{2}\end{matrix}\right\}$ 及 $\left.\begin{matrix}y=-1\\ x=\dfrac{-7-\sqrt{57}}{2}\end{matrix}\right\}$ ヲ得．

故ニ原方程式ニハ四組ノ根アリ．

28. $\left.\begin{matrix}x^2+2xy+2y^2+3x=0\ \cdots\cdots(1)\\ xy+y^2+3y+1=0\ \cdots\cdots(2)\end{matrix}\right\}$ ヲ解クコト．

解　(2)×2+(1)　$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0$

$\therefore\quad \{(x+2y)+2\}\{(x+2y)+1\}=0$

$\therefore\quad x+2y+2=0 \cdots\cdots(3)$　或ハ　$x+2y+1=0 \cdots\cdots(4)$

(3) ヨリ　$x=-2(y+1) \cdots\cdots(5)$　之ヲ (2) ニ代用スレバ

$-2(y+1)y+y^2+3y+1=0 \quad \therefore\ y^2-y-1=0 \quad \therefore\ y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

之ヲ (5) ニ代用スレバ　$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=-3-\sqrt{5} \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=-3+\sqrt{5} \end{array}\right\}$ ヲ得.

次ニ (4) ヨリ　$x=-(2y+1) \cdots\cdots(6)$　之ヲ (2) ニ代用スレバ

$-(2y+1)y+y^2+3y+1=0 \quad \therefore\ y^2-2y-1=0 \quad \therefore\ y=1\pm\sqrt{2}$

之ヲ (6) ニ代用スレバ　$\left.\begin{array}{l} y=1+\sqrt{2} \\ x=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} y=1-\sqrt{2} \\ x=-3+2\sqrt{2} \end{array}\right\}$ ヲ得.

因テ原方程式ニハ四組ノ根アリ.

29. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ(39年,東京商船).

$$x^3-y^3=127, \qquad x^2y-xy^2=42$$

解　第一方程式ノ兩邊ヲ第二方程式ノ兩邊ニテ割レバ

$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{127}{42} \quad \therefore\ 42(x^2+xy+y^2)=127xy$

$\therefore\ 42x^2-85xy+42y^2=0 \quad \therefore\ (6x-7y)(7x-6y)=0$

$\therefore\ 6x=7y \cdots\cdots(1)$　或ハ　$7x=6y \cdots\cdots(2)$

(1) ヨリ　$x=\frac{7}{6}y \cdots\cdots(3)$　之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$\left(\frac{7}{6}y\right)^3-y^3=127 \quad \therefore\ 343y^3-216y^3=127\times6^3 \quad \therefore\ 127y^3=127\times6^3$

$\therefore\ y^3=6^3 \quad \therefore\ y=6$　或ハ　$y=6\omega$　或ハ　$y=6\omega^2$ (第413頁)

之ニ應ズルxハ(3)ヨリ　$x=7$　或ハ　$x=7\omega$　或ハ　$x=7\omega^2$

又 (2) ヨリ　$x=\frac{6}{7}y \cdots\cdots(4)$　之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$\left(\frac{6}{7}y\right)^3-y^3=127 \quad \therefore\ 216y^3-343y^3=127\times7^3 \quad \therefore\ -127y^3=127\times7^3$

$\therefore\ y^3=-7^3 \quad \therefore\ y=-7$　或ハ　$y=-7\omega$　或ハ　$y=-7\omega^2$ (第413頁)

之ニ應ズルxハ(4)ヨリ　$x=-6$　或ハ　$x=-6\omega$　或ハ　$x=-6\omega^2$

故ニ答ハ次ノ六通リナリ.

$\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=7\omega \\ y=6\omega \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=7\omega^2 \\ y=6\omega^2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-6 \\ y=-7 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-6\omega \\ y=-7\omega \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-6\omega^2 \\ y=-7\omega^2 \end{array}\right\}$

30. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(42年,第一乃至第六及第八高等).

$$x^3-y^3=26 \qquad x^2y-xy^2=6$$

解　前問ト全ク同樣ニシテ解クナリ. 即チ

$\frac{x^3-y^3}{x^2y-xy^2}=\frac{26}{6}$　ヨリ　$3(x^2+xy+y^2)=13xy$

$xy(x-y)$　$3x^2-10xy+3y^2=0 \quad \therefore\ (3x-y)(x-3y)=0$

$\therefore\ y=3x \cdots\cdots(1)$　或ハ　$x=3y \cdots\cdots(2)$

$-x^3=1$

(1) ヲ利用シ　$x^3-27x^3=26 \quad \therefore\ -26x^3=26 \quad \therefore\ x^3=-1$

$\therefore\ x=-1$　或ハ　$x=-\omega$　或ハ　$x=-\omega^2$

之ニ應ズル　$y=-3$　或ハ　$y=-3\omega$　或ハ　$y=-3\omega^2$

又 (2) ヲ利用シ　$27y^3-y^3=26 \quad \therefore\ 26y^3=26 \quad \therefore\ y^3=1$

之ト(2)トヨリ次ノ三組ノ答ヲ得.

$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3\omega \\ y=\omega \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3\omega^2 \\ y=\omega^2 \end{array}\right\}$

31. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(43年,東京農科大學實科).

$$2(x-y)+xy=7, \qquad 3xy-(x-y)=7$$

解　先ヅxy及x−yヲ一ツノ未知數ト見做シ此各ヲ求メン.

第二方程式ノ兩邊ニ2ヲ掛ケタルモノト第一方程式トヲ邊邊相加フレバ　$7xy=21 \quad \therefore\ xy=3 \cdots\cdots(1)$

之ヲ第二方程式ニ代用スレバ　$x-y=2 \cdots\cdots(2)$

(2) ヨリ　$x=y+2 \quad \therefore$　(1) ヨリ　$y(y+2)=3$

$\therefore\ y^2+2y-3=0 \quad \therefore\ (y+3)(y-1)=0 \quad \therefore\ y=-3$　又ハ　$y=1$

從テ(1)ヲ用ヒテ答　$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$ ヲ得.

32. $x+y+xy=34,\ x^2+y^2=52$ ヨリ x, y ヲ算出セヨ(33年,東京郵便電信).

解 $x+y=u,\ xy=v$ トスレバ與ヘラレタル方程式ハ夫夫

$$u+v=34 \cdots\cdots(1) \qquad u^2-2v=52 \cdots\cdots(2)$$

トナル. (1)ヨリ $v=34-u$, 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$u^2-68+2u=52 \qquad \therefore\ u^2+2u-120=0$$

$$\therefore\ (u-10)(u+12)=0 \qquad \therefore\ u=10 \ \text{又ハ}\ u=-12$$

$u=10$ ナルトキハ $v=24$; $u=-12$ ナルトキハ $v=46$

$\therefore$ 原方程式ハ $\left.\begin{array}{r} x+y=10 \cdots\cdots(3) \\ xy=24 \cdots\cdots(4) \end{array}\right\}$ 及ビ $\left.\begin{array}{r} x+y=-12 \cdots\cdots(5) \\ xy=46 \cdots\cdots(6) \end{array}\right\}$

ニ同ジ. (3),(4)ノ x, y ハ $z^2-10z+24=0$ 卽チ $(z-4)(z-6)=0$

ノ根ナリ. $\therefore\ x=4,\ y=6$ 又ハ $x=6,\ y=4 \cdots\cdots(A)$

又(5),(6)ノ x, y ハ $z^2+12z+46=0$ ノ根ナリ.

然ルニ $z=-6\pm\sqrt{6^2-46}=-6\pm i\sqrt{10}$

$\therefore\ x=-6+i\sqrt{10},\ y=-6-i\sqrt{10}$ 又ハ $x=-6-i\sqrt{10},\ y=-6+i\sqrt{10} \cdots(B)$

故ニ原方程式ニハ(A),(B)ニテ示セル四組ノ根アリ.

33. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ(34年,東京商船).

$$x+y=8xy \qquad x^2+y^2=40x^2y^2$$

解 第二方程式ヲ書キ變ヘテ $(x+y)^2-2xy=40x^2y^2$ トシ,ソコデ第一方程式ヲ利用スレバ $(8xy)^2-2xy=40x^2y^2$ トナル.

$$\therefore\ 64x^2y^2-2xy=40x^2y^2 \qquad \therefore\ 24x^2y^2-2xy=0$$

$$\therefore\ 2xy(12xy-1)=0 \qquad \therefore\ xy=0 \ \text{又ハ}\ xy=\frac{1}{12}$$

$xy=0$ ナルトキハ $x+y=8xy$ ヨリ $x+y=0$ $\therefore\ x=y=0,\ x=y=0$

又 $xy=\frac{1}{12}$ ナルトキハ $x+y=8xy$ ヨリ $x+y=\frac{8}{12}$. 故ニ x, y ハ

$$z^2-\frac{8}{12}z+\frac{1}{12}=0 \ \text{卽チ}\ 12z^2-8z+1=0 \ \text{卽チ}\ (2z-1)(6z-1)=0$$

ノ根ナリ. 然ルニ $z=\frac{1}{2}$ 又ハ $z=\frac{1}{6}$. 故ニ求ムル答ハ

$$x=y=0,\ x=y=0,\ x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{6};\ x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{2} \ \text{ナリ.}$$

34. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(40年,專門學校入學者檢定.

$$(x+y)^2+(x+y)-2xy=4 \qquad \text{〔之ヲ(1)トセン〕}$$

$$(x+y)^2-3xy=1 \qquad \text{〔之ヲ(2)トセン〕}$$

解 $(1)\times3-(2)\times2,\quad (x+y)^2+3(x+y)=10$

$\therefore\ [(x+y)-2][(x+y)+5]=0 \quad \therefore\ x+y=2,$ 又ハ $x+y=-5$

$x+y=2$ ナルトキハ(2)ヨリ $2^2-3xy=1 \quad \therefore\ xy=1$

$x+y=-5$ ナルトキハ(2)ヨリ $5^2-3xy=1 \quad \therefore\ xy=8$

故ニ原方程式ハ次ノ二組ニ同ジ.

$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ xy=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots(3) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=-5 \\ xy=8 \end{array}\right\} \cdots\cdots(4)$

サテ(3)ノ x, y ハ $z^2-2z+1=0$ 卽チ, $(z-1)^2=0$ ノ根ナリ.

$\therefore\ x=y=1$ 及ビ $x=y=1 \cdots\cdots(A)$

又(4)ノ x, y ハ $z^2+5z+8=0$ ノ根ナリ.

然ルニ $z=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-32}}{2}=\dfrac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{-5+i\sqrt{7}}{2},\ y=\dfrac{-5-i\sqrt{7}}{2}$ 及ビ $x=\dfrac{-5-i\sqrt{7}}{2},\ y=\dfrac{-5+i\sqrt{7}}{2} \cdots\cdots(B)$

卽チ求ムル答ハ(A),(B)ニテ示セル四通リナリ.

35. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(41年,第七高等).

$$x+y+\sqrt{x+y}=12, \qquad x^3+y^3=189$$

解 $\sqrt{x+y}=z$ トスレバ,第一方程式ハ $z^2+z-12=0$ トナル.

卽チ $(z+4)(z-3)=0 \quad \therefore\ z=-4$ 又ハ $z=3$

然ルニ $z=\sqrt{x+y}>0 \quad \therefore\ \sqrt{x+y}=3 \quad \therefore\ x+y=9 \cdots\cdots(1)$

與ヘラレタル第二方程式ハ $(x+y)[(x+y)^2-3xy]=189$

ソコデ(1)ヲ利用スレバ $9[9^2-3xy]=189 \quad \therefore\ 9^2-3xy=21$

$$\therefore\ 3xy=9^2-21=60 \qquad \therefore\ xy=20 \cdots\cdots(2)$$

(1),(2) ニ適スル x, y ノ値ハ $z^2-9z+20=0$ 卽チ $(z-4)(z-5)=0$ ノ根ナリ. 故ニ求ムル根ハ $x=4,\ y=5$ 又ハ $x=5,\ y=4$ ナリ

36. $x+y=2a,\quad x^4+y^4=2b^4$ ヨリ x, y ヲ求ム(32年,東京郵便電信).

解 $x=u+v,\ y=u-v$ トオケバ

$$x+y=u+v+(u-v)=2u=2a \qquad \therefore \quad u=a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又

$$x^4=(u+v)^4=u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4$$

$$y^4=(u-v)^4=u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4$$

$$\therefore \quad x^4+y^4=2(u^4+6u^2v^2+v^4)=2b^4$$

$\therefore$ (1) ヲ利用シ $a^4+6a^2v^2+v^4=b^4 \qquad \therefore \quad v^4+6a^2v^2+a^4-b^4=0$

$$\therefore \quad v^2=-3a^2\pm\sqrt{9a^4-a^4+b^4}=-3a^2\pm\sqrt{8a^4+b^4}$$

$$\therefore \quad v=\pm\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{8a^4+b^4}}$$

因テ求ムル答ハ

$$\left.\begin{array}{l} x=a+\sqrt{-3a^2+\sqrt{8a^4+b^4}} \\ y=a-\sqrt{-3a^2+\sqrt{8a^4+b^4}} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=a+\sqrt{-3a^2-\sqrt{8a^4+b^4}} \\ y=a-\sqrt{-3a^2-\sqrt{8a^4+b^4}} \end{array}\right\}$$

幷ニ,此各ノ x ト y トヲ入レ換ヘテ得ル二組,卽チ凡テ四組ナリ.

37.
$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{5}{3}\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=2\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$$ ヲ解ケ.

解 (1) ノ分母ヲ拂ヘバ

$$3(x^2+y^2)+3(x+y)=5xy+5(x+y)+5$$

$$\therefore \quad 3(x^2+y^2)-2(x+y)-5xy=5$$

$$\therefore \quad 3\{(x+y)^2-2xy\}-2(x+y)-5xy-5=0$$

$$\therefore \quad 3(x+y)^2-2(x+y)-11xy-5=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 (2) ヲ書キ換フレバ

$$(x+y)^2-2xy-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$(4)\times 11-(3)\times 2 \quad 5(x+y)^2+4(x+y)-12=0$

$$\therefore \quad \{5(x+y)-6\}\{(x+y)+2\}=0$$

$$\therefore \quad x+y=\frac{6}{5} \quad 或ハ \quad x+y=-2$$

ソコデ $x+y=\dfrac{6}{5}$ トスレバ (4) ニヨリテ $xy=-\dfrac{7}{25}$ ヲ得,而シテ之ヲ解ケバ

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \quad 或ハ \quad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{array}\right\}$$ ヲ得.

次ニ $x+y=-2$ トスレバ (4) ニヨリテ $xy=1$ ヲ得,而シテ之ヲ解ケバ $x=-1,\ y=-1$ ヲ得. サレドモ之ハ原方程式(1) ノ左邊ヲ不可能ナラシムル値ナルユヱ,原方程式ニ適合セズ.

因テ原方程式ハ上ニ求メタル二組ノ根ノ外ニハ根ハナシ.

38.
$$\left.\begin{array}{r} x^4+y^4=82\cdots\cdots(1) \\ x-y=2\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$$ ヲ解ケ.

解 此方程式ハ x ト $(-y)$ トニ付テ對稱方程式ナリ,此場合ニ於テハ前例ト同樣ニシテ之ヲ解クコトヲ得.

$x=u+v,\ y=u-v$ トオケバ $x-y=2$ ナルユヱ $v=1$

$$\therefore \quad x^4+y^4=(u+1)^4+(u-1)^4=82$$

$$\therefore \quad u^4+4u^3+6u^2+4u+1+u^4-4u^3+6u^2-4u+1=82$$

$$\therefore \quad 2(u^4+6u^2+1)=82$$

$$\therefore \quad u^4+6u^2-40=0$$

$$\therefore \quad (u^2+10)(u^2-4)=0$$

$$\therefore \quad u^2=-10 \qquad \therefore \quad u=\pm i\sqrt{10}$$

$$或ハ \quad u^2=4 \qquad \therefore \quad u=\pm 2$$

$\therefore$ $u=\pm i\sqrt{10}$ ナルトキ $x=\pm i\sqrt{10}+1,\quad y=\pm i\sqrt{10}-1$

$u=\pm 2$ ナルトキ $x=\pm 2+1,\quad y=\pm 2-1$

卽チ
$$\left.\begin{array}{l} x=1+i\sqrt{10} \\ y=-1+i\sqrt{10} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=1-i\sqrt{10} \\ y=-1-i\sqrt{10} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right\}$$

ガ原方程式ノ根ナリ.

39. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5,\qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}$$

解 第一方程式ヨリ $x+y=5xy\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又第二方程式ヨリ $6(x^2+y^2)=13xy\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(2)ヲ $6[(x+y)^2-2xy]=13xy$ ト書キ直シ(1)ヲ利用スレバ

$$6[25(xy)^2-2xy]=13xy\quad\therefore\ 150(xy)^2-25xy=0\quad\therefore\ 25xy(6xy-1)=0$$

然ルニ $xy\neq0$ (若シ $xy=0$ トスレバ原方程式中ノ分數式ノ分母0トナレバナリ).

$$\therefore\ 6xy-1=0\qquad\therefore\ xy=\frac{1}{6}$$

從テ(1)ヨリ $x+y=\frac{5}{6}$, 故ニ x, y ハ $z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}=0$

即チ $6z^2-5z+1=0$ 即チ $(2z-1)(3z-1)=0$ ノ根ナリ.

然ルニ此方程式ノ根ハ明カニ $z=\frac{1}{2}$ 及ビ $z=\frac{1}{3}$. 故ニ答ハ

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3};\quad x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}\ \text{ノ二組ナリ.}$$

40. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(39年,高等).

$$x^2y+xy^2=30,\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$$

解 第二方程式ヨリ, $x+y=\frac{5}{6}xy\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又第一方程式ハ $xy(x+y)=30$, 故ニ(1)ヲ用フレバ

$$xy\left(\frac{5}{6}xy\right)=30\quad\therefore\ (xy)^2=30\times\frac{6}{5}=36\quad\therefore\ xy=\pm6$$

之ト(1)トニ依リテ與ヘラレタル方程式ハ次ノ二組ニ同ジ.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=5\\ xy=6\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)\qquad \left.\begin{array}{l}x+y=-5\\ xy=-6\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)ノ根ハ $x=2,\ y=3$ 及ビ $x=3,\ y=2$ ノ二組ナリ.

(3)ノ根ハ $x=-6,\ y=1$; 及ビ $x=1,\ y=-6$ ノ二組ナリ.

故ニ原方程式ノ根ハ此ノ四組ナリ.

41. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(33年,第二高等).

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18,\qquad x+y=12$$

解 第一方程式ヨリ $x^3+y^3=18xy$ ヲ得,此方程式ヲ

$(x+y)[(x+y)^2-3xy]=18xy$ ト書キ直シ第二方程式ヲ利用スレバ

$$12(12^2-3xy)=18xy\quad\therefore\ 2\times144-6xy=3xy\quad\therefore\ xy=32$$

故ニ求ムル根ハ $x+y=12,\ xy=32$ ニ適スルモノニシテ卽チ

$x=4,\ y=8$ 及ビ $x=8,\ y=4$ ノ二組ナリ.

42. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(43年,水產講習所).

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{20}{3},\qquad xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

解 $xy=u,\ \frac{x}{y}=v$ トスレバ與ヘラレタル方程式ハ夫夫

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{20}{3}\cdots\cdots\cdots(1)\qquad u+v=\frac{5}{3}\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル. サテ(1)カリ $3(u+v)=20uv$ ヲ得,ソコデ(2)ヲ用フレバ

$$3\times\frac{5}{3}=20uv\quad\therefore\ uv=\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\therefore\ u, v$ ハ $z^2-\frac{5}{3}z+\frac{1}{4}=0$ 卽チ $12z^2-20z+3=0$ 卽チ $(6z-1)(2z-3)=0$

ノ根ナリ. 故ニ $u=\frac{1}{6},\ v=\frac{3}{2}$ 又ハ $u=\frac{3}{2},\ v=\frac{1}{6}$

故ニ原方程式ハ右ノ二組ニ同ジ

$$\left.\begin{array}{l}xy=\frac{1}{6}\cdots\cdots(4)\\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2}\cdots\cdots(5)\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}xy=\frac{3}{2}\cdots\cdots(6)\\ \frac{x}{y}=\frac{1}{6}\cdots\cdots(7)\end{array}\right\}$$

(4),(5)ヲ掛ケ合スレバ $x^2=\frac{1}{4}$ $\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}$

之ヲ(4)ニ代用スレバ二組ノ答ヲ得,即チ

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

又(6),(7)ヲ掛ケ合スレバ $x^2=\frac{1}{4}$ $\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}$

之ヲ(6)ニ代用スレバ二組ノ答ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=-3 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

因テ求ムル根ハ(A),(B)ニテ示セル四組ナリ.

180. 二次方程式ノ解法ニ導キ得ル三元聯立方程式雜題

1. 次ノ方程式ヲ解ケ(36年,札幌農學校).

$$\frac{2x}{y+2}+\frac{y}{x+1}=\frac{z}{2}, \quad x+\frac{y}{2}=2, \quad y+\frac{z}{3}=3$$

解 第三方程式ヨリ $\frac{z}{3}=3-y$ $\therefore$ $z=3(3-y)$ …………(1)

又第二方程式ヨリ $x=2-\frac{y}{2}$ 即チ $x=\frac{4-y}{2}$ …………(2)

(1),(2)ノz,xノ値ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$$\frac{4-y}{y+2}+\frac{2y}{6-y}=\frac{3}{2}(3-y)$$

$\therefore$ $2(4-y)(6-y)+4y(y+2)=3(y+2)(6-y)(3-y)$

$\therefore$ $48-20y+2y^2+4y^2+8y=3y^3-21y^2+108$ $\therefore$ $3y^3-27y^2+12y+60=0$

$\therefore$ $y^3-9y^2+4y+20=0$ $\therefore$ $(y-2)(y^2-7y-10)=0$

$\therefore$ $y=2$ 或ハ $y^2-7y-10=0$ 即チ $y=\frac{7\pm\sqrt{49+40}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{89}}{2}$

之ヲ(1),(2)ニ代用スレバ次ノ三組ノ答ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \\ x=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y=\frac{7+\sqrt{89}}{2} \\ z=-\frac{3(1+\sqrt{89})}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{89}}{4} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y=\frac{7-\sqrt{89}}{2} \\ z=-\frac{3(1-\sqrt{89})}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{89}}{2} \end{array}\right\}$$

2. 次ノ方程式ヲ解ケ(36年,東京郵便電信,37年,海軍兵).

$$(x+y)(x+z)=12, \quad (y+z)(y+x)=15, \quad (z+x)(z+y)=20$$

解 第一,第二兩方程式ヲ邊邊掛ケ合セ,其兩邊ヲ第三方程式ノ兩邊ニテ割レバ $(x+y)^2=\frac{12\times15}{20}=9$ $\therefore$ $x+y=\pm3$

$x+y=3$, $x+y=-3$ ノ各ノ兩邊ニテ第一,第二兩方程式ノ兩邊ヲ割リテ得ル方程式ヲ其割リタル方程式ト組合スレバ原方程式ハ次ノ二組トナル.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+z=4\cdots\cdots\cdots(2) \\ y+z=5\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=-3\cdots\cdots\cdots(4) \\ x+z=-4\cdots\cdots\cdots(5) \\ y+z=-5\cdots\cdots\cdots(6) \end{array}\right\}$$

(1)+(2)+(3), $2(x+y+z)=12$, $\therefore$ $x+y+z=6$ …………(7)

(7)−(3), $x=1$; (7)−(2), $y=2$; (7)−(1), $z=3$

故ニ(1),(2),(3)ノ根ハ $x=1$, $y=2$, $z=3$ ナリ.

同様ニ(4),(5),(6)ヨリ $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$ ヲ得. 答ハ此二組ナリ.

3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(43年,東北帝國大學農科大學).

$$(y+z)(z+x)=a^2, \quad (z+x)(x+y)=b^2, \quad (x+y)(y+z)=c^2$$

解 解キ方ノ順序ハ全ク前問ニ同ジ.

即チ $(x+y)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$ $\therefore$ $x+y=\pm\frac{bc}{a}$, 故ニ原方程式ハ

$$x+y=\frac{bc}{a}, \quad y+z=\frac{ac}{b}, \quad z+x=\frac{ab}{c}$$

及ビ $x+y=-\frac{bc}{a}$, $y+z=-\frac{ac}{b}$, $z+x=-\frac{ab}{c}$

ノ二組ニ同ジク此各ヨリ得ル根ガ求ムル根ナリ. 即チ答ハ

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}-\frac{ac}{b}\right), \quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right), \quad z=\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right),$$

及ビ $x=\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}-\frac{ca}{b}\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}-\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right)$.

4. 下ノ方程式ヲ解ケ(35年,東京商船).

$$x(y+z)=14, \quad y(z+x)=18, \quad z(x+y)=20$$

解 三ツノ方程式ヲ邊邊相加フレバ

$$\therefore\quad 2(xy+xz+yz)=52 \qquad \therefore\quad xy+xz+yz=26$$

此兩邊ヨリ順次ニ與ヘラレタル方程式ノ兩邊ヲ引ケバ

$$yz=12\cdots\cdots(1),\qquad zx=8\cdots\cdots(2),\qquad xy=6\cdots\cdots(3)$$

サテ $(2)\times(3)\div(1)$, $\quad x^2=8\times6\div12=4 \qquad \therefore\quad x=\pm2$

$x=2$ 及ビ $x=-2$ ノ各ト(2),(3)ト組合スレバ次ノ二組ノ答ヲ得.

$$x=2,\ y=3,\ z=4;\quad \text{及ビ}\quad x=-2,\ y=-3,\ z=-4$$

5. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ(37年,海軍機關).

$$xy+x+y=13,\quad yz+y+z=29,\quad zx+x+z=23$$

解 第一方程式ノ兩邊ニ1ヲ加フレバ $xy+x+y+1=14$

$\therefore\quad (x+1)(y+1)=14\cdots\cdots(1)$ 同様ニ他ノ兩方程式ヨリ

$$(y+1)(z+1)=30\cdots\cdots(2)\qquad (z+1)(x+1)=24\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times(2)\div(3)$, $\quad (y+1)^2=14\times30\div24=\frac{35}{2} \qquad \therefore\quad y+1=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}\cdots\cdots(4)$

$(2)\times(3)\div(1)$, $\quad (z+1)^2=30\times24\div14=\frac{360}{7} \qquad \therefore\quad z+1=\pm\frac{6\sqrt{70}}{7}\cdots\cdots(5)$

$(3)\times(1)\div(2)$, $\quad (x+1)^2=24\times14\div30=\frac{56}{5} \qquad \therefore\quad x+1=\pm\frac{2\sqrt{70}}{5}\cdots\cdots(6)$

(4),(5),(6)ニ於テ正ハ正ト,負ハ負ト組合スベキコトハ(1),(2),(3)ニヨリテ明カナリ. 故ニ答ハ次ノ二組ナリ.

$$x=\frac{2\sqrt{70}}{5}-1,\qquad y=\frac{\sqrt{70}}{2}-1,\qquad z=\frac{6\sqrt{70}}{7}-1$$

及ビ

$$x=-\frac{2\sqrt{70}}{5}-1,\qquad y=-\frac{\sqrt{70}}{2}-1,\qquad z=-\frac{6\sqrt{70}}{7}-1$$

6. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ(38年,海軍機關).

$$yz=y-2z,\quad zx=6z-x,\quad xy=x-y$$

解 $x=0$ トオケバ第二,第三兩方程式ヨリ $z=0$, $y=0$ ヲ得. 故ニ $x=y=z=0$ ハ原方程式ノ根ナリ. x, y, z ノ内何レカ一ツヲ0トスレバ他ハ皆0トナル. ソコデ此根ヲ預リオキ x, y, z ノ何レモ0ニ等シカラザル根ヲ求メン.

$yz\neq0$ ナルヲ以テ yz ニテ第一方程式ノ兩邊ヲ割レバ

$$1=\frac{1}{z}-\frac{2}{y}\cdots\cdots(1)$$

同様ニ第二,第三兩方程式ヨリ夫夫次ノ方程式ヲ得.

$$1=\frac{6}{x}-\frac{1}{z}\cdots\cdots(2)\qquad 1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\cdots\cdots(3)$$

サテ (1)+(2) $\quad 2=\frac{6}{x}-\frac{2}{y} \qquad \therefore\quad 1=\frac{3}{x}-\frac{1}{y}\cdots\cdots(4)$

(3)+(4) $\quad 2=\frac{2}{x} \qquad \therefore\quad x=1$

之ヲ(3)ニ代用スレバ $1=\frac{1}{y}-1 \quad \therefore\quad \frac{1}{y}=2 \quad \therefore\quad y=\frac{1}{2}$

又 $x=1$ ヲ(2)ニ代用スレバ $1=6-\frac{1}{z} \quad \therefore\quad \frac{1}{z}=5 \quad \therefore\quad z=\frac{1}{5}$

故ニ答ハ $x=y=z=0$ 及 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{5}$ ノ二組ナリ.

7. 次ノ方程式ヲ解ケ(39年,海軍兵).

$$xy=a(x+y),\quad yz=b(y+z),\quad zx=c(z+x)$$

解 本問ノ解法モ前問ト同様ナリ. 即チ先ヅ $x=y=z=0$ ナル根ヲ預リオキ,各方程式ノ兩邊ヲ順次ニ其左邊ニテ割レバ

$$1=a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\qquad 1=b\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a}\right),\qquad 1=c\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c}\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\quad 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad \therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

此兩邊ヨリ順次ニ(1)ナル各方程式ノ兩邊ヲ引ケバ

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),\qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),\qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{z}=\frac{ca+ab-bc}{2abc},\qquad \frac{1}{x}=\frac{ab+bc-ca}{2abc},\qquad \frac{1}{y}=\frac{bc+ca-ab}{2abc}.$$

故ニ求ムル答ハ $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及ビ

$$x=\frac{2abc}{ab+bc-ca},\qquad y=\frac{2abc}{bc+ca-ab},\qquad z=\frac{2abc}{ca+ab-bc}$$ ノ二組ナリ.

8. 次ノ方程式ヲ解ケ(32年海軍兵).

〔a〕 $\frac{a^2}{yz}+\frac{b^2}{zx}=1,\quad \frac{b^2}{zx}+\frac{c^2}{xy}=1,\quad \frac{c^2}{xy}+\frac{a^2}{yz}=1$

〔b〕 $3x=\frac{y}{z}+\frac{z}{y},\quad 4y=\frac{z}{x}+\frac{x}{z},\quad 5z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

解 〔a〕 三ツノ方程式ヲ加フレバ

$$2\left(\frac{a^2}{yz}+\frac{b^2}{zx}+\frac{c^2}{xy}\right)=3 \qquad \therefore \quad \frac{a^2}{yz}+\frac{b^2}{zx}+\frac{c^2}{xy}=\frac{3}{2}$$

此兩邊ヨリ順次ニ與ヘラレタル方程式ノ兩邊ヲ引ケバ

$$\frac{c^2}{xy}=\frac{1}{2}\cdots\cdots(1) \qquad \frac{a^2}{yz}=\frac{1}{2}\cdots\cdots(2) \qquad \frac{b^2}{zx}=\frac{1}{2}\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times(2)\div(3)$ $\quad \frac{a^2c^2}{b^2y^2}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad y^2=\frac{2a^2c^2}{b^2} \quad \therefore \quad y=\pm\frac{\sqrt{2}\,ac}{b}$

$(2)\times(3)\div(1)$ $\quad \frac{a^2b^2}{c^2z^2}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad z^2=\frac{2a^2b^2}{c^2} \quad \therefore \quad z=\pm\frac{\sqrt{2}\,ab}{c}$

$(3)\times(1)\div(2)$ $\quad \frac{b^2c^2}{a^2x^2}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad x^2=\frac{2b^2c^2}{a^2} \quad \therefore \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}\,bc}{a}$

此 x, y, z ノ値ノ内,正ハ正斗リ,負ハ負斗リ取ルベキコトハ方程式(1)(2),(3)ニ依リテ明カナリ. 故ニ〔a〕ノ答ハ次ノ二組ナリ.

$$x=\frac{\sqrt{2}\,bc}{a},\quad y=\frac{\sqrt{2}\,ca}{b},\quad z=\frac{\sqrt{2}\,ab}{b};\quad 及 \quad x=-\frac{\sqrt{2}\,bc}{a},\quad y=-\frac{\sqrt{2}\,ca}{b},\quad z=-\frac{\sqrt{2}\,ab}{c}$$

〔b〕 先ヅ x, y, z ハ何レモ0タル能ハザルコトニ注意スベシ. ソコデ與ヘラレタル方程式ノ各ニ夫夫0ニアラザル, yz, zx, xy ヲ掛クレバ次ノ方程式ヲ得.

$$3xyz=y^2+z^2\cdots\cdots(1) \qquad 4xyz=z^2+x^2\cdots\cdots(2) \qquad 5xyz=x^2+y^2\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times4-(2)\times3,\quad 0=4y^2+z^2-3x^2 \quad \therefore \quad 3x^2-4y^2-z^2=0\cdots\cdots(4)$

$(1)\times5-(3)\times3,\quad 0=2y^2+5z^2-3x^2 \quad \therefore \quad 3x^2-2y^2-5z^2=0\cdots\cdots(5)$

$(4)-(5)\quad -2y^2+4z^2=0 \quad \therefore \quad y^2=2z^2\cdots\cdots(6)$

之ヲ(4)ニ代用スレバ $3x^2-8z^2-z^2=0 \quad \therefore \quad x^2=3z^2\cdots\cdots(7)$

(6)ヨリ $\frac{y^2}{z^2}=2 \quad \therefore \quad \frac{y}{z}=\sqrt{2}\cdots\cdots(8)$ 又ハ $\frac{y}{z}=-\sqrt{2}\cdots\cdots(9)$

$\frac{y}{z}=\sqrt{2}$ ナルトキハ $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=3x \quad \therefore \quad x=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

之ヲ(7)ニ代用スレバ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=3z^2 \quad \therefore \quad \frac{1}{6}=z^2 \quad \therefore \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ(8)ヨリ $\quad y=\sqrt{2}z=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ(8)ヨリ $\quad y=-\sqrt{2}z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

因テ $\frac{y}{z}=\sqrt{2}$ ナルトキハ次ノ二組ノ答ヲ得.

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad 及ビ \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad z=-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdots\cdots(A)$$

次ニ $\frac{y}{z}=-\sqrt{2}$ ナルトキハ $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=3x$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

之ヲ(7)ニ代用スレバ前ト同ジク $z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ヲ得.

$z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ(9)ヨリ $\quad y=-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ(9)ヨリ $\quad y=-\sqrt{2}\times-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

因テ $\frac{y}{z}=-\sqrt{2}$ ナルトキハ次ノ二組ノ答ヲ得

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad 及ビ \quad x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdots(B)$$

即チ求ムル答ハ(A),(B)ニテ示セル四組ナリ.

9. 次ノ方程式ヲ解ケ(31年海軍兵).

$$x^2+y^2+z^2=30,\quad x+y+z=8,\quad xy=10$$

解 第三方程式ノ兩邊ニ2ヲ掛ケテ得ル方程式ト第一方程式トヲ邊邊相加フレバ

$$x^2+2xy+y^2+z^2=30+20 \qquad \therefore \quad (x+y)^2+z^2=50\cdots\cdots(1)$$

然ルニ第二方程式ヨリ $\quad x+y=8-z \quad$ 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$(8-z)^2+z^2=50 \quad \therefore \quad 2z^2-16z+14=0 \quad \therefore \quad z^2-8z+7=0$$

$$\therefore \quad (z-1)(z-7)=0 \quad \therefore \quad z=1 \quad 又ハ \quad z=7$$

$z=1$ ナルトキハ $\quad x+y=8-z=7 \quad$ 然ルニ $\quad xy=10$

$\therefore\ x=2,\ y=5$ 又ハ $x=5,\ y=2$. 故ニ $z=1$ ナルトキハ次ノ二組ノ答ヲ得.

$x=2,\ y=5,\ z=1$ 及ビ $x=5,\ y=2,\ z=1$ ……………………(A)

又 $z=7$ ナルトキハ $x+y=8-z=1$ 然ルニ $xy=10$

$\therefore$ x, y ハ $u^2-u+10=0$ ノ根ナリ.

然ルニ $$u=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times10}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$$

故ニ $z=7$ ナルトキハ次ノ二組ノ答ヲ得.

$$x=\frac{1+\sqrt{41}}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{41}}{2},\ z=7 \text{ 及ビ } x=\frac{1-\sqrt{41}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{41}}{2},\ z=7 \cdots\text{(B)}$$

因テ求ムル答ハ(A),(B)ニテ示セル四組ナリ.

10. 下ノ方程式ヲ解セヨ(43年神戸高等商業).

$$x-y-z=2,\quad x^2+y^2-z^2=28,\quad xy=6$$

解 與ヘラレタル三ツノ方程式ヲ順次ニ(1),(2),(3)ト名ヅケン. サテ (2)−(3)×2, $x^2-2xy+y^2-z^2=28-6\times2$ $\therefore$ $(x-y)^2-z^2=16$

$$\therefore\qquad (x-y+z)(x-y-z)=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4)÷(1), $$x-y+z=8\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(5)−(1) $2z=6$ $\therefore$ $z=3$ 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$x-y-3=2$ $\therefore$ $x-y=5$ 然ルニ $xy=6$

$\therefore$ $x=6,\ y=1$ 或ハ $x=-1,\ y=-6$

因テ求ムル答ハ $x=6,\ y=1,\ z=3$ 又ハ $x=-1,\ y=-6,\ z=3$ ナリ.

11. 下ノ聯立方程式ヲ解ケ(43年海軍機關).

$$x-y=1,\quad x^2+y^2+z^2=5,\quad yz-zx+xy=2$$

解 與ヘラレタル三ツノ方程式ヲ順次ニ(1),(2),(3)ト名ヅケン. サテ(2)−(3)×2, $x^2+y^2+z^2-2yz+2zx-2xy=5-4$

即チ $(x-y+z)^2=1$ $\therefore$ $x-y+z=\pm1$

$x-y+z=1$ ナルトキハ(1)ニ依リテ $1+z=1$ $\therefore$ $z=0$

之ヲ(3)ニ代用スレバ $xy=2$ 然ルニ $x-y=1$

$\therefore$ $x=2,\ y=1$ 又ハ $x=-1,\ y=-2$

又 $x-y+z=-1$ ナルトキハ(1)ニ依リテ $1+z=-1$ $\therefore$ $z=-2$

之ヲ(3)ニ代用スレバ $xy=0$, 9 然ルニ $x-y=1$

$\therefore$ $x=1,\ y=0$ 又ハ $x=0,\ y=-1$

因テ求ムル答ハ次ノ四組ナリ.

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\\z=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=-1\\y=-2\\z=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=1\\y=0\\z=-2\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=-1\\z=-2\end{matrix}\right\}$$

181. 二次方程式ノ解法ニ歸セシメ得ル應用問題解法ノ例

例 1. 呉服商アリ,或段物ヲ賣買シテ30圓ヨリハ買價ノ十分ノ一ダケ少ナキ利益ヲ得タリ,而シテ其利益ハ又買價50圓毎ニ買價ノ五分ノ一ノ利益ヲ得タルコトニ當ルトイフ,其段物ノ買價如何.

其段物ノ買價ヲ x 圓トスレバ,其十分ノ一ハ $\frac{x}{10}$ 圓ナリ,故ニ利益ハ $\left(30-\frac{x}{10}\right)$ 圓ナリ.

又買價ハ50圓ノ(x圓÷50圓)倍 $=\frac{x}{50}$ 倍ナリ,而シテ50圓毎ニ $\frac{x}{5}$ 圓ノ利益ヲ得レバ全體ノ利益ハ

$$\frac{x}{5}\text{圓}\times\frac{x}{50}=\frac{x^2}{250}\text{圓ナリ.}$$

$$\therefore\qquad \frac{x^2}{250}=30-\frac{x}{10}$$

兩邊ニ250ヲ掛クレバ $x^2=7500-25x$

$$\therefore\qquad x^2+25x-7500=0$$

$$\therefore\qquad (x+100)(x-75)=0$$

$$\therefore\qquad x=-100 \quad \text{或ハ} \quad x=75$$

然ルニ買價ノ圓ノ數ハ正ノ數ナラザルベカラズ.

故ニ $x=75$ 即チ求ムル所ノ價ハ七十五圓ナリ.

$\boxed{\text{注意}}$ 本例ニ於テハ方程式ノ根ハ二ツニシテ問題ニ適スルハ其内ノ只一ツナリ,コレ應用問題ノ答ニハ一般ニ種々ノ制限(例ヘバ正ノ數ナラザルベカラザル事ヤ整數ナラザルベカラザル事ヤノ如シ)アルニ反シ方程式ノ根ニハ何等ノ制限ナキニヨル. 故ニ方程式ヲ利用シテ應用問題ヲ解キタル場合ニハ其方程式ノ根ガ果シテヨク問題ノ答タリ得ルヤ否ヤヲ檢査シ適セザルモノアラバ之ヲ棄ツベキモノナルコトヲ忘ルベカラズ.

例 2. 110哩距タレル甲乙兩市間ヲ往復スル人アリ,歸路ニハ往路ヨリ毎時ノ速サヲ $\frac{1}{4}$ 哩ダケ減ジタルタメ4時間永クカヽレリトイフ. 往路ノ速サ毎時何哩ナルカ.

往路ノ速サヲ毎時 x 哩トスレバ往キニ要セシ時間ハ $\frac{110}{x}$ 時ナリ. 又歸路ノ速サハ毎時 $\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 哩ナルヲ以テ歸リニ要セシ時間ハ $\frac{110}{x-\frac{1}{4}}$ 時ナリ. 然ルニ歸路ハ往路ヨリ4時間永クカヽリタリトイフヲ以テ

$$\frac{110}{x-\frac{1}{4}}-\frac{110}{x}=4$$

$$\therefore\quad 110\left(x-x+\frac{1}{4}\right)=4x\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{55}{2}=4x^2-x$$

$$\therefore\quad 8x^2-2x-55=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+8\times55}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{441}}{8}=\frac{1\pm21}{8}$$

然ルニ $x>0$ ナラザルベカラズ,

$$\therefore\quad x=\frac{1+21}{8}=\frac{22}{8}=2\frac{3}{4}$$

即チ往路ノ速サハ毎時 $2\frac{3}{4}$ 哩ナリ.

例 3. 或人汽車ニテ56哩旅行シテ甲驛ニ着キソレヨリ馬車ニテ歸宅セリ,而シテ其馬車ガ5哩進ム間ニ汽車ハ此人ノ全旅程ノ四分ノ一ヲ進ミ得ベク,此人ガ甲驛ヨリ自宅ニ到着セルマデニ汽車ハソレヨリモ35哩ダケ多ク進ミ得ベシトイフ. 甲驛ヨリ其人ノ家マデノ距離如何.

求ムル所ノ距離ヲ x 哩トスレバ,此人ノ全旅程ハ $(56+x)$ 哩ナリ.故ニ馬車ガ5哩進ム間ニハ汽車ハ $\frac{56+x}{4}$ 哩進ムヲ以テ馬車ガ x 哩 $\left(5\text{ 哩ノ }\frac{x}{5}\text{ 倍}\right)$ 進ム間ニ汽車ハ $\frac{56+x}{4}\times\frac{x}{5}$ 哩ダケ進ムベシ. 然ルニ馬車ガ x 哩進ム間ニ汽車ハ $(x+35)$ 哩進ミタリトイフヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{56+x}{4}\times\frac{x}{5}=x+35$$

$$\therefore\quad x(56+x)=20(x+35)$$

$$\therefore\quad x^2+36x-700=0$$

$$\therefore\quad (x+50)(x-14)=0$$

$$\therefore\quad x=-50\quad \text{又ハ}\quad x=14$$

然ルニxハ正ナラザルベカラズ,故ニ $x=14$. 即チ求ムル所ノ答ハ14哩ナリ.

例4. 或車ガ一哩進ム間ニ其前輪ハ後輪ヨリ88回多ク廻轉セリ. 若シ後輪ノ周圍ヲ18吋增シタランニハ一哩進ム間ニ前輪ハ後輪ヨリ120回多ク廻轉スベシトイフ. 此車ノ前輪及後輪ノ周圍各幾何ナルカ.

前輪ノ周圍ヲx呎,後輪ノ周圍ヲy呎トセヨ. サスレバ1哩即チ5280呎進ム間ニ各ガ廻轉スル數ハ夫々 $\frac{5280}{x}$, $\frac{5280}{y}$ ナリ.

$$\frac{5280}{x}-\frac{5280}{y}=88$$

$$\therefore\quad \frac{60}{x}-\frac{60}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣ニ今一ツノ次ノ方程式ヲ得 $\left(\because\ 18\text{吋}=1\frac{1}{2}\text{呎}\right)$

$$\frac{5280}{x}-\frac{5280}{y+1\frac{1}{2}}=120$$

$$\therefore\quad \frac{44}{x}-\frac{88}{2y+3}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)\times 11-(2)\times 15,\qquad -\frac{660}{y}+\frac{1320}{2y+3}=-4$$

$$\therefore\quad -165(2y+3)+330y=-y(2y+3)$$

$$\therefore\quad 2y^2+3y-495=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{-3\pm\sqrt{9+8\times 495}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{3969}}{4}=\frac{-3\pm 63}{4}$$

然ルニyハ正ナラザルベカラズ.

$$\therefore\quad y=\frac{-3+63}{4}=\frac{60}{4}=15$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{15}=1$$

$$\therefore\quad \frac{60}{x}=1+4=5\qquad \therefore\quad x=12$$

即チ前輪ハ12呎,後輪ハ15呎ナリ.

例5. 或人若干哩ノ旅行ヲナスニ當リ先ヅ40哩旅行シタル後一時間ノ速サヲ2哩增シテ旅行セリ,若シ最初ヨリ2哩增シタル速サト同ジ速サニテ進ミタランニハ40分間早ク到着スベク,之ニ反シテ全距離ヲ最初ノ速サニテ進ミタランニハ20分間遲ク到着スベカリシナラントイフ. 此人ガ旅行シタル全距離及ビ最初ノ速サヲ求ム.

全距離ヲx哩トシ最初ノ速サヲ毎時y哩トセヨ. サスレバ40哩ダケヲ毎時y哩ノ速サニテ進ミ,殘リ$(x-40)$哩ダケヲ毎時$(y+2)$哩ノ速サニテ進メバ之ニ要スル時間ハ $\left(\frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}\right)$ 時間ニシテ,此時間ハ全距離x哩ヲ毎時$(y+2)$哩ノ速サニテ進ムニ要スル時間 $\frac{x}{y+2}$時間ヨリ40分間即チ$\frac{40}{60}$時間即チ$\frac{2}{3}$時間多シ.

$$\therefore\quad \frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}=\frac{x}{y+2}+\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{40}{y}-\frac{40}{y+2}=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又此旅行ニ要シタル時間ハ全距離x哩ヲ毎時y哩

ノ速サニテ進ムニ要スル時間即チ $\frac{x}{y}$ 時間ヨリ20分間即チ $\frac{20}{60}$ 時間即チ $\frac{1}{3}$ 時間少ナシ.

$$\therefore \quad \frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}=\frac{x}{y}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{x-40}{y+2}=\frac{x-40}{y}-\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)ヨリ $\quad 60(y+2)-60y=y(y+2)$

$$\therefore \quad y^2+2y-120=0$$

$$\therefore \quad (y+12)(y-10)=0$$

$$\therefore \quad y=-12 \quad \text{又ハ} \quad y=10$$

然ルニ y ハ正ナラザルベカラズ,故ニ $y=10$

之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{x-40}{12}=\frac{x-40}{10}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad 5(x-40)=6(x-40)-20$$

$$\therefore \quad 5x-6x=200-240-20=-60$$

$$\therefore \quad x=60$$

即チ全距離ハ60哩,毎時ノ速サハ10哩ナリ.

例6. 或山ニ登ル人ガ中腹ヨリ頂上ニ至ルマデノ速サヲバ麓ヨリ中腹ニ達スルマデノ速サヨリ一時間ニツキ半哩減シタルニ麓ヨリ頂上ニ達スルマデニ5時間半ヲ費セリ. 下山ノ時ハ麓ヨリ中腹マデ登リタルトキノ速サヨリモ毎時1哩増シタル速サニテ通シテ歩キタルニ3時45分ニテ麓ニ達セリトイフ. 麓ヨリ頂上マデノ距離ヲ求ム.

麓ヨリ頂上マデノ距離ヲ $2x$ 哩トシ麓ヨリ中腹マデノ登リノ速サヲ毎時 y 哩トスレバ麓ヨリ中腹マデ登ルニハ $\frac{x}{y}$ 時間ヲ要シ,中腹ヨリ頂上マデ登ルニハ $\frac{x}{y-\frac{1}{2}}$ 時間 $=\frac{2x}{2y-1}$ 時間ヲ要ス.

$$\therefore \quad \frac{x}{y}+\frac{2x}{2y-1}=5\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又下山ハ全距離 $2x$ 哩ヲ通シテ $(y+1)$ 哩ノ速サニテ歩キタルヲ以テ

$$\frac{2x}{y+1}=3\frac{45}{60} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)ヨリ $\quad 2x=3\frac{3}{4}(y+1)=\frac{15}{4}(y+1) \cdots\cdots (3)$

又(1)ヨリ $\quad x\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{2y-1}\right)=\frac{11}{2}$

$$\therefore \quad 2x(2y-1+2y)=11y(2y-1)$$

$$\therefore \quad 2x(4y-1)=11y(2y-1)$$

(3)ノ $2x$ ノ値ヲ此方程式ニ代用スレバ

$$\frac{15}{4}(y+1)(4y-1)=11y(2y-1)$$

$$\therefore \quad 15(y+1)(4y-1)=44y(2y-1)$$

$$\therefore \quad 60y^2+45y-15=88y^2-44y$$

$$\therefore \quad 28y^2-89y+15=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{89\pm\sqrt{89^2-4\times 28\times 15}}{56}=\frac{89\pm\sqrt{6241}}{56}=\frac{89\pm 79}{56}$$

$$\therefore \quad y=\frac{89+79}{56}=3 \quad \text{又ハ} \quad y=\frac{89-79}{56}=\frac{5}{28}$$

然ルニ y ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大ナラザルベカラズ. 故ニ $y=3$

又之ヲ(3)ニ代用スレバ

$$2x=\frac{15}{4}(3+1)=15$$

即チ麓ヨリ頂上マデノ距離ハ15哩ナリ.

例7. 直角三角形アリ,其直角ヲ夾ム二邊ノ長サノ和ハ斜邊ノ長サヨリモ4寸長ク,面積ハ30平方寸ナリトイフ. 各邊ノ長サヲ求ム.

直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲx寸,y寸($x \nless y$トス)トシ,斜邊ノ長サヲz寸トセヨ. サスレバ題意ニヨリテ

$$x+y=z+4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$xy=30\times2=60 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又直角三角形ノ性質ニヨリテ

$$x^2+y^2=z^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(3)+(2)\times2,\qquad x^2+2xy+y^2=z^2+120$$

$$\therefore\qquad (x+y)^2=z^2+120$$

此方程式ニ(1)ノ$x+y$ノ値ヲ代用スレバ

$$(z+4)^2=z^2+120$$

$$\therefore\qquad z^2+8z+16=z^2+120$$

$$\therefore\qquad 8z=104\qquad\therefore\qquad z=13$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$x+y=17 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2)ト(4)トヨリx,yヲ求ムレバ($x \nless y$ナルニ依リ)

$x=12,\ y=5$ ヲ得.

故ニ求ムル所ノ長サハ13寸,12寸,5寸ナリ.

182. 一元二次方程式ノ解法ニ歸セシメ得ル應用問題雜題

1. 一書生ニ其年齡幾何ナルカヲ問ヒシニ答ヘテ吾年齡ノ二乘ハ五年前ノ年齡ト八年後ノ年齡トノ相乘ノ七分ノ六ヨリ三十七多シト云ヘリ,然ラバ此書生ノ年齡幾何(32年,海軍機關).

解 此書生ノ齡サx歲トスレバ五年前ノ年齡ハ$(x-5)$歲ニシテ八年後ノ年齡ハ$(x+8)$歲ナリ. サテ題意ニヨレバ

$$x^2=\frac{6}{7}(x-5)(x+8)+37.\qquad\therefore\qquad 7x^2=6(x-5)(x+8)+259$$

$$\therefore\qquad 7x^2=6x^2+18x-240+259\qquad\therefore\qquad x^2-18x-19=0$$

$$\therefore\qquad (x-19)(x+1)=0\qquad\therefore\qquad x=19\quad 又ハ\quad x=-1$$

然ルニ年齡ハ正ノ數ナラザルベカラズ,故ニ答 19歲.

2. 直角三角形ノ三邊ガ遞次ニ三寸ヲ以テ減ズルトキハ其三邊各如何(33年,海軍機關).

解 斜邊ノ長サヲx寸トスレバ他ノ二邊ハ$(x-3)$寸及ビ$(x-3)$寸-3寸$=(x-6)$寸ナリ.

$$x^2=(x-3)^2+(x-6)^2\qquad\therefore\qquad x^2=2x^2-18x+45$$

$$\therefore\qquad x^2-18x+45=0\qquad\therefore\qquad (x-15)(x-3)=0$$

$$\therefore\qquad x=15\quad 又ハ\quad x=3$$

然ルニ斜邊ハ6寸ヨリ長カラザルベカラズ.

故ニ答ハ15寸,12寸,9寸ナリ.

3. 正方形ナル兩地所アリ,其一邊ノ差二間ナリ;今各地所ニ方一尺ノ石ヲ布カバ敷石ノ數ノ和二千百二十枚ヲ要ストイフ;兩地ノ各邊ノ長サ如何(36年,農科大

學資料).

解　大ナル方ノ地面ノ一邊ノ長サヲ x 間トスレバ小ナル方ノ地面ノ一邊ノ長ハ $(x-2)$ 間ナルヲ以テ其面積ノ和ハ $x^2+(x-2)^2$ 坪即チ $36[x^2+(x-2)^2]$ 平方尺ナリ.

$\therefore\ 36[x^2+(x-2)^2]=2120 \qquad \therefore\ 9(2x^2-4x+4)=530$

$\therefore\ 9x^2-18x+18=265 \qquad \therefore\ 9x^2-18x-247=0$

$\therefore\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{9^2+9\times247}}{9}=\dfrac{9\pm\sqrt{9\times256}}{9}=\dfrac{9\pm3\times16}{9}=\dfrac{3\pm16}{3}$

然ルニ x ハ正ナラザルベカラズ　$\therefore\ x=\dfrac{3+16}{3}=\dfrac{19}{3}=6\dfrac{1}{3}$

從テ　$x-2=4\dfrac{1}{3}$　∴ 答ハ大ナル方 $6\dfrac{1}{3}$ 間,小ナル方 $4\dfrac{1}{3}$ 間

4.　側面ハ前列ヨリ14人多キ行列ニテ進軍セル一隊敵前ニ達スルニ及ビ展開シテ前列ニ828人ヲ增シタル爲メニ側面人數5人トナレリト云フ;此ノ隊ノ兵員幾何ナルカ(32年,海軍機關).

解　最初ノ前列ノ人數ヲ x トスレバ側面ハ $(x+14)$ ナルヲ以テ其人數ハ $x(x+14)$ 人ナリ.　サテ前列ガ $(x+828)$ 人ナルトキ側面ハ5人トナルヲ以テ其人數ハ $5(x+828)$ 人ニ等シ.

$\therefore\ x(x+14)=5(x+828) \qquad \therefore\ x^2$ [illegible] $-4140=0$

$\therefore\ (x-60)(x+69)=0 \qquad \therefore\ x=60$　又ハ　$x=-69$

然ルニ人數ハ正ノ數ナルベキヲ以テ $x=60$　答 60人

5.　或ル人長方形ノ地面ヲ有ス,其面積五反五畝六步ニシテ兩邊ノ和ハ八十二間ナリト云フ,兩邊ノ長サ各幾何ナルカ(39年,農科大學實科).

解　一邊ノ長サヲ x 間トスレバ他邊ノ長サハ $(82-x)$ 間ナリ,故ニ其面積ハ $x(82-x)$ 步ナリ,コレガ 55畝6步 $=(55\times30+6)$ 步 $=1656$ 步ニ等シキヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$x(82-x)=1656 \qquad \therefore\ x^2-82x+1656=0$

$\therefore\ x=41\pm\sqrt{41^2-1656}=41\pm\sqrt{25}=41\pm5 \qquad \therefore\ x=46$　又ハ　$x=36$

從テ　$82-x=82-46=36$　又ハ　$82-x=82-36=46$

故ニ求ムル長サハ46間及36間ナリ.

6.　兵卒若干人ヲ方陣ニ列スルアリ,若シ之ヲ各面四列ノ中空方陣ニ直セバ其外側一邊ノ人數ハ前ノ方陣ノ外側一邊ノ人數ヨリモ十六人多カルベシトイフ,兵卒ノ人數ハ幾何(43年,陸軍主計候補生).

解　最初ノ方陣ノ一邊ノ人數ヲ x トスレバ總人數ハ x^2 ナリ,サテ中空ノ方陣ニ於テハ厚サヲ外側ヨリ一列減ズル每ニ一邊ノ人數ハ2ツツ減ズルヲ以テ前面一列ノ人數 $(x+16)$ ナル各面四列ノ中空方陣ヲ作リ得ル人數ハ

$$(x+16)^2-(x+16-2\times4)^2=(x+16)^2-(x+8)^2 \text{ ナリ.}$$

$\therefore\ x^2=(x+16)^2-(x+8)^2 \qquad \therefore\ x^2=x^2+32x+256-x^2-16x-64$

$\therefore\ x^2-16x-192=0 \qquad \therefore\ x=8\pm\sqrt{8^2+192}=8\pm\sqrt{256}=8\pm16$

然ルニ x ハ正ナルベキヲ以テ $x=8+16=24$, 從テ求ムル人數ハ $x^2=576$　答 576人

7.　金三千圓ヲ或銀行ニ預ケ置キシニ一年後利率五厘ヲ增加シ二年後ノ元利合計三千四百五十圓七十五錢トナレリトイフ,初年ノ利率幾何ナリシカ(31年,東京高等工業).

解　最初ノ利率ヲ x トスレバ一年後ノ利率ハ $x+0.005$ ナリ.サテ第一年末ノ元利合計ハ $3000^{円}\times(1+x)$ ニシテ第二年末ノ元利合計ハ $3000^{円}\times(1+x)\times(1+x+0.005)$ ナリ.

$\therefore \quad 3000(1+x)(1+x+0.005)=3450.75$

サテ $\quad 3000(1+x+0.005)=3(1000+1000x+5)=3(1000x+1005)$

$\therefore \quad 3(1+x)(1000x+1005)=3450.75 \qquad \therefore \quad (1+x)(1000x+1005)=1150.25$

$\therefore \quad 1000x^2+2005x+1005=1150.25 \qquad \therefore \quad 1000x^2+2005x-145.25=0$

$\therefore \quad 200x^2+401x-29.05=0$

$\therefore \quad x=\frac{-401\pm\sqrt{401^2+4\times200\times29.05}}{400}=\frac{-401\pm\sqrt{184041}}{400}=\frac{-401\pm429}{400}$

然ルニxハ正ナルベキヲ以テ $\qquad x=\frac{-401+429}{400}=\frac{28}{400}=0.07$

因テ求ムル利率ハ7分ナリ.

8. 或人年利若干分ニテ金四百圓ヲ銀行ニ預ケ入レ每年末ニ其時受取ルベキ利息ノ外ニ金百圓ヲ元金ニ加ヘ行キタルニ第三年ノ始メニ當リ金六百四十六圓ノ預金ヲ有セリト云フ;年利率何程ナルカ(35年,東京高等師範).

解 年利率ヲxトスレバ最初預ケ入レタル金ハ第一年末ニハ $400(1+x)$圓トナルヲ以テ第二年ノ初メノ預金ハ
$[400(1+x)+100]^{圓}=100(5+4x)^{圓}$ナリ,同理ニテ第三年ノ初メノ預金ハ
$\{100(5+4x)\times(1+x)+100\}^{圓}$ ナリ.

$\therefore \quad 100(5+4x)\times(1+x)+100=646 \qquad \therefore \quad (5+4x)(1+x)+1=6.46$

$\therefore \quad 4x^2+9x+6=6.46 \qquad \therefore \quad 4x^2+9x-0.46=0$

$\therefore \quad x=\frac{-9\pm\sqrt{81+4\times4\times0.46}}{8}=\frac{-9\pm\sqrt{88.36}}{8}=\frac{-9\pm9.4}{8}$

然ルニ$x>0$ナルベキヲ以テ $\qquad x=\frac{-9+9.4}{8}=\frac{0.4}{8}=0.05$ $\quad$ 答 5分

9. 甲乙兩軍艦同時ニ同港ヲ發シ九百海里ヲ隔ツル某港ニ航セシニ甲ハ乙ヨリ十時間前ニ到着セリト云フ. 但シ甲一時間ノ速度ハ乙ノヨリ一海里多シ,此

兩艦ノ速度如何(31年,海軍兵).

解 甲艦ノ速度ヲ每時x節トスレバ乙艦ノハ每時$(x-1)$節ナ,故ニ900海里ヲ航スルニ要スル時間ハ夫夫$\frac{900}{x}$時間及$\frac{900}{x-1}$時間ナリ,然ルニ其差ハ10時間ナルヲ以テ

$\frac{900}{x-1}-\frac{900}{x}=10 \qquad \therefore \quad 90x-90(x-1)=x(x-1)$

$\therefore \quad x^2-x-90=0 \qquad \therefore \quad (x-10)(x+9)=0 \qquad \therefore \quad x=10$ 又ハ $x=-9$

然ルニxハ正ナラザルベカラズ. 故ニ $x=10$ 從テ $x-1=9$

答 甲,每時10節, 乙,每時9節

10. 甲乙二列車アリ,三十六哩ノ鐵道線路ヲ直行スルニ,甲ハ乙ヨリ每時十五哩速キヲ以テ,其ノ終點ニ達スルハ乙ノ之ニ達スル時間ヨリモ十二分少ナシト云フ;各列車每時ノ速サ如何(25年,大阪高等工業).

解 甲列車ノ每時ノ行程ヲx哩トスレバ乙列車ノハ$(x-15)$哩ナリ,ソコデ前題ノ解ト同樣ニ次ノ方程式ヲ得(左邊ハ時ノ數ナルユヱ,右邊モ12分ヲ時ヲ單位トシテ表シタルコトニ注意スベシ).

$\frac{36}{x-15}-\frac{36}{x}=\frac{12}{60} \qquad \therefore \quad \frac{3}{x-15}-\frac{3}{x}=\frac{1}{60}$

$\therefore \quad 180x-180(x-15)=x(x-15) \qquad \therefore \quad x^2-15x-180\times15=0$

$\therefore \quad x=\frac{15\pm\sqrt{15^2+4\times180\times15}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{15^2+15^2\times48}}{2}$

$=\frac{15\pm\sqrt{15^2\times7^2}}{2}=\frac{15\pm15\times7}{2}$

然ルニxハ正ナルベキヲ以テ $\qquad x=\frac{15+15\times7}{2}=\frac{15\times8}{2}=60$

從テ $\quad x-15=60-15=45 \qquad$ 答 甲,每時60哩; 乙,每時45哩

11. 或人若干ノ土地ヲ地代百四十四圓ニテ借受ケ其内八段ヲ自家用ニ供シ,其殘リヲ自己ノ借貸ヨリ一段ニツキ貳拾錢宛高ク他人ニ轉貸シタルニ依リ其貸

貸ヲ以テ丁度地主ニ全クノ地代ヲ拂ヒ得タリ．此人ノ借リシ總段別如何(43年,第一乃至第六及第八高等)．

解　一段歩ノ借賃ヲx錢トスレバ貸賃ハ$(x+25)$錢ナリ,從テ借リタル段別ハ$\dfrac{14400}{x}$段ニシテ貸シタル段別ハ$\dfrac{14400}{x+25}$段ナリ,然ルニ借リタル方ガ貸シタル方ヨリ自家用ニ供シタルダケ多キヲ以テ

$$\frac{14400}{x}-\frac{14400}{x+25}=8 \qquad \therefore\ 1800(x+25)-1800x=x(x+25)$$

$$\therefore\ x^2+25x-45000=0 \qquad \therefore\ (x+225)(x-200)=0$$

然ルニxハ正ナルベキヲ以テ　$x=200$　卽チ一段歩ノ借賃ハ2圓ナリ．故ニ借リタル段數ハ144円÷2円=72ナリ．　答　7町2反歩

12.　或人陶器若干個ヲ二十七圓ニテ買ヒ一個ニ付キ五錢ノ利ヲ得テ賣リタレドモ四個破損シテ廢物トナリタルユヱ利益ハ僅ニ一圓ナリシト云フ,一個何程ニテ買ヒシヤ(31年,東京高等商業)．

解　買入直段ヲ1箇x錢トスレバ買入レタルハ(27円÷x錢)箇卽チ$\dfrac{2700}{x}$箇ナリ．又賣上金高ハ27円+1円=28円ニシテ賣値段ハ一箇$(x+5)$錢ナルヲ以テ賣リタル數ハ$\dfrac{2800}{x+5}$箇ナリ,而シテコレハ買入レタル箇數ヨリ4箇少ナキヲ以テ

$$\frac{2700}{x}-\frac{2800}{x+5}=4 \qquad 2700(x+5)-2800x=4x(x+5)$$

$$\therefore\ 2700x+13500-2800x=4x^2+20x \qquad \therefore\ 4x^2+120x-13500=0$$

$$\therefore\ x^2+30x-3375=0 \quad \therefore\ (x-45)(x+75)=0 \quad \therefore\ x=45\ 又ハ\ x=-75$$

然ルニxハ正ナラザルベカラズ．　$\therefore\ x=45$　答　45錢

13.　或人七千五百圓ニテ株券若干ヲ買ヒ其後相場ガ一株ニツキ二十五圓ヅツ上リシトキ二十株ダケ殘シ其餘ヲ賣リ拂ヒテ八千圓ヲ得タリ,買入レタル株數ヲ求メヨ(41年,專門學校入學者檢定)．

解　一株ノ買入直段ヲx圓トスレバ其賣却直段ハ$(x+25)$圓ナルヲ以テ,買入株數及賣却株數ハ夫夫$\dfrac{7500}{x}$及ビ$\dfrac{8000}{x+25}$ナリ。

$$\therefore\ \frac{7500}{x}-\frac{8000}{x+25}=20 \qquad \therefore\ 375(x+25)-400x=x(x+25)$$

$$\therefore\ x^2+50x-9375=0 \quad \therefore\ (x-75)(x+125)=0 \quad \therefore\ x=75\ 又ハ\ x=-125$$

然ルニxハ正ナラザルベカラズ．　$\therefore\ x=75$　卽チ一株ノ買入直段ハ75圓ナリ,從テ買入株數ハ7500円÷75円=100ナリ。　答　100株

14.　甲乙二人ノ職工或ル仕事ヲナスニ,二人同時ニ働ケバ$1\frac{1}{3}$日ニテ成シ甲ノミ働ケバ乙ノミ働クヨリハ2日早ク成ルト云フ;若シ,一人ニテ働カバ各幾日ヲ要スベキカ(37年,東京高等工業)．

解　甲一人ニテx日カヽルトスレバ,乙一人ニテハ$(x+2)$日カヽル．サテ此仕事ノ分量ヲ單位ニ取レバ,甲ハ一日ニハ$\dfrac{1}{x}$ヲナシ,乙ハ$\dfrac{1}{x+2}$ヲナシ,兩人ニテハ$\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$ヲナス。

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ 4(x+2)+4x=3x(x+2)$$

$$\therefore\ 3x^2-2x-8=0 \quad \therefore\ (x-2)(3x+4)=0 \quad \therefore\ x=2\ 又ハ\ x=-\frac{4}{3}$$

xハ正ナルベキヲ以テ　$x=2$,　從テ　$x+2=4$　答　甲2日,乙4日

15.　一事業アリ,之ヲ甲乙二人ノ職工ニテナサシメバ甲一人ニテナスヨリハ12日早ク,乙一人ニテナスヨリハ27日早ク成就スベシト云フ,二人ニテハ幾日ニ成就スルカ(41年,金澤醫學專門)．

解　兩人ニテx日ヲ要ストスレバ,甲一人ニテハ$(x+12)$日,乙一人ニテハ$(x+27)$日ヲ要ス．ソコデ此仕事ノ分量ヲ單位ニ取リ兩人ニテ一日ニ爲ス仕事ノ分量ヲ相等シトオケバ

$$\frac{1}{x+12}+\frac{1}{x+27}=\frac{1}{x} \qquad \therefore\ x(x+27)+x(x+12)=(x+12)(x+27)$$

$\therefore\ x^2+27x+x^2+12x=x^2+39x+324 \quad \therefore\ x^2=324 \quad \therefore\ x=\pm 18$

xハ正ナルベキヲ以テ　$x=18$　答 18日

16. 一時間ニ二哩ノ速サニテ流ルル川アリ,今端舟ニテ流レニ沿フテ三哩半ノ距離ヲ往復セシニ百分時ヲ費セリト云フ,若シ流レガ無カリセバ端舟ハ一時間幾哩ノ速サナルベキヤ(43年,水產講習所).

解　流レ無キトキノ端舟一時間ノ速サヲx哩トスレバ,此川ヲ上ル速サハ每時$(x-2)$哩ニシテ,下ル速サハ每時$(x+2)$哩ナリ.故ニ3.5哩ノ流レヲ上下スルニ要スル時間數ヲ相等シトオケバ

$$\frac{3.5}{x-2}+\frac{3.5}{x+2}=\frac{\overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{3}{\cancel{60}}} \qquad \therefore\ 10.5(x+2)+10.5(x-2)=5(x^2-4)$$

$\therefore\ 5x^2-21x-20=0 \quad \therefore\ (x-5)(5x+4)=0 \quad \therefore\ x=5$ 又ハ $x=-\frac{4}{5}$

然ルニxハ正ナルベキニヨリ　$x=5$　答 5~~時間~~ 哩

17. 酒ヲ充容セシ一樽アリ,此内ヨリ九斗ヲ出シ其代リニ水ヲ以テ充タシ又其内ヨリ九斗ヲ出シ前ノ如ク水ヲ以テ充タス時ハ樽中ノ酒ト水ノ量ノ比ハ十六ト九ナリト云フ,最初ノ樽中ノ酒ノ量幾何(42年,陸軍主計候補生).

解　最初ノ樽中ノ酒ノ量ヲx斗トセヨ.第一回ニ9斗ヲ出シタルヲ以テ其時ノ酒ト水ノ量ノ比ハ$(x-9):9$ナリ.故ニ第二回ニ9斗出セバ樽中ニ殘レル酒ノ量ハ

$$(x-9)\times\frac{x-9}{(x-9)+9}\text{斗}=\frac{(x-9)^2}{x}\text{斗}$$

ナリ.又此時樽中ニ殘レル水ノ量ハ

$$(x-9)\times\frac{9}{(x-9)+9}\text{斗}=\frac{9(x-9)}{x}\text{斗}$$

ナルヲ以テ,ソコヘ更ニ9斗ノ水ヲ加フレバ最後ニ樽中ニアル水ノ量ハ　$\left\{9+\frac{9(x-9)}{x}\right\}\text{斗}=\frac{9(2x-9)}{x}\text{斗}$ナリ.ソコデ酒ト水ノ量ノ比ハ

$\frac{(x-9)^2}{x}:\frac{9(2x-9)}{x}=\frac{(x-9)^2}{9(2x-9)}$　ナリ.

$$\therefore\ \frac{(x-9)^2}{9(2x-9)}=\frac{16}{9} \qquad \therefore\ (x-9)^2=16(2x-9)$$

$$\therefore\ x^2-18x+81=32x-144 \qquad \therefore\ x^2-50x+225=0$$

$$(x-5)(x-45)=0 \qquad \therefore\ x=5 \text{ 又ハ } x=45$$

然ルニ最初ノ樽中ノ酒ハ9斗ヨリ多キヲ以テxハ9ヨリ大ナラザルベカラズ,故ニ　$x=45$　答 4石5斗

18. 甲ハ十四哩ヲ距ツル或町ニ向フテ出發セル後乙ハ甲ニ用事アリ,甲ノ出發後四十分ヲ經テ甲ニ追ヒ付キタル後直ニ引返シテ出立地ニ着セルト同時ニ甲ハ其町ニ達セリ,乙ガ每時ノ速力ヲ四哩トセバ甲ノ速力ハ每時何程ナルカ(42年,山口高等商業).

解　甲ノ速サヲ每時x哩トスレバ40分間ニハ　x哩$\times\frac{40}{60}=\frac{2}{3}x$哩ヲ行クベシ,故ニ乙ガ出發シテヨリ出發點ニ歸ルマデニ甲ハ$\left(14-\frac{2}{3}x\right)$哩ダケ步リクコトヲ知ル,サテ乙ガ往復ニ要セシ時間ハ相等シキヲ以テ,乙ガ追付キタルハ甲ノ行カントスル目的地ノ手前　$\frac{1}{2}\left(14-\frac{2}{3}x\right)$哩$=\left(7-\frac{1}{3}x\right)$哩ノ所ナリ,從テ甲ガコレダケヲ步ク間ニ乙ハ14哩$-\left(7-\frac{1}{3}x\right)$哩$=\left(7+\frac{1}{3}x\right)$哩ダケ步ルキタルコトヲ知ル,ソコデ甲ガ追ヒ付カレタル時ヨリ甲ガ目的地ニ達スルマデノ時間ト,乙ガ出發地ニ歸リタルマデノ時間トヲ相等シトオケバ

$$\frac{7+\frac{1}{3}x}{4}=\frac{7-\frac{1}{3}x}{x} \qquad \therefore\ x\left(7+\frac{1}{3}x\right)=4\left(7-\frac{1}{3}x\right)$$

$$\therefore\ 7x+\frac{1}{3}x^2=28-\frac{4}{3}x \qquad \therefore\ 21x+x^2=84-4x$$

$$\therefore\ x^2+25x-84=0 \quad \therefore\ (x-3)(x+28)=0 \quad \therefore\ x=3 \text{ 又ハ } x=-28$$

然ルニxハ正ナラザルベカラズ,　$\therefore\ x=3$　答 3哩

19. 直角三角形ニテ直角ヲ夾ム二邊ノ長ノ差ハ5尺ニシテ,又其周圍ハ60尺ナリト云フ;此三邊ヲ問フ(34年,海軍機關).

解 直角ヲ夾ム二邊ノ内ノ小ナル邊ヲx尺トスレバ大ナル方ハ$(x+5)$尺ナリ,從テ斜邊ハ$\sqrt{x^2+(x+5)^2}$尺ナリ.

$\therefore\ x+(x+5)+\sqrt{x^2+(x+5)^2}=60$　　$\therefore\ \sqrt{x^2+(x+5)^2}=55-2x$

$\therefore\ x^2+(x+5)^2=(55-2x)^2$　　$\therefore\ x^2+x^2+10x+25=3025-220x+4x^2$

$\therefore\ 2x^2-230x+3000=0$　　$\therefore\ x^2-115x+1500=0$

$\therefore\ (x-100)(x-15)=0$　　$\therefore\ x=100$ 又ハ $x=15$

然ルニ $x=100$ ハ最初ノ方程式ニ適合セズ　$\therefore\ x=15$

從テ $x+5=20$　又 $60-20-15=25$　　答 15尺, 20尺, 25尺

183. 二元二次方程式ノ解法ニ歸セシメ得ル應用問題雜題

1. 和ハ5ニシテ立方ノ和ハ65ナル二數ヲ求ム(34年,海軍機關).

解 二數ヲx, yトスレバ次ノ方程式ヲ得.

$x+y=5$ ……………(1)　　$x^3+y^3=65$ ……………(2)

(1)ヨリ $y=5-x$, 故ニ(2)ヨリ $x^3+(5-x)^3=65$

$\therefore\ x^3+125-75x+15x^2-x^3=65$　　$\therefore\ 15x^2-75x+60=0$

$\therefore\ x^2-5x+4=0$　　$\therefore\ (x-4)(x-1)=0$　　$\therefore\ x=4$ 又ハ $x=1$

從テ(1)ヨリ $y=5-4=1$　又ハ　$y=5-1=4$　　答 4及1.

2. 大小二數アリ,其和ト大數トノ積ハ144ナリ,又其差ト小數トノ積ハ14ナリト云フ,各數ヲ求ム(43年,陸軍主計候補生;33年陸軍士官候補生).

解 大數ヲx,小數ヲyトスレバ題意ニヨリテ

$x(x+y)=144$ ……………(1)　　$y(x-y)=14$ ……………(2).

(1)×7−(2)×72,　　$7x(x+y)-72y(x-y)=0$

$\therefore\ 7x^2-65xy+72y^2=0$　　$\therefore\ (7x-9y)(x-8y)=0$

$\therefore\ 7x-9y=0$ ……………(3)　又ハ　$x-8y=0$ ……………(4)

(3)ヨリ $x=\frac{9}{7}y$ 之ヲ(2)ニ代用スレバ　$y\left(\frac{9}{7}y-y\right)=14$

$y^2\left(\frac{9}{7}-1\right)=14$　　$\therefore\ y^2(9-7)=14\times7$　　$\therefore\ y^2=49$

$\therefore\ y=\pm7$　從テ(3)ヨリ　$x=\frac{9}{7}y=\pm9$

又(4)ヨリ $x=8y$ 之ヲ(2)ニ代用スレバ　$y(8y-y)=14$

$\therefore\ y^2(8-1)=14$　　$\therefore\ y^2=2$　　$\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$

從テ(4)ヨリ. $x=8y=\pm8\sqrt{2}$　故ニ(1),(2)ニ適當スルx, yノ値ハ

$9,\ 7$ 或ハ $-9,\ -7$ 或ハ $8\sqrt{2},\ \sqrt{2}$ 或ハ $-8\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$

ナリ。サレドxハyヨリ大ナルベキヲ以テ求ムル答ハ9, 7及$8\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ノ二組ナリ.

3. 面積三百坪ノ地所アリ,今其間口ヲ四間延バシ,奥行ヲ三尺縮メタルニ面積四十八坪ヲ增シタリト云フ,此地所ノ間口及ビ奥行幾間ナリシカ(43年,海軍兵).

解 間口ヲx間,奥行ヲy間トスレバ(3尺$=\frac{1}{2}$間ナルニヨ)

$xy=300$ ……………(1)　　$(x+4)\left(y-\frac{1}{2}\right)-xy=48$ ……………(2)

(2)ヨリ　$-\frac{1}{2}x+4y-2=48$　$\therefore\ -x+8y-4=96$　$\therefore\ x=8y-100$ ……(3)

之ヲ(1)ニ代用スレバ　$(8y-100)y=300$　$\therefore\ 8y^2-100y-300=0$

$\therefore\ 2y^2-25y-75=0$　$\therefore\ (2y+5)(y-15)=0$　$\therefore\ y=15$ 又ハ $y=-\frac{5}{2}$

然ルニyハ正ナラザルベカラズ,故ニ $y=15$　從テ(3)ヨリ

$x=8\times15-100=20$　　答 間口20間; 奥行15間

4.　長方形ノ地積アリ,其ノ長邊ヨリ三尺減ジ短邊ヨリ一尺減ズルトキハ其面積前ニ半バス;又長邊ヲ九尺長クシ,短邊ヨリ二尺減ズルトキハ其ノ面積ニ變更ナシト云フ;依テ各邊ヲ問フ(36年,札幌農).

解　長邊ヲx尺,短邊ヲy尺トスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$(x-3)(y-1)=\frac{1}{2}xy\cdots\cdots(1)\qquad (x+9)(y-2)=xy\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ　$2(xy-x-3y+3)=xy$　$\therefore\ xy-2x-6y+6=0\cdots\cdots(3)$

又(2)ヨリ　$xy-2x+9y-18=xy$　$\therefore\ x=\frac{9y-18}{2}\cdots\cdots(4)$

(4)ノxノ値ヲ(3)ニ代用スレバ　$\frac{9y-18}{2}y-(9y-18)-6y+6=0$

$\therefore\ 9y^2-18y-18y+36-12y+12=0$　$\therefore\ 9y^2-48y+48=0$

$\therefore\ 3y^2-16y+16=0$　$\therefore\ (3y-4)(y-4)=0$　$\therefore\ y=4$ 又ハ $y=\frac{4}{3}$

然ルニ$y>2$ナラザルベカラズ　$\therefore\ y=4$　從テ(4)ヨリ

$x=\frac{36-18}{2}=9$　答 長邊9尺; 短邊4尺

5.　矩形ヲナス地面上ニ正方形ヲ劃シテ一家屋ヲ建築セントスルニ,若シ正方形ノ一邊ヲシテ地面ノ短邊ニ等シカラシムルトキハ百八十坪ノ空地ヲ生ジ,又若シ正方形ノ一邊ヲシテ地面ノ長邊ノ三分ノ一ニ等シカラシムルトキハ三百二十四坪ノ空地ヲ生ズベシト云フ,此ノ地面ノ面積ハ幾坪ナルカ(41年,陸軍士官候補生).

解　長邊ヲx間,短邊ヲy間トスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$xy-y^2=180\cdots\cdots(1)\qquad xy-\left(\frac{1}{3}x\right)^2=324\cdots\cdots(2)$$

(2)ヨリ　$9xy-x^2=2916\cdots\cdots(3)$

$(1)\times81-(3)\times5$　$81(xy-y^2)-5(9xy-x^2)=0$

$\therefore\ 5x^2+36xy-81y^2=0$　$\therefore\ x=\frac{-18y\pm\sqrt{(18y)^2+5\times81y^2}}{5}=\frac{-18y\pm27y}{5}$

然ルニyハxノ正數倍ナラザルベカラズ.

$\therefore\ x=\frac{-18y+27y}{5}=\frac{9}{5}y$ 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$\frac{9}{5}y\cdot y-y^2=180$　$\therefore\ 9y^2-5y^2=180\times5$　$\therefore\ 4y^2=900$

$\therefore\ y^2=225$　然ルニyハ正ナルベキヲ以テ　$y=15$

從テ　$x=\frac{9}{5}y=\frac{9}{5}\times15=27$　答 長邊27間; 短邊15間

6.　矩形ノ二地アリ,其面積合セテ二百六十二坪ニシテ甲地ハ乙地ヨリ二坪廣ク,甲地ノ間口ハ乙地ノ間口ヨリ二間長ク,甲地ノ奥行ハ乙地ノ奥行ヨリ二間短シト云フ,甲乙二地ノ間口奥行各如何(41年,農科大學實科).

解　甲地ノ間口ヲx間,奥行ヲy間トスレバ乙地ノ間口ハ$(x-2)$間,奥行ハ$(y+2)$間ナリ.　故ニ題意ニヨリテ

$xy+(x-2)(y+2)=262$　$\therefore\ xy+x-y-133=0\cdots\cdots(1)$

及　$xy-(x-2)(y+2)=2$　$\therefore\ -x+y+1=0\cdots\cdots(2)$

(2)ヨリ　$x=y+1$　之ヲ(1)ニ代用スレバ

$(y+1)y+y+1-y-133=0$　$\therefore\ y^2+y-132=0$

$\therefore\ (y+12)(y-11)=0$　$\therefore\ y=-12$　又ハ　$y=11$

然ルニyハ正ナラザルベカラズ　$\therefore\ y=11$　$\therefore\ x=y+1=12$

從テ　$x-2=10,\quad y+2=13$

答 甲地,間口12間,奥行11間; 乙地間口,10間,奥行13間

7.　長サガ幅ヨリモ三十間長キ矩形ノ池ノ周圍ニ或幅ノ馬場ヲ開ク爲メニ八百坪ノ地面ヲ要シ,而シテ其ノ外周ハ百八十間トナルトイフ,馬場ノ幅及池ノ面

積ヲ求ム(42年,東京高等師範).

解 池ノ幅ヲ x 間,馬場ノ幅ヲ y 間トスレバ,池ノ長サハ $(x+30)$ 間ニシテ,馬場ノ長サ及ビ幅ハ夫夫 $(x+30+2y)$ 間, $(x+2y)$ 間ナリ. 故ニ次ノ方程式ヲ得.

$$(x+30+2y)(x+2y)-(x+30)x=800 \qquad \text{即チ} \qquad 4xy+4y^2+60y=800$$

兩邊ヲ4デ割レバ $\qquad xy+y^2+15y=200 \cdots\cdots(1)$

又 $\quad 2\{x+30+2y+(x+2y)\}=180 \qquad \therefore \quad 2(2x+4y+30)=180$

$$\therefore \quad x+2y+15=45 \qquad \therefore \quad x=30-2y \cdots\cdots(2)$$

(2)ノ x ノ値ヲ(1)ニ代用スレバ

$$y(30-2y)+y^2+15y=200 \qquad \therefore \quad y^2-45y+200=0$$

$$\therefore \quad (y-40)(y-5)=0 \qquad \therefore \quad y=40 \quad \text{又ハ} \quad y=5$$

サテ, x モ y モ正ナラザルベカラズ,然ルニ(2)ニ $y=40$ ヲ代用スレバ x ハ負トナル,故ニ $y=5$, 從テ $x=30-2\times5=20 \quad \therefore \ x+30=50$

$\therefore \ x(x+30)=20\times50=1000$ 　答 池ノ面積1000坪;馬場ノ幅5間

8. 金若干ヲ貸シ一年ノ後元利合セテ百四十圓ヲ得タリ,若シ元金二十五圓多ク年利四分高カリセバ元利合計百七十四圓ヲ得ベカリシトイフ,元金及ビ年利率ヲ問フ(38年,高等)

解 元金ヲ x 圓,年利率ヲ y トスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$x(1+y)=140 \cdots\cdots(1) \qquad (x+25)(1+y+0.04)=174 \cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1) \qquad 0.04x+25y+26=34 \qquad \therefore \quad 4x+2500y-800=0$

$$\therefore \quad x=200-625y \cdots\cdots(3)$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $\qquad (200-625y)(1+y)=140$

$$\therefore \quad 200-425y-625y^2=140 \qquad \therefore \quad 625y^2+425y-60=0$$

$$\therefore \quad 125y^2+85y-12=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{-85\pm\sqrt{85^2+4\times125\times12}}{250}$$

$$=\frac{-85\pm\sqrt{13225}}{250}=\frac{-85\pm115}{250}$$

然ルニ y ハ正ナルベキヲ以テ $\quad y=\frac{-85+115}{250}=\frac{30}{250}=0.12$

從テ(3)ヨリ $\qquad x=200-625\times\frac{3}{25}=200-75=125$

答 元金125圓; 利率年1割2分

9. 相異ナル二位ノ數甲乙アリ,甲數ノ數字ノ順序ヲ轉換スルトキハ乙數トナリ,乙數字ノ和ノ平方ハ甲乙二數ノ和ニ等シク,小ナル數字ノ平方ノ五倍ハ甲乙二數ノ差ニ等シト云フ,各數ヲ求ム(40年,陸軍士官候補生).

解 甲數ノ十ノ位ノ數ヲ x, 一ノ位ノ數ヲ y トスレバ甲數ハ $10x+y$ ニシテ乙數ハ $10y+x$ ナリ. 今甲數ヲ乙數ヨリ大ナリトスレバ(從テ $x>y$ ナリ)題意ニヨリテ次ノ方程式ヲ得.

$$(x+y)^2=10x+y+10y+x \qquad \therefore \quad (x+y)^2=11(x+y) \cdots\cdots(1)$$

及 $\quad 5y^2=10x+y-(10y+x) \qquad \therefore \quad 5y^2=9(x-y) \cdots\cdots(2)$

サテ $x+y$ ハ明ニ0ナラザルヲ以テ之ヲ以テ(1)ノ兩邊ヲ割レバ

$$x+y=11 \qquad \therefore \quad x=11-y \cdots\cdots(3)$$

$\therefore$ (2)ヨリ $\quad 5y^2=9(11-y-y) \quad \therefore \quad 5y^2+18y-99=0 \quad \therefore \quad (5y+33)(y-3)=0$

然ルニ y ハ正ノ整數ナルベキヲ以テ $y=3$ 從テ(3)ヨリ $x=11-3=8$

因テ求ムル數ハ83及38ナリ.

10. 某地ノ溫度ノ x 倍ハ攝氏八十度ナリト,若シ此溫度四度高カラバ其 $(x-1)$ 倍モ亦八十度ナリト云フ,此地ノ溫度幾何ナルカ(39年,海軍兵).

解 其溫度ヲ y 度トスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$yx=80 \cdots\cdots(1) \qquad (y+4)(x-1)=80 \cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1) \qquad 4x-y-4=0 \qquad \therefore \quad y=4(x-1) \cdots\cdots(3)$

之ヲ(1)ニ代用スレバ $\quad 4x(x-1)=80 \qquad \therefore \quad x(x-1)=20$

∴ $x^2-x-20=0$ ∴ $(x-5)(x+4)=0$ ∴ $x=5$ 又ハ $x=-4$

之ヲ(3)ニ代用スレバ $y=4(5-1)=16$ 又ハ $y=4(-4-1)=-20$

yノ負ノ値ハ零度以下ト解釋スベキモノナリ。故ニ

答 16度又ハ零下20度

11. 長椅子若干脚ヲ備ヘタル奏樂堂ニ八百人ノ聽衆ヲ收容セントス,若シ同樣ノ長椅子二十脚ヲ增サバ椅子一脚ニ着スベキ人數ハ豫定ヨリモ二人ヲ減ジ得ベシ,豫メ備ヘ付ケタル椅子ノ數及ビ一脚ニ着スベキ豫定人員ヲ問フ(42年,海軍兵).

解 豫メ備ヘ付ケタル椅子ノ數ヲx,一脚ニ着スベキ豫定人員ヲyトスレバ題意ニヨリテ次ノ方程式ヲ得.

$xy=800$ ……(1) $(y-2)(x+20)=800$ ……(2)

(1)−(2) $2x-20y+40=0$ ∴ $x=10y-20$ ……(3)

之ヲ(1)ニ代用スレバ $y(10y-20)=800$ ∴ $y^2-2y-80=0$

∴ $(y-10)(y+8)=0$ ∴ $y=10$ 或ハ $y=-8$

然ルニyハ正ナルベキヲ以テ $y=10$ ∴ (3)ヨリ $x=80$

答 椅子80脚, 一脚ニ着スル豫定人員10人

12. 半徑5寸ノ圓ニ內接スル矩形ノ面積48平方寸ナルトキハ矩形ノ各邊ノ長サ各幾何(37年,東京商船).

解 矩形ノ相隣レル邊ヲ夫夫x, y $(x>y)$トスレバ對角線ハ圓ノ中心ヲ通ルヲ以テ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$x^2+y^2=10^2$ ……(1) $xy=48$ ……(2)

(1)+(2)×2 $(x+y)^2=196$ ∴ $x+y=14$ ($x+y>0$ ナルユヱ)

之ト(2)トヨリ $x=8$, $y=6$ ヲ得. 答 8寸, 6寸

$\frac{2-x}{x}=\frac{9(x-1)}{x+1}$

13. 酒ト水トノ混合液一石アリ,之ニ酒一石ヲ加ヘタルトキノ酒ト水トノ割合ハ之ニ水一石ヲ加ヘタルトキノ酒ト水トノ割合ノ九倍ナリト云フ,此混合液ノ中ニアル酒ト水ノ量各幾何(35年,東京高等工業).

解 酒ヲx石,水ヲy石アリトスレバ次ノ方程式ヲ得.

$x+y=1$ ……(1) $\frac{x+1}{y}=\frac{9x}{y+1}$ ……(2)

(2)ヨリ $(x+1)(y+1)=9xy$ ∴ $8xy-(x+y)-1=0$

乃チ(1)ニヨリテ $8xy-1-1=0$ ∴ $4xy=1$ ……(3)

(1)ト(3)トヨリ $x=y=\frac{1}{2}$ ヲ得. 答 酒5斗, 水5斗

14. 白砂糖7斤ノ價ハ赤砂糖七斤ノ價ヨリモ二十一錢高ク,又白砂糖ト赤砂糖トヲ各二圓四十錢宛買フトキハ白砂糖ハ赤砂糖ヨリ四斤少ナシト云フ,赤砂糖七斤ノ價幾何ナルカ(34年,東京高等師範).

解 白砂糖1斤ノ價ヲx錢,赤砂糖1斤ノ價ヲy錢トスレバ題意ニヨリテ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$7x-7y=21$ ∴ $x-y=3$ ……(1)

及 $\frac{240}{y}-\frac{240}{x}=4$ ∴ $\frac{60}{y}-\frac{60}{x}=1$ ……(2)

(1)ヨリ $x=y+3$ 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$\frac{60}{y}-\frac{60}{y+3}=1$ ∴ $60(y+3)-60y=y(y+3)$

∴ $y^2+3y-180=0$ ∴ $(y-12)(y+15)=0$ ∴ $y=12$ 又ハ $y=-15$

然ルニyハ正ナラザルベカラズ ∴ $y=12$ ∴ $7y=84$

答 84錢

15. A號列車ガ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發スルト同時ニB號列車ハ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發シ,一時間十五分ノ後兩列車ハ出會セリ,又A號列車ハB號列車ヨリハ一

時間ト二十分前ニ目的地ニ達セリト云フ．甲乙兩地間ノ距離100哩ナルトキハ兩列車ノ速度各一時間每ニ幾哩ナルカ(42年,神戸高等商業)．

解　A號列車ノ速度ヲ每時 x 哩,B號列車ノヲ每時 y 哩トスレバ,兩列車ハ1時15分 $\left(\text{卽チ }1\frac{1}{4}\text{時}\right)$ 間ニ夫夫 $1\frac{1}{4}x$ 哩,及 $1\frac{1}{4}y$ 哩馳セ,又100哩ヲ馳スルニハ夫夫 $\frac{100}{x}$ 時及 $\frac{100}{y}$ 時ヲ要ス．

$$\therefore\quad 1\frac{1}{4}x+1\frac{1}{4}y=100\qquad\therefore\quad x+y=80\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\frac{100}{y}-\frac{100}{x}=1\frac{20}{60}\qquad\therefore\quad \frac{25}{y}-\frac{25}{x}=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ $y=80-x$, 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{25}{80-x}-\frac{25}{x}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\quad 75x-75(80-x)=x(80-x)$$

$$\therefore\quad x^2+70x-6000=0\qquad\therefore\quad (x+120)(x-50)=0$$

然ルニ x ハ正ナラザルベカラズ　$\therefore\ x=50$　從テ $y=80-x=30$

答　A號列車,每時50哩；B號列車,每時30哩

16.　車アリ,前輪ノ周圍ハ後輪ノ周圍ヨリ小ナリ,車ガ6間進ムトキ兩輪ノ廻轉ノ差1回ナリ,若シ前輪ノ周圍ヲ1尺增ストキハ10間進ムトキ前輪ノ回轉ハ後輪ノ回轉ヨリモ一回多シトイフ,前輪後輪ノ周圍ヲ問フ(43年,東京高等工業)．

解　前輪ノ周圍ヲ x 尺,後輪ノ周圍ヲ y 尺トスレバ

6間＝36尺, 10間＝60尺ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得．

$$\frac{36}{x}-\frac{36}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \frac{60}{x+1}-\frac{60}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)\times5-(2)\times3\qquad \frac{180}{x}-\frac{180}{x+1}=2\qquad\therefore\quad 90(x+1)-90x=x(x+1)$$

$$\therefore\quad x^2+x-90=0\quad\therefore\quad (x-9)(x+10)=0\quad\therefore\quad x=9\ \text{又ハ}\ x=-10$$

然ルニ x ハ正ナラザルベカラズ　$\therefore\ x=9$

之ヲ(1)ニ代用スレバ　$\frac{36}{9}-\frac{36}{y}=1$　$\therefore\ \frac{36}{y}=3$　$\therefore\ y=12$

答　前輪ノ周圍9尺,後輪ノ周圍12尺

17.　二ツノ列車ガ三百六十哩ノ距離ヲ行クニ要スル時間ノ差五時間ナリ．若シ雙方トモ速サヲ一時間ニ付キ六哩增ストキハ此ノ差ハ三時間トナルトイフ．兩列車ノ速サヲ求メヨ(43年,東京高等商業)．

解　兩列車ノ一時間ノ行程ヲ夫夫 x 哩, y 哩トセヨ．サスレバ題意ニヨリテ次ノ二ツノ方程式ヲ得．

$$\frac{360}{x}-\frac{360}{y}=5\qquad\therefore\quad \frac{72}{x}-\frac{72}{y}=1\qquad\therefore\quad 72(y-x)=xy\cdots\cdots\cdots(1)$$

及

$$\frac{360}{x+6}-\frac{360}{y+6}=3\qquad\therefore\quad \frac{120}{x+6}-\frac{120}{y+6}=1\quad\therefore\quad 120(y-x)=(x+6)(y+6)\cdots\cdots(2)$$

$$(2)-(1)\qquad 48(y-x)=xy+6x+6y+36-xy\qquad\therefore\quad 54x-42y+36=0$$

$$\therefore\quad 9x-7y+6=0\qquad\therefore\quad y=\frac{9x+6}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故ニ(1)ヨリ

$$72\left(\frac{9x+6}{7}-x\right)=\frac{x(9x+6)}{7}\qquad\therefore\quad \frac{72(2x+6)}{7}=\frac{x(9x+6)}{7}$$

$$\therefore\quad 24(2x+6)=x(3x+2)\qquad\therefore\quad 3x^2-46x-144=0$$

$$\therefore\quad (3x+8)(x-18)=0\qquad\therefore\quad x=18\quad\text{又ハ}\quad x=-\frac{8}{3}$$

然ルニ x ハ正ナラザルベカラズ　$\therefore\ x=18$

從テ(3)ヨリ　$y=\frac{9\times18+6}{7}=24$　答　18哩, 24哩

18.　或人平常ノ漕力ヲ以テ或水流ヲ15哩漕ギ上ルニハ此距離ヲ漕ギ下ルトキヨリモ5時間多クヲ要シタリ,若シ此ノ人其ノ漕力ヲ二倍スレバ此差僅カニ一時間トナルベシト云フ,水流ノ速サ及此ノ人ガ平常ノ漕力ニテ靜水ヲ漕グトキノ速サ幾何ナルカ(43年,東京高等師範)．

解　此ノ人ガ靜水ヲ漕グ平常ノ漕力ヲ每時 x 哩トシ,問題ニ

於ケル水流ヲ每時 y 哩トスレバ題意ニヨリテ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$$\frac{15}{x-y}-\frac{15}{x+y}=5 \quad \therefore \quad \frac{3}{x-y}-\frac{3}{x+y}=1 \quad \therefore \quad 6y=x^2-y^2 \cdots\cdots(1)$$

及 $$\frac{15}{2x-y}-\frac{15}{2x+y}=1 \qquad \therefore \quad 30y=4x^2-y^2 \cdots\cdots(2)$$

$(1)\times5-(2) \qquad 0=x^2-4y^2 \qquad \therefore \quad x^2=4y^2 \cdots\cdots(3)$

之ヲ(1)ニ代用スレバ　$6y=4y^2-y^2=3y^2$　然ルニ　$y\neq0$

$\therefore$ $y=2$　從テ(3)ヨリ　$x=2y=4$ (x, y ハ何レモ正ナルベキコトニ注意セヨ).　答 水流,每時2哩;潛力,每時4哩

19. 人アリ,或距離ヲ步行スルニ每時ノ行程ヲ四分ノ一里ヅツ增シタランニハ,現ニ費セル時間ノ五分ノ四ニテ到着シタルベク,若シ又每時間ノ行程ヲ四分ノ一里ヅツ減ジタランニハ現ニ費セル時間ヨリ二時間半多ク要スベシト云フ,其距離如何(40年,農科大學實科)

解　求ムル距離ヲ x 里,每時ノ行程ヲ y 里トスレバ題意ニヨリテ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$$\frac{x}{y+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{x}{y} \quad \therefore \quad 5xy=4x\left(y+\frac{1}{4}\right) \quad \therefore \quad xy=x \cdots\cdots(1)$$

及 $$\frac{x}{y-\frac{1}{4}}=\frac{x}{y}+2.5 \cdots\cdots(2)$$

然ルニ $x\neq0$ ナルヲ以テ(1)ヨリ $y=1$, 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{x}{1-\frac{1}{4}}=x+2.5 \quad \therefore \quad \frac{4x}{3}=x+2.5 \quad \therefore \quad 4x=3x+7.5 \quad \therefore \quad x=7.5$$

答 7里半

20. 車若干輛ヲ用ヰテ石材ヲ或地ヨリ或地ニ運搬スルニ八時間ヲ要ス,若シ車八輛ヲ增サバ每回各車ノ載量ヲ五貫ヅヽ減ズルモ猶七時間ニシテ運ビ終ルベク,又若シ車八輛ヲ減ゼバ每回ノ載量ヲ十一貫ヅヽ增

スモ猶9時間ヲ費スベシト云フ. 車輛ノ數及每回各車ノ載量ヲ問フ(42年,長崎高等商業).

解　運搬スル量ハ運搬ニ用フル車輛數及一車載量ニ比例スルコトハ明カナレド,尙ホ其上ニ之ニ要スル時間ニモ比例スルモノト假定スベシ(但シ此假定ハ必ズシモ常ニ成リ立ツモノニアラザズ,本問題ハ此點ニ於テ完全トハイヒ難シ).

ソコデ車輛ノ數ヲ x, 一車ノ載量ヲ y 貫トスレバ一回ノ運搬量ハ xy 貫トリ,又車8輛ヲ增シ,一車ノ載量ヲ5貫減ズレバ一回ノ運搬量ハ $(x+8)(y-5)$ ナリ. サテ假定ニヨマバ一回ノ運搬量ハ運搬ニ要スル時間ニ反比例スルヲ以テ

$$xy:(x+8)(y-5)=7:8 \quad \therefore \quad 7(x+8)(y-5)=8xy$$

$$7xy-35x+56y-280=8xy \quad \therefore \quad xy+35x-56y+280=0 \cdots\cdots(1)$$

同理ニテ今一ツ次ノ方程式ヲ得ベシ.

$$xy:(x-8)(y+11)=9:8 \quad \therefore \quad 9(x-8)(y+11)=8xy$$

$$\therefore \quad 9xy+99x-72y-792=8xy \quad \therefore \quad xy+99x-72y-792=0 \cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1) \qquad 64x-16y-1072=0 \qquad \therefore \qquad 4x-y-67=0 \cdots\cdots(3)$

(3)ヨリ $y=4x-67$, 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$x(4x-67)+35x-56(4x-67)+280=0 \quad \therefore \quad 4x^2-256x+4032=0$$

$$\therefore \quad x^2-64x+1008=0 \quad \therefore \quad (x-28)(x-36)=0 \quad \therefore \quad x=28 \text{ 又ハ } x=36$$

$x=28$ トスレバ　$y=28\times4-67=45$

$x=36$ トスレバ　$y=36\times4-67=77$

答 車28輛,一車ノ載量45貫目; 又ハ車36輛,一車ノ載量77貫目

21. 甲乙ノ二船アリ,甲ハ東港ヨリ西港ニ,乙ハ西港ヨリ東港ニ各一定ノ速サヲ以テ同時ニ出發シ若干時ノ後出會セリ,甲ハ其後四時間ヲ經テ西港ニ到着シ,乙

ハ甲ニ出會セシ時ヨリ其ノ速サヲ毎時二浬ヅツ増シタルニ,出會ノ時ヨリ五時間ノ後東港ニ到着セリト云フ,二船ノ速サハ各一時間ニ幾浬ナルカ,但シ兩港間ノ距離ハ九十浬ナリトス.

解　甲ノ速サヲ毎時 x 浬,乙ノヲ y 浬トスレバ兩船ガ出發シテヨリ出會フマデニ要セシ時間ハ $\frac{90}{x+y}$ 時間ナリ,此間ニ甲ハ $\frac{90x}{x+y}$ 浬ヲ航海シ,乙ハ $\frac{90y}{x+y}$ 浬ヲ航海スベシ,而シテ乙ガ航海セシ距離ヲ甲ハ 4 時間ニ航海セシヲ以テ

$$\frac{90y}{x+y}=4x\cdots\cdots(1)\qquad 之ヨリ\qquad 90y=4x(x+y)\cdots\cdots(2)$$

又甲ガ出發後乙ニ出會フマデニ航海セシ距離ヲ乙ハ毎時 $(y+2)$ 浬ノ速サニテ 5 時間ニ航海セシヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{90x}{x+y}=5(y+2)\cdots\cdots(3)\qquad (1)+(3),\quad \frac{90(x+y)}{x+y}=4x+5y+10$$

$$\therefore\quad 90=4x+5y+10\qquad \therefore\quad x=\frac{80-5y}{4}\cdots\cdots(4)$$

之ヲ (2) ニ代用スレバ　$90y=(80-5y)\left(\frac{80-5y}{4}+y\right)$

$$\therefore\quad 360y=(80-5y)(80-y)\qquad \therefore\quad 360y=6400-480y+5y^2$$

$$\therefore\quad y^2-168y+1280=0\qquad \therefore\quad y=84\pm\sqrt{84^2-1280}=84\pm\sqrt{5776}=84\pm76$$

然ルニ y ハ 90 ヨリ小ナラザルベカラズ.　$\therefore\ y=84-76=8$

之ヲ (4) ニ代用スレバ　$x=\frac{80-5\times8}{4}=10$　　答　甲 10 浬; 乙 8 浬

22. 一組ノ水夫アリ,水ヲ漕ギ下リテ甲村ヨリ乙村ニ至ルニ三時間ヲ要セリ,若シ始メヨリ流水ニ任セテ漕ガズニ下ランニハ同組ノ水夫ガ甲乙ト相等シキ距離ノ靜水上ヲ漕ギ行クニ要スル時間ヨリハ尙八時間ダケ多クヲ費スベシト云フ,乙村ヨリ甲村ニ漕ギ上ルニ要スル時間幾何(36年,海軍兵).
村村

解　甲乙間ノ距離ヲ x 里,此組ノ水夫ガ靜水ヲ漕グ速サヲ毎時 y 里,水流ノ速サヲ毎時 z 里トスレバ題意ニ依リテ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{x}{y+z}=3\cdots\cdots(1)\qquad \frac{x}{z}=\frac{x}{y}+8\cdots\cdots(2)$$

今 $\frac{x}{y}=u,\ \frac{x}{z}=v$ トオキ (1) ヨリ $\frac{y+z}{x}=\frac{1}{3}$ 卽チ $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{3}$ ヲ得ルコトニ注意スレバ (1),(2) ハ夫夫次ノ如クナル.

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{3}\cdots\cdots(3)\qquad v=u+8\cdots\cdots(4)$$

(4) ノ v ノ値ヲ (3) ニ代用スレバ　$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+8}=\frac{1}{3}$

$$\therefore\quad 3(u+8)+3u=u(u+8)\qquad \therefore\quad u^2+2u-24=0$$

$\therefore\quad (u-4)(u+6)=0$　而シテ $u>0$ ナルヲ以テ $u=4$

之ヲ (4) ニ代用スレバ　$v=4+8=12$

ソコデ乙村ヨリ甲村マデ漕ギ上ル時間ハ

$$\frac{x}{y-z}=\frac{1}{\frac{y}{x}-\frac{z}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\frac{2}{12}}=6$$　答　6 時間

23. 直角三角形アリ斜邊ノ長サハ他ノ二邊ノ長サノ和ヨリ小ナルコト四寸ニシテ其ノ面積ハ三十平方寸ナリ,三邊ノ長サ幾何ナルカ(39年,海軍機關).

解　直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ夫夫 x 寸, y 寸トスレバ斜邊ノ長サハ $\sqrt{x^2+y^2}$ 寸ナルヲ以テ題意ニ依リテ次ノ方程式ヲ得.

$$x+y-4=\sqrt{x^2+y^2}\cdots\cdots(1)\qquad xy=30\times2\cdots\cdots(2)$$

(1) ノ兩邊ヲ二乘スレバ　$(x+y)^2-8(x+y)+16=x^2+y^2\cdots\cdots(3)$

然ルニ　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$　故ニ (2) ヲ用ヒテ　$x^2+y^2=(x+y)^2-120$

故ニ (3) ハ　$(x+y)^2-8(x+y)+16=(x+y)^2-120$　　$\therefore\ 8(x+y)=136$

$\therefore\ x+y=17$　之ト (2) トヨリ　$x=12,\ y=5$,　又ハ　$x=5,\ y=12$　ヲ得.

從テ　$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$　　答　5 寸, 12 寸, 13 寸

184. 三元二次方程式ノ解法ニ歸セシメ得ル應用問題雜題

1. 床ノ面積百十七平方尺ナル室アリ,一方ノ壁ノ面積ハ百三十平方尺ニシテ,之ニ隣レル壁ノ面積ハ九十平方尺ナリ;此室ノ幅,長サ,高サ各幾尺ナルカ(38年,東京高等工業).

解 此室ノ幅,長サ,高サヲ夫夫x尺,y尺,z尺トスレバ題意ニヨリテ

$xy=117$…………(1)　$yz=130$…………(2)　$xz=90$…………(3)

(1)×(3)÷(2),　$\dfrac{xy\times xz}{yz}=\dfrac{117\times 90}{130}$　∴ $x^2=9^2$　∴ $x=\pm 9$

然ルニ $x>0$ ナラザルベカラズ. ∴ $x=9$,之ヲ(1),(3)ニ代用スレバ

$y=13$, $z=10$ ヲ得.　答 幅9尺,長サ13尺,高サ10尺

2. 或人金六千五百圓ヲ甲乙二部分ニ分チ異ル利率ニテ貸付クルニ双方ヨリ得タル利息相等シ,若シ甲ヲ乙ノ利率ニテ貸ストキハ利息百八十圓ヲ得,乙ヲ甲ノ利率ニテ貸ストキハ利息金二百四十五圓ヲ得,依ツテ各ノ利率ヲ問フ(40年,山口高等商業).

解 甲ノ口ヲx圓トスレバ,乙ノ口ハ$(6500-x)$圓ナリ. 又甲ノ口ノ利率ヲ年y,乙ノ口ノ利率ヲ年zトスレバ,題意ニ依リテ

$xy=(6500-x)z$………(1)　$xz=180$………(2)　$(6500-x)y=245$………(3)

(2)ヨリ $z=\dfrac{180}{x}$, (3)ヨリ $y=\dfrac{245}{6500-x}$ ヲ得,之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$\frac{245x}{6500-x}=\frac{180(6500-x)}{x}\qquad\therefore\ 245x^2=180(6500-x)^2$$

$$\therefore\ 49x^2=36(6500-x)^2\qquad\therefore\ 7x=\pm 6(6500-x)$$

然ルニxハ6500ヨリ小ナル正ノ數ナルベキヲ以テ

$$7x=6(6500-x)\qquad\therefore\ 13x=6\times 6500\qquad\therefore\ x=6\times 500=3000$$

之ヲ(2)ニ代用スレバ　$z=\dfrac{180}{3000}=0.06$

又(3)ニ代用スレバ　$y=\dfrac{245}{6500-3000}=\dfrac{245}{3500}=\dfrac{7}{100}=0.07$

答 甲,年六分;乙,年七分

3. 某軍艦甲港ヲ發シテ乙港ニ向フ途中航路ノ中央ヨリモ8海里前進セル位置ニ於テ或商船ニ出會セシニ其商船ハ軍艦ガ出發セシト同時刻ニ乙港ヲ出發シテ軍艦ト同一航路ヲ反對ニ取リテ甲港ニ向ハントスルモノナルヲ知レリ,出會後軍艦ハ3時間ニシテ乙港ニ達シ商船ハ$5\frac{1}{3}$時間ニシテ甲港ニ到着セリト云フ,甲乙兩港間ノ航路ノ長サ及軍艦ト商船トノ速度各如何(37年,海軍兵).

解 甲乙兩港間ノ距離ヲ$2x$浬トシ,軍艦ノ速度ヲ每時y節,商船ノヲ每時z節トスレバ,兩船ガ出會ヒタルハ甲港ヨリ$(x+8)$浬ノ處即チ乙港ヨリ$(x-8)$浬ノ處ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$\dfrac{x+8}{y}=\dfrac{x-8}{z}$…………(1)　$x-8=3y$…………(2)　$x+8=5\dfrac{1}{3}z$…………(3)

(2)ヨリ　$y=\dfrac{x-8}{3}$, (3)ヨリ　$z=\dfrac{x+8}{5\frac{1}{3}}=\dfrac{3(x+8)}{16}$, 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$\frac{x+8}{\frac{x-8}{3}}=\frac{x-8}{\frac{3(x+8)}{16}}\qquad\therefore\ \frac{3(x+8)}{x-8}=\frac{16(x-8)}{3(x+8)}\qquad\therefore\ 9(x+8)^2=16(x-8)^2$$

∴ $3(x+8)=\pm 4(x-8)$　然ルニxハ8ヨリ大ナル正ノ數ナルベキヲ以テ　$3(x+8)=4(x-8)$　∴ $x=56$　∴ $2x=112$

之ヲ(2)ニ代用スレバ　$56-8=3y$　∴ $48=3y$　∴ $y=16$

又(3)ニ代用スレバ　$56+8=5\dfrac{1}{3}z$　∴ $64=\dfrac{16}{3}z$　∴ $z=12$

答 航路112浬,軍艦16節,商船12節

4. 或商船甲港ヲ解纜シテ乙港ニ向ヒタル後一時間ヲ經テ或軍艦甲港ヲ抜錨シ商船ト同一航路ヲ取リテ乙港ニ向ヒ四十八海里ヲ進行シタル時商船ニ追着キ夫ヨリ尙二時間ヲ經テ軍艦ハ乙港ニ達シ,商船ハ其出帆セシ時ヨリ六時四十分ヲ經テ乙港ニ達セリト云フ;甲乙兩港間ノ航路幾海里ナルカ(35年,海軍兵).

解 甲乙兩港間ノ距離ヲ x 海里,軍艦ノ速サヲ每時 y 節,商船ノヲ每時 z 節トスレバ軍艦ト商船トガ48海里ヲ航行スル時間ノ差ハ1時間ナルヲ以テ $\frac{48}{z}-\frac{48}{y}=1$ ……………(1)

又軍艦ハ $(x-48)$ 海里ヲ航行スルニ2時間ヲ要セシヲ以テ

$x-48=2y$ $\therefore$ $y=\frac{x-48}{2}$ …………(2)

ヲ得商船ハ全航路ヲ航行スルニ $6\frac{40}{60}$ 時 $=6\frac{2}{3}$ 時ヲ要セシヲ以テ

$x=6\frac{2}{3}z$ $\therefore$ $z=\frac{3x}{20}$ …………………(3)

(2),(3)ノ値ヲ(1)ニ代用スレバ $\frac{20\times\overset{16}{48}}{3x}-\frac{48\times2}{x-48}=1$

$\therefore$ $320(x-48)-96x=x(x-48)$ $\therefore$ $x^2-272x+15360=0$

$\therefore$ $x=136\pm\sqrt{136^2-15360}=136\pm\sqrt{3136}=136\pm56$

$\therefore$ $x=192$ 又ハ $x=80$ 　　答 192海里又ハ80海里

注意 $x=192$ トスレバ,$y=72$ トナル,即チ軍艦ノ每時ノ速度ハ72節ナリ,今日ニテハカヽル高速度ノ軍艦ハ實際ニハ之レナケレドモ問題ニ制限ナキ上ハ答トシテ不都合ナキヲ以テ之ヲ存シオクコトヽセリ.

5. 直角三角形アリ,直角ヲ夾ム二邊ノ長サノ差ハ5尺ニシテ,又其周圍ハ60尺ナリト云フ;此ノ三邊ヲ問フ(34年,海軍機關).

解 斜邊ノ長サヲ x 尺,他ノ二邊ヲ夫夫 y 尺, z 尺 $(y>z)$ トスレバ次ノ三ツノ方程式ヲ得.

$y-z=5$ …………(1) 　$x+y+z=60$ …………(2) 　$x^2=y^2+z^2$ …………(3)

(2)+(1), 　$x+2y=65$ 　$\therefore$ $x=65-2y$ …………(4)

又(1)ヨリ 　$z=y-5$ 　之ト(4)ノ x ヲ(3)ニ代用スレバ

$\therefore$ $(65-2y)^2=y^2+(y-5)^2$ 　$\therefore$ $4225-260y+4y^2=2y^2-10y+25$

$2y^2-250y+4200=0$ 　$\therefore$ $y^2-125y+2100=0$

$\therefore$ $y=\frac{125\pm\sqrt{125^2-4\times2100}}{2}=\frac{125\pm\sqrt{7225}}{2}=\frac{125\pm85}{2}$

然ルニ $y<60$ 　$\therefore$ $y=\frac{125-85}{2}=20$ 　ソコデ(1),(4)ヨリ

$z=20-5=15$, 　$x=65-2\times20=25$ 　　答 25尺, 20尺, 15尺

6. 直角三角形ノ地面アリ,其周圍九十間,面積百八十坪ナルトキハ,三邊ノ長サ各幾何(35年,東京商船).

解 斜邊ヲ x 間,他ノ二邊ヲ夫夫 y 間, z 間 $(y>z$ トス$)$ トスレバ

$x+y+z=90$ …………(1) 　$y^2+z^2=x^2$ …………(2) 　$yz=180\times2$ …………(3)

(2)+(3)×2, 　$y^2+2yz+z^2=x^2+720$ 　$\therefore$ $(y+z)^2=x^2+720$

(1)ヨリ 　$y+z=90-x$, 　此 $y+z$ ノ値ヲ直グ前ノ方程式ニ代用スレバ 　$(90-x)^2=x^2+720$ 　$\therefore$ $8100-180x=720$ 　$\therefore$ $x=41$

之ヲ(1)ニ代用スレバ 　$y+z=49$ 　ヲ得,之ト(3)トヨリ 　$y=40$, $z=9$ ヲ得.

答 41間, 40間, 9間

第十編 比及比例

比

185. 比 一ツノ數aヲ得ル爲ニ今一ツノ數bニ掛ケルベキ數(即チaヲbニテ割リテ得ル商)ヲaノbニ對スル比又ハaノbニ於ケル比又ハaトbトノ比トイフ.

aノbニ對スル比ヲ$a:b$又ハ$\frac{a}{b}$ト記シ,a,bヲ總稱シテ比ノ項トイヒ,其比ノaヲ前項,bヲ其後項トイフ.

例 1. $3a=2b$ ナレバ $a:b$ 如何.

$$a=\frac{2}{3}b \qquad \therefore \quad a:b=\frac{2}{3}$$

例 2. $\frac{6x+2y}{3x-y}=10$ ナレバ $x:y$ 如何.

$$6x+2y=30x-10y \qquad \therefore \quad 24x=12y \qquad \therefore \quad 2x=y$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}y \qquad \therefore \quad x:y=\frac{1}{2}$$

例 3. $\frac{5a^2+7b^2}{3a^2-b^2}=\frac{87}{47}$ ナレバ $a:b$ 如何.

$$47(5a^2+7b^2)=87(3a^2-b^2) \qquad \therefore \quad 235a^2+329b^2=261a^2-87b^2$$

$$\therefore \quad 26a^2=416b^2 \qquad \therefore \quad a^2=16b^2 \qquad \therefore \quad a=\pm 4b$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=4 \quad 或ハ \quad \frac{a}{b}=-4$$

例 4. $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ ナルトキ $4x+3y:12x-3y$ 如何.

$$x=\frac{3}{4}y \qquad \therefore \quad \frac{4x+3y}{12x-3y}=\frac{4\times\frac{3}{4}y+3y}{12\times\frac{3}{4}y-3y}=\frac{6y}{6y}=1$$

例 5. $3x^2+3y^2=10xy$ ナルトキ $\frac{x}{y}$ ヲ求メヨ.

$$3x^2-10xy+3y^2=0 \qquad \therefore \quad (3x-y)(x-3y)=0$$

$$\therefore \quad 3x-y=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{3}y \qquad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{1}{3}$$

$$或ハ \quad x-3y=0 \qquad \therefore \quad x=3y \qquad \therefore \quad \frac{x}{y}=3$$

注意 同種類ノ二ツノ量(例ヘバ長サト長サ,金高ト金高トノ如シ)AトBトノ比モAヲ得ル爲ニBニ掛クベキ數ナルヲ以テ此二量ノ比ハ同ジ單位ニテ此等ノ量ヲ測ルトキニ得ル數(即チ此等ノ量ノ數値)ノ比ニ等シ,而シテAトBトノ比ノ書キ方及其項ノ名稱ハ二數ノ比ノ場合ニ同ジ.

例 1. $2\frac{1}{2}^{圓}:1\frac{1}{7}^{圓}=2\frac{1}{2}:1\frac{1}{7}=\frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{7}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{8}{7}}=\frac{35}{16}$

例 2. $2^{間}.5:5^{尺}=15^{尺}:5^{尺}=15:5=\frac{15}{5}=3$

186. 比ノ性質 比ハ,ツマリ分數ナルユヱ,分數ノ性質ハ,スベテ比ニ適用スルコトヲ得. 就中次ニ述ブル所ノ者ハ特ニ重要ナル者ナリ.

比ノ兩項ニ同ジ數ヲ掛ケテモ比ハ變ラズ.

例ヘバ $a:b=ma:mb$ ナリ.

注意1 或數ヲnニテ割ルコトハ其數ニnノ逆數$\frac{1}{n}$ヲ掛クルニ同ジキユヱ,今述ベタル性質ノ中ニハ比ノ各項ヲ同數ニテ割ル場合ヲ含メルコトニ注意スベシ.

$\boxed{\text{注意2}}$　此性質ヲ應用シテ比ノ兩項ガ有理數ナル場合ニハ比ヲ變ヘズニ其兩項ヲ成ルベク簡單ナル整數ニ直スコトヲ得ベシ.

例 1.　$98:42$ ハ其兩項ヲ 14 ニテ割リテ得ル $7:3$ ニ等シ.

例 2.　$1.05:1.2$ ハ其兩項ニ先ヅ 100 ヲ掛ケテ $105:120$ トナシ,更ニ其兩項ヲ 15 ニテ割リテ得ル $7:8$ ニ等シ.

例 3.　$2\frac{7}{81}:\frac{13}{27}$ ハ其前項ヲ假分數ニ直シテ $\frac{169}{81}:\frac{13}{27}$ トナシ,次ニ兩項ニ 81 ヲ掛ケテ $169:13\times3$ トナシ,更ニ兩項ヲ 13 ニテ割リテ得ル $13:3$ ニ等シ.

$\boxed{\text{注意3}}$　又上ノ性質ヲ應用スレバ幾ツカノ比ノ後項(若クハ前項)ヲ揃ヘルコトヲ得,從テ容易ニ此等ノ比ノ大小ヲ比較スルコトヲ得.

例 1.　$8:9,\ 6:7$ 及 $14:15$ ヲ大ナル者ヨリ順ニ書ケ.

此等ノ比ノ後項ヲ 7, 9, 15 ノ最小公倍數 $7\times9\times5$ ニ等シクナセバ

$$\frac{8}{9}=\frac{8\times7\times5}{7\times9\times5}=\frac{280}{7\times9\times5},\quad \frac{6}{7}=\frac{6\times9\times5}{7\times9\times5}=\frac{270}{7\times9\times5},$$

$$\frac{14}{15}=\frac{14\times7\times3}{7\times9\times5}=\frac{294}{7\times9\times5}$$

然ルニ　$294>280>270$

$\therefore$　$14:15>8:9>6:7$

例 2.　$\frac{a+2b}{a+b}$ ト $\frac{a+3b}{a+2b}$ トハ何レガ大ナルカ,但シ $a>0,\ b>0$ ナリ.

$$\frac{a+2b}{a+b}=\frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a+2b)},\quad \frac{a+3b}{a+2b}=\frac{(a+3b)(a+b)}{(a+b)(a+2b)}$$

然ルニ　$(a+b)(a+2b)>0$

又 $(a+2b)^2-(a+3b)(a+b)=a^2+4ab+4b^2-(a^2+4ab+3b^2)$

$$=b^2>0$$

$\therefore$　$\frac{a+2b}{a+b}>\frac{a+3b}{a+2b}$

187. 複比　幾ツカノ比ノ積即チ其等ノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ,後項ノ積ヲ後項トスル比ヲ此等ノ比ノ複比トイフ.

例 1.　$a:c$ 及 $b:d$ ノ複比ハ $ab:cd$ ナリ.

例 2.　$x:y,\ z:u,\ v:w$ ノ複比ハ $xzv:yuw$ ナリ.

例 3.　$a:b,\ b:c,\ c:d$ 及 $d:e$ ノ複比ハ $abcd:bcde$ 即チ $a:e$〔兩項ヲ bcd ニテ割リタル者〕ナリ.

$\boxed{\text{注意}}$　$a:c$ 及 $b:d$ ノ複比ヲ

$\left.\begin{matrix}a:c\\b:d\end{matrix}\right\}$ 又ハ $\left\{\begin{matrix}a:c\\b:d\end{matrix}\right.$ ト書キ

$x:y,\ z:u$ 及 $v:w$ ノ複比ヲ

$\left.\begin{matrix}x:y\\z:u\\v:w\end{matrix}\right\}$ 又ハ $\left\{\begin{matrix}x:y\\z:u\\v:w\end{matrix}\right.$ ト書ク

コトアリ,此他モ之ニ準ズ.

188. 二乘比及三乘比　同ジ比二ツノ比ノ複比ヲ其二乘比トイヒ,同ジ比三ツノ比ノ複比ヲ其三乘比トイフ.

例 1. $a^2:b^2$ ハ $a:b$ ノ二乘比ナリ.

例 2. $c^3:d^3$ ハ $c:d$ ノ三乘比ナリ.

189. 反比又ハ逆比 a ノ逆數 $\frac{1}{a}$ ト b ノ逆數 $\frac{1}{b}$ トノ比 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ 即チ〔兩項ニ ab ヲ掛ケテ得ル〕$b:a$ ヲ a ノ b ニ對スル反比又ハ逆比トイフ. 之ニ對シテ $a:b$ ヲ特ニ a ト b トノ正比トイフコトアリ.

比例

190. 比例式 二ツノ比ガ相等シキコトヲ表セル式ヲ比例式又ハ比例トイフ.

例ヘバ $a:b$, $c:d$ ナル二ツノ比ガ相等シキ時,此事ヲ表ス式

$$a:b=c:d$$

ヲ比例式トイフ. 而シテ此場合ニハ a, b, c, d ハ比例ヲナストイヒ, a ト d トヲ比例ノ外項, b ト c トヲ其內項トイフ. 又 d ヲ a, b, c ノ第四比例項トイフ.

注意1 $a:b=c:d$ ハ時トシテハ $a:b::c:d$ ト書クコトモアリ.

注意2 各項ガ正ナル比例式ノ第一項ガ第二項ヨリ小ナレバ第三項ハ第四項ヨリ小ナリ又第一項ガ第

191. 比例中項 三數例ヘバ a, b, c ノ間ニ $a:b=b:c$ ナル比例式ガ成リ立ツトキ此三數ハ比例ヲナストイヒ, b ヲ a ト c トノ比例中項, c ヲ a ト b トノ第三比例項トイフ.

192. 比例ノ性質

比例ノ內項ノ積ハ其外項ノ積ニ等シ.

證明 比例式ヲ $a:b=c:d$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ トセンニ此等式ノ兩邊ニ bd ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$$

$$\therefore\quad ad=bc$$

從テ 二數ノ比例中項ハ此二數ノ積ノ平方根ニ等シ.

例ヘバ $a:b=b:c$ ナレバ

$$b^2=ac \qquad \therefore\quad b=\pm\sqrt{ac}$$

注意 比例式中ニ唯一種ノ未知數ヲ含ムトキハ今述ベタル性質ヲ應用シテ之ヲ求ムルコトヲ得. 此未知數ヲ求ムルコトヲ比例式ヲ解クトイフ.

例 1. $5+3x:7+x=23:13$ ヲ解クコト.

$$13(5+3x)=23(7+x)$$

$$\therefore\quad 65+39x=161+23x$$

$$\therefore\quad 16x=96$$

$$\therefore\quad x=6$$

例2. 75ト12トノ比例中項ヲ求ムルコト.

今求ムル比例中項ヲxトスレバ

$$x^2=75\times12 \quad [\because\ 75:x=x:12]$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{900}=\pm30$$

例~~4~~3. 4及5ノ第三比例項ヲ求ムルコト.

求ムル所ノ第三比例項ヲxトスレバ

$$4:5=5:x$$

$$\therefore\quad 4x=25$$

$$\therefore\quad x=\frac{25}{4}$$

例~~5~~4. $a+x:b+x$ ガ $a:b$ ノ二乘比ニ等シトイフ,xノ値如何,但シ $a^2\neq b^2$ ナリ.

$$a+x:b+x=a^2:b^2$$

$$\therefore\quad b^2(a+x)=a^2(b+x)$$

$$\therefore\quad b^2a+b^2x=a^2b+a^2x$$

$$\therefore\quad (b^2-a^2)x=ab(a-b)$$

$b^2-a^2\neq0$ ナルヲ以テ $x=\dfrac{-ab(b-a)}{b^2-a^2}=-\dfrac{ab}{b+a}$

例~~6~~5. 2, 1, 5, 3ノ各ニ如何ナル同數ヲ加フレバ比例ヲナス四數ヲ得ルカ.

今加フベキ數ヲxトスレバ

$$2+x:1+x=5+x:3+x$$

$$\therefore\quad (2+x)(3+x)=(1+x)(5+x)$$

193. 二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シキトキ,此四數ハ其一ツノ積ノ二ツノ因數ヲ外項トシ他ノ一ツノ積ノ二ツノ因數ヲ內項トスル比例ヲナス

例ヘバ $ad=bc$ ナレバ a ト d トヲ外項(若クハ內項)トシ,b ト c トヲ內項(若クハ外項)トスル比例式ヲナス,而シテ此ノ如キ比例式ハ八ツアリ,卽チ次ノ如シ.

$a:b=c:d$……(1)　　$b:a=d:c$……(5)

$a:c=b:d$……(2)　　$b:d=a:c$……(6)

$d:b=c:a$……(3)　　$c:a=d:b$……(7)

$d:c=b:a$……(4)　　$c:d=a:b$……(8)

$\boxed{\text{證明}}$ $ad=bc$ ノ兩邊ヲ bd ニテ割レバ

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \quad \text{卽チ} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\quad a:b=c:d$$

同樣ニ $ad=bc$ ノ兩邊ヲ cd ニテ割レバ(2)ヲ得

$ad=bc$ ノ兩邊ヲ ab ニテ割レバ(3)ヲ得

$ad=bc$ ノ兩邊ヲ ac ニテ割レバ(4)ヲ得

文 $bc=ad$ ノ兩邊ヲ ac ニテ割レバ(5)ヲ得

$bc=ad$ ノ兩邊ヲ cd ニテ割レバ(6)ヲ得

$bc=ad$ ノ兩邊ヲ ab ニテ割レバ(7)ヲ得

$bc=ad$ ノ兩邊ヲ bd ニテ割レバ(8)ヲ得

$\boxed{\text{注意}}$ 上ノ八ツノ比例式ノ中一ツガ成リ立ツト

キハ他ノ七ツノ比例式ノ各モ亦成リ立ツ.

如何ニモ此等ノ比例式ノ中一ツガ成リ立テバ前節ニ述ベタルコトニヨリテ $ad=bc$ ナル等式ガ成リ立チ,從テ本節ニヨリテ他ノ七ツノ比例式ノ各ガ成リ立テバナリ.

194. 比例式ノ定理

(第一) 比例式ノ內項(或ハ外項)ヲ交換シテモ比例式ハ成リ立ツ(此定理ヲ交迭ノ理トイフ).

例ヘバ $a:b=c:d$ ナレバ $a:c=b:d$ ナリ.

如何ニモ前節ノ(1)ガ成リ立テバ(2)モ成リ立テバナリ.

(第二) 比例式ノ兩邊ニ於ケル前項ト後項トヲ同時ニ交換シテモ比例式ハ成リ立ツ(此定理ヲ反轉ノ理トイフ).

例ヘバ $a:b=c:d$ ナレバ $b:a=d:c$ ナリ.

如何ニモ前節ノ(1)ガ成リ立テバ(5)モ成リ立テバナリ.

(第三) 二ツノ比ガ相等シキ時ハ其各ノ前項ト後項トノ和ノ後項ニ對スル比モ亦相等シ(此定理ヲ合比ノ

$$\therefore\quad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\text{即チ}\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

(第四) 二ツノ比ガ相等シキ時ハ其各ノ前項ト後項トノ差ノ後項ニ對スル比モ亦相等シ(此定理ヲ分比ノ理トイフ).

例ヘバ $a:b=c:d$ ナレバ $a-b:b=c-d:d$ ナリ.

證明 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

$$\text{即チ}\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

(第五) 二ツノ比ガ相等シキ時ハ其各ノ前項ト後項トノ和ノ前項ト後項トノ差ニ對スル比モ亦相等シ.

例ヘバ $a:b=c:d$ ナレバ

$a+b:a-b=c+d:c-d$ ナリ.

證明 $a:b=c:d$ ナルニヨリ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad〔合比ノ理〕$$

$$\text{及}\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\qquad〔分比ノ理〕$$

(1)ノ兩邊ヲ夫夫(2)ノ兩邊ニテ割レバ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

195. 比例式ノ定理ヲ應用シテ解ク問題ノ例

例 1. $a:b=c:d$ ナレバ

$$ma+nb:ma-nb=mc+nd:mc-nd$$

ナルコトヲ證明セヨ.

反轉ノ理ニヨリ　$a:c=b:d$

第186節ニヨリ　$ma:mc=nb:nd$

反轉ノ理ニヨリ　$ma:nb=mc:nd$

∴ 前節(第五)ニヨリ　$ma+nb:ma-nb=mc+nd:mc-nd$

別解　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ トオケバ

$$a=bk \qquad c=dk$$

$$\therefore \quad \frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mbk+nb}{mbk-nb}=\frac{b(mk+n)}{b(mk-n)}=\frac{mk+n}{mk-n}$$

$$\text{又} \quad \frac{mc+nd}{mc-nd}=\frac{mdk+nd}{mdk-nd}=\frac{d(mk+n)}{d(mk-n)}=\frac{mk+n}{mk-n}$$

$$\therefore \quad \frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mc+nd}{mc-nd}$$

例 2. $a:b=c:d$ ナレバ $ab+cd:ab-cd=b^2+d^2:b^2-d^2$

ナルコトヲ證明セヨ.

$a:b=c:d$

第186節ニヨリ　$ab:b^2=cd:d^2$

$$\therefore \quad \frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

例 3. a, b, c ガ比例ヲナストキハ $ab+bc$ ハ a^2+b^2 ト b^2+c^2 トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

$$a:b=b:c$$

∴ 第186節ニヨリ　$ab:b^2=bc:c^2$

∴ 交迭ノ理ニヨリ　$ab:bc=b^2:c^2$

∴ 合比ノ理ニヨリ　$ab+bc:bc=b^2+c^2:c^2$

∴ 交迭ノ理ニヨリ　$ab+bc:b^2+c^2=bc:c^2$

$=b:c$

同様ニ　$a^2+b^2:ab+bc=b^2:bc=b:c$

ヲ證明スルヲ得.

$$\therefore \quad a^2+b^2:ab+bc=ab+bc:b^2+c^2$$

例 4. $a+x:b+y=a:b$ ナレバ $x:y=a:b$ ナルコトヲ證明セヨ.

交迭ノ理ニヨリ　$a+x:a=b+y:b$

∴ 分比ノ理ニヨリ　$(a+x)-a:a=(b+y)-b:b$

∴ 即チ　$x:a=y:b$

∴ 交迭ノ理ニヨリ　$x:y=a:b$

例 5. $x+2y:x-2y=x^2+2(x-2y)^2:x^2-2(x-2y)^2$ ナレバ $x:y$ 如何.

前節(第五)ニヨリ

$$\frac{(x+2y)+(x-2y)}{(x+2y)-(x-2y)}=\frac{\{x^2}{\{x^2}$$

即チ $\dfrac{2x}{4y}=\dfrac{2x^2}{4(x-2y)^2}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{y}=\dfrac{x}{(x-2y)^2}$

$\therefore\quad (x-2y)^2=xy \qquad \therefore\quad x^2-4xy+4y^2=xy$

$\therefore\quad x^2-5xy+4y^2=0 \qquad \therefore\quad (x-y)(x-4y)=0$

$\therefore\quad x-y=0 \qquad \therefore\quad \dfrac{x}{y}=1$

或ハ $x-4y=0 \qquad \therefore\quad x=4y \qquad \therefore\quad \dfrac{x}{y}=4$

例 6. $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-15}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-15}}=\dfrac{3}{7}$ ヲ解クコト.

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-15} : \sqrt{x+6}+\sqrt{x-15}=3:7$

$\therefore$ 前節(第五)ニヨリ $2\sqrt{x+6} : 2\sqrt{x-15}=10:4$

即チ $\sqrt{x+6} : \sqrt{x-15}=5:2 \qquad \therefore\quad 2\sqrt{x+6}=5\sqrt{x-15}$

$\therefore\quad 4(x+6)=25(x-15) \qquad \therefore\quad x=19$

$\boxed{\text{驗算}}$ $x=19$ トスレバ

原方程式ノ左邊$=\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{\sqrt{25}+\sqrt{4}}=\dfrac{5-2}{5+2}=\dfrac{3}{7}$.

二ツ以上ノ相等シキ比

196. <u>連比例</u> 例ヘバ $a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$ ナル如ク幾ツカノ數アリテ其第一數ト第二數トノ比，第二數ト第三數トノ比，第三數ト第四數トノ比，……ガ相等シキトキハ此等ノ數ハ<u>連比例ヲナス</u>トイフ.

197. <u>連比</u> 例ヘバ $a:b=a_1:b_1$

$b:c=b_1:c_1$

ナルトキハ之ヲ略シテ $a:b:c:\cdots\cdots=a_1:b_1:c_1:\cdots\cdots$ ト書ク. 此等號ノ一方ニアル式例ヘバ $a:b:c:\cdots\cdots$ ヲ $a, b, c, \cdots\cdots$ ノ<u>連比</u>ナリトイヒ, $a, b, c, \cdots\cdots$ ヲ連比ノ<u>項</u>トイフ.

又 $a, b, c, \cdots\cdots$ 及 $a_1, b_1, c_1, \cdots\cdots$ ニ上ノ如キ關係アルトキハ $a, b, c, \cdots\cdots$ ハ $a_1, b_1, c_1, \cdots\cdots$ ニ<u>比例ス</u>トイヒ, $a, b, c, \cdots\cdots$ ハ夫夫 $a_1, b_1, c_1, \cdots\cdots$ ニ<u>對應</u>ストイフ.

198. $a, b, c, \cdots\cdots$ ガ $a_1, b_1, c_1\cdots\cdots$ ニ比例スレバ,即チ $a:b:c:\cdots\cdots=a_1:b_1:c_1:\cdots\cdots$ ナレバ

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\cdots\cdots$$

ナリ.

$\boxed{\text{證明}}$ $a:b=a_1:b_1 \qquad \therefore\quad a:a_1=b:b_1$

又 $b:c=b_1:c_1 \qquad \therefore\quad b:b_1=c:c_1$

…………

$\therefore \quad a:a_1=b:b_1=c:c_1=\cdots\cdots$

199. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\cdots\cdots$ ニシテ $p,\ q,\ r$ ガ任意ノ數 n ガ正ノ整數ナレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}}\cdots\cdots(1)$$

ナリ,但シ $pb^n+qd^n+rf^n+\cdots\cdots\neq 0$ トス.

|證明| $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\cdots=k$ トオケバ

$$a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,\quad \cdots$$

此各ノ兩邊ヲ n 乘シ,ソコデ各ノ兩邊ニ順次ニ $p,\ q,\ r\cdots\cdots$ ヲ掛クレバ

$$pa^n=pb^nk^n,\quad qc^n=qd^nk^n,\quad re^n=rf^nk^n,\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad pa^n+qc^n+re^n+\cdots=k^n(pb^n+qd^n+rf^n+\cdots)$$

然ルニ $pb^n+qd^n+rf^n+\cdots\neq 0$ ナルヲ以テ之ヲ以テ上ノ等式ノ兩邊ヲ割レバ

$$\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=k^n$$

$$\therefore \quad \sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$$

|注意| 今述ベタルコトノ特別ナル場合トシテ次ノ重要ナル結果ヲ得.

$n=1$ トスレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{pa+qc+re+\cdots}{pb+qd+rf+\cdots}\cdots\cdots(2)$$

$n=1,\ p=q=r=\cdots=1$ トスレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}\cdots\cdots(3)$$

$$=\frac{\text{比ノ前項ノ和}}{\text{比ノ後項ノ和}}$$

此(3)ヲ加比ノ理トイフ.

|注意| 上ノ等式ハ相等シキ二ツノ比ニ付テモ當テ嵌マルコト勿論ナリ.

200. 前節ノ定理ヲ應用シテ解ク問題ノ例

例 1. $a,\ b,\ c$ ガ連比例ヲナストキハ

$ma+nb:pa+qb=mb+nc:pb+qc$ ナルコトヲ證明セヨ.

前節(2)ニヨリ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{ma+nb}{mb+nc}$

又同様ニ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{pa+qb}{pb+qc}$

$$\therefore \quad \frac{ma+nb}{mb+nc}=\frac{pa+qb}{pb+qc}$$

即チ $\quad ma+nb:mb+nc=pa+qb:pb+qc$

$$\therefore \quad ma+nb:pa+qb=mb+nc:pb+qc$$

例 2. $a,\ b,\ c,\ d$ ガ連比例ヲナストキハ $b+c$ ハ $a+b$ ト $c+d$ トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+b}{b+c} \quad 又 \quad \frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{b+c}{c+d}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+d}$$

即チ $\quad a+b:b+c=b+c:c+d$

例 3. $a:b=c:d$ ナレバ

$$ma^r+nb^r:pa^r-qb^r=mc^r+nd^r:pc^r-qd^r$$

ナルコトヲ證明セヨ.

$$a^r : b^r = c^r : d^r \qquad \therefore \quad a^r : c^r = b^r : d^r$$

∴ 前節(2)ニヨリ $\dfrac{a^r}{c^r}=\dfrac{b^r}{d^r}=\dfrac{ma^r+nb^r}{mc^r+nd^r}$

又同樣ニ $\dfrac{a^r}{c^r}=\dfrac{b^r}{d^r}=\dfrac{pa^r-qb^r}{pc^r-qd^r}$

$$\therefore \quad ma^r+nb^r : mc^r+nd^r = pa^r-qb^r : pc^r-qd^r$$

$$\therefore \quad ma^r+nb^r : pa^r-qb^r = mc^r+nd^r : pc^r-qd^r$$

例 4. $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2b-c}{2b+c}=\dfrac{c-2a}{c+2a}$ ニシテ $2a+2b+c\neq0$ ナレバ此等ノ比ノ各ハ0ナルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b-c}{2b+c}=\frac{c-2a}{c+2a}=\frac{2(a-b)+(2b-c)+(c-2a)}{2(a+b)+(2b+c)+(c+2a)}$$

$$=\frac{0}{4a+4b+2c}=\frac{0}{2(2a+2b+c)}=0 \quad [\because\ 2a+2b+c\neq0]$$

例 5. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナレバ $\dfrac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef}=\dfrac{ab+cd+ef}{b^2+d^2+f^2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{e^2}{ef}=\frac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef} \quad 〔加比ノ理〕$$

又 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{ab}{b^2}=\dfrac{cd}{d^2}=\dfrac{ef}{f^2}=\dfrac{ab+cd+ef}{b^2+d^2+f^2}$ 〔加比ノ理〕

$$\therefore \quad \frac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef}=\frac{ab+cd+ef}{b^2+d^2+f^2}$$

例 6. $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ ニシテ且ツ $c\neq0,\ a-b\neq0$ ナレバ此等ノ比ノ各ハ $\dfrac{ay-bx}{a-b}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

$\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}=k$ トオケバ

$$bz-cy=k(b-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$cx-az=k(c-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)\times a+(2)\times b$

$$(bx-ay)c=(b-a)ck$$

然ルニ $c\neq0,\ a-b\neq0$ ナルヲ以テ此兩邊ヲ $c(b-a)$ ニテ割レバ

$$k=\frac{bx-ay}{b-a}=\frac{ay-bx}{a-b}$$

例 7. 金 a 圓ヲ甲乙丙三人ニ分配シ各ノ取分ガ三ツノ數 l, m, n ニ比例スル樣(第197節ヲ見ヨ)ニナサントス,各ノ取分如何.

各ノ取分ヲ夫夫ニ x圓, y圓, z圓 トス,然ルトキハ

$$x+y+z=a$$

又 x, y, z ハ l, m, n ニ比例スルヲ以テ第198節ニヨリ

$$\therefore \quad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=\frac{x+y+z}{l+m+n}=\frac{a}{l+m+n}$$

$$\therefore \quad x=\frac{la}{l+m+n},\quad y=\frac{ma}{l+m+n},\quad z=\frac{na}{l+m+n}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} &甲ノ取分=\frac{la}{l+m+n}圓 \\ &乙ノ取分=\frac{ma}{l+m+n}圓 \\ &丙ノ取分=\frac{na}{l+m+n}圓 \end{aligned}\right\}$$

例 8. 矩形ノ相隣レル二邊ノ長サハ二ツノ數 a, b ニ比例シ其對角線ノ長サハ d 尺ナリトイフ相隣レル二邊ノ長サヲ求ム.

求ムル所ノ二邊ノ長サヲ夫夫 x尺, y尺 トスレバ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

然ルニ　　$\sqrt{x^2+y^2}=d$

$$\therefore\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore\quad x=\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

∴ 求ムル二邊ノ長サハ夫夫 $\dfrac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}$尺，及 $\dfrac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$尺ナリ.

201. 比及比例雜題

1. 次ノ式ヨリ $\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}$ ヲ計算セヨ(37年,東京高等工業).

$$\frac{3y-2x}{2x-4y}=2$$

解 與ヘラレタル式ヨリ　$3y-2x=2(2x-4y)$

$\therefore\ -2x-4x=-8y-3y\quad \therefore\ -6x=-11y\quad \therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{6}$

故ニ　$x+y:x-y=11+6:11-6\quad \therefore\ x+y:x-y=17:5.$

$$\therefore\quad \sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}=\sqrt{17}:\sqrt{5}$$

2. 比ノ前項後項ニ同一ノ數ヲ加フルトキハ壹ヨリ大ナル比ハ小サクナリ,壹ヨリ小ナル比ハ大キクナルコトヲ證セヨ(39年,海軍兵;40年,大阪高等工等).

解 與ヘラレタル比ヲ $\dfrac{a}{b}$ トシ,兩項ニ加ヘタル同一數ヲ x トセヨ. 但シ a, b, x ハ何レモ正ノ數トス. サテ

$$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+x)-a(b+x)}{b(b+x)}=\frac{x(b-a)}{b(b+x)}$$

然ルニ $b(b+x)>0,\ x>0$ ナルヲ以テ

故ニ $b-a>0$ 即チ $b>a$ 即チ $\dfrac{a}{b}<1$ ナルトキハ $\dfrac{a+x}{b+x}>\dfrac{a}{b}$

又 $b-a<0$ 即チ $b<a$ 即チ $\dfrac{a}{b}>1$ ナルトキハ $\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$

$\boxed{\text{注意}}$ 上ノ解ニ於テハ a, b, x ヲ正ノ數トセリ,然ラザレバ此問題ハ必ズシモ成リ立タズ. 例ヘバ $a=-5,\ b=-3$ ナルトキハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}>1$ ナリ. 今此比ノ兩項ニ 2 ヲ加フレバ $\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{-5+2}{-3+2}=\dfrac{-3}{-1}=3$ トナリ,原比ノ値 1 ヨリ大ナルニ其値更ニ大トナルコトアルヲ以テナリ.

3. $3x+5y-7z=0,\ 11x-13y+17z=0$ ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ(37年,海軍機關).

解 先ヅ假リニ z ヲ既知數ト見做シテ x, y ノ値ヲ求メン,即チ

第一方程式ノ兩邊ニ 11 ヲ掛クレバ　　$33x+55y-77z=0$

又 第二方程式ノ兩邊ニ 3 ヲ掛クレバ　$33x-39y+51z=0$

ソコデ引キ算ヲ行ヘバ　　$94y-128z=0$

$\therefore\ y=\dfrac{128}{94}z=\dfrac{64}{47}z$　之ヲ第一方程式ニ代用スレバ

$3x+\dfrac{320}{47}z-7z=0\quad \therefore\ 141x+320z-329z=0$

$\therefore\ 141x=9z\quad \therefore\ x=\dfrac{9}{141}z=\dfrac{3}{47}z\quad \therefore\ x:z=3:47$

又 $y=\dfrac{64}{47}z$ ナルヲ以テ　$y:z=64:47$

$$\therefore\quad x:y:z=3:64:47$$

4. $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+c-b}{b+c-a}=\dfrac{a+b+c}{2a+b+2c}$ ナルトキ $a:b$ 及ビ $b:c$ ノ値ヲ求ム(41年,第六高等).

解 $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+c-b}{b+c-a}=\dfrac{2b+(a+c-b)}{2(a+b)+(b+c-a)}=\dfrac{a+b+c}{a+3b+c}$

然ルニ $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+b+c}{2a+b+2c}\quad \therefore\ \dfrac{a+b+c}{a+3b+c}=\dfrac{a+b+c}{2a+b+2c}$

$\therefore\ a+3b+c=2a+b+2c\quad \therefore\ 2b=a+c\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

(1)ヨリ $c=2b-a$ 之ヲ $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+c-b}{b+c-a}$ ニ代用スレバ

$\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+2b-a-b}{b+2b-a-a}=\dfrac{b}{3b-2a}\quad \therefore\ a+b=3b-2a$

$\because\ 3a=2b$ ……………(2) $\therefore\ a:b=2:3$

又(1)ヨリ $a=2b-c$ 之ヲ(2)ニ代用スレバ

$3(2b-c)=2b$ $\therefore\ 4b=3c$ $\therefore\ b:c=3:4$

答 $a:b=2:3,\quad b:c=3:4$

5. 一時間拾哩ノ速サヲ以テ鐵道線路ニ沿ヒテ騎行スル人アリ,初メ一時間五十哩ヲ走ル急行列車ニ追ヒ越サレ其後又一時間四十哩ヲ走ル普通列車ニ出會セシニ各列車ノ全長ガ此人ノ傍ヲ通過セシニ要セシ時間ハ同一ナリトイフ,各列車ノ長サノ比ヲ求ム(36年,東京高等商業).

解 急行列車ノ長サヲx哩(計算ノ便利上哩ヲ單位トス),普通列車ノ長サヲy哩トスレバ急行列車ガ騎行者ヲ追ヒ越スニ要スル時間ハ $\frac{x}{50-10}$時$=\frac{x}{40}$時, 普通列車ガ同シ人ノ傍ヲ通過スルニ要スル時間ハ $\frac{y}{40+10}$時$=\frac{y}{50}$時 ナリ. 然ルニ此時間ハ相等シキヲ以テ

$\frac{x}{40}=\frac{y}{50}$ $\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$ 答 4 : 5

6. 若シ $m:n=p:q$ ナルトキハ

$m^2+n^2:p^2+q^2=m^2:p^2$ ナルコトヲ證セヨ(36年,海軍兵).

解 與ヘラレタル比例ヨリ $m^2:n^2=p^2:q^2$

$n^2:m^2=q^2:p^2$ (反轉) $\therefore\ n^2+m^2:m^2=q^2+p^2:p^2$ (合比)

$\therefore\ m^2+n^2:p^2+q^2=m^2:p^2$ (交迭)

7. 若シ $a:b::c:d$ ナルトキハ

$a-c:b-d::\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$ ナルコヲ證セヨ(37年,海軍兵).

解 $a:b=c:d$ $\therefore\ a:c=b:d$ (交迭)

$a-c:c=b-d:d$ (分比), $\therefore\ a-c:b-d=c:d$ (交迭)……(1)

又 $a:b=c:d$ $\therefore\ a^2:b^2=c^2:d^2$

$\therefore\ a^2:c^2=b^2:d^2$ (交迭) $\therefore\ a^2+c^2:c^2=b^2+d^2:d^2$ (合比)

$\therefore\ a^2+c^2:b^2+d^2=c^2:d^2$ (交迭) $\therefore\ \sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=c:d$ ……(2)

(1),(2)ヨリ $a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$

8. 若シ $a:b=c:d$ ナルトキハ,次ノ比例式ノ成立スルコトヲ證明セヨ(33年,第六高等).

$$a:b=\sqrt[n]{pa^n+qc^n}:\sqrt[n]{pb^n+qd^n}$$

解 第199節ノ比ガ二ツノ場合ナリ.

9. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{b}{d}\times\frac{a}{c}$ ナルコトヲ證明セヨ(41年,東京高等師範).

解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$ (交迭,加比)

$\therefore\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$ ……………(1) 及 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}$ ……………(2)

(1)×(2) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{b}{d}\times\frac{a}{c}$

10. a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ

$$\frac{a+c}{a-c},\ \frac{b+d}{b-d},\ \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2},\ \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

モ亦比例ヲナスコトヲ證明セヨ(40年,長崎高等商業).

解 $a:b=c:d$ $\therefore\ a:c=b:d$ (交迭)……………(1)

$\therefore\ a+c:a-c=b+d:b-d$〔第194節(第五)〕 $\therefore\ \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$ …………(2)

又(1)ヨリ $a^2:c^2=b^2:d^2$

$\therefore\ a^2+c^2:a^2-c^2=b^2+d^2:b^2-d^2$ (第194節) $\therefore\ \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ ……(3)

(2)ヨリ $\frac{a+c}{a-c}:\frac{b+d}{b-d}=1$ (3)ヨリ $\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=1$

$\therefore\ \frac{a+c}{a-c}:\frac{b+d}{b-d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

11. 別解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ $a=bk$, $c=dk$ (k 常数)

$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}=\frac{\sqrt{b^2k^2+d^2k^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}=\sqrt{\frac{(b^2+d^2)k^2}{b^2+d^2}}=k$

$\frac{\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}}{\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}}=\sqrt{\frac{bdk^2+\frac{d^3k^3}{bk}}{bd+\frac{d^3}{b}}}=\sqrt{\frac{bdk^3+d^3k^3}{bdk+bdk}}=\ldots=k$

11. $a:b=c:d$ ナラバ

$$\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$$

ナリ,其證ヲ問フ(37年,東京商船).

解 $a:b=c:d$ ∴ $a^2:b^2=c^2:d^2$

∴ $a^2:c^2=b^2:d^2$ (交迭) ∴ $a^2+c^2:c^2=b^2+d^2:d^2$ (合比)

∴ $a^2+c^2:b^2+d^2=c^2:d^2$ (交迭) ∴ $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=c:d$ ⋯⋯(1)

又 $a^2:c^2=b^2:d^2$ ノ第一ノ比ノ兩項ニ $\frac{c}{a}$ ヲ掛クレバ $ac:\frac{c^3}{a}$ トナリ,第二ノ比ノ兩項ニ $\frac{d}{b}$ ヲ掛クレバ $bd:\frac{d^3}{b}$ トナル.

∴ $ac:\frac{c^3}{a}=bd:\frac{d^3}{b}$ ∴ $ac+\frac{c^3}{a}:\frac{c^3}{a}=bd+\frac{d^3}{b}:\frac{d^3}{b}$ (合比)

∴ $ac+\frac{c^3}{a}:bd+\frac{d^3}{b}=\frac{c^3}{a}:\frac{d^3}{b}$⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2)

サテ $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$, 然ルニ $a:b=c:d$ ∴ $b:a=d:c$

サテ $\frac{c^3}{a}:\frac{d^3}{b}$ ハ $c^3:d^3$ ト $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ トノ複比ニ等シ.

然ルニ $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$ 又 $b:a=d:c$

∴ $\frac{c^3}{a}:\frac{d^3}{b}$ ハ $c^3:d^3$ ト $\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}\text{ ニ等シキ}\right)d:c$ トノ複比即チ $c^3d:d^3c=c^2:d^2$ ニ等シ. 故ニ(2)ハ次ノ如ク書クヲ得.

∴ $ac+\frac{c^3}{a}:bd+\frac{d^3}{b}=c^2:d^2$ ∴ $\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}=c:d$⋯⋯(3)

(1)ト(3)トヨリ $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$

12. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$

ナラバ $a:b=c:d$ ナルコトヲ證明セヨ(35年,千葉醫學專門).

解 原式ヨリ次ノ比例ヲ得.

$a+b+c+d:a+b-c-d=a-b+c-d:a-b-c+d$ (第198節)

∴ $2(a+b):2(c+d)=2(a-b):2(c-d)$ 〔第10[illegible]節(第[illegible])〕

∴ $a+b:c+d=a-b:c-d$ ∴ $a+b:a-b=c+d:c-d$ (交迭)

∴ $2a:2b=2c:2d$ 〔第194節(第五)〕 ∴ $a:b=c:d$

13. $$(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$$
$$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$$

ナルトキハ下式ヲ證セヨ(41年,東京商船;43年,神戸高等商業).

$$bc:ad=ps:qr$$

解 前問ト同様ニシテ $pa:qb=rc:sd$ ヲ得.

∴ $pasd=qbrc$ ∴ $ps\,ad=qr\,bc$ ∴ $bc:ad=ps:qr$

14. x ト y トノ比ガ $x+z$ ト $y+z$ トノ比ノ二乘比ニ等シキトキハ z ハ x ト y トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ 但シ,x ハ y ニ等シカラザルモノトス(38年,東京高等商業)

解 $x:y=(x+z)^2:(y+z)^2$ ∴ $x(y+z)^2=y(x+z)^2$

∴ $x(y^2+2yz+z^2)=y(x^2+2xz+z^2)$ ∴ $xz^2+xy^2-x^2y-z^2y=0$

∴ $z^2(x-y)-xy(x-y)=0$ ∴ $(z^2-xy)(x-y)=0$

然ルニ $x-y\neq0$ ∴ $z^2-xy=0$ 即チ $z^2=xy$ ∴ $x:z=z:y$

15. $(a+b)^3:(a-b)^3::b+c:b-c$ ナルトキ $a:b::\sqrt{2a-c}:\sqrt{c}$ ナルコトヲ證セ(34年,陸軍士官候補生).

解 與ヘラレタル比例ヨリ $(a-b)^3(b+c)=(a+b)^3(b-c)$

∴ $(a-b)^3b+(a-b)^3c=(a+b)^3b-c(a+b)^3$ ∴ $2c(a^3+3ab^2)=4ab^3$

∴ $c=\frac{2ab^3}{a^3+3ab^2}$ ∴ $2a-c=2a-\frac{2ab^3}{a^3+3ab^2}=\frac{2a^3}{a^2+b^2}$

∴ $2a-c:c=\frac{2a^3}{a^2+b^2}:\frac{2ab^2}{a^2+b^2}=2a^3:2ab^2=a^2:b^2$ ∴ $a:b=\sqrt{2a-c}:\sqrt{c}$

16. $a:b=c:d$ ナルトキ $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$ ナルコトヲ證明セヨ(39年,農科大學實科).

解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ トオケバ $a=bk,\ c=dk$

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}=\frac{b^3k^3}{b}+\frac{b^3}{bk}=b^2k^3+\frac{b^2}{k}=\frac{b^2}{k}(k^4+1) \quad 又 \quad \frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=\frac{d^2}{k}(k^4+1)$$

$$\therefore \quad \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=\frac{b^2}{k}(k^4+1):\frac{d^2}{k}(k^4+1)=b^2:d^2 \cdots\cdots(1)$$

又 $$ab:cd=bk.b:dk.d=b^2k:d^2k=b^2:d^2 \cdots\cdots(2)$$

(1),(2)ニヨリテ $$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$$

17. $abcd(a+b+c+d)^2=(bcd+cda+dab+abc)^2$ ヲ證セヨ. 但シ $a:b::c:d$ ナリ(43年,盛岡高等農林).

解 $a:b::c:d$ ナルヲ以テ $ad=bc$

$$\therefore \quad abcd=ad.bc=ad.ad=a^2d^2 \quad 又ハ \quad abcd=ad.bc=bc.bc=b^2c^2$$

$$\therefore \quad abcd(a+b+c+d)^2=a^2d^2(a+b+c+d)^2=[ad(a+b+c+d)]^2$$
$$=(ad.a+ad.b+ad.c+ad.d)^2$$

此括弧内ノ第一項,第四項ノ ad ヲ之ニ等シキ bc ニ換フレバ

$$abcd(a+b+c+d)^2=(bca+adb+adc+bcd)^2=(bcd+cda+dab+abc)^2$$

18. 若シ $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキハ下式ヲ證セ(33年,第二高等;41年,盛岡高等農林;42年,神戸高等商業).

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$

解 與ヘラレタル式ノ等號ニテ結合セラレタル各式ヲ abc ニテ割レバ

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ca}=\frac{x+y}{ab}$$

ソコテ第三,第二ノ二ツノ比,第一,第三ノ二ツノ比,第二,第一ノ二ツ

ノ比ノ各組ニツキ其前項ノ差ヲ前項トシ,後項ノ差ヲ後項トスル比ヲ作レバ其各ハ元ノ各比ニ等シキヲ以テ又互ニ相等シ,即チ

$$\frac{x+y-(z+x)}{ab-ca}=\frac{y+z-(x+y)}{bc-ab}=\frac{z+x-(y+z)}{ca-bc}$$

$$\therefore \quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$

19. 若シ $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキハ x, y, z ノ比如何. 又 $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ トナルコトヲ證明セヨ(40年,高等).

解 $a(y+z)=b(z+x)$ $\quad\therefore\quad bx-ay-(a-b)z=0 \cdots\cdots(1)$

又 $b(z+x)=c(x+y)$ $\quad\therefore\quad (b-c)x-cy+bz=0 \cdots\cdots(2)$

$(1)\times c-(2)\times a$ $\quad \{bc-(b-c)a\}x-\{(a-b)c+ab\}z=0$

$\therefore\quad (bc+ca-ab)x=(ca+ab-bc)z \quad\therefore\quad \frac{x}{ca+ab-bc}=\frac{z}{bc+ca-ab}$

同樣ニ(1),(2)ヨリ z ヲ消去スレバ $\quad \frac{x}{ca+ab-bc}=\frac{y}{ab+bc-ca}$

$$\therefore \quad x:y:z=ca+ab-bc:ab+bc-ca:bc+ca-ab$$

後ノ部分ハ前問ニ同ジ.

20. $\frac{x+y}{cx+ay}=\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{bz+cx}$ ナルトキハ上ノ各分數ハ $\frac{3}{a+b+c}$ ニ等シキコトヲ證セヨ(43年,各醫學專門).

解 與ヘラレタル各ノ比ヲ k トスレバ

$$k=\frac{z+x+(x+y)-(y+z)}{bz+cx+(cx+ay)-(ay+bz)}=\frac{2x}{2cx}=\frac{1}{c}$$

同樣ニ第一,第二ノ兩比ノ前項,後項ノ和ヨリ夫夫第三ノ比ノ兩項ヲ引キ,第二,第三ノ兩比ノ前項,後項ノ和ヨリ夫夫第一ノ比ノ兩項ヲ引ケバ $k=\frac{1}{a}$ 及 $k=\frac{1}{b}$ ヲ得.

$$\therefore \quad k=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{3}{a+b+c}$$

21. $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ ニシテ a, b, c ガ實數ナレバ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ナリ其證ヲ問フ(34年,東京商船;39年,水產講習所).

解 與ヘラレタル各比ヲ k トスレバ

$$ay-bx=ck,\qquad cx-az=bk,\qquad bz-cy=ak$$

此各ヲ順次ニ $ab,\ ac,\ bc$ ニテ割レバ

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=k\frac{c}{ab},\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\frac{b}{ca},\quad \frac{z}{c}-\frac{y}{b}=k\frac{a}{bc}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此三ツノ等式ヲ邊邊相加フレバ,左邊ノ和ハ0トナル,即チ

$$0=k\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ca}+\frac{a}{bc}\right)=k\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ a, b, c ハ何レモ實ナルヲ以テ a^2, b^2, c^2 ハ何レモ正ナリ,從テ $a^2+b^2+c^2$ モ亦正ナリ,故ニ $k=0$ ナラザレバ(2)ハ成リ立ツ能ハズ.

$\therefore\ k=0$ 從テ(1)ヨリ

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\qquad \therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

22. 若シ $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$ ナラバ次ノ式ヲ得ルコトヲ證セヨ(31年,海軍兵).

(i) $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(ll'+mm'+nn')^2$

(ii) $\dfrac{l^3}{l'^2}+\dfrac{m^3}{m'^2}+\dfrac{n^3}{n'^2}=\dfrac{(l+m+n)^3}{(l'+m'+n')^2}$

解 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}=k$ トオケバ $l=kl',\ m=km',\ n=kn'$

$$\therefore\ (l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(k^2l'^2+k^2m'^2+k^2n'^2)(l'^2+m'^2+n'^2)$$
$$=k^2(l'^2+m'^2+n'^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又
$$(ll'+mm'+nn')^2=(kl'l'+km'm'+kn'n')^2$$
$$=\{k(l'^2+m'^2+n'^2)\}^2=k^2(l'^2+m'^2+n'^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2)ニヨリテ $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(ll'+mm'+nn')^2$

コレ(i)ノ證明ナリ.

$ll'+mn'+$

次ニ
$$\frac{l^3}{l'^2}+\frac{m^3}{m'^2}+\frac{n^3}{n'^2}=\frac{k^3l'^3}{l'^2}+\frac{k^3m'^3}{m'^2}+\frac{k^3n'^3}{n'^2}=k^3(l'+m'+n')\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又
$$\frac{(l+m+n)^3}{(l'+m'+n')^2}=\frac{(kl'+km'+kn')^3}{(l'+m'+n')^2}=k^3(l'+m'+n')\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3),(4)ニヨリテ $\dfrac{l^3}{l'^2}+\dfrac{m^3}{m'^2}+\dfrac{n^3}{n'^2}=\dfrac{(l+m+n)^3}{(l'+m'+n')^2}$

コレ(ii)ノ證明ナリ.

23. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ナルトキハ

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$

ナルコトヲ證セヨ(34年,東京郵便電信;42年,東北帝國大學農科).

解 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}$ $\quad\therefore\ x(c+a-b)=y(b+c-a)$

$\therefore$ $ax-(b-c)x=by+(c-a)y$

$\therefore$ $(b-c)x+(c-a)y=ax-by\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

同樣ニ $(c-a)y+(a-b)z=by-cz\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

及 $(a-b)z+(b-c)x=cz-ax\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)+(2)+(3) $2\{(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z\}=0$

$\therefore$ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

24. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ ナルトキハ $x+y+z=0$ ナルコトヲ示シ各分數ハ $\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$ ニ等シキコトヲ證セヨ(42年,第一乃至第六及第八高等).

解 $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$ トオケバ

$$y+z=k(b-c),\quad z+x=k(c-a),\quad x+y=k(a-b)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此三ツノ等式ヲ邊邊相加フレバ

$$2(x+y+z)=k(b-c+c-a+a-b)=k\times 0=0\qquad \therefore\ x+y+z=0$$

又 $x+y+z=0$ ノ兩邊ヨリ順次ニ(1)ノ各ノ兩邊ヲ引ケバ

$$x=-k(b-c),\qquad y=k(a-c),\qquad z=-k(a-b)$$

$$xyz=k^3(a-b)(a-c)(b-c)\qquad \therefore\quad k^3=\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\therefore\qquad k=\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$$

25. $\dfrac{bz+cy}{b-c}=\dfrac{cx+az}{c-a}=\dfrac{ay+bx}{a-b}$　ナルトキハ

$$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$$

ナルコトヲ證セヨ(43年,第一乃至第六及第八高等).

解　與ヘラレタル各比ヲkニ等シトオケバ

$$bz+cy=k(b-c),\qquad cx+az=k(c-a),\qquad ay+bx=k(a-b)$$

此三ツノ等式ヲ邊邊加ヘ合スレバ

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=k(b-c+c-a+a-b)=k\times 0=0$$

ソコデ兩邊ニ $\underline{ax+by+cz\ ヲ}$ 加フレバ

$$(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z=ax+by+cz$$

$$\therefore\qquad (a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$$

26. $\dfrac{l}{x^2-yz}=\dfrac{m}{y^2-zx}=\dfrac{n}{z^2-xy}$　ナラバ

$lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$　ナルコトヲ證セヨ(43年陸軍士官候補生).

解　與ヘラレタル各比ヲkトオケバ

$$l=k(x^2-yz),\qquad m=k(y^2-zx),\qquad n=k(z^2-xy)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此三ツノ等式ノ兩邊ニ夫夫$\underline{x,\ y,\ z}$ヲ掛ケテ之ヲ加ヘ合スレバ

$$lx+my+nz=k(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$=k(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ(1)ナル三ツノ等式ヲ邊邊加ヘ合スレバ

$$l+m+n=k(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

從テ(2)ノ右邊ハ　$(l+m+n)(x+y+z)$　ニ等シ.

$$\therefore\qquad lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$$

變　　量*

202.　二ツ以上ノ量ガ相伴ヒテ變化スル場合極メテ多シ,例ヘバ船ガ航走スル時間ト其間ニ行キタル航路ノ長サトハ相伴ヒテ變化スルガ如シ.

今次節以下ニ於テ此種ニ屬スル簡單ナル二三ノ場合ニツキテ其量ノ値ノ間ノ關係ヲ考フベシ.

203. 互ニ比例スル二ツノ變量

相伴ヒテ變化スル二ツノ量(X, Y)ノ任意ノ相對應スル數値(卽チ此等ノ値ヲ表ス數x, y)ノ比ガ不易ナルトキハ此二量ハ互ニ比例ストイフ.

卽チ　$\dfrac{x}{y}=k$　(コヽニkハ常數)

從テ　$x=ky$

ナレバx及yヲ夫夫ニ數値トスル二量X, Yハ互ニ比例スドイフ.

例ヘバ同ジ速サニテ走ル汽車ガ行ク距離ハ夫レガ走リタル時間ニ比例ス,何トナレバ毎時ノ速サ30哩ナラバ2時間ニハ60哩,3時間ニハ90哩ヲ走リ其行キタル哩數ト夫レガ走リタル時間數トノ比ハ

$30:1=60:2=90:3=\cdots=30$　ニシテ不易ナレバナリ.

---

*初メテ代數學ヲ學ブ者ハ本章ヲ略スルモ可ナリ.

注意1 　XガYニ比例スルコトヲ $x \propto y$ ト書クコトアリ,コレニ因テX,Yノ相對應スル數値ヲ夫夫 x, y トスレバ $x \propto y$ ト書クモ $x=ky$(kハ常數)ト書クモ同ジコトナリ.

注意2 　或量Aノ數値(a)ト今一ツノ量Bノ之ニ對應スル數値(b)ノ平方トノ比ガ不易ナルトキ卽チ $a=kb^2$〔コヽニkハ常數〕ナルトキハAハBノ平方ニ比例ストイヒ,之ヲ $A \propto B^2$ ト書クコトアリ. 其他モ之ニ準ズ.

注意3 　$x \propto y$ 及 $z^2 \propto u^3$ ノ如キ互ニ比例スル變量ノ問題ハ或常數ヲ表ス文字例ヘバkヲ用ヒテ之ヲ夫夫 $x=ky$ 及 $z^2=ku^3$ ナル等式ニ書キ換ヘ,然ル後之ヲ解クガ便利ナリ. 次例ニ付キテ見ルベシ.

例1. $x \propto y$ ニシテ $x=2$ ナルトキ $y=3$ ナレバxトyトノ間ニ如何ナル等式ガ成リ立ツカ.

$$x=ky \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此kノ値ヲ決定スルタメニ $x=2, y=3$ トオケバ

$$2=3k \qquad \therefore \quad k=\frac{2}{3}$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$x=\frac{2}{3}y \qquad \therefore \quad 3x=2y$$

例2. $(x+1)^2 \propto y^3$ ニシテ $x=2$ ナルトキ $y=2$ ナレバx, y間ノ關係如何.

$$(x+1)^2=ky^3$$

トシ　$x=2,\ y=2$ トオケバ

$$(2+1)^2=k\times 2^3$$

$$\therefore \quad 9=8k \qquad \therefore \quad k=\frac{9}{8}$$

$$\therefore \quad (x+1)^2=\frac{9}{8}y^3 \qquad \therefore \quad 8(x+1)^2=9y^3$$

例3. $x \propto y$ 又 $x \propto z$ ナレバ $y \propto z$ ナルコトヲ證明セヨ.

$x=ky,\ x=k'z$〔コヽニk及k'ハ常數〕

$$\therefore \quad ky=k'z \qquad \therefore \quad y=\frac{k'}{k}z$$

然ルニ $\frac{k'}{k}$ ハ常數ナリ.

$$\therefore \quad y \propto z$$

例4 　或職工12日間ノ賃金18圓ナリトイフ,此職工ノ勞働日數ト其賃金トノ關係ヲ求メヨ.

勞働日數ト賃金トハ比例スルヲ以テ日數ヲdトシ所得ノ賃金ヲyトスレバ次ノ等式アリ.

$$d=ky$$

$d=12$ ナルトキ $y=18$ ナルヲ以テ

$$12=k\times 18 \qquad \therefore \quad k=\frac{2}{3}$$

故ニ此職工ノ勞働日數ト所得ノ賃金ヲ圓ヲ單位トシテ表シタル者トノ間ニハ次ノ關係アリ.

$$d=\frac{2}{3}y$$

ソコデ例ヘバ此職工ガ17日間働カバ其賃金ハ

$$17=\frac{2}{3}y \quad ヨリ \quad y=25.5$$

卽チ25圓50錢ナルコトヲ知ルベシ,又此職工ガ賃金

15圓ヲ得レバ其勞働日數ハ

$$d=\frac{2}{3}\times 15=10$$

即チ10日ナルコトヲ知ルヲ得.

注意 算術ニ於テ此初メノ方ノ問題ヲ解クニハ

$$12^{\text{日}}:17^{\text{日}}=18^{\text{円}}:x^{\text{圓}}$$

ニ依リテxヲ求ムルナリ. 是レ算術ニ於テハ先ヅ量其者ノ間ノ關係ヲ定メ後ニ其數値ニツキテ考ヘ,代數學ニ於テハ最初ヨリ量ノ數値ノミニ付テ考フルニ依リ解法ニ此ノ如キ差ヲ生ズルニ到レルナリ.

例 5 球ノ體積(ヲ表ス數)ハ其半徑(ヲ表ス數)ノ立方ニ比例スル者ナリ. 今半徑ノ長サガ夫夫3呎,4呎及5呎ナル三ツノ球ノ體積ノ和ニ等シキ體積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

球ノ體積ノ數値(立方呎ヲ單位トシテノ)ヲv,其半徑ノ數値(呎ヲ單位トシテノ)ヲrトスレバ

$$v=kr^3$$

ナリ. ソコデ半徑ガ夫夫3呎,4呎,5呎ナル三ツノ球ノ體積ノ和ヲ立方呎ニテ表シタル數ハ

$$k.3^3+k.4^3+k.5^3=k(3^3+4^3+5^3)=216k$$

ナリ. 故ニ今求メントスル半徑ヲx呎トスレバ,此體積ハkx^3立方呎ニ等シ.

$$\therefore\quad 216k=kx^3$$

$$\therefore\quad x^3=216$$

然ルニxハ實數ナルヲ以テ

$$x=\sqrt[3]{216}=6$$

故ニ求ムル所ノ球ノ半徑ハ6呎ナリ.

204. 互ニ逆比例(又ハ反比例)スル二ツノ變量 相伴ヒテ變化スル二ツノ量ノ中ノ一ツノ數値(x)ガ之ニ對應スル今一ツノ量ノ數値(y)ノ逆數ニ比例スルトキハ此二ツノ量ハ互ニ逆比例又ハ反比例ストイフ.

即チ $$x=k\left(\frac{1}{y}\right) \quad 〔コヽニ\ k\ ハ常數〕$$

從テ $$xy=k$$

ナレバ,x及yヲ夫夫ニ數値トスル二量X,Yハ互ニ逆比例ストイフ.

例ヘバ同ジ速サニテ歩ク人ガ或一定ノ距離ヲ行クニ要スル時間ハ其速サニ反比例ス,何トナレバ歩キタル距離ヲs哩,毎時ノ速サヲv哩,之ニ要シタル時間ヲt時トスレバ

$$vt=s \quad 〔コヽニ\ s\ ハ常數〕$$

ナレバナリ.

注意1 此逆比例トイフ言葉ニ對シ,比例ストイフコトヲ正比例ストイフコトアリ.

注意2 XトYトガ互ニ逆比例スルコトヲ$x\propto\frac{1}{y}$ト書クコトアリ.

注意3 $x^2\propto\frac{1}{y}$ ノ如キ反比例ニ關スル問題ハ或常數ヲ表ス文字例ヘバ k ヲ用ヒテ之ヲ $x^2y=k$ ナル等式ニ換ヘ,然ル後之ヲ解クガ便利ナリ.

例 2. $x\propto\frac{1}{y}$ ニシテ $x=7$ ノトキ $y=4$ ナレバ $y=12$ ニ對應スル x ノ値如何.

$$xy=k\dots\dots\dots\dots(1)$$

トシ $x=7,\ y=4$ トオケバ

$$k=7\times4$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$xy=7\times4\dots\dots\dots\dots(2)$$

此(2)ニ於テ $y=12$ トオケバ

$$12x=7\times4\qquad\therefore\quad x=\frac{7\times4}{12}=\frac{7}{3}$$

之ガ $y=12$ ニ對應スル x ノ値ナリ.

例 1. a^2 ガ b^2 ニ反比例シ, $a=2,\ b=3$ ガ相對應スル一組ノ値ナレバ, a 及 b 間ノ關係式如何.

$$a^2b^2=k\dots\dots\dots\dots(1)$$

トオキ $a=2,\ b=3$ トオケバ

$$k=2^2\times3^2=8\times9=72$$

之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$a^2b^2=72$$

ヲ得. 之レ求ムル所ノ關係式ナリ.

例 3. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\propto\frac{1}{x+y}$ ナレバ x^2+y^2 ハ xy ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=k\quad〔コヽニ\ k\ ハ常數〕$$

$$\therefore\quad\frac{(x+y)^2}{xy}=k$$

$$\therefore\quad(x+y)^2=kxy\quad 卽チ\quad x^2+2xy+y^2=kxy$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=kxy-2xy=(k-2)xy$$

然ルニ $k-2$ ハ常數ナリ.

$$\therefore\quad(x^2+y^2)\propto xy$$

例 4. 工夫15人ニテ或工事ヲ完成スルニ16日ヲ要ストイフ,之ト同ジ腕前ノ工夫ガ此工事ヲ完成スルニ要スル人數ト日數トノ關係ヲ求メヨ.

一定ノ工事ヲナスニ要スル工夫ノ數ト日數トハ反比例スルヲ以テ人數ヲ m, 日數ヲ d トスレバ

$$md=k$$

$m=15$ トスルトキ $d=16$ ナルヲ以テ

$$15\times16=k$$

$$\therefore\quad k=240$$

故ニ此工事ヲ成スニ要スル人數ト日數トノ間ニハ次ノ關係アリ.

$$md=240$$

ソコデ例ヘバ工夫ノ數ガ20人ナラバ要スル日數ハ

$$20d=240\qquad ヨリ\qquad d=12$$

卽チ12日ナルコトヲ知ル.

又日數ガ48日ナラバ要スル工夫ノ數ハ

$$48m=240\qquad ヨリ\qquad m=5$$

即チ5人ナルコトヲ知ル.

注意 算術ニ於テ此初メノ方ノ問題ヲ解クニハ

$$15^{\text{人}}:20^{\text{人}}=x^{\text{日}}:16^{\text{日}}$$

ニヨリテxヲ求メ,又後ノ方ノ問題ヲ解クニハ

$$16^{\text{日}}:48^{\text{日}}=x^{\text{人}}:15^{\text{人}}$$

ニ依リテxヲ求ムルコト學生ノ熟知スル所ナリ.

斯ク算術ニ於ケル解法ト代數學ニ於ケル解法トノ別カルヽ所以ハ前節例4ノ注意ニ述ベタルニ同ジ.

例5. 氣體ノ容積ハ温度ガ同ジケレバ其壓力ニ反比例ストイフ. 今15氣壓ノ時ノ體積ガ20立方糎ナレバ12氣壓ノ時ノ體積如何.

今氣壓ノ數値ヲpトシ之ニ對應スル體積ノ數値ヲvトスレバ

$$pv=k$$

$p=15$ ナルトキ $v=20$ ナルヲ以テ

$$k=15\times 20=300$$

$$\therefore\quad pv=300$$

ソコデ $p=12$ トスレバ

$$12v=300 \qquad \therefore \qquad v=\frac{300}{12}=25$$

故ニ求ムル所ノ體積ハ25立方糎ナリ.

205. 二ツ以上ノ變量ニ伴ヒテ變化スル量

二ツ以上ノ變量例ヘバX,Y,Zニ伴ヒテ變化スル一ツノ量Uアルトキ此等ノ量ノ任意ノ一組ノ數値x,

y,zニ對應スルUノ數値ヲuトシ,kヲ一ツノ常數トセンニ,例ヘバ

$$u=\frac{kx}{yz^2}$$

ノ如キ關係アルトキハ,若シXノミ變化シテY,Zハ不易ナルトキハ第203節ニヨリXトUトハ互ニ比例スベク,次ニYノミ變化スルトキハ第204節ニヨリテUトYトハ互ニ反比例スベシ.又Zノミ變化スルトキハz^2ヲ量ノ如ク取扱フトキ之トUトハ互ニ反比例スベシ,此等ノ事實ヲ言ヒ表ス爲ニUハXニ正比例シ,Yニ反比例シ,Zノ平方(Zノ數値ノ平方ノ略語)ニ反比例ストイヒ,之ヲ $U\propto\frac{X}{YZ^2}$ ナル記號ニテ表スコトアリ.

例1. xガy^2ニ反比例シ,zニ比例スルトキ, $x=4$, $y=2$, $z=4$ ガ一組ノ相對應スル値ナレバ $y=3$, $z=2$ ニ對應スルxノ値如何.

$x=\frac{kz}{y^2}$ ニ於テ $x=4$, $y=2$, $z=4$ トオケバ

$$4=\frac{k\times 4}{2^2} \qquad \therefore\quad k=4$$

$\therefore\quad x=\frac{4z}{y^2}$ ヲ得. ソコデ此等式ニ $y=3$, $z=2$ トオケバ

$x=\frac{4\times 2}{3^2}=\frac{8}{9}$ ヲ得. 之レ求ムル所ノ値ナリ.

例2. 工夫18人ガ若干日間ニ長サ50米,幅1間半,深サ5尺ノ溝ヲ堀ルトイフ,同ジ日數ノ間ニ長サ70米,幅2間,深サ$6\frac{1}{4}$尺ノ溝ヲ堀ルニハ何程ノ工夫ヲ要スルカ.

人數ハ長サ,幅,深サノ各ニ比例スルヲ以テ,日數ガ變