遵照三十年修正課程標準編著

新中國教科書

高級中學

立體解析幾何學

（第三學年甲組用）

編著者　余介石

校訂者　何　魯

正中書局印行

何奎垣先生序

近年出版界，對于理科書籍，無論中等高等，皆較前數年爲多，且有進步，實爲可喜現象。數學亦然。至著者，則以余君介石，爲最努力之一人。彼之學問經驗，旣足以副之，故其所譯著，皆透徹豐富。讀其所譯 Bôcher 之高等代數通論，可爲明證。余君在重慶大學教課之餘，又成三角，解析幾何各書，經余詳加參訂，其內容具如編輯要旨，玆不贅述。余之所以樂爲介紹者，知其必大有裨益於讀者也。今再略貢其愚於讀者，以爲自修之助。即在三角，宜注意於用助角變和爲乘積法，對數不適用於加法故。又宜注意三角方程式之通解，三角函數皆有週期性故在解析幾何，則宜與幾何平行探討。幾何定理，可以解析幾何證之；解析幾何問題，須先用幾何眼光觀察之，後再用解析方法，二者可互相發明故。於是錐線（包含圓，橢圓，雙曲線，拋物線，及一組之二直線）性質，務須從純粹幾何方面研究之，此吾國高中學生之所需也。是爲序。

民國二十有五年四月　何魯識於學海室

編輯大意

（一） 本書遵照三十年教育部頒布之修正高級中學數學課程標準編輯，適合高級中學第三學年甲組之用。

（二） 本書編制與平面解析幾何學緊相銜接，仍以美國人 Smith, Gale, Neelley 三氏合編的新解析幾何學一書為藍本，並參考下列各書，有所損益。

(1) Osgood-Graustein : Plane and Solid Analytic Geometry.

(2) Smith-Gale : Elements of Analytic Geometry（此書有著者和龔君譯本二種，前者係建國書局印行，後者係商務印書館印行）。

(3) Wentworth-Smith-Siceloff : Analytical Geometry（有徐尉平君譯本，南京書店印行）。

(4) Synder-Sisam : Analytic Geometry of Space（有倪可權劉漢三諸君譯本，印可印行）。

(5) Dresden : Solid Analytical Geometry and Determinants.

(6) Bell: An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of Three Dimensions.

(7) Papelier: Precis de Géométrie Analytique.

(8) Hess: Analytische Geometrie.

(9) 余介石:解析幾何學講義(中央大學油印本)。

(10) 胡少襄:解析幾何學講義(四川大學油印本)。

(11) 何魯,段調元:高等立體解析幾何學講義(重慶大學油印本)。

(12) 倪德基:數學詞典。

合併附誌,以明所本。

(三) Smith 等原書優點,已見平面解析幾何學編輯要旨,茲不贅述,本書對這些優點,皆儘量保存,以便教學。

(四) Smith 原書立體部分,不無缺點,除一部分與平面部分相類,也不再重述,茲舉其餘數點如下:

(1)未言及直線平面與二次曲面的關係,不合最新部頒課程標準。

(2)平面與直線部分,乃立體幾何學的基本,三氏原書所論微嫌簡略,初學不易得一透徹的觀念。

(3)柱,直紋面,迴轉面等,幾全限於特殊情形,未略提及普徧方法,每不能使好學深思者感覺滿足。

(7)論證間有欠完善處,如未言平移和旋轉的反變換,則

次數的不變性，失其依據，又如述直紋二次曲面時，漏一要點(即本書§97(三)在原書竟列 p. 306 第 7 題)，論證殊欠周密。

(5)論二次曲面分類，誤稱奇的錐和柱爲變態情形，且未列表，眉目不清。

(6)二次曲面宜與錐線儘量比較，如徑面，漸近錐面，切面等項，雖限於程度，不能詳言，似亦不妨以特例示其端倪。

以上諸點，編輯時已一一訂正或加補充。

(五) 表解易助初學了解，故本書特多。

(六) 本書對重要關鍵及前後聯絡處，多列註與注意說明，以求增進初學理解力，

(七) 四面體體積公式，初等教本，均未載入，因舊法須用面積射影等理，比較冗長，編者曾自撰一簡法，並自行試教，初學尚不難了解，特與舊法一併列入本書。

(八) 我國地方廣大，各校程度高下不一，故編制本書時，力求富有彈性，以期合用。

(九) 本書蒙重慶大學理學院長何師奎垣惠予校訂，指正甚多，又蒙友人李緒文，劉漢三，蘇鴻甫，李修睦，張伯康諸先生，就試教經驗多所指示，整理時又承錢介夫先生惠予襄助，謹附誌以表謝忱。

(十) 本書所用數學名詞，皆依據國立編譯館所整理的數學名詞稿本，初見時皆附英文原名。

（十一） 本書雖係根據流行的優良教本，遵我國部頒標準並參照實際情形編成，又曾蒙師友的指示，但如有疵謬，仍應由編者負責，尚望海內教師，隨時指示，俾得修正，不勝感幸。

民國三十一年八月編者識於成都金陵女子文理學院

目　次

第一章　空間直角坐標，軌跡

第二章　平面

第三章 直線

第四章 特殊曲面

第五章 坐標變換

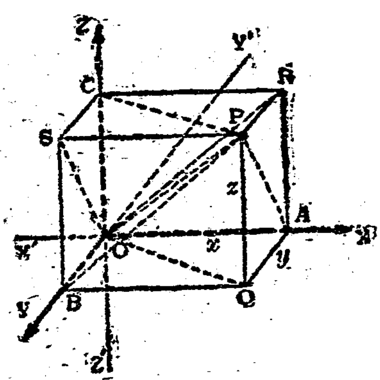
第六章　二次曲面

索　引

第一章　空間直角坐標，軌跡

1.　笛氏坐標　立體解析幾何學，也係以坐標法爲基本，研究空間內圖形的性質。但在空間，須用三個實數方可定點的位置，其法如下：

作三平面互相垂直，設其交線爲 $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ 如第 1 圖。則這三直線也必互相垂直。這三平面叫**坐標平面***，簡稱爲 XY 面，YZ 面，ZX 面。$X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ 三直線叫**坐標軸***，分別稱爲 x 軸，y 軸，z 軸，其正向以箭頭表明。三坐標平面的交點也就是三坐標軸的交點，叫**原點***



(第 1 圖)

(注意)　$X'X$ 和 $Z'Z$ 兩軸，設其在紙面上，換言之，即以 ZX 面爲紙面，在這面中，以右進爲 $X'X$ 正向，上進爲 $Z'Z$ 正向，至於 $Y'Y$ 則以透出紙面向讀者

坐標平面 Coordinate plane　坐標軸 Axes of coordinates　原點 Origin

前進爲正向 照這種方向規定的坐標系，稱爲左旋坐標系*。

過空間任意一點 P，作平行於三坐標平面的平行面（也就是三坐標軸的垂直面），與三坐標軸相交於 A, B, C 三點，選定適宜單位後，得 $OA=x, OB=y, OC=z$，叫做 P 點的**直角坐標***，分別稱爲 x, y, z 坐標。

如 P 點的坐標爲 a, b, c，則可以符號 $P(a, b, c)$ 表示，注意括號中第一數必表 x 坐標，第二數表 y 坐標，第三數表 z 坐標。

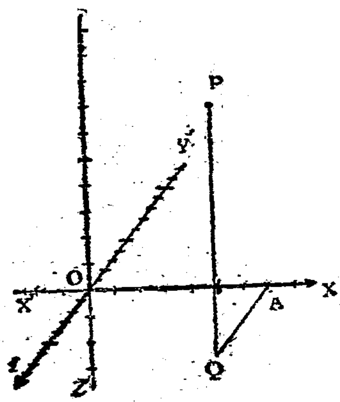
（註） 三坐標平面如不互相垂直，則依上法所定坐標，叫斜角坐標*。但在此時，過 P 點的各平行面不與各軸垂直。本書所用爲直角坐標，以便初學。

2. **點與坐標的互定** 已知空間任意一點 P，對於任一坐標系，必可如上法定三實數爲 P 點的坐標。反過來說，有了坐標系，則任意三實數 x, y, z，必可定空間一點。因取定坐標系上的單位和方向後，作 $OA=x,\ OB=y,\ OC=z$，而過 A, B, C 作三坐標平面的平行面（或三坐標軸的垂直面），則這三平面相交的一點，即爲 P 點。如此便得坐標與點的唯一對應性，即空間任意一點，可定唯一的一組三實數，而任意三實數可定唯一的一點。

如已知一點的坐標，求定其位置，宜先決定各軸上的單位普通取 XX' 與 ZZ' 兩軸上單位等長。至於 YY' 軸係直立於紙

左旋坐標系 Left-hand system 直角坐標 Rectangular coordinates 斜角坐標 Oblique coordinates。

面，紙上所繪者，乃其射影。所以在紙面上所取的單位稍短，例如求作已知點 $P(7,6,10)$，可在 x 軸上取 $OA=7$，再作 y 軸的平行線 AQ，並使其長為 y 軸上的六單位，最後作 OZ 的平行線 QP，等於 z 軸上的十單位，便求出 $P(7,6,10)$，如第2圖。



(第2圖)

3. 卦限　三坐標平面將空間分成八部分，各稱為卦限*。以 $O-XYZ$，$O-X'YZ$ 等表示，各卦限內點的坐標的正負，按§1所述，應如下法規定：

(一) P 在 YZ 面右，則 x 為正；在左則為負；

(二) P 在 ZX 面前，則 y 為正；在後則為負；

(三) P 在 XY 面上，則 z 為正；在下則為負；

今將結果列為一表如下：

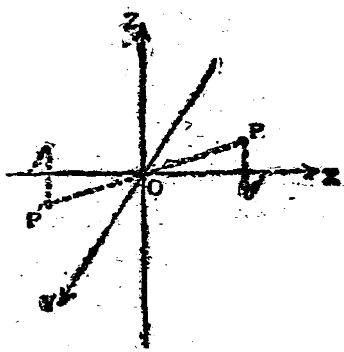
[illegible]	$O-XYZ$	$O-X'YZ$	$O-X'Y'Z$	$O-XY'Z$	$O-XYZ'$	$O-X'YZ'$	$O-X'Y'Z'$	$O-XY'Z'$
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

卦限、Octant。

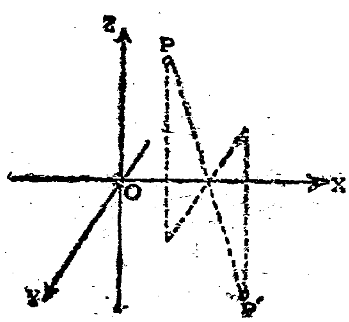
4. 對稱 有三種情形:

(一)心對稱 $P(x,y,z)$對於原點的對稱點爲$P'(-x,-y,-z)$,如第3圖。

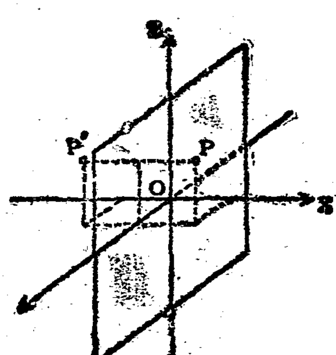
(二)軸對稱 $P(x,y,z)$對於x軸的對稱點爲$P'(x,-y,-z)$,如第4圖,



(第3圖)



(第4圖)



(第5圖)

同理，P 對於 y 軸的對稱點爲 $P'(-x, y, -z)$；對於 z 軸的爲 $P'(-x, -y, z)$。

(三)面對稱　$P(x, y, z)$ 對於 YZ 面的對稱點爲 $P'(-x, y, z)$，如第 5 圖。

同理，P 對於 ZX 面的對稱點爲 $P'(x, -y, z)$；對於 XY 面的爲 $P'(x, y, -z)$。

習　題　一

1. 求作下列各點：

(1)　$(8, 0, 2)$，$(-3, 4, 7)$，$(0, 0, 5)$。

(2)　$(4, -3, 6)$，$(-4, 6, 0)$，$(0, 8, 0)$。

(3)　$(10, 3, 4)$，$(-4, 0, 0)$，$(0, 8, 4)$。

(4)　$(3, -4, -8)$，$(-5, -6, 4)$，$(8, 6, 0)$。

(5)　$(-4, -8, -6)$，$(3, 0, 7)$，$(6, -4, 2)$。

(6)　$(-6, 4, -4)$，$(0, -4, 6)$，$(9, 7, -2)$。

2. 如 $P(x, y, z)$ 在 XY 面內，其 z 坐標應如何？

3. 如 $P(x, y, z)$ 在 YZ 面內，其 x 坐標應如何？

4. 如 $P(x, y, z)$ 在 ZX 面內，其 y 坐標應如何？

5. 如 $P(x, y, z)$ 在 x 軸上，其 y 和 z 兩坐標應如何？

6. 如 $P(x, y, z)$ 在 y 軸上，其 z 和 x 兩坐標應如何？

7. 如 $P(x, y, z)$ 在 z 軸上，其 x 和 y 兩坐標應如何？

8. 原點的坐標應如何?

9. 有一長方體在卦限 $O-XYZ$ 內,有三面卽三坐標平面。設這長方體的長、寬、厚各爲 a,b,c;求其各頂點的坐標。

10. 一長方體以原點爲心,且各面與三坐標平面平行,如其長、寬、厚各爲 a,b,c;求其各頂點的坐標。

11. 設有 $P(x,y,z)$;如 (1) $x=0$, 或 (2) $y=0$, 或 (3) $z=0$;求 P 點移動的情形。

12. 設有 $P(x,y,z)$;如 (1) $x=0, y=0$, 或 (2) $y=0, z=0$, 或 (3) $z=0, x=0$;求 P 點移動的情形。

13. 有 $P(1,2,3)$,試求其對於原點,三坐標軸,三坐標平面的各對稱點.

14. 求證上題中各點爲一長方體的頂點。

15. 設 P_1 爲 P 對原點的對稱點,P_2 是 P_1 對於 x 軸的對稱點,問 P_2 與 P_1 有什麼關係。

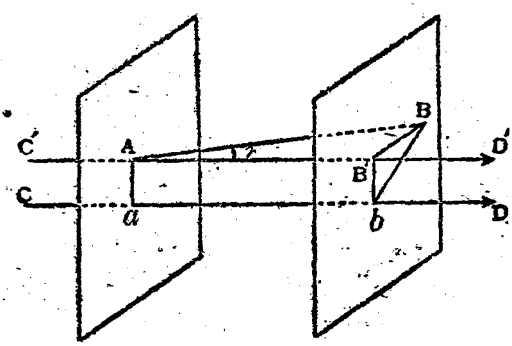
5. **射影** 已知空間一點 B 和一直線 $C'D'$。過 B 作 $C'D'$ 的垂直面,與 $C'D'$ 相交於 B',如第 6 圖。則 B' 叫做 B 在 $C'D'$ 上的正射影*。在初等解析幾何學中,只有正射影,所以可簡稱爲射影。

設向量 AB (卽有向的線段) 兩端點 A,B 在直線 CD 上的射影各爲 a 與 b,則向量 ab,叫做向量 AB 在 CD 上的射影,仍

---

*正射影 Orthogonal projection

如第 6 圖，由這定義，可知在同一有向直線上，向量 AB 的射影，與向量 BA 的，同值反號。



(第 6 圖)

以 Proj. 記射影，可書

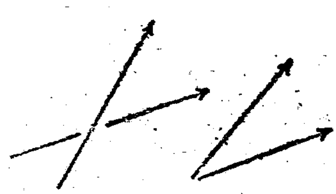
$$ab = \text{Proj.}\,AB。$$

又 $\text{Proj.}\,BA = -\text{Proj.}\,AB$

6. **空間有向線的交角** 欲求一向量與其射影的關係，須先述空間二有向線交角的意義，

(一)如二有向線相交，則其交角，與平面幾何學所論的相同，如二有向線平行，則在同向時，命其交角為 0°；在異向時，命其交角為 π，即 180°。在這二種情形，二直線係在同一平面上。

(二)如二有向線不在同一平面，則既不相交，也不平行。可在空間取一適當點，作二有向直線，各與已知的有向線平行且同向，如第 7 圖。如此所成的角，即定為所求的交角。



(第 7 圖)

(注意) 在此所說的角，為二有向線的交角，而非自一有向線至他有向線的

角，故這種角只有數值(卽為一正量或零)，而無代數值。

在立體幾何學有與平面幾何學不同的一點，卽正負角的區別，不如平面情形的簡單，所以對初學不必深究。在平面情形，係取鐘表上時針行走向爲負；但在空間，我們可自這角所在平面的前後(譬如自紙面與紙背)，去看同一方向，便得相反二結果，故這種簡單的規定，便發生困難，我們雖可再加條件去確定，然在初等解析幾何學中，尚無區別正負角的必要，所以不如避免不論，以減初學的麻煩。

8. **射影第一定理** 設 $ab=\text{Proj}.AB$，而向量 AB 與有向線 CD 的交角爲 γ，則

$$ab=AB\cdot\cos\gamma$$

證 如第6圖，過 A 點作 $C'D'$ 與 CD 平行而同向，則因同一向量在同一方向的二平行線上的射影必相等，故 $AB'=ab$。按廣義三角函數定義，

$$\cos\gamma=\frac{AB'}{AB}=\frac{ab}{AB},$$

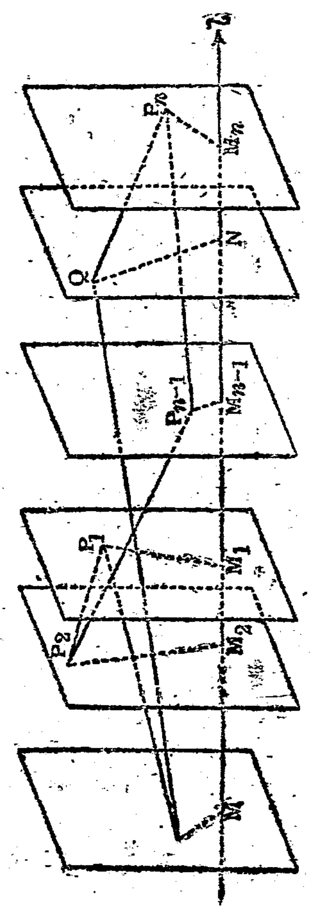
故得
$$ab=AB\cdot\cos\gamma。$$

系 如 AB 與 CD 垂直，則 AB 在 CD 上的射影爲零。

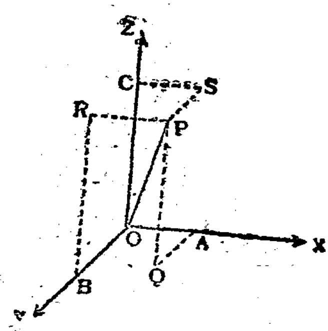
8. **射影第二定理** 空間任何折線 $PP_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}P_nQ$ 中各向量 $PP_1,P_1P_2,\cdots\cdots,P_{n-1}P_n,P_nQ$，在直線 l 上的射影總和等於向量 PQ 的射影。

證 如第8圖，設 $MM_1=\text{Proj}.PP_1$，$M_1M_2=\text{Proj}.P_1P_2$，$\cdots\cdots$，$M_nN=\text{Proj}.P_nQ$，按沙爾* 定理的推廣，得

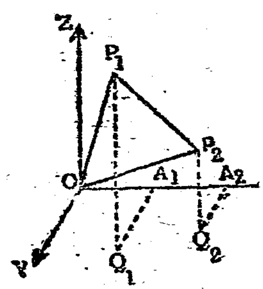
* 沙爾 Chales



(第 8 圖)



(第 9 圖)



(第 16 圖)

$$MM_1+M_1M_2+\cdots\cdots+M_nN=MN,$$

即 $\text{Proj.}PP_1+\text{Proj.}P_1P_2+\cdots\cdots+\text{Proj.}P_nQ=\text{Proj.}PQ$。

9. **射影與坐標** 設有一點 $P(x,y,z)$，過 P 作 x 軸的垂面 APQ 相交於 A。如第 9 圖，則 A 爲 P 在 x 軸上的射影，所以就 x 軸上的射影論，

$$\text{Proj.}OP=OA=x$$

同理，可知 OP 在 y 軸或 z 軸上的射影各爲 y 和 z。

今設有 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 二點，而求其在各軸上的射影(第 10 圖)。聯 OP_1，OP_2，則按射影第二定理，有

$$\text{Proj.}OP_1+\text{Proj.}P_1P_2=\text{Proj.}OP_2$$

即 $$\text{Proj.}P_1P_2=\text{Proj.}OP_2-\text{Proj.}OP_1$$

故知

(一) P_1P_2 在 x 軸上的射影 $=x_2-x_1$。

同理可證

(二) P_1P_2 在 y 軸上的射影 $=y_2-y_1$，

(三) P_1P_2 在 z 軸上的射影 $=z_2-z_1$。

習 題 二

1. 已知三角形的頂點如下列各組點，求各邊在三軸上的射影：

(1) $(-3,4,-8)$，$(5,-6,4)$，$(8,6,0)$；

(2) $(-4,-8,-6),(3,0,7),(6,4,-2)$;

(3) $(10,3,-4),(-4,0,2),(6,4,-2)$;

(4) $(-6,4,-4),(0,-4,6),(9,7,-2)$。

2.試就上題結果，求出各邊與坐標軸的交角。

3.如交換一線段的方向，對於其餘各坐標軸的交角，有何影響?試就交角定義和上題結果，各作一解釋。

4.設一多角形各邊的方向，依各頂點順序取定，求證其在任何直線上的射影和爲零。

5.試就第1題驗明上題的理。

6.設P_1P_2在x,y,z三軸上的射影，依次爲$3,-2,7$，而P_1的坐標爲$(-4,3,2)$，求P_2的坐標。

7.求上題中P_1P_2與三軸的交角。又P_2P_1與三軸的交角如何?

8.依次聯下列二組點，成一空間折線，而求各線段在三軸上的射影。試作其圖，並驗明射影第二定律:

(1) $(6,0,0),(0,4,3),(-4,0,0),(0,0,8)$;

(2) $(6,8,-3),(0,0,-3),(0,0,6),(-3,0,2)$,
$(-8,4,0)$。

9.求證下列各點，在一過原點的直線上:

$(-1,1,-2),(-1,-1,2),(2,2,-4),(3,3,-6)$。

(提示) 可自原點引至各點的直線，而求其與各軸的交角。

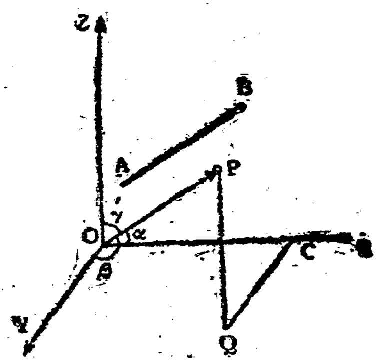
10. 求證$(1,1,1)$，$(0,\frac{1}{2},\frac{5}{2})$，$(-1,0,4)$三點在一直線上。

（提示）　可求每二點聯線與三軸所成角。

11. 上題的直線是否過原點？

12. 求證沿任何多角形周界繞行，所取諸邊的向量，在任一直線上的射影總和爲零。

10．**直線的方向角，方向餘弦，方向參數**　一有向直線與三坐標軸的各交角，叫做這直線的方向角*。如第11圖中，AB的方向角爲α,β,γ，圖中OP與AB平行且同向，方向角的餘弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$叫做方向餘弦*。在$OP$的方向上任取一點，其坐標$(a,b,c)$叫做$AB$的方向參數*，或方向係數*。



（第11圖）

（注意）　a,b,c三數不得皆爲零，反過來說，凡不皆爲零的三數a,b,c，都可取作方向參數，以定方向，

二平行但反向的直線，各方向角互爲補角，故各方向餘弦同值而異號，如BA的方向角爲$\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$，而方向餘弦爲$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$，$\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$。

---

* 方向角 Direction angle　方向餘弦 Direction cosine　方向參數 Direction parameter　方向係數 Direction number

（註）方向係數是在向線過 O 點在正向一段上任一點的坐標，不可在負向的一段上去取，

11. 方向餘弦的基本關係式

定理一 設 P 點的坐標爲 (x,y,z)，$OP=\rho$，且 OP 的方向角爲 α,β,γ，則

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma。$$

證 按射影第二定理卽明。

系 設有 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，則

$$\frac{\cos\alpha}{x_2-x_1}=\frac{\cos\beta}{y_2-y_1}=\frac{\cos\gamma}{z_2-z_1}=\frac{1}{\overline{P_1P_2}}$$

換句話說，卽有向線 $\overline{P_1P_2}$ 的方向參數爲 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1。

定理二 任何直線的方向餘弦，必合於關係式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

證 作 PQ 與 XY 面垂直，Q 爲垂趾；又作 QC 與 x 軸垂直，如第11圖，將折線 $OCQP$ 射影至 OP 上，則因 $\text{Proj}.OC=x\cos\alpha$，$\text{Proj}.CQ=y\cos\beta$，$\text{Proj}.QP=z\cos\gamma$，按射影第二定理，得
$$\rho=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$
將定理一的結果代入，而以 ρ 徧除，便可證明本定理。

12. 方向參數與方向餘弦的關係

定理 如一直線的方向餘弦爲 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，而方向

參數爲 a, b, c，則

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}。$$

各根式或皆取正號，或皆取負號。

證　由上節定理一　$\dfrac{\cos\alpha}{a}=\dfrac{\cos\beta}{b}=\dfrac{\cos\gamma}{c}=\dfrac{1}{\rho}$

按比例的理變化，得上面各比的值爲

$$\pm\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

代入卽得證明。

系　$\rho^2=a^2+b^2+c^2$

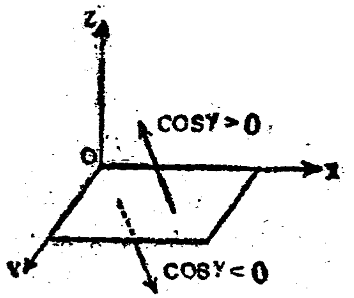
(注意)　在 $OP=\rho=1$ 時，$a=\cos\alpha$，$b=\cos\beta$，$c=\cos\gamma$。

(註)　如一直線與 XY 面相交，則取向上爲正時，$\cos\gamma>0$，取向下爲正時，$\cos\gamma<0$，如第 12 圖。

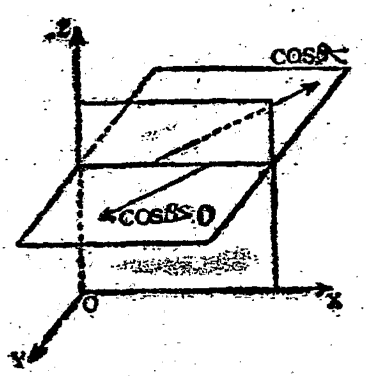
如直線與 XY 面平行，$\cos\gamma=0$；則以自 ZX 面向前爲正時，$\cos\beta>$ ；向後爲正時，$\cos\beta<0$，如第 13 圖。

如直線與 x 軸平行，$\cos\gamma=\cos\beta=0$，故 $\cos\alpha=\pm1$，於與 x 軸同正向時爲 $+1$，異正向時爲 -1，如第 14 圖。

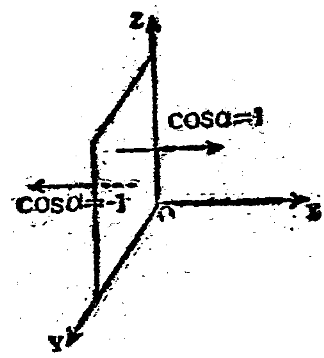
定理中的方向參數須照 § 10 後附註所說的關係去決定。



（第 12 圖）



（第 13 圖）



（第 14 圖）

習 題 三

1. 下列各組已知數，爲一直線的方向參數，試求同一直線的他幾組方向參數，並定其方向餘弦。

（1）$2, -3, 4$，　　　　（2）$3, 0, -1$。

(3) $\frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$。　　　(4) $0, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}$。

按各組方向參數，各作一直線。

2. 設下列諸數表一向上的方向參數，試求方向餘弦和方向角。

(1) $-6, 2, 3$;　(2) $1, 2, 3$;　(3) $4, 1, 0$;

(4) $-2, -3, -1$;　(5) $1, -1, -1$;　(6) $5, 0, -6$。

並按各組方向參數，各作一直線。

3. 有合於下列各種情形的直線，與坐標軸或面有何關係？

(1) $\cos\alpha=0$;　　(2) $\cos\gamma=0$;

(3) $\cos\beta=0$;　　(4) $\cos\alpha=\cos\beta=0$;

(5) $\cos\alpha=\cos\gamma=0$;　　(6) $\cos\beta=\cos\gamma=0$。

4. 已知一直線與各坐標軸成等角，試求這角。

5. 已知一直線與 x 軸的交角為 $45°$，與 y 軸的交角為 $60°$，求其與 z 軸的交角。

6. 設一直線與 z 軸的交角為 $40°$，與 x 和 y 兩軸成等角，試求這直線的方向餘弦。

7. 試答下列各組數能否為一直線的方向餘弦。

(1) $(\frac{1}{15}, 1, -\frac{2}{15})$;　　(2) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$;

(3) $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$;　(4) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7})$。

8. 已知一直線的兩方向角爲 60° 與 90°，求其第三方向角。

9. 已知一直線的兩方向餘弦爲 $\frac{1}{3}$ 與 $-\frac{2}{3}$，求其第三方向餘弦。

10. 一直線過原點且合於下列的一條件，求其過原點後正向部分所在的卦限。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\cos\alpha$	+	+	+	+	−	−	−	−
$\cos\beta$	+	+	−	−	+	−	−	+
$\cos\gamma$	+	−	−	+	+	+	−	−

11. 已知三直線以向上爲正，而方向參數各爲：

(1) 3, 6, 2;　(2) 2, 1, −4;　(3) 1, −2, 3。

試求各直線的方向餘弦。

12. 試由方向餘弦證明 (3, −2, 7), (6, 4, −2), (5, 2, 1) 三點在同一直線上。

13. 已知一直線的二個方向角爲 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$，試求第三個方向角。

14. 一直線和各坐標軸成等角，試求其各方向角。

13. 二點間的距離

定理 設 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 間的距離爲 l，則

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

證　按§11定理一的系有

$$-l\cos\alpha=x_1-x_2,\quad -l\cos\beta=y_1-y_2,\quad -l\cos\gamma=z_1-z_2$$

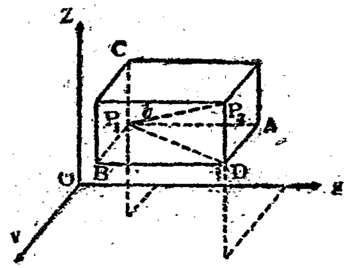
將各端平方相加，按§11定理二，即得

$$l^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=l^2$$
$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

又證　過 P_1 與 P_2，作各坐標平面的平行面，成一長方體，如第15圖，則其各稜與坐標軸平行；而各與 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1 相等。今 P_1P_2 是這長方體的對角線，所以 l^2 等於三稜的平方和。

系　$P(x,y,z)$ 至 x 軸，y 軸，z 軸的距離各為

$$\sqrt{y^2+z^2},$$
$$\sqrt{z^2+x^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2}。$$



(第15圖)

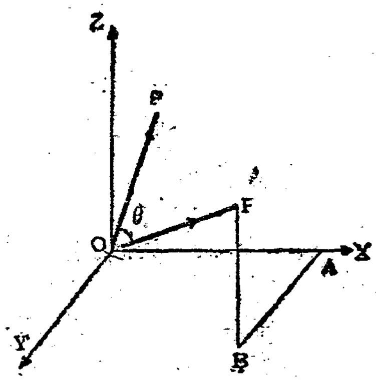
因為 P 點在三軸上的射影是 $P_x(x,0,0)$，$P_y(0,y,0)$，$P_z(0,0,z)$，而各距離即 PP_x，PP_y，PP_z。

14.　二有向線的交角

定理　如二有向線的交角為 θ，其方向角為 α,β,γ 與 α'，β'，γ'，則 $\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$

證　過原點作 OP 及 OP' 與二已知有向線同向平行，並命 $OP=\rho$，則得 $\angle POP'=\theta$。

如第 16 圖，$PB \parallel z$ 軸，$BA \parallel y$ 軸，而 A 在 x 軸上，將 OP 與折線 $OABP$ 射影至 OP' 上，按 §§ 7，8 的射影第一、第二定理，即得



（第 16 圖）

$$\rho\cos\theta = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$

但按 § 11，定理一，知　$x=\rho\cos\alpha$，　$y=\rho\cos\beta$，　$z=\rho\cos\gamma$ 代入上式，用 ρ 來偏除兩端，便得求證的公式。

系　如二有向線的交角為 θ，方向參數各為 a, b, c 和 a', b', c'。

則
$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

15. 平行與垂直的判別

（一）平行　二直線平行的充足*而又必要*（簡稱充要*）條件，是二者的方向角都相等或都相補，設其方向角各為 α, β, γ 和 α', β', γ'，則有　$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，　$\gamma=\gamma'$

充足 Sufficient.　必要 Necessary.　充要 Necessary and sufficient.

或 $\alpha=\pi-\alpha'$, $\beta=\pi-\beta'$; $\gamma=\pi-\gamma'$

也就是 $\cos\alpha : \cos\alpha'=\cos\beta : \cos\beta'=\cos\gamma : \cos\gamma'=\pm 1$

如二者的方向參數是 a,b,c 和 a',b',c'，則為

$$a : a'=b : b'=c : c'$$

(二)垂直 空間的二直線垂直，即其交角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，故由上述定理，立得其充要條件為

$$\cos\alpha\ \cos\alpha'+\cos\beta\ \cos\beta'+\cos\gamma\ \cos\gamma'=0$$

或 $$aa'+bb'+cc'=0$$

習　題　四

1. 試求以下列各組點為頂點的三角形諸邊的長：

(1) (0,0,3),(4,0,0),(8,0,0)。

(2) (3,2,0),(−2,5,1),(1,−3,−5)。

(3) (3,−3,−3),(4,2,7),(−1,−2,−5)。

2. 試取習題三中第12題的三點，而求其每二點間的距離，並由此證明這三點在一直線上。

3. 一線段在各坐標軸上的射影，分別如下：

(1) 6,−3,2; (2) 12,4,2; (3) −2,−1,2。

試求其長。

4. 求證$(4, 3, -4)$，$(-2, 9, -4)$，$(-2, 3, 2)$三點可聯成一等邊三角形。

5. 試求下列各組直線的交角

(1)方向餘弦爲$\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$和$-\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$

(2)方向參數爲$2, -2, 1$和$3, 6, 2$。

6. 求證$(6, 7, 3)$，$(3, 11, 1)$，$(0, 3, 4)$，$(-3, 7, 2)$是一長方形的頂點。

7. 求證$(6, -6, 0)$，$(3, -4, 4)$，$(2, -9, 2)$，$(-1, -7, 6)$是一菱形的頂點。

8. 命第16圖中$OP=\rho$，$OP'=\rho'$，$PP'=d$，試由二點距離的公式和餘弦定律$\cos\theta=\frac{1}{2\rho\rho'}(\rho^2+\rho'^2-d^2)$，證明二有向線交角公式，

9. 已知一三角形頂點是$A(2, 1, 4)$，$B(3, -1, 2)$，$C(5, 0, 6)$，試由公式$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$求其面積。

10. 一有向線上一點的坐標是$-2, -1, 2$，(以向上爲正向)，求聯$P_1(-3, 2, -6)$，$P_2(-3, 5, -4)$的線段在前者上的射影。

提示　求P_1P_2的長以及與這有向線的交角，再用射影第一定理。

16. 定比分點

定理 $P(x,y,z)$點分$P_1(x_1,y_1,z_1)$與$P_2(x_2,y_2,z_2)$的聯線爲二段，使其比爲

$$P_1P/PP_2=r$$

則 $$x=\frac{x_1+rx_3}{1+r},\quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r},\quad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}。$$

證 設P_1,P,P_2在x軸上的射影爲M_1,M,M_2，這三點所在直線的方向角爲α,β,γ，則按射影第一定理，有

$$M_1M=P_1P\cos\alpha,\qquad MM_2=PP_2\cos\alpha,$$

$$\therefore\ \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=r$$

解出x，便得 $$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}。$$

同理，可得y和z。

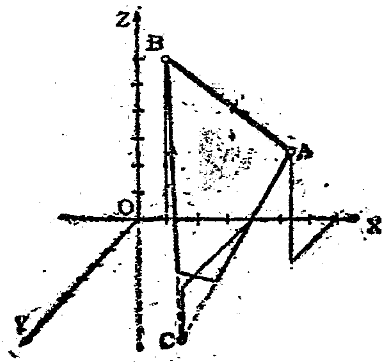
（註）如P點不在無窮遠處，則必$r\neq-1$。

系 設$P_1(x_1,y_1,z_1)$與$P_2(x_2,y_2,z_2)$二點聯線的中點爲$P(x,y,z)$，則

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)。$$

17. 例題

例一 求證$A(7,3,4)$，$B(1,0,6)$，$C(4,5,-2)$是一直角



(第17圖)

三角形的各頂點。

解 先求各邊的方向參數如下：

AB: $1-7,\ 0-3,\ 6-4 = -6,\ -3,\ 2$。

BC: $4-1,\ 5-0,\ -2-6 = 3,\ 5,\ -8$。

CA: $7-4,\ 3-5,\ 4-(-2) = 3,\ -2,\ 6$。

可見 AB 和 CA 的方向參數，合於條件。

$$aa'+bb'+cc'=(-6)\cdot3+(-3)(-2)+2\cdot6=0$$

因此可知 $\angle CAB$ 爲直角。

又解 $\overline{AB}^2=(-6)^2+(-3)^2+2^2=49,$

$\overline{BC}^2=3^2+5^2+(-8)^2=98;$

$\overline{CA}^2=3^2+(-2)^2+6^2=49.$

合於關係式 $\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

而爲一直角三角形，且 $AB=CA$，所以又爲等腰，即

$$\angle ABC=\angle BCA=\frac{\pi}{4}$$

例二 試證 $P_1(2,3,4)$ 和 $P_2(-1,2,6)$ 二點的聯線，與 $Q_1(1,2,-5)$ 和 $Q_2(6,3,-18)$ 二點的聯線相交，並求其交點的坐標。

解 設所求點爲 $M(x,y,z)$；而 $P_1M/MP_2=r$，$Q_1M/MQ_2=S$，則按§16，

$$x=\frac{2+(-1)r}{1+r},\quad y=\frac{3+2r}{1+r},\quad z=\frac{4+6r}{1+r}.$$

且 $$x=\frac{1+6S}{1+S},\qquad y=\frac{2+3S}{1+S},\quad z=\frac{-5+(-18)S}{1+S}$$

故 $\dfrac{2+(-1)r}{1+r}=\dfrac{1+6S}{1+S}$ 簡化，得 $-1+2r+4S+7rS=0$。

同法得 $1-rS=0$，$9+11r+22S+24rS=0$。

以 $r=1/S$ 代入第一或第三方程式，簡化得

$$2S^2+3S+1=(2S+1)(S+1)=0。$$

但 $S+1\neq 0$，故 $S=-\dfrac{1}{2}$，而 $r=-2$。

$$\therefore\quad x=\frac{2+(-1)(-2)}{1-2}=-4 \text{ 或 } \frac{1+6\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=-4.$$

$y=1,\quad z=8$。

又解 由§16的證法中，

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{r}{1},\ 即\ \frac{x-x_1}{(x_2-x)+(x-x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{r}{1+r}$$

$$\therefore\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{r}{1+r}$$

故可得
$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-4}{6-4};$$

與
$$\frac{x-1}{6-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-(-5)}{-18-(-5)}。$$

由兩式中第一，二兩等比簡化，得

$$x+3y-7=0,\qquad x-5y+9=0$$

解得 $x=-4$，$y=1$，代入兩式求出 z 都是 8。

（註） 如果由第一解法，自兩個方程式求出的 r, S 不合於第三方程式，或由第二解法，求出 x 和 y 後，代入兩式所得的 z 不同，那就是表示，這題中二直線並不在同一平面上。

18. 三點共線和四點共面

定理一 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$三點共在一直線上的充要條件是

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\x_1&x_2&x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=0$$

證 P_1, P_2, P_3 三點共在一直線上的充要條件，顯爲定比分點定理關係式的成立，即

$$x_3=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\quad y_3=\frac{y_1+ry_2}{1+r},\quad z_3=\frac{z_1+rz_2}{1+r}$$

或
$$\left.\begin{array}{l} x_1+rx_2-(1+r)x_3=0 \\ y_1+ry_2-(1+r)y_3=0 \\ z_1+rz_2-(1+r)z_3=0 \\ 1+r-(1+r)=0 \end{array}\right\}$$
又

自這四式中每取三式消去 $1, r, -(1+r)$，即得上列結果。

（註）這四個行列式爲零所成條件，彼此並非獨立，換句話說，前面三個中有二個爲零，他二個也必爲零，例如取第一，二兩個爲零，按行列式的理，可化成

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

即
$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$

可見他二行列式也必爲零。

定理二 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$ 四點共在一平面上的充要條件爲

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

證　照上節例二的解法，便得

$$\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{x_3+Sx_4}{1+S}$$

即
$$\frac{1}{1+r}x_1+\frac{r}{1+r}x_2-\frac{1}{1+S}x_3-\frac{S}{1+S}x_4=0$$

和換 x 爲 y, z 等的三式。又

$$\frac{1}{1+r}\cdot 1+\frac{r}{1+r}\cdot 1+\frac{1}{1+S}\cdot 1-\frac{S}{1+S}\cdot 1=0$$

自這四式中消去 $\frac{1}{1+r}, \frac{r}{1+r}, -\frac{1}{1+S}$ 和 $-\frac{S}{1+S}$，即得求證的關係式。

習 題 五

1. 下列各已知兩點的聯線依已知比分成二段，求各分點的坐標：

(1) $(3,4,2),(7,-6,4),\quad r=\frac{1}{2}$

(2) $(3,4,2),(2,3,-7),\quad r=-3$

(3) $(8,4,2),(3,\ 9,\ 6),\quad r=-\frac{1}{3}$

(4) $(7,3,9),(2,\ 1,\ 2),\quad r=4$

2. 求證下列各組三點，都各在一直線上，並求第三點分前二點聯線所成兩段的比。

(1) $(4,13,3)$, $(3,6,4)$, $(2,-1,5)$;

(2) $(4,-5,-12)$, $(-2,4,6)$, $(2,-2,-6)$;

(3) $(-3,4,2)$, $(7,-2,6)$, $(2,1,4)$。

3. 試求三角形 $A(3,4,-2)$, $B(7,0,3)$, $C(-5,4,6)$ 諸中線的長。

4. 由三種不同的條件(對角線互相平分,對邊平行,或對邊等長)證明順次聯 $(3,7,2)$, $(4,3,1)$, $(2,2,2)$, $(1,6,3)$ 四點成一平行四邊形。

5. 求證空間任意四邊形各邊中點必在同一平面上,而成一平行四邊形。

6. 求證一四面體對稜中點的三聯線,必共過一點,而互相平分。

7. 試求三角形 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 三中線的交點坐標。

(註) 這點叫做三角形的重心*。

8. 求證自任一四面體各頂點至對面重心所作的四直線,必共交於一點,而在自頂點至對面重心 $\frac{3}{4}$ 的地方。

(註) 這點叫做這四面體的重心*。

9. 試證任一四邊形中,二對角線的平方和,二倍於其對邊中點聯線的平方和。

重心 Centroid

10. 試證任一四面體二組對邊的平方和，等於第三組對邊平方和再加第三組對邊中點聯線平方的四倍。

19. 空間軌跡　立體幾何學中，有兩種軌跡：

(一)曲面　空間內一點，在一個條件限制下運動所成的軌跡，通常是一曲面*。

例如距一固定點等遠的動點，所成的軌跡是一球。與二固定點距離相等的點，所成的軌跡是這二點聯線的中垂面。

(二)曲線　空間內一點，在二個條件限制下運動所成的軌跡通常是一曲線*。因適合於一個條件的點，運動成曲面，所以同時適合於二個條件的點，必定同時在這二曲面上，也就是在這二個曲面相交所成的曲線上。

例如一動點合於次二條件：(1)至定點 P 的距離爲定量 r，(2)與 P_1 和 P_2 二定點的距離相等，則所成的軌跡爲一圓；因由(1)知道點的軌跡爲球，由(2)知其軌跡爲一平面，而二者相交的曲線爲一圓。

(注意)　條件個數，必須留意計算，如一點與 P_1，P_2，P_3 三定點的距離相等，須作爲二個條件，即既與 P_1 和 P_2 等遠，又與 P_2 和 P_3 等遠，但是不可再加與 P_3 和 P_1 等遠一條，而當做三個條件；因既與 P_1 和 P_2 等遠，又與 P_2 和 P_3 等遠，則必然與 P_3 和 P_1 等遠，毫無疑義。換句話說，第三條件非獨立，所以毋須加入。

---

*曲面 Curved surface　曲線 Curve

（註）所謂「通常」，是指有例外情形的意思。如至 P 的距離為零的點，只有 P 點本身，而不成一面；又如與 P_1 及 P_2 二定點距離相等，又至 P_1 的距離為 $r=\frac{1}{2}P_1P_2$ 的點，只有 P_1P_2 的中點一點，而不成一線。

20. **軌跡的方程式** 假設動點 P 的坐標為 (x,y,z)，限制軌跡的條件，無非是這動點和其他定件間的固定關係。但是照前面所說，距離角等基本的幾何量，都能用算式表出，可見這種固定關係的條件，必是一個或二個含 (x,y,z) 的方程式，這便叫做軌跡的方程式*。所以

（一）一個方程式表示曲面，以曲面上任意一點 P 的坐標代這方程式內的變數，必能適合。換句話說，即是能使方程式成立。

（二）二個方程式聯立，便表示空間曲線，即其分別所表二曲面的交線。

21. **最簡單的情形** 下面二定理，顯然為真。

定理一 平面的方程式最簡單者如下：

與 XY 面平行的，方程式是 $z=$ 常數。

與 YZ 面平行的，方程式是 $x=$ 常數。

與 ZX 面平行的，方程式是 $y=$ 常數。

定理二 直線的方程式，最簡單者如下：

與 x 軸平行的，方程式是 $y=$ 常數，$z=$ 常數。

---

* 軌跡的方程式 Equation (equations) of locus。

與 y 軸平行的，方程式是 $z=$ 常數，$x=$ 常數。

與 z 軸平行的，方程式是 $x=$ 常數，$y=$ 常數。

(註) 定理二中兩個常數，可爲等値，或不等。

22. **方程式的軌跡** 如一軌跡(曲面或曲線)上任何點的坐標，都能適合於某方程式(一個或二個)，則叫做那**方程式的軌跡***。

在普通情形，方程式中含有 x, y 和 z 三變數，但也可缺其一，二。例如 $x=c$ 表示一與 YZ 面平行的平面。式中不含 y 和 z 的意思，就是說不論 y 與 z 的値如何，x 總是爲 c，可見這點在 YZ 面右 c 單位處的平行面上移動，其軌跡即爲這個平行面。又如 $y=c_1$, $z=c_2$ 表示與 x 軸平行的一直線。二式中都不含 x 的意思，就是說不論 x 的値如何，y 總是爲 c_1，z 總是爲 c_2，可見這點移動時，至 ZX 面的距離常爲 c_1，至 XY 面的距離常爲 c_2，而成一與 x 軸平行的直線。

23. **基本問題** 與平面情形一樣，

(一)已知方程式，求作其軌跡。

(二)已知軌跡的條件，求其方程式。

但是空間圖形，不能在紙面上描點作圖，第一基本問題，非常繁難，此後只能就幾種簡易而重要的情形，略加研究。第二基本問題，則比較容易，舉例如下:

---

*方程式的軌跡 Locus of equation (equations).

例一　一球以原點爲心，5爲半徑，試求其方程式。

解　這球上任一點 $P(x,y,z)$ 與原點 $(0,0,0)$ 的距離爲 5，故按二點距離公式，得

$$x^2+y^2+z^2=25$$

例二　一動點與 $(6,3,2)$ 和 $(4,2,0)$ 二點距離相等，試求其所成軌跡的方程式。

解　按題意，並據二點距離公式，得

$$(x-6)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=(x-4)^2+(y-2)^2+z^2$$

簡化爲　$$4x+2y+4z-29=0$$

例三　一動點至原點的距離爲 5，又與 $(6,3,2)$ 和 $(4,2,0)$ 二點距離相等，試求其所成軌跡的方程式。

解　如上兩題，得

$$x^2+y^2+z^2=25,\quad 4x+2y+4z-29=0.$$

聯立起來，即爲所求軌跡（是一圓）的方程式。

習　題　六

1. 試求各坐標平面的方程式。

2. 試求各坐標軸的方程式。

3. 試求下列各點所成軌跡的方程式：

（1）在 XY 面下 4 單位；其上 10 單位。

（2）在 YZ 面左 5 單位；其右 4 單位。

（3）在 ZX 面前 3 單位；其後 6 單位。

4. 試求下列各點所成軌跡的方程式：

（1）與 $(3, 0, 4)$ 一點相距 5 單位；

（2）與 $(4, -6, -8)$ 和 $(-2, 7, 9)$ 二點等距離。

5. 試求下列各球的方程式：

（1）以 $(-3, 4, 2)$ 與 $(7, -2, 6)$ 二點聯線爲直徑；

（2）以 $(3, 2, 7)$ 爲心，而經過 $(5, -3, 3)$ 一點；

（3）以 $(2, 1, 4)$ 爲心，而與 YZ 面相切。

6. 試求下列各點所成軌跡的方程式：

（1）與 $(5, 4, 0)$ 的距離四倍於與 $(-4, 3, 4)$ 的距離；

（2）與 $(-4, 3, 4)$ 的距離和至 XY 面的距離相等；

（3）至三坐標平面距離的和，等於與原點的距離。

7. 一四面體的頂點爲 $(4, 8, 0)$，$(2, 5, -2)$，$(3, 2, 2)$，$(5, 1, 2)$，試求其各邊中垂面的方程式。

8. 上題中所求的六平面是否共經過一點？

9. 試說明方程式 $x^2+y^2=25$ 表示一圓柱，以 z 軸爲軸，其底半徑等於 5。

10. 試求下列圓柱的方程式：

（1）以 x 軸爲軸，底半徑等於 3；

（2）以 y 軸爲軸，底半徑等於 4。

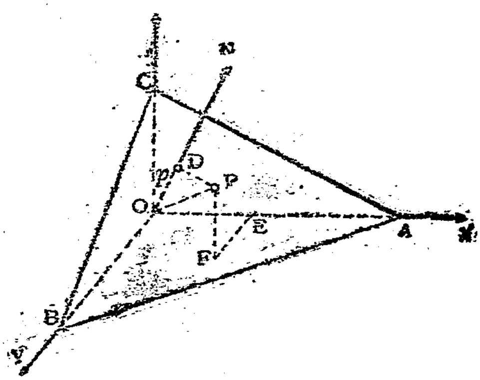
11. 一動點與 $(3, 5, -4)$ 和 $(-7, 1, 6)$ 二點等距離，又與 $(4,

$-6,3)$和$(-2,8,5)$二點等距離，試求其軌跡的方程式。

12. 求證 $(3,7,-4)$，$(-5,7,-4)$，$(-5,1,-4)$ 三點兩兩聯成線段的三中垂面交於一直線，並求出這直線的方程式。

第二章　平面

24. 平面位置的決定　設平面 ABC 不經過原點，可自原點引其垂線 ON，相交於 D，如第 18 圖，取自原點至平面的向爲正向，並命其方向角爲 α，β，γ，及 OD 的長爲 p，則這平面的位置，由 α,β,γ，和 p 四數決定。注意在此 $p\neq0$ 而 α，β，γ 三量應合於關係式



（第 18 圖）

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

如果平面經過原點，則上說自原點至平面的規則無意義，不能用來決定 ON 的正向。在此可注意這垂線與 OZ 正向成二角，若平面不含 OZ，則二角一銳一鈍，可取其成銳角的向爲 ON 正向。若平面含有 OZ，則這二角都是直角，無從軒輊。但在此

時，只要這平面非 YOZ 面，則其垂線與 OY 正向成二角，一鈍一銳，可取其成銳角的向爲 ON 正向；如這平面卽是 YOZ 面，可取 OX 正向爲 ON 正向。在這幾種情形下，都有 $p=0$。

總結上面所說的各種情形，可知任一平面，都可定 α,β,γ,p 一組相當量，而平面的位置，也就由這四量決定。

（註） 有向線 ON 叫做這平面的法線*。

（注意） 照上面的規定，就是在 γ 不爲直角時，當使 $\cos\gamma>0$。在 $\gamma=\frac{\pi}{2}$，卽 $\cos\gamma=0$ 時，如 β 不爲直角，則當使 $\cos\beta>0$；如 β 爲直角，當取 $\alpha=0$ 而不取 $\alpha=\pi$。

25. 平面的法式*

定理 如一平面的法線與三坐標軸所成的角爲 α,β,γ，自原點沿法線至平面的距離爲 p，則平面的方程式爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0。$$

證 在這平面上，任取一點 $P(x,y,z)$。自 P 作 XY 面的垂線，相交於 F，又自 F 作 OX 軸的垂線，相交於 E，則 $OE=x$，$EF=y$，$FP=z$。將折線 $OEFP$ 射影到 ON 上，按射影第一二兩定理，得

$$\text{Proj}\cdot OE+\text{Proj}\cdot EF+\text{Proj}\cdot FP=\text{Proj}\cdot OP。$$

卽 $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p.$$

系 平面的方程式對於 x,y,z 爲一次。

法線 Normal 法式 Normal form

26. **一次方程式的軌跡** 取上系的逆定理，即有對x, y, z爲一次的方程式$Ax+By+Cz+D=0$(式中A, B, C不同時爲零)的軌跡爲一平面。

證 我們只需證明可得一常數k，使

$$k(Ax+By+Cz+D)=0$$

和平面的法式相同。比較係數，即得

$$kA=\cos\alpha,\quad kB=\cos\beta,\quad kC=\cos\gamma,$$

但 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=k^2(A^2+B^2+C^2)=1$$

$$\therefore\quad k=1/\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

如$D\neq 0$，則由$-kD=p>0$，可知根式前的正負號，應使與D的數值的號相異，如$D=0$。則所表平面經過原點，按§24的規定，當依次看$\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$是否爲正，來決定正負數的取捨，今列爲一表如下：

不爲零的係數			根式前正負號的決定	理　由
$D\neq 0$			與D的數值的號相異	$-kD=p>0$
$D=0$	$C\neq 0$		與C的數值的號相同	$kC=\cos\gamma>0$
	$C=0$	$B\neq 0$	與B的數值的號相同	$kB=\cos\beta>0$
		$B=0$	與A的數值的號相同	$kA=\cos\alpha>0$

(註) 在此不能逕以$A=\cos\alpha$, $B=\cos\beta$, $C=\cos\gamma$。因A, B, C的值無限制，而$\cos\alpha$等的絕對值必小於1，且三者的平方和當爲1也。

系一 欲化一次方程式 $Ax+By+Cz+D=0$ 爲法式，可以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 徧除全式卽得，根式前的號，照上表決定。

系二 平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 中 A, B, C 三係數，與其法線的方向餘弦(或參數)成比例。

系三 上述法線的方向餘弦爲

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

而自原點到這平面的距離爲 $p=\dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 根式前的號，照上表決定。

27. 二平面的關係 由上節的理，可知

(一)平面 $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$。平行的充要條件爲 $A:A'=B:B'=C:C'$。

(註) 在此以相合爲平行的特例，相合的充要條件爲

$$A:A'=B:B'=C:C'=D:D'。$$

(二)上列二平面垂相的充要條件是 $AA'+BB'+CC'=0$。

(三)平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 中係數有爲 0 時，與坐標平面，坐標軸的關係如下表：

係		數	坐	標平	面	坐	標	軸
A	B	C	YZ	ZX	XY	x	y	z
0			垂直			平行		
	0			垂直			平行	
		0			垂直			平行
	0	0	平行	垂直	垂直	垂直	平行	平行
0		0	垂直	平行	垂直	平行	垂直	平行
0	0		垂直	垂直	平行	平行	平行	垂直

28. **平面的截距與主截口**　一平面在坐標軸上所截取有向線段的長，叫做**截距***。平面與三坐標平面相交的直線，叫做**主截口***。

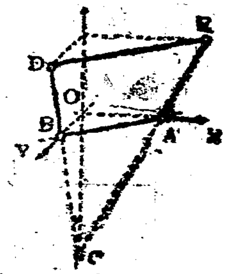
法則　在平面方程式中，令二個變數爲零，而解所得方程式，則得一截距的值。令一個變數爲零，則所成方程式爲一坐標平面上截口的方程式。

已知一不過原點的平面方程式，求作其圖，可先求其截距，以定這平面與坐標軸的交點，這三交點兩兩聯成的三直線，就是主截口，由截口即可表示平面的位置。如這平面經過原點，則各截距爲零，這時三主截口共過原點，須取其二主截口，和第三坐標平面的另一平行面上的截口，方可表出平面。

例一　試求平面 $2x+2y-z-6=0$　(1)

截距 Intercept。 主截口 Trace。

的截距，主截口，並作此平面。又求化成法式。



(第19圖)

解　(一)令 $y=z=0$，有 $2x-6=0$，解得截距 $x=OA=3$。

同法得他二截距

$y=OB=3,\quad z=OC=-6$。

聯成截口 AB, BC, CA，如第19圖，則

AB:　$x+y-3=0$　(在(1)中令 $z=0$ 再簡化)

BC:　$2y-z-6=0$　(在(1)中令 $x=0$ 而得)

CA:　$2x-z-6=0$　(在(1)中令 $y=0$ 而得)

(二)欲化成法線式，可先求 k。

$$k=1/\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}=1/\pm\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=\pm\frac{1}{3}$$

在此 $D=-6<0$，故應取 $k=\frac{1}{3}$，而得法線式：即

$$\frac{1}{3}(2x+2y-z-6)=0$$

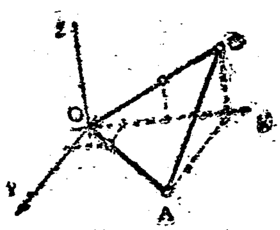
$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-2=0。$$

例二　試求平面　$x-y-2z=0$　(2)

的截距，主截口，並作此平面，又求化成法式。

解　(一)方程式中無常數項，故這平面經過原點，而三截距為零。主截口則為

$$\left.\begin{aligned} OA &: x-y=0 \\ OB &: y+2z=0 \\ OC &: x-2z=0 \end{aligned}\right\}$$ 如第 20 圖。



(第 20 圖)

作 OA, OC 和這平面在 YZ 面的一平行面上的截口，則可表出其在第一卦限內的一部分。

(二) $$k=1/\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$=1/\pm\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

在此 $D=0$, $C=-2<0$, 故應取 $k=-\frac{1}{\sqrt{6}}$，而得法線式爲

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z=0。$$

例三　試求平面 $2x+2y+z-12=0$ 被三坐標平面所截成三角形的面積。

解　先求得三截距爲　$x=OA=6, y=OB=6, z=OC=12$,

$$a=BC=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5},\quad b=CA=6\sqrt{5},$$

$$c=AB=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2},$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)=3(2\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

按三邊求積公式，得面積

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{3(2\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=3^2\cdot\sqrt{2(4\cdot 5-2)}=3^2\cdot\sqrt{2\cdot 18}=9\sqrt{36}=54。$$

又解 取 $OC=12$ 爲角錐 $C-OAB$ 的高，則其體積爲

$$V=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6)=72。$$

次求自原點到平面的距離，可化成法線式

$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-4=0,\quad p=OD=4,$$

又得
$$V=\frac{1}{3}pS=\frac{4}{3}S。$$

$$\therefore\ \frac{4}{3}S=72,\qquad S=\frac{3}{4}\times 72=54。$$

習 題 七

1. 試求下列各平面的截距和主截口，並作其圖：

（1）$6x-2y+3z-20=0$；

（2）$4y+3z+36=0$；

（3）$x+2y+3z+12=0$；

（4）$2x+y-z=0$。

2. 試求下列各平面的方程式，並作其圖：

（1）$p=5,\ \alpha=120^\circ,\ \beta=45^\circ,\ \gamma=120^\circ$；

（2）$p=4,\ \alpha=90^\circ,\ \beta=135^\circ,\ \gamma=45^\circ$；

（3）$p=6$, $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 6 : -2 : 3$;

（4）$p=0$, $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -3 : 4 : 12$。

3.試化第1題中各方程式爲法線式,並求其法線的方向角,與自原點至這平面的距離。

4.試求平面的方程式,使自原點所作法線與這平面交點爲

（1）$(-2, -2, 1)$;　　　　（2）$(1, 0, 2)$。

5.試求平面的方程式,使與自原點至

（1）$(4, 5, 3)$的直線垂直,而經過$(1, 3, 2)$一點;

（2）$(2, -4, 3)$的直線垂直,而經過$(3, -4, -5)$一點。

6.試證下列各組平面爲平行,並求各平行面間的距離:

（1）$6x+2y-3z-63=0$, $-6x-2y+3z-49=0$;

（2）$x+2y+2z-7=0$, $3x+6y+6z=1$。

7.試求平面的方程式,使

（1）垂直於XY面,且過$(2, -1, 0)$與$(3, 0, 5)$二點;

（2）與平面$x-2y-2z=15$平行,但距原點較近2單位。

8.試定下列各組中的平面爲相平行或相垂直:

（1）$2x+3y=z$, $3x-y+3z+2=0$, $4x-6y-2z+8=0$;

（2）$2x-5y+4=0$, $5x+2y=8$, $x=2y$。

9.試求$x+2y+z=0$, $x-2y=8$, $x+y+z=3$三平面的交點。

10.試證 $4x+y+z+4=0$, $y-5z+14=0$, $x+2y-z+3=0$, $x+y+z=2$ 四平面有一公共點。

11.試求平面 $x+5y+7z=3$ 被三坐標軸所截成三角形的面積。

29. **二平面的交角** 一對相交平面所成的二面角，依立體幾何學的規定，顯見卽等於二者垂線的交角，可得二值，一鈍一銳，在此我們取自原點所作二法線的交角。

定理 設

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

二平面的交角爲 θ，則

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{(\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2})(\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2})}$$

二根式前的正負號由 §26 的表決定。

證 將 §26 系三的結果，代入 §14 的公式，卽得上式。

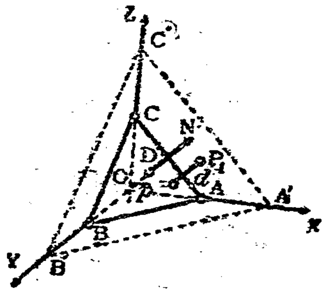
30. **平面至其外一點的距離** 一平面垂線上的正向，假設與自原點所作至平面的法線上一向相合，後者照 §24 所說的原則規定，如此則自一平面至其外一點的距離，當這點與原點在平面異側時爲正，同側時爲負。如平面經過原點，仍可照 §24 的規定去判別。

問題 求自平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 至點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的距離。

解　命 d 爲所求的距離，過 P_1 作平面 $A'B'C'$ 與平面 ABC 平行，如第 21 圖，其方程式顯爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(p+d)=0。$$

P_1 在這平面上，故 x_1,y_1,z_1 都適合這方程式，卽



(第21圖)

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-(p+d)=0$$

$$\therefore\ d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-P。$$

(注意)　如平面方程式爲 $Ax+By+Cz+D=0$，則當先化成法線式再求，如是得

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

根式的正負號，按§26 的表決定。

法則　如欲求自一已知平面至一已知點的距離 d:

(一) 化已知平面的方程式爲法線式。

(二) 命 d 等於化成方程式的左端。

(三) 以已知點的坐標，代左端中的 x,y,z 卽得。

例　試求自平面 $2x+y-2z+8=0$ 至點 $(-1,2,3)$ 的距離。

解　(一) $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\pm\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\pm3$。但 $D=8>0$，故取 $k=-\frac{1}{3}$，而得法線式

$$-\frac{1}{3}(2x+y-2z+8)=0_{\circ}$$

(二) $d=-\frac{1}{3}(2x+y-2z+8)$。

(三) $d=-\frac{1}{3}[2\cdot(-1)+2-2\cdot 3+8]=-\frac{2}{3}$。

31. **二面角的平分面** 由立體幾何學，知一動點和二相交平面等距離時，則所成的軌跡，是這二平面所成的兩個二面角的平分面。注意在立體幾何學內所說的距離，是指絕對值，而不分正負的。

例 試求下列二平面：

$$2x-y-2z-3=0,\quad 6x+3y+2z+4=0_{\circ}$$

所成的兩個二面角的平分面。

解 化已知平面的方程式成法線式，得

$$\frac{1}{3}(2x-y-2z-3)=0,\quad -\frac{1}{7}(6x+3y+2z+4)=0_{\circ}$$

命動點為 $P(x_1,y_1,z_1)$，則得

$$d_1=\frac{1}{3}(2x_1-y_1-2z_1-3),\quad d_2=-\frac{1}{7}(6x_1+3y_1+2z_1+4)$$

由條件 $d_1=d_2$，簡化後並除去變數的下號，得一平分面的方程式為

$$32x+2y-8z-9=0 \qquad (1)$$

又由條件 $d_1=d_2$，以同法得另一平分面的方程式為

$$4x+16y+20z+33=0 \qquad (2)$$

(註) 自二平面至原點的距離爲 $d_1=-1$，$d_2=-\frac{4}{7}$，二者同號，所以含有原點的一個二面角的平分面，是（1）式，因而不含有原點的二面角的平分面是（2）式。

習 題 八

1. 試求下列各組平面所成的二面角：

（1）$2x-y+z=7$，$x+y+2z=11$；

（2）$x+2y-z=0$，$x-2y-2z=7$；

（3）$3x-z+12=0$，$x+3y+17=0$。

2. 試求下列各距離，並說明所得結果中正負號的意義：

（1）自平面 $6x-3y+2z=10$ 至點 $(4,2,10)$；

（2）自平面 $x+2y-2z-12=0$ 至點 $(1,-2,3)$；

（3）自平面 $x+y+z=0$ 至點 $(-1,-1,-1)$。

3. 試求第1題中各組平面所成兩個二面角的平分面，並區別其含有原點和不含有原點的情形。

4. 試求上題中所得平分面與題設平面所成的角，因而驗明結果是否正確。

5. 求證§29公式所定的角，是不含有原點的一個二面角。

6. 自平面 $3x-6y-2z=0$ 至一動點的距離，爲自另一平面 $2x+y+2z=0$ 至這點的距離的三倍，試求其所成軌跡的方程

式。

7. 平面 $x+y+z+12=0$ 與一動點的距離，等於動點與原點間的距離，求其軌跡的方程式。

8. 平面 $x+y=1$ 與一動點間的距離，等於 z 軸與動點的距離，試求其軌跡的方程式。

9. 一動點與 $x+y-z-1=0$ 和 $x+y+z+1=0$ 二平面距離的平方和等於 1. 試求其軌跡的方程式。

10. 試在平面 $x+y+z-1=0$ 與三坐標平面所成的四面體內求定一點，使其與各面間的距離相等。

11. 有上題所說的性質而不在體內的點，一共有幾？試一一求出。

32. **由三條件決定的平面** 平面方程式

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

內有四個未定係數 A,B,C,D。這四數決不能都為零，如用不為零的一數，偏除全式，則便成三個未定比，所以只須用三個條件，卽可定出。有時先按條件求出含 A,B,C,D 的三個齊次方程式，而解出以第四數表其他三數的結果，代入（1）式內，再用第四數徧除之，卽得所求的方程式。

例 試求通過點 $P_1(2,-7,\frac{3}{2})$ 而與平面 $21x-12y+28z-84=0$ 平行的平面方程式。

解　設所求方程式爲 $Ax+By+Cz+D=0$。(2) 因 P_1 在這平面上，故 $x=2$, $y=-7$, $z=\frac{3}{2}$ 應合於(2)式則得

$$2A-7B+\frac{3}{2}C+D=0$$

再按平行條件（§27(一)），

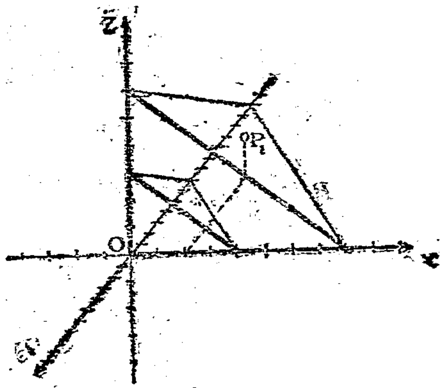
$$A:21=B:-12=C:28$$

$$\therefore A=\frac{3}{4}C, B=-\frac{3}{7}C$$

代入(2)式中，得

$$\frac{3}{2}C+3C+\frac{3}{2}C+D=0$$

卽　$D=-6C$



（第22圖）

故所求方程式爲 $\frac{3}{4}Cx-\frac{3}{7}Cy+Cz-6C=0$

用 C 徧除並簡化，得 $21x-12y+28z-168=0$。

33. 過三已知點的平面方程式　設 (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) 三點不在同一直線上，則

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

四個行列式決不同時爲零(§18)。命 $P(x,y,z)$ 爲這三點所定平面上任一第四點，則按四點共面條件（§18），得這三點所定

平面的方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

展開便有 $$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

係數 A,B,C 和 D，依次等於上面的四個三級行列式，但於第二第四兩式前，須冠以負號，

特例　求截距爲 a,b,c 的平面方程式。

解　卽爲過 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 三點的平面方程式，用上法可求得爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1。 \qquad (2)$$

又解　此題直接求之較便，卽設(1)式爲所求的平面方程式，以上列三點的坐標代入，可得

$$Aa+D=0,\quad Bb+D=0,\quad Cc+D=0。$$

$$\therefore\ A=-D/a,\quad B=-D/b,\quad C=-D/c。$$

再代入(1)式而以 $-D$ 徧除，卽得(2)式。

34．平面系* 如已知條件不足三個，則不能使平面完全確定，則得一系平面。只有二個條件的，所得平面系中，含有一

---

* 系 System

個參數，只有一個條件的，含二個參數。

(一)與已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的平面系方程式爲 $Ax+By+Cz+k=0$，式中 k 是參數。

理甚顯然(由 §27(一)卽明)。

(二)經過二相交已知平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

交線的平面系方程式爲

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

式中 k 是參數。

因爲二已知平面交線上的點，其坐標必合於二原設方程式，所以不論參數 k 的值如何，也必適合第三個方程式。

(註) 如已知的二平面平行，則得一系平行面，和已知平面平行。

(三)經過定點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的平面系方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

式中以 A,B,C 三數所成二比爲參數。

因上式爲一次，故表平面，而 P_1 的坐標代入適合。

(注意) 所謂條件的個數，不能由表面判斷，例如與一已知平面平行，以及經過某一直線，似各爲一條件，而實爲二，必須由解析式，方可察出多寡。

35. 決定平面的又一方法　卽先從已知條件，作出相當的平面系，再按所餘條件，定其中參數的值。

例一　試求經過下列二平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

交線，又經過原點的平面方程式。

解　既過原點，即不含常數項，故可於

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

中定 k 值，使 $D_1+kD_2=0$，即 $k=-D_1/D_2$，代入上式簡化，得

$$(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-B_2D_1)y+(C_1D_2-C_2D_1)z=0。$$

例二　試求經過原點與點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，又與平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 垂直的平面方程式。

解　作二平面，使過所設二點以及與一坐標軸平行，其方程式顯為

$$y_1x-x_1y=0,\quad z_1y-y_1z=0$$

所以過所設二點的平面方程式為

$$(y_1x-x_1y)+k(z_1y-y_1z)=0,$$

即
$$y_1x+(-x_1+kz_1)y-ky_1z=0。$$

按垂直條件（§18），可定 k 值，使

$$A_1y_1+B_1(-x_1+kz_1)+C_1(-ky_1)=0$$

即
$$k=(B_1x_1-A_1y_1)/(B_1z_1-C_1y_1).$$

代入簡化，得所求結果為

$$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0。$$

又解　用§32的方法較便。命所求方程式為

$$Ax+By+Cz+D=0$$

因其過原點及P_1,故$D=0$,且　　$Ax_1+By_1+Cz_1=0$

再按垂直條件,　　$AA_1+BB_1+CC_1=0$

就這二個齊次方程式,可解出

$$A:B:C=C_1y_1-B_1z_1:A_1z_1-C_1x_1:B_1x_1-A_1y_1$$

與上法所得結果相同。

習 題 九

1.試求經過下列各組三點的平面方程式:

(1) $(2,3,0),(-2,-3,4),(0,6,0)$

(2) $(4,2,1),(-1,-2,2),(0,4,-5)$

(3) $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$

2.試求截距爲下列各組值的平面方程式:

(1) $-1,-3,5$;　　(2) $2a,-a,3a$。

3.試證下列各組四點,各在一平面上:

(1) $(-1,0,0),(0,2,-3),(2,10,-5),(1,0,-10)$;

(2) $(1,0,-1),(3,4,-3),(8,-2,6),(2,2,-2)$。

4.試求下列各組條件所決定的平面方程式。

(1) 經過$(3,-4,5)$而與平面$3x-y+z+6=0$平行。

(2) 經過$(2,-1,-1)$與$(1,1,2)$二點而與平面$7x+4y-4z+30=0$垂直。

(3) 經過$(7,0,3)$而與$2x-4y+3z=0,7x+2y+z=14$,

二平面垂直。

(4)經過$(0,-1,0)$與$(0,0,1)$二點，而與XY面成$60°$的角。

4.試定參數k的值，使平面$x+ky-2z=9$合於下列各條件之一：

(1)經過$(5,-4,-6)$一點；

(2)與平面$2x+4y+3z=3$垂直；

(3)與平面$2x-3y+z=0$成$45°$的角；

(4)與原點相距5單位。

5.一平面與三坐標平面所成各二面角相等，且到原點的距離為p，試求其方程式。

6.一平面在三軸上的截距為a,b,c，試求自這平面到原點的距離。

7.試求合下列各組條件的平面方程式：

(1)過$2x+y-4=0$，$y+2z=0$二平面的交線，又經過$(2,-1,-1)$一點。

(2)過上二平面的交線，又與平面$3x+2y+3z=6$垂直。

(3)過$2x+y-z=4$，$x-y+2z=0$二平面的交線，而依次與各坐標平面垂直(共三平面)。

(4)過$6x+2y+3z-6=0$與$-x+y+z+1=0$二平面的交線，而與三坐標平面所成四面體的體積為$\frac{1}{6}$。

(5)過 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 二平面的交線而與平面 $y-z=0$ 成 $45°$ 的二面角。

8. 試求合下列各組條件的平面方程式:

(1)與平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行,而至原點的距離為單位距離。

(2)與平面 $6x+-2y+3z+15=0$ 平行,而使點$(0,2,-1)$與這二平面的距離相等。

(3)與平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行,而與三坐標平面所成四面體的體積為單位體積。

(4)與平面 $12x+y+2z+5=0$ 平行,而與三坐標平面所成四面體的全面積為單位面積。

(5)與平面 $2x+6y+3z=8$ 平行,而被第一象限內三坐標平面所截成三角形面積為 $\frac{7}{8}$。

9. 一平面經過 $(2,-3,0)$ 一點而在 ZX 面上的截口,與平面 $x-3y+7z+12=0$ 在 ZX 面上的截口相同,試求其方程式。

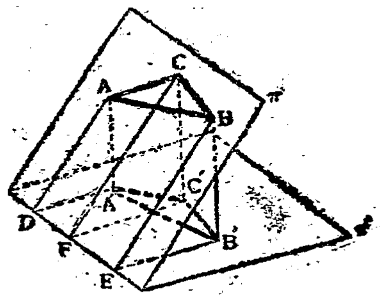
10. 一平面的一截口方程式為 $x+3y-2=0$,而與三坐標平面所成四面體的體積為 $\frac{8}{3}$,試求其方程式。

11. 求證 $x+2y-3z+1=0$, $3x+4y-19z+5=0$, $y+5z=1$ 三平面共過一直線。

12. 證明 §34(二)的註中所說的理。

25. **面積的射影**　設 π 與 π' 二平面的交角為 θ,在 π 上

有一$\triangle ABC$，其面積為S。自A，B，C作至π'面上的垂線，相交於A'，B'，C'，所成的三角形叫做$\triangle ABC$在π'上的正射影，或簡稱射影，現求$\triangle A'B'C'$的面積S'。



（第23圖）

經過AA'，BB'，CC'作π與π'二平面交線的垂面，各與交線相交於D，E，F，則$\angle A'DA$，$\angle B'EB'$，$\angle C'FC$都等於θ，而得命

梯形$A'DFC'$面積$=S_1'$，　梯形$ADFC$面積$=S_1$；

梯形$C'FEB'$面積$=S_2'$，　梯形$CFEB$面積$=S_2$；

梯形$A'DEB'$面積$=S_3'$，　梯形$ADEB$面積$=S_3$；

則　$S_1'=\frac{1}{2}DF(DA'+C'F)=\frac{1}{2}DF(DA+CF)\cos\theta=S_1\cos\theta$，

同理　$S_2'=S_2\cos\theta$，　$S_3'=S_3\cos\theta$。

但如第23圖，　$S'=S_1'+S_2'-S_3'$，　$S=S_1+S_2-S_3$

$\therefore\ S'=(S_1+S_2-S_3)\cos\theta=S\cos\theta$。

在他種情形，也可用類似的方法證明。

（註）這法顯見可施於任何多角形，而得同一結果。如視閉形平曲線面積，為其內接多角形面積，當諸邊趨近於零時的極限，則對曲線形，這理也無不合。換句話說，即任何閉形平曲線所圍成的面積S，射影到另一平面上得一面積S'，如

這二平面的交角爲 θ，則

$$S' = S\cos\theta.$$

這理在積分學上頗有效用，一般立體解析幾何學多未敍及，故特爲證明，

37. 三點所成三角形的面積

問題　已知三點的坐標爲 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$，試求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積 S。

解　設 $\triangle P_1P_2P_3$ 所在平面爲 π，則 π 與 YZ, ZX, XY 三面的交角，卽爲 π 上一垂線與 x 軸，y 軸，z 軸三線的交角，可命這幾個角爲 α, β, γ，

假設 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積爲 S，他在三坐標平面上射影的面積各爲 S_x, S_y, S_z，則按上節的理。

$$S_x = S\cos\alpha, \quad S_y = S\cos\beta, \quad S_z = S\cos\gamma$$

但
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

故
$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

今 P_1, P_2, P_3 在 YZ 面上射影的坐標爲 $(0, y_1, z_1)$，$(0, y_2, z_2)$，$(0, y_3, z_3)$，故

$$S_x^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2,$$

同理 $S_y^2=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2$, $S_z^2=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$

38. 四面體體積求法 按立體幾何學，知四面體的體積等於其任一底面積與這底上高相乘積的三分之一，如已知四面體的各頂點，則可照上節方法，求出任一底面積，再按自平面至點的距離公式（§ 30）以求高，卽可算出體積。在此應取適當順序，使結果爲正。

例 試求 $P_1(3,0,0)$，$P_2(0,-2,0)$，$P_3(0,0,-1)$，$P_4(3,-1,-1)$ 四點所成四面體的體積 V。

解 先求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積 S。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2,\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3,\quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-6。$$

$$\therefore S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2=\frac{1}{4}\left[2^2+(-3)^2+(-6)^2\right]=\frac{49}{4},\ S=\frac{7}{2}。$$

經過 P_1, P_2, P_3 三點的平面方程式爲 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{1}=1$，

化爲法線式，得 $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{6}{7}=0$。

$$\therefore d=\frac{2}{7}\cdot 3-\frac{3}{7}(-1)-\frac{6}{7}(-1)-\frac{6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}dS=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3}{2}。$$

又解 在本題中，P_1,P_2,P_3 在三坐標軸上，故可用特殊的解法如下：

$$四面體\ O-P_1P_2P_3\ 體積=\left|\frac{1}{3}OP_1\cdot\frac{1}{2}OP_2\cdot OP_3\right|=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3$$

$$=1,$$

但又 $$=\frac{1}{3}pS$$

式內 p 爲原點與平面 $P_1P_2P_3$ 間的距離，即

$$p=\left|\frac{2}{7}\cdot0-\frac{3}{7}\cdot0-\frac{6}{7}\cdot0-\frac{6}{7}\right|=\frac{6}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}S=\frac{2}{7}S=1, \quad 而 \quad S=\frac{7}{2}。$$

此後的算法和上解相同。

此外也可用三邊求積的公式求 S 如下：

$$a=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}, \quad b=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5},$$

$$c=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{10})(-\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{13}-\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{13}+\sqrt{5}-\sqrt{10})}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[-13+(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2][13-(\sqrt{5}-\sqrt{10})^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(10\sqrt{2}+2)(10\sqrt{2}-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{50-1}=\frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}。$$

但計算較爲麻煩。

39. **四面體體積公式**　已知四面體各頂點的坐標爲 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$，則其體積 V 可由下公式求得

$$V=\frac{1}{6}D=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

在此 V 爲有向量，其正負的規定，即可在下註中說明。

證　即用上節的方法：

過 P_1, P_2, P_3 三點的平面方程式爲（§33）。

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}=0$$

化為法線式，須除以 x,y,z 係數平方和的平方根，卽是

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{(2S_x)^2+(2S_y)^2+2(S_z)^2}=2S$$

式中 $S,S_x\ S_y,S_z$ 的意義如§37。故

$$d=\frac{1}{2S}D,\qquad V=\frac{1}{3}dS=\frac{1}{6}D。$$

例 求上節例題中四面體的體積。

解 $$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

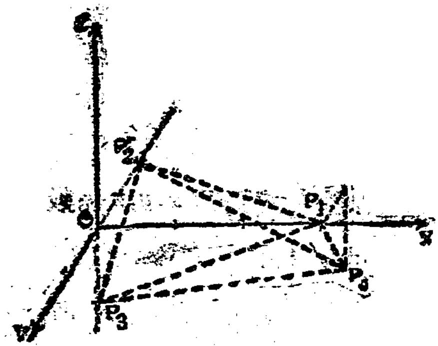
$$=\frac{1}{6}\cdot 3\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-2-1)=-\frac{3}{2}.$$

〔註〕四面體體積正負的規定如次：

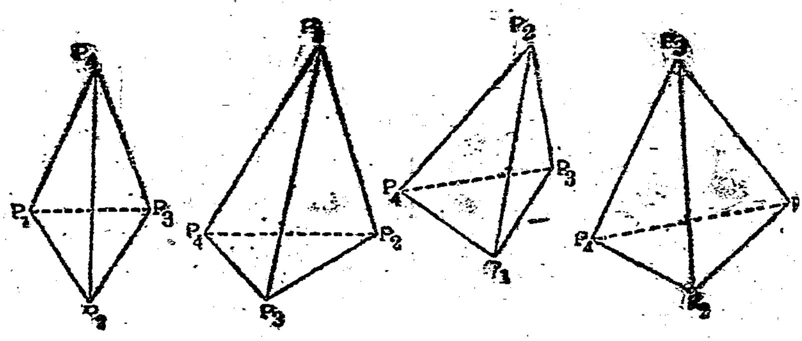
設一人立於四面體內的一底面 $P_1P_2P_3$ 上，卽其頂點 P_4 與

此人同在 $P_1P_2P_3$ 的一側。如定 P_1, P_2, P_3 的次序，使 $\triangle P_1P_2P_3$ 面積為正（即當此人順 $P_1P_2P_3$ 的次序，沿這三角形周界上行走時，見此三角形常在其左首），則四面體 $P_1P_2P_3P_4$ 的體積為正，試作上例的圖如



(第 24 圖)

第 24 圖，即知其體積為負，而與計算的結果相合。注意依此規定時，$P_1P_2P_3P_4$，$P_2P_3P_4P_1$，$P_3P_4P_1P_2$，$P_4P_1P_2P_3$ 四個四面體體積的絕對值相同，而量的號則正負相間，看第 25 圖便明。



(第 25 圖)

40. **四面體體積公式新證**　上面所述的證法中，須用面積射影的理，較為繁難，編者曾擬有一直接證法，初學似乎較易

了解。

（註） 如時間不敷，本節以及上面的四節均可略去，或略去上四節，只讀上節的註和本節。

（一）先求有一頂點爲原點的四面體 $P_1P_2P_3O$ 的體積。

如四面體的一頂點，在他三頂點所定平面的平行面上移動，則高與底均不變，故體積也不變。

平面 OP_2P_3 的方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

故其平行面的方程式爲 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = k$

但此平面經過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，代入應能適合，卽可求出未定數 k 的值爲 $k = D' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$，

假設這平面交 x 軸於 $P_x(a, 0, 0)$，則

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = D', \qquad a = \frac{D'}{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}} = \frac{D'}{D_1'}.$$

而 $OP_1P_2P_3$, $OP_xP_2P_3$ 二四面體等積.

次作過 P_2 而與 OP_xP_3 平行的平面方程式,得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & y & z \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} = D'$$

並設其交 y 軸於 P_y $(0,b,0)$,則

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = D' \qquad b = \frac{D'}{az_3} = \frac{D_1'}{z_3}$$

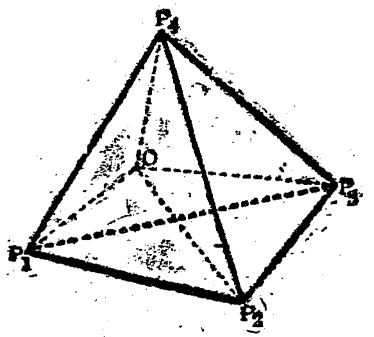
同理知 $OP_1P_2P_3$, $OP_xP_yP_3$ 二四面體等積。

更作過 P_3 而與 OP_xP_y 平行的平面,也就是過 P_3 (x_3,y_3,z_3) 而與 XY 面平行的平面,顯見與 z 軸交於 P_z $(0,0,z_3)$。最後所得四面體 $OP_xP_yP_z$ 和 $OP_1P_2P_3$ 等積。故

$$V = \frac{1}{6}abz_3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{D'}{D_1'}\cdot\frac{D_1'}{z_3}\cdot z_3 = \frac{1}{6}D'。$$

(二)對任一四面體 $P_1P_2P_3P_4$ 皆通可自原點 O 作 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 四直線,分成四個四面體 $P_2P_3P_4O$, $P_3P_4P_2O$, $P_4P_1P_2O$, $P_1P_2P_3O$, 命其體積為 $-V_1, V_2, -V_3, V_4$ (看上節的註中最後一段)。

今設原點 O 在這四面體內部,就第 26 圖,知 V_1, V_2, V_3, V_4 與 V 同為正量或同為負量,而



（第26圖）

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4$$

也就等於下量的 $\frac{1}{6}$

$$-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

即
$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

原點在四面體外時，也可依同法證明。

（註） 如覺體積正負的規定和（二）中所論，不易明瞭，可用平移的理，從（一）推得普遍結果，看本書後文 § 79。

習　題　十

1. 不用公式，求下列各四面體的體積：

（1）$(0,0,4)$，$(3,0,0)$，$(0,2,0)$，$(7,7,3)$。

（2）$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,-2)$，$(4,-1,3)$。

（3）$(3,4,0)$，$(4,-1,0)$，$(1,2,0)$，$(6,-1,4)$。

2. 用公式解上題，並對換二頂點的順序，以驗其對結果有何影響。

3. 試求以平面 $3x+4y+2z+12=0$ 被三坐標平面所截取的三角形爲底，$(1,2,1)$為頂點的四面體的體積。

4. 試求 $-x+y+z+1=0$，$x-y+z+1=0$，$x+y-z+1=0$，$x+y+z-1=0$ 所成四面體的體積。

5. 試求 $P_1(1,1,1)$，$P_2(-1,1,1)$，$P_3(1,-1,1)$，$P_4(1,1,-1)$四點所成各三角形的面積。

6. 試按§38 例題第一解的方法，求上題中四面體 $P_1P_2P_3P_4$ 的體積，並作圖以驗其體積正負的意義。

7. 試用公式求上題中 $P_2P_3P_4P_1$，$P_3P_4P_1P_2$，$P_4P_1P_2P_3$ 各四面體的體積。

8. 試按§40 的證法，求原點與 $P_1(1,-1,-1)$，$P_2(-1,1,-1)$，$P_3(-1,-1,1)$所成四面體的體積。

9. 試按四面體體積公式，證明任換一四面體二頂點的順

序，則其體積改號，

10. 試設原點在四面體 $P_1P_2P_3P_4$ 外的任一種情形，以討論 §40（二）。

第三章　直線

41．直線的普通方程式　直線可視爲二平面相交而成，所以將二相交平面方程式聯立，即得直線的方程式。故得

定理　二個聯立一次方程式

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。\quad (1)$$

的軌跡是一直線，但在此 x,y,z 的係數不成比例。

此外尚有他種方程式，待後再說。

42．方向餘弦的求法

定理　設(1)式所表直線的方向角爲 α,β,γ，則

$$\frac{\cos\alpha}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{\cos\beta}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{\cos\gamma}{A_1B_2-A_2B_1}。$$

證　已知直線係由(1)式中二平面相交而成，所以必與這二平面的法線垂直。但二法線的方向參數(§26，系二)爲

$$A_1,B_1,C_1 \text{ 和 } A_2,B_2,C_2。$$

故按垂直條件(§15)，得

$$A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta+C_1\cos\gamma=0。$$

$$A_2 \cos\alpha + B_2 \cos\beta + C_2 \cos\gamma = 0.$$

就這二個方程式解出三餘弦的比，有

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

即得所求結果。等號右端三數，即是方向參數。

（註）在此也可見上節定理中係數不成比例一條件的意義；因如此，則 $B_1C_2 - B_2C_1$ 等三數方可不都爲零。

43. 與坐標平面軸的相關位置　如上節中 $B_1C_2 - B_2C_1$ 等三數有一或二爲零，則必其相當的餘弦爲零，而這直線與一坐標平面平行，如與二坐標平面平行，則必和第三坐標平面垂直，茲列一表如下：

方向參數			坐標平面			坐標軸		
a	b	c	YZ	ZX	XY	x	y	z
0			平行			垂直		
	0			平行			垂直	
		0			平行			垂直
	0	0	垂直	平行	平行	平行	垂直	垂直
0		0	平行	垂直	平行	垂直	平行	垂直
0	0		平行	平行	垂直	垂直	垂直	平行

表中 $a = B_1C_2 - B_2C_1$，$b = C_1A_2 - C_2A_1$，$c = A_1B_2 - A_2B_1$

44.　直線的作圖，主截口　一直線與各坐標平面的交點叫做主截口。欲作一直線的圖，可由其一截口與一組方向參數或二截口決定。

例　試求直線 $\begin{cases}4x+6y-4z\qquad=0\\4x\qquad+4z-12=0\end{cases}$

的方向參數，並作其圖。

解　注意二已知方程式中相當係數如下表：

$$\begin{pmatrix}+4 & +6 & -4\\ +4 & 0 & +4\end{pmatrix}$$（如寫二已知方程式爲二列，使相當係數排齊，即不必重寫一遍）。

取其中第二，三；第三，一；第一，二兩直行，即得

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\begin{vmatrix}6 & -4\\0 & 4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-4 & 4\\4 & 4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}4 & 6\\4 & 0\end{vmatrix}$$

$$=24:-32:-24=-3:4:3$$

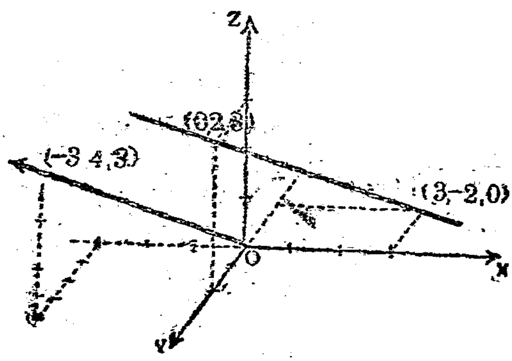
即可取 $-3,4,3$ 爲方向參數。

次求截口，設求 XY 面上者，可命 $z=0$，有 $4x+6y=0$，$4x-12=0$，

故 $x=3$，$y=-2$，即得一截口 $(3,-2,0)$。

聯原點 O 與 $(-3,4,3)$ 成一直線，即指示所求直線的方向，再過 $(3,-2,0)$ 作一直線，與上述直線平行，即爲所求的直線，或再求一截口，如 YZ 面上者，得 $(0,2,3)$，而聯二截口，也得所

求的直線，看第 27 圖。



(第 27 圖)

習題十一

1. 試求下列各組直線的方向參數和一截口，並作其圖：

(1) $x+5y+7z=3,\ x-2y+3z=6$。

(2) $2x+y+3z+2=0,\ 3x+y+3z-5=0$。

(3) $x+2y=8,\ 2x-4y=7$。

2. 試求上題中(1)，(2)二直線的二截口，而作其圖，直線(3)可用這法麼？

3. 如何方可使 § 43 中三個二級行列式中，有二為零，而第三個不為零？試由此結果證明：如一直線和一坐標平面垂直，則以這直線為交線的二平面，必和這坐標平面垂直(參看 § 27 的表)。

4. 試求下列各組直線的交角（各直線正向的規定，如 § 24)：

(1) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} x-y\quad=1 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$

(2) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ x-y+z=3 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} y+3z=4 \\ 3y-5z=1 \end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=2 \\ 2y-z=1 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=2 \\ x-2y+2z=4 \end{array}\right\}$

(4) $\left.\begin{array}{r} 6x-3y-2z-7=0 \\ 2x-2y-z+12=0 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z-9=0 \\ 6x+4y-z+12=0 \end{array}\right\}$

5. 求證下列各組直線為平行：

(1) $\left.\begin{array}{r} 2y+z=0 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} 5y-2z=8 \\ 4y+z=44 \end{array}\right\}$

(2) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{array}{r} 3x\quad+z=4 \\ y+2z=9 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} 6x-y\quad=7 \\ 3y+6z=1 \end{array}\right\}$

6. 試證下列各組直線為垂直：

(1) $\left.\begin{array}{r} x+2y\quad=1 \\ 2y-z=1 \end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r} x-y\quad=1 \\ x\quad-2z=3 \end{array}\right\}$

(2) $\left.\begin{array}{r}4x+y-3z+24=0\\ z-5=0\end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r}x+y\quad+3=0\\ x\quad+2=0\end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{array}{l}3x+y-z=2\\ 2x\quad-z=2\end{array}\right\}$ 與 $\left.\begin{array}{r}2x-y+2z=4\\ x-y+2z=3\end{array}\right\}$

7. 試察上題中三組直線，那幾組相交？那幾組不相交？如相交，並求其交點。

8. 試證 $x+2y+3z=3$, $3x+6y+4z=20$ 二平面與平面 $4x-y+z=0$ 相交所成二直線平行。

9. 如二相交平面與另一平面相交所成二直線平行，則必與這二平面的交線平行，試用解析法證明。

10. 試用解析法證明二平行平面被第三平面交成的二直線必平行。

45. 直線方程的參數式 假設已知一直線上一定點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和這直線的方向角 α, β, γ。在這直線上任取一點 $P(x, y, z)$，而命有向線段 P_1P 的長爲 l，則按射影關係（§11 定理一的系），有

$$x-x_1=l\cos\alpha,\quad y-y_1=l\cos\beta,\quad z-z_1=l\cos\gamma$$

或
$$x=x_1+l\cos\alpha,\quad y=y_1+l\cos\beta,\quad z=z_1+l\cos\gamma$$

以 l 爲參數，則其值變動時，P 在直線上移動，經歷全線，所以上式即爲已知直線的方程，叫做參數式*。

---

* 參數式 Parametric form

如已知直線的方向參數是 a,b,c，則參數式為

$$x=x_1+at,\quad y=y_1+bt,\quad z=z_1+ct$$

但在此參數 t 不是有向線段 P_1P 的長。

（註） 參數式內的參數，有伸縮餘地，對許多問題，應用甚為便利，情形很和代數中未定係數法的待定係數一類，又直線本由二個方程式聯立決定，在此有三個，即因其中含有一參數的緣故。

46. **直線方程的對稱式** 改書參數式為對稱的形式，得

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}=l$$

如用方向參數 a,b,c 來代方向餘弦，便有

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

這兩種方程都叫做對稱式*。

（註） 這裏三個等比，只相當於兩個獨立的方程式，其所表的二個平面，即下文（§§ 48, 49）所說的射影面。

（注意） 在此原須設 α,β,γ 不是直角，即 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ 或 a,b,c 不等於零；也就是說這直線不與任一坐標平面平行，若只有一角為直角如 α，則由參數式，得

$$x-x_1=0,\quad \frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}\quad\left(\text{或}\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\right)$$

為二個獨立方程式，如更有 $\beta=\frac{\pi}{2}$，則取

---

*對稱式 Symmetric form

$$x-x_1=0, \qquad y-y_1=0$$

但我們不如規定，稱式分母有一爲零時，即是指分子爲零的意思，則仍然可包括各種例外情形。

47. 直線方程的兩點式　在直線

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}$$

上取一點 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，則必

$$\frac{x_2-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y_2-y_1}{\cos\beta}=\frac{z_2-z_1}{\cos\gamma}$$

各等比相除，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

是爲直線方程的兩點式*。

（注意）如直線與一坐標平面平行，則 P_1 與 P_2 二點坐標中，至少有一互等，例如只與 YZ 面平行時，必 $x_1=x_2$，而方程式應作

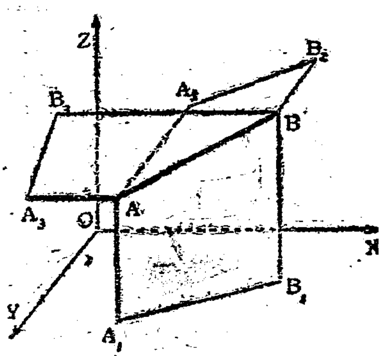
$$x-x_1=0, \quad \frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

餘可參照上節的注意所述。

48. 直線的射影面　一已知直線與他在坐標平面上正射影所定的平面，也就是經過這直線所作與坐標平面垂直的平面，叫做射影面*。

兩點式 Two-point form　射影面 Projecting plane

若這直線與三坐標平面都不平行，則可作三個射影面，如第 28 圖，若與一坐標平面平行，則至他二坐標平面的射影面合而爲一。例如 AB 面和 YZ 面平行時，其至 ZX 面和 XY 面的二射影面 AA_2B_2B 與 AA_1B_1B 爲同一平面。若與二坐標平面平行，也就是和一坐標軸平行，例如 AB 和 x 軸平行時，則其至 YZ 面的射影面不能確定，我們只能取二個射影面。



(第28圖)

由上所論，可知一直線至少有二不同的射影面，而可視爲這二射影面的交線，聯立這二射影面的方程式，叫這直線方程的射影式*。

49. 直線方程各式的互化，以例說明如下：

(一)化普通式爲射影式，

求化直線 $\left.\begin{array}{l} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{array}\right\}$ 爲射影式，

解　注意射影面與坐標平面垂直，所以其中應缺一變數(§27(三))，可見射影面即自已知方程式中消去一未知數而

* 射影式 Projections form

得。

消去 x，得　　$7y-8z+7=0$　（至 YZ 面的射影面）

消去 y，得　$7x\quad+3z-7=0$　（至 ZX 面的射影面）

消去 z，得　$8x+3y\quad-5=0$　（至 XY 面的射影面）

任取其二聯立，便成射影式。

例二　求化直線 $\left.\begin{array}{l}2x+y+3z+2=0\\3x+y+3z-5=0\end{array}\right\}$ 爲射影式。

解　在此消去 y 時，z 也一同消去，故直線與 YZ 面平行。

消去 x，得　　$y+3z+16=0$　（至 YZ 面的射影面）

消去 y 與 z，$x\quad-7=0$　$\left(\begin{array}{l}\text{至 } ZX \text{ 面的射影面也}\\\text{是至 } XY \text{ 面的射影面}\end{array}\right)$

（二）化普通式爲對稱式。

例三　化例一的直線爲對稱式。

解　方向參數由§42的公式即得，尙須再求一點，可用其截口，例如求其在 XY 面上截口，可令 $z=0$，得 $3x+2y-1=0$，$2x-y-3=0$。聯立解得 $x=1$，$y=-1$，這截口即爲 $(1,-1,0)$。所以方程式爲

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{y-(-1)}{\begin{vmatrix}-1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}}\ \text{即}\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z}{-7}$$

又解　先求出二個射影面方程爲射影式。例如取

$$7y-8z+7=0,\quad 7x+3z-7=0。$$

解得
$$y=\frac{8}{7}z-1,\quad x=-\frac{3}{7}z+1$$

$$\therefore\quad \frac{x-1}{-\frac{3}{7}}=\frac{z}{1}=\frac{y+1}{\frac{8}{7}}\ \text{卽}\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z}{-7}$$

（註）如求 YZ 面上截口，得 $(0,\frac{5}{3},\frac{7}{3})$，則對稱式爲

$$\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{5}{3}}{-8}=\frac{z-\frac{7}{3}}{-7}。$$

可見同一直線得由許多形式不同的方程式代表(參看下文 §53)。

例四　化例二的直線爲對稱式。

解　已知方程式中 y,z 二變數的係數成比例，便可斷定這直線與 YZ 面平行，所以不能求這面上的截口，任取他一坐標平面，如 XY 面，可令 $z=0$，有 $2x+y+2=0$，$3x+y-5=0$。解得 $x=7,y=-16$，故截口爲 $(7,-16,0)$，而所求對稱式爲

$$\frac{x-7}{0}=\frac{y+16}{3}=\frac{z}{-1}\ \text{卽}\ x-7=0,\ \frac{y+16}{3}=\frac{z}{-1}。$$

又解　先求出射影式如例二，就第一式解出 z，而與第二式聯立卽得上面的形式。

（注意）由此可知取對稱式中二個方程，卽爲射影式。

習題十二

1.試求下列各直線的射影面和射影式:

(1) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-y+2z=3\end{array}\right\}$　(2) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=1\\ x-y+z=2\end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{array}{r}2y+3z=6\\ 2y-3z=18\end{array}\right\}$　(4) $\left.\begin{array}{r}2x+y+z=6\\ x+3y-2z=2\end{array}\right\}$

2.求化上題各直線方程爲對稱式。

3.試求下列各直線的方程式。

(1)經過(3,4,−4),方向角爲60°,45°,120°。

(2)經過(1,−2,3),方向角爲45°,90°,135°。

(3)經過(3,2,−1),方向參數爲0,1,0。

(4)經過(3,−2,1),(3,−4,5)二點。

(5)經過(1,4,6),(−1,4,6)二點。

(6)經過(0,−3,2)而與(3,4,−7),(2,7,−6)二點的聯線平行。

4.試證 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 三點共在一直線上的條件爲

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

5. 求證 $\frac{x+2}{-6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-11}{2}$ 與 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{3}$ 二直線垂直。

6. 假設 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$，$\frac{x+2}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{1}$ 二直線以向上爲正向，試求其交角。

7. 試求下列直線的方程式：

(1) 經過 $(-1,2,6)$ 而與直線 $x=2z-3$, $y=-3z-5$ 平行。

(2) 經過 $(-1,2,6)$，與 x 軸垂直相交。

(3) 經過原點而與 $x=2z-4$, $y=-z+2$ 及 $y=x+5$, $z=2x-8$ 二直線垂直。

(4) 經過 $(0,2,0)$ 而與 $x=z$, $y=2z$ 及 y 軸二直線相交。

(5) 經過 $y=-x+6$, $z=2x-11$ 及 $x=2z+10$, $y=2z+8$ 二直線的交點，而與這二直線垂直。

8. 試求第 3 題中各直線方程的參數式。

9. 試作下列參數式所表的直線：

(1) $x=2+\frac{2}{3}l$, $y=4+\frac{1}{3}l$, $z=6+\frac{2}{3}l$。

(2) $x=-3+\frac{2}{7}l$, $y=6-\frac{6}{7}l$, $z=4+\frac{3}{7}l$。

10. 已知一直線的參數式爲

$$x=2-\frac{2}{13}l,\quad y=4+\frac{12}{13}l,\quad z=-3+\frac{4}{13}l,$$

試求自$(2,4,-3)$至這直線與平面 $4x+y-2z=16$ 交點的距離(不得用二點距離公式)。

50. **直線與平面的交角** 一直線與平面的交角，卽這直線與其在平面上正射影所成銳鈍二角中的銳角，也就是這直線與平面的法線所成銳角的餘角。

設直線與平面的方程式各爲

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\quad Ax+By+Cz+D=0$$

而直線與平面的法線所成銳角爲 θ，直線與平面的交角爲 ϕ，則 $\phi=\frac{1}{2}\pi-\theta$。按二直線交角公式(§14)。

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\phi\right)=\sin\phi=\left|\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

因 θ 爲銳角，故當取正值，而由這值所定 ϕ 角的二值，應取其小於 π 者。

51. **平行條件與垂直條件** 由上節亦卽可得平行條件爲

$$Aa+Bb+Cc=0。$$

又如直線和平面垂直，就是和平面的法線平行，所以垂直

條件是 $$A:B:C=a:b:c_{\circ}$$

（註）平行的情形包括直線在平面上。

52. **直線與平面的各種關係** 設已知直線方程的參數式為 $$x=x_1+at,\quad y=y_1+bt,\quad z=z_1+ct$$

及一平面的方程式為 $Ax+By+Cz+D=0$。而求二者的交點，可將參數式所表的 x,y,z 代入平面方程式，以定參數 t 的值，使能適合，代入得

$$A(x_1+at)+B(y_1+bt)+C(z_1+ct)+D=0$$

即 $$(Aa+Bb+Cc)t+(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=0 \qquad (1)$$

（一）如 $Aa+Bb+Cc\neq0$，由（1）式可求得 t 的惟一值，即可定直線與平面的唯一交點。反過來說，如二者有唯一的交點，則上式當有唯一的解，而必須 $Aa+Bb+Cc\neq0$。

（二）如 $Aa+Bb+Cc=0$，而 $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq0$，則（1）式無解，也就是二者永不相交而為平行。反過來說，如二者平行，則（1）式當無解，必須上開二條件同時成立。

（三）如 $Aa+Bb+Cc=0$，$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，則（1）式的解不定，任與 t 以何值，所定直線上各點都在平面上，也就是直線完全在平面上。反過來說，如直線完全在平面上，則 t 為任何值，都能適合（1）式，也就是說（1）式的解不定，必須上開二條件同時成立。

上面的結果可列爲一表如下，並附加幾何說明。

條	件	關 係	幾 何 說 明
$Aa+Bb+Cc\neq 0$		交於一點	直線不與平面平行
$Aa+Bb+Cc=0$	$Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$	平 行	平行而 P_1 不在平面上
	$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$	相 合	平行而 P_1 又在平面上

53. 二直線的各種關係 設有二直線

$$L_1:\quad x=x_1+a_1s,\quad y=y_1+b_1s,\quad z=z_1+c_1s;$$

$$L_2:\quad x=x_2+a_2t,\quad y=y_2+b_2t,\quad z=z_2+c_2t。$$

則有次列種種關係: $\begin{cases}\text{平 行}\begin{cases}\text{相合}\\ \text{不相合}\end{cases}\\ \text{不平行}\begin{cases}\text{相交}\\ \text{不相交(攲斜*)}\end{cases}\end{cases}$

今試分別定其條件。

(一)平行 則 $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$

(1)相合 L_1 既與 L_2 平行，只須更有 P_1 在 L_2 上，或 P_2 在 L_1 上，卽必相合。就是

$$\frac{x_1-x_2}{a_1}=\frac{y_1-y_2}{b_1}=\frac{z_1-z_2}{c_1}\text{ 或 }\frac{x_2-x_1}{a_2}=\frac{y_2-y_1}{b_2}=\frac{z_2-z_1}{c_2}$$

反過來說，能適合這條件的，必是相合。

---

* 攲斜 Skew, Non-intersecting

(2)不相合　充要條件為上面關係不成立，即

$$\frac{x_1-x_2}{a_1},\quad \frac{y_1-y_2}{b_1},\quad \frac{z_1-z_2}{c_1}\quad \text{不都相等，}$$

或

$$\frac{x_2-x_1}{a_2},\quad \frac{y_2-y_1}{b_2},\quad \frac{z_2-z_1}{c_2}\quad \text{不都相等。}$$

(二)不平行　則 $a_1:a_2$，$b_1:b_2$，$c_1:c_2$ 不都相等。

(1)相交　充要條件為可求得 s 和 t，使

$$\left.\begin{aligned} x_1+a_1s&=x_2+a_2t\\ y_1+b_1s&=y_2+b_2t\\ z_1+c_1s&=z_2+c_2t\end{aligned}\right\}\ \text{或}\ \left.\begin{aligned} a_1s-a_2t+x_1-x_2&=0\\ b_1s-b_2t+y_1-y_2&=0\\ c_1s-c_2t+z_1-z_2&=0\end{aligned}\right\}.$$

按消去法的理，有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_1-x_2\\ b_1 & b_2 & y_1-y_2\\ c_1 & c_2 & z_1-z_2\end{vmatrix}=0.$$

(2)不相交　則 $D\neq 0$。

例　求下列二直線的關係

L_1:　$x=-4+s$,　$y=3-2s$,　$z=2+3s$,

L_2:　$x=-2+3t$,　$y=-1-6t$,　$z=8+9t$。

解　$1:3=-2:-6=3:9$，　故二直線平行或相合。

$$\frac{-4-(-2)}{1}=\frac{3-(-1)}{-2}=\frac{2-8}{3}=-2,$$

故二直線相合，應可化 L_1, L_2 二方程式爲一致；我們在此須定 s, t 二參數的關係，使二方程式中變數相等，今取二 x 值相等，得

$$-4+s=-2+3t \quad \therefore \quad s=3t+2$$

$$L_1: \begin{cases} x=-4+s=-4+(3t+2)=-2+3t \\ y=3-2s=3-2(3t+2)=-1-6t \\ z=2+3s=2+3(3t+2)=8+9t \end{cases}$$

54. 由直線決定平面 用§32的方法。

(一)由點 $P(h,k,l)$ 與直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 所定的平面。按§34(三)，可設所求方程式爲

$$A(x-h)+B(y-k)+C(z-l)=0$$

又含已知直線，故(§52)　$Aa+Bb+Cc=0$

且　$A(x_1-h)+B(y_1-k)+C(z_1-l)=0$

自上面三式消去 A, B, C，得

$$\begin{vmatrix} x-h & y-k & z-l \\ a & b & c \\ x_1-h & y_1-k & z_1-l \end{vmatrix}=0$$

(二)由二相交直線所定的平面。設交點爲 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，則二直線的方程式，可書作

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}, \quad \frac{x-x_1}{a_2}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{c_2}$$

命所求方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

仍按§52,有

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0$$

$$Aa_2+Bb_2+Cc_2=0$$

消去 A,B,C,得

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

(三)由二平行直線所定的平面。命二平行直線方程式爲

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}, \quad \frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$$

所求平面方程式爲 $Ax+By+Cz+D=0$

則按§53,有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$$

$$Aa+Bb+Cc=0$$

消去 A,B,C,D 得

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}=0$$

習題十三

1. 試定下列各組中直線和平面的關係:

（1）$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=9$。

（2）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$。

（3）$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $2x+2y+2z=6$。

2. 試求下列各直線方程式：

（1）經過 $(2,-3,4)$ 而與 $3x-y+2z=4$ 垂直。

（2）經過 $(0,2,4)$ 而與 $x+2z=1$，$y-3z=2$ 二平面平行。

3. 試求下列平面的方程式：

（1）經過 $(1,2,-3)$ 而與直線 $3x-y=4$，$y+2z=5$ 垂直。

（2）經過 $(3,6,-12)$ 而與 $x+3y-1=0$，$3y+z-2=0$，及 $z=2x+1$，$y=3$ 二直線平行。

（3）由相交線 $\left.\begin{array}{l}x=2z+1\\ y=3z+2\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2x=2-z\\ 3y=z+6\end{array}\right\}$ 決定。

（4）經過直線 $\left.\begin{array}{l}x+2z-4=0\\ 3y-z+8=0\end{array}\right\}$ 而與 $\left.\begin{array}{l}x=y+4\\ z=y-6\end{array}\right\}$ 平行。

（5）由 $(2,3,-4)$ 與直線 $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 決定。

（6）由平行線 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$，$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ 決定。

4.試求下列各直線的方程式:

(1)在平面 $x+3y-z+4=0$ 上,經過這平面與直線 $x=2z+3, y=2z$ 的交點,並與這直線垂直。

(2)經過 $(4, 2, -3)$ 與平面 $x+y+z=10$ 平行,又和直線 $x+2y-z=5, z=10$ 垂直。

(3)經過 $(2, 5, -3)$ 與自原點到這點的直線垂直,又與平面 $2x-3y+16=0$ 平行。

5.試求自 $P_1(3,4,-6)$ 一點到直線 $3x-2y+7=0, 2y+z-3=0$ 的垂直距離。

(提示) 在直線上任取一點 P_2,則所求的距離為 P_1P_2 與這直線和 P_1P_2 交角正弦的乘積。

6.試求經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且合於下列一組條件的直線方程式:

(1)與直線 $x=mz+a, y=nz+b$ 平行。

(2)與 $x=m_1z+a_1, y=n_1z+b_1$ 和 $x=m_2z+a_2, y=n_2z+b_2$ 二直線垂直。

(3)與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 垂直。

(4)與 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 二平面平行。

7.試求經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而與直線 $x=mz+a, y=nz+b$ 垂直的平面方程式。

8. 如第 6 題(2)中二直線共在一平面內，求證

$$(a_1-a_2)(n_1-n_2)=(b_1-b_2)(m_1-m_2)$$

9. 試求經過 $P(h, k, l)$ 而與下列二直線

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}, \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_5}$$

平行的平面方程式。

10. 試求平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與直線 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ 平行的條件。

11. 試求直線 $x=mz+a$, $y=nz+b$ 在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的條件。

12. 設二直線的方向角爲 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 和 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, 這二直線的交角爲 θ, 求證。

$$\sin^2\theta=\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}^2$$

(提示) 須用拉果蘭諾(Lagrange)的恆等式。

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$$

$$=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^1+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2$$

第四章　特殊曲面

55. 本章目的　本章目的在討論初等幾何學中所說過的幾種特殊曲面，如球，柱，錐，以及直紋面，迴轉面，並略論空間曲線。

但在此球，柱，錐等名詞，是指球面，柱面，錐面，而不是指這等曲面所包含的立體。

56. 球

定理　以$C(h,k,l)$爲心，r爲半徑的球面方程式是

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \tag{1}$$

證　設$P(x,y,z)$爲球上一點，則$CP=r$，代入二點距離公式，即得上面的結果。

討論　展開(1)式，得

$$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+h^2+k^2+l^2-r^2=0,$$

這個方程式可書成下列形式：

$$x^2+y^2+z^2+Hx+Ky+Lz+M=0 \tag{2}$$

反過來說，呈(2)形式的方程是否一定爲球？欲解決本問

題，可用配方法，先書(2)如

$$\left(x^2+Hx+\frac{1}{4}H^2\right)+\left(y^2+Ky+\frac{1}{4}K^2\right)+\left(z^2+Lz+\frac{1}{4}L^2\right)$$

$$=-M+\frac{1}{4}(H^2+K^2+L^2).$$

即
$$\left(x+\frac{1}{2}H\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}K\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}L\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(H^2+K^2+L^2-4M).$$

命
$$\frac{1}{2}H=-h,\quad \frac{1}{2}K=-k,\quad \frac{1}{2}L=-l,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{H^2+K^2+L^2-4M}=r$$

即與(1)式相符。但在此須 $D=H^2+K^2+L^2-4M>0$

如 $D=0$，則 $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=0$ 只表 $x=h$，$y=k$，$z=l$ 一點，叫做點球*。如 $D<0$，則半徑為虛值，無論 x, y, z 是何實數值，決不能使 $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2$ 為負數，這時我們為說理一致起見，叫這無一實點的軌跡為虛球*。

(註) D 式叫做球的判別式*。

例 討論方程式 $x^2+y^2+z^2-2x+3y+1=0$ 所表的軌跡。

解 照上法配方，得

點球 Point sphere 虛球 Imaginary sphere 判別式 Discriminant

$$(x^2-2x+1)+(y^2+3y+\frac{4}{9})+z^2=-1+1+\frac{9}{4}$$

即 $$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{9}{4}=(\frac{3}{2})^2$$

故軌跡是一球，以$(1,-\frac{3}{2},0)$爲心，半徑爲$\frac{3}{2}$。

57. 球的決定 在§56中，(1)和(2)式都含四個未定數h,k,l,r或H,K,L,M，需用四個條件來決定。

例 一球心在z軸上，而經過$(3,4,0)$，$(-2,3,5)$二點，求作其方程式。

解 心旣在z軸上，其坐標應爲$(0,0,l)$，故可設其方程式爲

$$x^2+y^2+(z-l)^2=r^2。$$

但這球經過$(3,4,0)$，$(-2,3,5)$二點，故

$$3^2+4^2+(-l)^2=r^2,\quad (-2)^2+3^2+(5-l)^2=r^2.$$

即 $$25+l^2=r^2,\quad 38-10l+l^2=r^2。$$

二式相減得 $$13-10l=0,\quad \therefore\ l=\frac{13}{10}。$$

又由第一式， $$r^2-l^2=25。$$

代入所設方程式，

$$x^2+y^2+z^2-\frac{13}{5}z=25,\ 即\ 5x^2+5y^2+5z^2-13z=125。$$

58. 圓 空間的圓，可視爲一球與一平面相截，或二球相

截而得。

例 圓心為$(1,1,1)$，半徑為 1，而在平面 $x+y+z=3$ 上，試求這圓的方程式。

解 我們須作一球，使其與 $x+y+z=3$ 相交，成題中所設的圓，即取以$(1,1,1)$為心，1 為半徑的球。

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

或
$$x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+2=0。$$

與 $x+y+z=3$ 聯立，即為所求圓的方程式。

習 題 十 四

1. 試定下列各方程式所表的球，並求其心與半徑：

　(1) $x^2+y^2+z^2+4x-6z=0$。

　(2) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-5=0$。

　(3) $x^2+y^2+z^2-x+4y+10=0$。

　(4) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+29=0$。

2. 試求下列動點所成軌跡的方程式：

　(1) 與$(-3,2,1)$的距離為 4。

　(2) 與$\left(-2,\frac{1}{3},0\right)$的距離為$\sqrt{5}$。

3. 試求下列各球的方程式：

　(1) 以$(3,0,4)$與$(4,0,0)$的聯線為半徑，但以第一點為

心。

（2）以$(3,0,7)$與$(-2,1,1)$的聯線爲直徑。

（3）以$(2,-2,1)$爲心而與ZX面相切。

（4）經過$(2,0,0)$，$(0,4,0)$，$(0,0,-4)$，$(-8,0,0)$四點。

4. 求證下列各軌跡爲球，並求球心和半徑：

（1）與$(7,1,-3)$的距離，二倍於與$\left(-\frac{5}{4},-2,\frac{3}{2}\right)$的距離。

（2）與$(4,-5,1)$，$(0,2,-4)$二點距離的平方和爲64。

（3）至$x+y+z=5$，$2x-3y-2z-1=0$，$3x-2y+3z=6$三平面距離的平方和爲5。

5. 試求下列各球的方程式：

（1）與$x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$一球同心，而經過$(2,5,-7)$一點。

（2）以$(4,-4,3)$爲心，而與平面$3x+2y-z=7$相切。

（3）心在ZX面上，而過$(1,0,2)$，$(1,3,1)$，$(-3,0,0)$三點。

（4）經過$(1,5,-3)$，$(-3,0,0)$二點，而心在直線$3x+y+z=0$，$x+2y+1=0$上。

（5）經過$(2,2,0)$，$(0,2,2)$，$(2,0,2)$而半徑爲5。

6. 試求下列各球，在指定點的切面方程式：

（1）$x^2+y^2+z^2-14=0$，在$(3,-2,1)$。

(2) $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$，在$(1, 6, -5)$。

(3) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$，在$(0, 0, -6)$。

7. 已知二球方程式爲

$$S_1:\quad x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0,$$

$$S_2:\quad x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z+10=0。$$

試求第三球的方程式，使合於下列各條件：

(1) 與 S_1 同心，而與 S_2 相切(有二款)。

(2) 心在 S_1，S_2 的聯線上，而與 S_1，S_2 相切(四款)。

(3) 心爲 S_1，S_2 的聯線與 S_1 的交點，而與 S_2 相切（四款）。

8. 試求$x^2+y^2+z^2-10x+5y-2z-24=0$一球與三坐標軸相交處的各切面方程式。

9. 試求三坐標平面與平面 $x+y+z=1$ 所成四面體的內切球方程式。

10. 試求最小球而和下列二球相切者的方程式：

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y\qquad+1=0。$$

$$x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+5=0。$$

11. 試求$(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$三點所定圓的方程式。

59. 柱　一動直線常保持一定的方向（即與其本身平行而移動），而又始終與一曲線相交，所成的曲面叫做柱*。動直線

---

*柱 Cylinder

的各位置叫母線*，曲線叫準線*，有定方向的直線叫軸*。

例一 一圓柱*以 z 軸為軸，半徑等於 r，試求其方程式。

解 設 $P(x, y, z)$ 為柱上任意一點，在第29圖中；

$$OA=x,\quad AB=y,\quad BP=z。$$

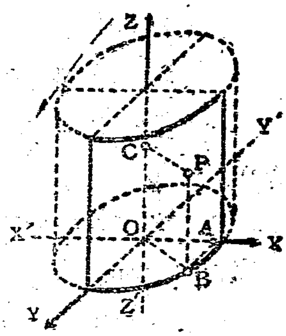
如 CP 垂直於 OZ，則 P 在柱面上的條件為

$$CP=OB=r。$$

但 $OB=\sqrt{x^2+y^2}$，故所求方程式為

$$x^2+y^2=r。$$

（注意）這柱面的準線即為 XY 面內的圓 $x^2+y^2=r^2$。



（第29圖）

又解 動線既與 z 軸平行，故其方程式為

$$x=h,\quad y=k\quad (h, k \text{ 為參數})$$

但這動線和 XY 面內的圓 $z=0,\ x^2+y^2=r^2$（準線）相交，故代入能適合，即 $h^2+k^2=r^2$

故所求方程式為 $x^2+y^2=r^2$

（註）又解的方法較為普徧，看下節便知。

由例一可知

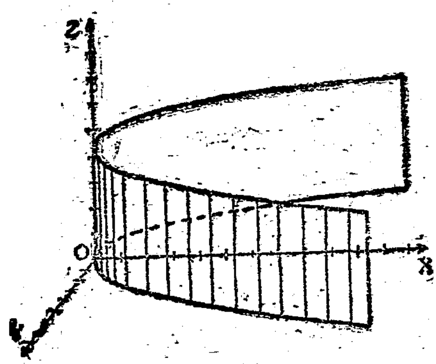
母線 Generator 準線 Directrix 軸 Axis 圓柱 Circular cylinder.

如一方程式中缺少一變數，則所表軌跡為一柱，其母線和度量所缺變數的坐標軸平行，這已知方程式可視為在相當坐標平面內的一曲線，而表這柱的準線。

但柱的方程式中，未必定要缺一變數，因為柱的軸未必即為坐標軸之一也。可參看下節即明。

例二　試討論曲面 $y^2-4x=0$ 的性質。

解　設 $M(a,b)$ 為 XY 面內的拋物線 $y^2-4x=0$ 上任意一點，過 M 作一直線與 z 軸平行，則其上任何點，均在已知曲面上。因 M 在拋物線上，故 $b^2-4a=0$。因此不論 z 值如何，所作直線上的一點 (a,b,z) 均在曲面上。故所求曲面為一柱，其母線和 z 軸平行。而以 XY 面上的拋物線 $y^2-4x=0$ 為準線。



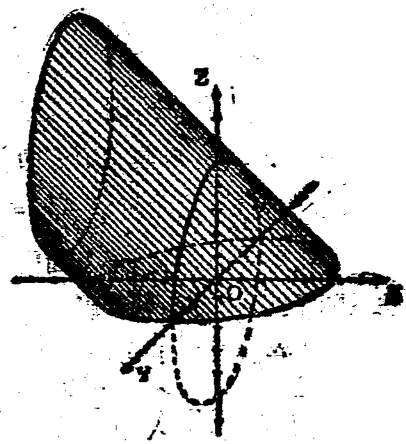
（第30圖）

60.　柱的通例

例　一動直線的方向參數為 $-1,0,1$，而準線為 XY 面上

的圓 $z=0, x^2+y^2=1$，試求其方程式。

解 動直線的方程式爲



(第31圖)

$$\frac{x-h}{-1}=\frac{y-k}{0}=\frac{z-l}{-1},$$

或 $y=k, x-h=-(z-l)$。

據圓的方程式

$$z=0,\quad x^2+y^2=1$$

得 $$(l+h)^2+k^2=1$$

故即 $$(x+z)^2+y^2=1$$

(註) 書結果爲 $(x+z)^2=1-y^2$，則可見這式得自 $y=k, x+z\pm\sqrt{1-k^2}$ 中消去參數 k 而成。這聯立方程式中含有參數 k，故表示一系直線，其方向參數顯爲 $-1, 0, 1$，與 k 無關，故爲一系平行直線，但這直線上任意一點的坐標 (x, y, z)，均合於曲面方程式，就是示明直線在曲面上。故這系平行直線構成一柱。

61. 錐 一動直線，經過一定點，而又始終與一曲線相交，所成的曲面叫錐*，動直線的各位置叫母線，曲線叫準線，定點叫頂點*。

(注意) 如準線爲一平面曲線，則頂點不當在這平面內。

例 試討論曲面 $16x^2+y^2-z^2=0$ 的性質。

解 作平面 $z=k$ 與曲面截成一曲線，而在這截口上取一

* 錐 Cone，頂點 Vertex

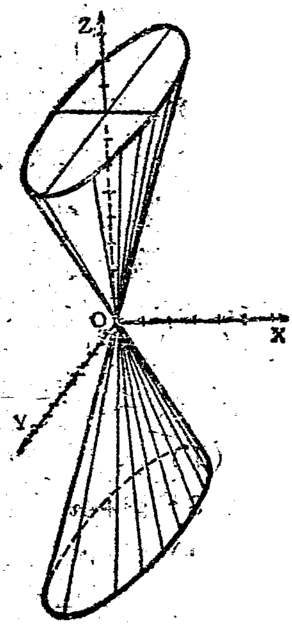
點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，則

$$16x_1^2+y_1^2-z_1^2=0,\quad z_1=h$$

原點 O 顯見在曲面上。我們如證明直線 OP_1 完全在曲面上，則可斷定其爲一錐。

OP_1 的方向餘弦是 x_1/ρ_1, y_1/ρ_1, z_1/ρ_1 而 $\rho_1=OP_1$。按直線方程參數式，$x=\dfrac{x_1}{\rho_1}l$, $y=\dfrac{y_1}{\rho_1}l$, $z=\dfrac{z_1}{\rho_1}l$。代入已知方程式中，左端爲 $\dfrac{l^2}{\rho_1^2}(16x_1^2+y_1^2-z_1^2)$。

但 P_1 在題設曲面上，括號內式爲零。故不論 l 值如何，上式均爲零，即表明 OP_1 上任何點均在曲面上，所以曲面爲一頂點在原點的錐。



（第 32 圖）

欲作這曲面的圖，可取平面 $z=8$ 與這錐的截口，其方程式爲

$$z=8,\quad 16x^2+y^2-64=0$$

是這截面上的一個橢圓，即爲錐的準線，自原點至準線上各點引直線，即得母線，而可表出所求錐的圖形如第 32 圖。

62. **齊次方程式**　任何含 x, y, z 的方程式中，各項次數皆

同時，叫做齊次*。上面的方法，對齊次方程式，顯見都能應用，故可知

一齊次方程式所表曲面是頂點在原點的錐。

但錐的頂點未必即在原點，如頂點為(h,k,p)，則用同一方法，可明一對於 $x-h$，$y-k$，$z-p$ 為齊次的方程式，表一頂點在(h,k,p)的錐。

習 題 十 五

1. 試討論下列各方程式所表曲面，並作其圖：

(1) $x^2+x^2=16$。　　(2) $x^2+y^2=4x$。

(3) $y^2+4x^2=16$。　　(4) $x^2-y^2-z^2=0$。

(5) $y^2+xz+yz=0$。　　(6) $xz-6=0$。

(7) $y^2+z^2-2xz=0$。　　(8) $y^2-2z^2=0$。

(9) $x^2-4y^2+6z^2=0$。　　(10) $x^2-z^2=25$。

2. 一動點合於下列條件，求其軌跡方程式，並討論其所表曲面：

(1) 與 z 軸的距離二倍於與 YZ 面的距離。

(2) 與$(4,0,0)$的距離等於與 XY 面的距離。

(3) 與 y 軸的距離四倍於與 z 軸的距離。

(4) 與三坐標平面距離的平方和，等於與原點的距離。

齊次 Homogeneous

（5）與 ZX, XY 二面距離的平方差，四倍於與 YZ 面的距離平方。

3. 已知一錐以原點爲頂點，$x=1$, $y^2+z^2=4$ 一圓爲準線，試求其方程式。

4. 已知一錐以 $(1,2,3)$ 爲頂點，橢圓 $y=1$, $2x^2+3z^2=6$ 爲準線，試求其方程式。

5. 求證下列各面爲柱，並作其圖：

（1）$x-y^2+z=0$。　（2）$xz+yz=1$。

（3）$y^2-4(x+z)+8=0$。（4）$x^2+2xy+y^2=4z$。

（5）$(x-2y)^2=z-1$。　（6）$x^2+9y^2+4z^2-12yz=4$。

（7）$(x+z)(y+z)=4$。（8）$(x+z)^2=y+z$。

（9）$(y+z-a)^2+(x-z)^2=a^2$。

6. 試證動直線 $y-z-kx-2k=0$; $k(y-z)-2+x=0$（k 爲參數）構成一柱，並求此柱的方程式。

7. 試證動直線 $x-y-kz=0$. $k(x+y)-z=0$（k 爲參數）構成一錐，並求此錐的方程式。

8. 一動直線的方向參數爲 1, 1, 1; 準線爲 $z=0$, $x^2+y^2=1$ 一圓，試求其所成柱的方程式，並作其圖。

9. 一動直線經過 $(1,1,1)$。而與上題的圓始終相交，試求其所成錐的方程式，並作其圖。

（提示）可仿 § 60 的例去解。

10. 柱的準線,何以不能在動線的平行面上?錐的頂點何以不能在準線所在的平面上?

63. 曲面方程式的討論 一般討論曲面的方法,頗爲繁雜,高中的程度,也還不夠;在此只能提出比較簡易的幾件事項:

(一)三坐標軸上的截距 可令在曲面方程式中 x,y,z 三變數,兩兩爲零,解出第三變數的實數值,即爲一截距。

(二)三坐標平面上的主截口 在曲面方程式中,依次令 x,y,z 之一爲零,結果的方程式即是,

(三)對稱 按§4所論的理,可知

(1)如在曲面方程式中,將一變數改號,這方程式的形式不變,則曲面必對稱於度量這變數的坐標平面。

(2)如將其中二變數改號,這方程式的形式不變,則曲面必對稱於度量第三變數的坐標軸。

(3)如將其中三變數都改號,而這方程式的形式不變,則曲面必對稱於原點。

(四)在坐標平面平行面上的截口 曲面的一般形狀,可就其被坐標平面平行面所截成的曲線看出,由此也可決定曲面是否能向無窮遠伸展。

64. 曲面討論例解

例一 討論曲面 $y^2+z^2=4x$ 被平面 $x=4$ 所截成的曲線的

性質。

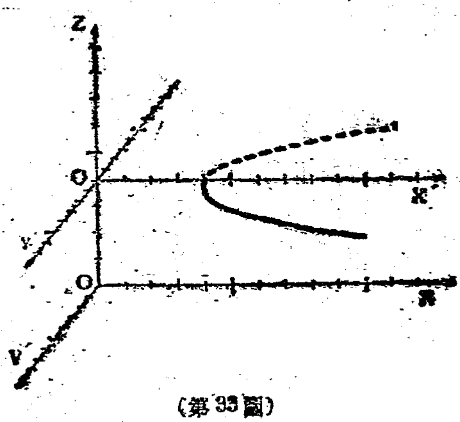
解 所求曲線的方程式卽爲

$$y^2+z^2=4x,\quad z=4. \tag{1}$$

從這二式消去第一式內的 z，得

$$y^2-4x+16=0,\quad z=4. \tag{2}$$

(1)及(2)兩組聯立方程式顯有同解。換句話說，卽凡適合於一組的 x, y, z 值，必適合於第二組，故二者實表同一曲線。但自(2)可以看出所求曲線是平面 $z=4$ 與柱 $y^2-4x+16=0$ 的交線，卽這平面上一拋物線，而較易作出如第33圖。

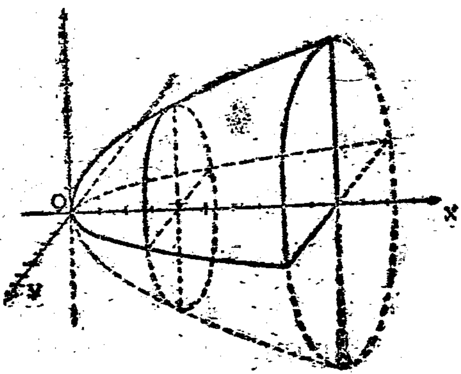


(第33圖)

例二 討論曲面 $y^2+z^2=4x$

解 分層討論如下：

(一)截距 都是零，就是曲面經過原點。



(第 34 圖)

(二)主截口　在 YZ 面上是點圓 $y^2+z^2=0$；在 ZX 面上是拋物線 $z^2=4x$；在 XY 面上是拋物線 $y^2=4x$。

(三)對稱　對稱於 XY 面，ZX 面，以及 x 軸。

(四)截口　於題設的曲面方程的中，令 $x=k$，得 $y^2+z^2=4k$，即爲與 YZ 面平行的截面上截口方程式，如 $k>0$，則截口爲一圓，半徑爲 $2\sqrt{k}$；如 $k<0$，則爲虛圓，而無實軌跡，可見這曲面完全在 YZ 面的右首，當 k 值由零起無窮增大，即截面 $x=k$ 逐漸離 YZ 面遠移時，圓的半徑也逐漸增大。如第 34 圖中作出的二圓，一在平面 $x=4$ 上，一在平面 $x=10$ 上。

欲求 XY 面或 ZX 面的平行截面上的截口，可令 $z=k'$ 或 $y=k''$ 代入，得 $y^2=4x-k'^2$ 或 $z^2=4x-k''^2$ 都是表拋物線。

65. **直紋面**　凡一動直線依某條件移動，所成的曲面，就叫直紋面*。動直線所在各位置叫母線。上所說的柱和錐，都是由一直線移動構成，爲直紋面中最簡單的情形。

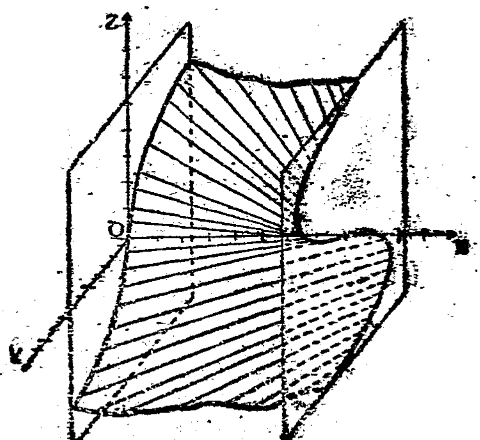
直紋面 Ruled surface

設一直線的兩個方程式中，如含一參數 k，則表一系直線，從這二式中，消去 k，即得這系直線所成直紋面的方程式。如 P_1 (x_1, y_1, z_1) 系中某一直線上，則必能適合於 $k=k_1$ 時的兩個方程式。就消去法的理來說，即 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 時，這兩個方程式有公解 $k=k_1$，而二式有公解的充要條件，乃消去 k 後的結果為零。故 P_1 (x_1, y_1, z_1) 必合於消去 k 後的方程式，故即 P_1 在直紋面上。

例 試定直線系 $k^3-3kx+8y=0$，$z=k$ 所成直紋面的方程式，並求作這曲面。

解 消去 k，立得 $z^3-3zx+8y=0$。

欲作出這直紋面，可取其在 $x=0$ 上的主截口和 $x=8$ 上的



(第35圖)

截口，即

$$x=0,\quad 8y+z^3=0;$$

$$x=8,\quad 8y-24z+z^3=0。$$

再在這二截口上，取 z 值相等的二點，聯成直線，卽可見曲面的形狀如第 35 圖。

〔註〕 凡由與一坐標平面平行的動線所成的直紋面，都易於由其方程式察出，卽在方程式中，令一變數爲常數，結果必成他二變數的一次式，或一次式的乘積。如在 $x^2y+xz=y$ 中，令 $x=k$ 得 $k^2y+kz=y$ 是一次式；又如在 $x^2=y^2(z+1)$ 中，令 $z=k$，得 $x^2-(k+1)y=(x-\sqrt{k+1}y)(x+^2)\sqrt{k+1}y=0$ 是二個一次式的乘積，所以這二方程式都表直紋面。但在其他情形，則非高中程度所能及。

66. **迴轉面** 一直線以其平行線爲軸而旋轉，則成**直圓柱***，以其相交線爲軸旋轉，則成**直圓錐***。一圓以其直徑爲軸旋轉則成球。普徧說來，一平面曲線以其面的一直線爲軸而旋轉，則所成曲面叫**迴轉面***。

以與軸垂直的平面截迴轉面。則顯見截線爲圓，圓心卽在軸上。反過來說，如一系平行面截得一曲面的截線都是圓，且圓心在與諸截面垂直的一直線上，則必爲一迴轉面，以這些圓心所在的直線爲軸。

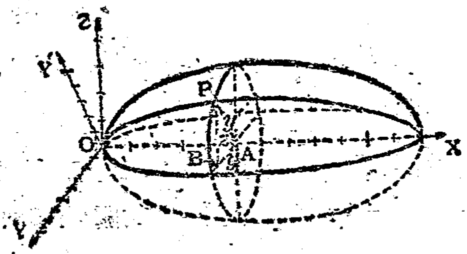
例 試求以橢圓 $x^2+4y^2-12x=0$，$z=0$ 依 x 軸旋轉所成

---

*直圓柱 Right circular cylinder 直圓錐 Right circular cone 迴轉面 Surface of revolution。

的迴轉面。

解　設 $P(x,y,z)$ 爲曲面上任意一點。作一平面經過 P 點與 x 軸，則與曲面所成截線，爲在某位置時的橢圓，在這截面內，作 OY' 與 OX 垂直，以 OX 與 OY' 爲坐標軸，則橢圓的方程式顯爲



(第36圖)

$$x^2+4y'^2-12x=0。$$

就第36圖中直角三角形 PAB，有 $y'^2=y^2+z^2$，代入上式，得

$$x^2+4y^2+4z^2-12x=0$$

即爲所求迴轉面的方程式。

67. **迴轉面方程式的求法**　如迴轉面的軸即坐標軸之一，則其方程式易於照上節的方法求出。

在用來旋轉的曲線方程式中，取不爲旋轉軸所度的變數，代以這變數與第三變數平方和的平方根，即得所求的方程式。

如上節例中，旋轉軸是 x 軸，所以在曲線方程式 $x^2+4y^2-12y=0$ 中取 y，而代以 y 與第三變數 z 平方和的平方根 $\sqrt{y^2+2^2}$ 得 $x^2+4(\sqrt{y^2+z^2})^2-12x=0$，簡化即爲上節結果。

在一般情形，旋轉軸不限定爲坐標軸；所旋轉的曲線，不限

定爲平面曲線，或爲平面曲線。而不與軸共一平面，則情形較爲繁雜，今略述一例。

例 試述直線 $x=z,\ y=1$ 依 z 軸旋轉所成的迴轉面方程式。

解 以 XY 面的平行面截這迴轉面，則截線爲圓，可設其方程式爲 $x^2+y^2=h;\ z=k$，即視圓爲平面與直圓柱的截線。按 $x=z,\ y=1$，便得參數 h,k 的關係：$k^2+1=h$

$$\therefore\quad z^2+1=x^2+y^2,\quad 即\ x^2+y^2-z^2=1。$$

（註）這迴轉面也可當做在 YZ 面上之雙曲線 $y^2-z^2=1,\ x=0$ 依 z 軸迴轉而成。

習題十六

1. 試作出下列各組曲面被指定平面所截的截口：

（1）$4x^2+y^2-8z=0,\ z=0$。

（2）$x^2+3y^2-4z^2=9,\ z=3$。

（3）$x^2+3y^2-4z^2=9,\ x=3$。

2. 求作下列方程式所表的曲面：

（1）$x^2+4y^2=8z$。　（2）$x^2+4y^2+9z^2=100$。

（3）$x^2+9y^2=z$。　（4）$x^2+4y^2-z^2=25$。

（5）$y^2+z^2-4z+8=0$。　（6）$x^2-y^2-z^2=1$

（7）$x^2+y^2-2zx=0$。　（8）$z^2+7xy=0$。

3. 試證下列各方程式表直紋面，並求其和坐標軸平行的母線，並作各曲面的略圖:

(1) $xy=z$。　　(2) $yz=x+z^2$。

(3) $y^2=x+yz$。　　(4) $xy=y^2-3z$。

(5) $x^2y-x^2+z=0$。　　(6) $xz-z^2+y=0$。

4. 已知一動線方程式如下列，試求其所成直紋面的方程式，並作其略圖:

(1) $x^2+2z+k(1-y)=0$，　$k(x-2z)+1+y=0$。

(2) $2x+y-3k=0$，　$k(2x-y)-z=0$。

(3) $y-4k=0$，　$ky-x=0$。

5. 試求下列各坐標平面中曲線，依所指定線爲軸旋轉所成曲面的方程式，並作其略圖:

(1) $4x-y=2$，x軸。　　(2) $x^2+4z^2=16$，z軸。

(3) $9x^2-4y^2=36$，x軸，又y軸。

(4) $y^2=8x$，x軸。　　(5) $x^2=y^3$，y軸。

(6) $2x^2=4-y$，y軸。　　(7) $xz=8$，z軸。

(8) $xy=a$，以其二漸近線爲旋轉軸。

6. 試用解析法證明一圓依直徑旋轉則成一球。

7. 試求將 $x^2+y^2-2hx+h^2-r^2=0$ 一圓依 y 軸旋轉所成的迴轉面方程式，並分 $h>r$，$h=r$，$h<r$ 三種情形討論。

(註) $h>r$ 時所成曲面，叫做環面*。

8. 一直線與一坐標軸的交角爲 ϕ，試求其依這軸旋轉所成錐的方程式。

9. 求證下列各方程式表迴轉面。

(1) $4x^2+4y^2-z^2=16$。 (2) $x^2-4y^2+z^2=3y$。

(3) $xz^2+xy^2=3$。 (4) $(y^2+z^2)(1+x)=8$。

10. 試求直線 $x+z=0$，$y=1$ 依 z 軸旋轉所成曲面的方程式。

11. 一動點與定直線的垂直距離，對其與線上一點間的距離成定比。試證這點所成軌跡爲一錐，這定比的值，有無須除外的？

68. **曲線的射影柱** 母線與一坐標軸平行，而始終與一曲線（準線）相交的柱，叫做這曲線的射影柱*。如曲線不在一平面內，或所在平面不和坐標平面垂直，則有三個射影柱。這三個射影柱的方程式，可從曲線的方程式間，輪流消去一變數而得，例如消去 z，則結果表一母線與 z 軸平行的柱（§ 59）。又這柱必經過已知曲線，因凡適合定這曲線的二方程式的 x, y, z 值，必能適合從這二式消去任一變數後的方程式。

二個射影柱的方程式，即可用作決定曲線，頗爲便利，所以求作題設曲線的問題，就化成作二射影柱交線的問題，今舉例

環面 Anchor ring， 射影柱 Projecting cylinder。

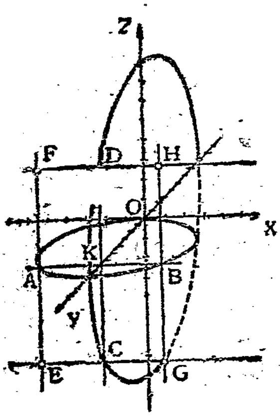
說明於下:

(註: 直線的射影柱,即爲射影面(§ 48)。

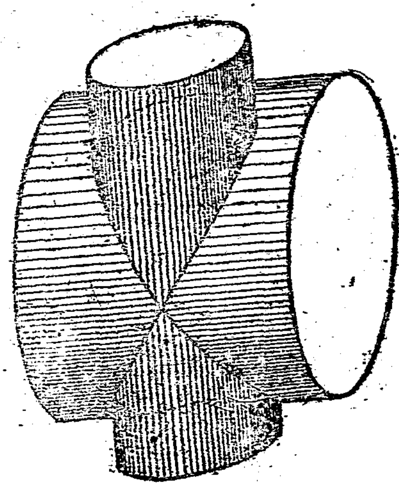
例一 求作下列二柱的交線:

$$x^2+y^2-2y=0,\quad y^2+z^2-4=0。$$

解 先作二柱在其母線所垂直的坐標平面上的截口,如第37圖。次作一平面,與二柱母線所不平行的一坐標軸垂直。在本例,此平面即爲 $y=k$。設這平面交 y 軸於 K 點,交坐標平面上的截口於 A,B,C,D 四點。過這四點,都有柱上的相當母線經過,而且共在一平面上。這四母線的交點 E,F,G,H,即二柱交線上的點,多取幾個平面 $y=k$,即可作出曲線如第38圖。



(第37圖)


(第38圖)

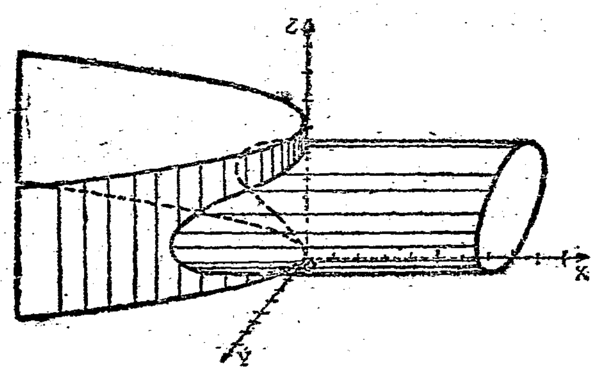
例二　試求下列曲線的射影柱方程式:

$$2y^2+z^2+4x=4z,\quad y^2+3z^2-8x=12z$$

並作其略圖。

解　輪流消去 x,y,z 即得三個射影柱方程式

$$y^2+z^2=4z,\quad z^2-4x=4z,\quad y^2+4x=0。$$



(第 39 圖)

第 39 圖即示明第一,三兩種,相交成題設曲線,其作法即如上述的例一。

解題時,宜將三個射影柱的方程式,一齊求出,而選擇其中簡便的二個來作圖。

69. **空間曲線參數式**　如空間一點 P 的坐標 x,y,z,爲一參數的函數,則 P 的軌跡爲一曲線. 因兩兩消去參數,得三個不含參數的方程式,其中二個爲獨立. 即決定一曲線。

例　在上節例二解中，令 $y=2t$，則自最末一方程式，得 $x=-t^2$，代入其餘二柱方程式中，均得 $z=2\pm2\sqrt{1-t^2}$，故所求曲線方程的參數式為

$$x=-t^2,\quad y=2t,\quad z=2\pm2\sqrt{1-t^2}。$$

反過來說，自上面三方程式，兩兩消去 t，即得原來的三個射影軸方程式。

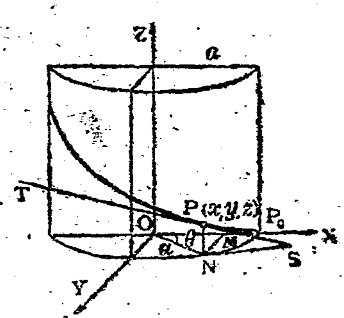
70．　空間螺旋線

問題　一點在直圓柱上移動，其所經過與 z 軸平行的距離，與其繞軸所經過的角成正比，則所成軌跡，叫做普通螺旋線*。

解　取圓柱的軸為 z 軸，半徑為 a，則其方程式為

$$x^2+y^2=a^2$$

設 P_0 為曲線上一點，自 P_0 至 z 軸的垂線為 x 軸，又在曲線上任取一點 $P(x,y,z)$。則依上述條件，距離 $PN(=z)$ 與 $\angle XON(=\theta)$ 成正比，即 $z=b\theta$，式中 b 為常數。再按第 40 圖，



(第 40 圖)

$$x=OM=ON\cos\theta=a\cos\theta,$$

$$y=MN=ON\sin\theta=a\sin\theta。$$

---

*普通螺旋線 Circular helix

故得普通螺旋線的參數方程式爲

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad z=b\theta。$$

71. **曲面的參數式**　曲面的方程式，也可化爲含三個方程的參數式，但其中當含二參數，因自這三式消去二參數，即爲曲面的方程式，

例　討論參數方程式

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$$

其中 r 爲常數，θ 和 ϕ 爲二參數，

解　自三式消去 ϕ 和 θ，

$$x^2+y^2+z^2=r^2\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+r^2\cos^2\theta$$
$$=r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2$$

而表一球。

習題十七

1. 求作下列各組曲面交成曲線的略圖：

(1) $x^2+y^2=36,\quad y-z=0。$

(2) $x^2+y^2-4x=0,\quad x^2+z^2-4=0。$

(3) $x^2+4z^2-8z=0,\quad x+y-1=0。$

(4) $y^2-4z=0,\quad x^2-z-4=0。$

2. 試求下列曲線的射影柱，並由此作其略圖:

(1) $x^2+y^2+z^2=25,\quad x^2+4y^2-z^2=0$。

(2) $x^2+y^2=4z,\quad x^2+y^2-4x=0$。

(3) $x^2+2y^2+4z^2=32,\quad x^2+4y^2=4z$。

(4) $x^2+10y-5z-25=0,\quad x^2+2y^2+5z+10y-25=0$。

(5) $2x^2+y^2-9z=0,\quad y^2+9z-72=0$。

(6) $x^2+y^2-z-1=0,\quad x^2-y^2-z+1=0$。

3. 求證平面系 $4x=12z+k$ 與曲面 $9x^2+25y^2+169z^2=100$ 的交線爲圓，

(提示) 視圓爲平面與球的交線，而自二已知方程式求一表圓的間解方程式。

4. 試求下列曲線的三射影柱方程式:

$$x=\frac{1}{4}t^2,\quad y=1-2t,\quad z=3t^2+2。$$

5. 試求第 2 題中各曲線的參數方程式。

6. 求證下列參數方程式表一錐:

$$x=k\rho\cos\phi,\quad y=k\rho\sin\phi,\quad z=k\rho$$

式中 k 爲常數，ρ 和 ϕ 表參數。

7. 如將一直圓柱展開成一平面，則其上的螺旋線變成一直線，試用幾何理說明。

8. 如將一平面捲成一圓柱，則其上不與母線垂直的直線，

必成一螺旋線。試說明其理由。

9. 取一不與直圓柱軸垂直的平面，與柱相交成一曲線，如展開圓柱成平面，這曲線能否成一直線？何故？

10. 有一曲線的參數式爲

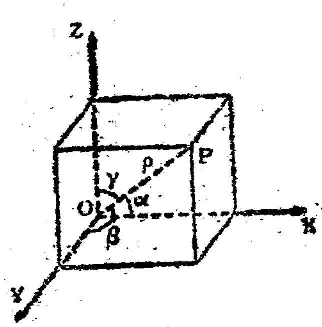
$$e^{ax}=\frac{b-t}{c-t},\quad e^{by}=\frac{c-t}{a-t},\quad e^{cz}=\frac{a-t}{b-t}。$$

式中 a,b,c,e 是常數，t 是參數，求證其完全在平面 $ax+by+cz=0$ 上。

第五章　坐標變換

72.　本章目的　坐標變換有二種意義。第一是二種不同坐標系的變換，第二是一種坐標系位置轉移後的結果，本章目的，即在列舉笛氏坐標系以外的幾種坐標系，以及笛氏坐標系平移和旋轉的影響。再用坐標系轉移來簡化二次曲面方程成範式，而就範式分類。

73.　極坐標　自原點至任意一點 P，引有向線段 OP，叫做 P 點的向徑*。向徑的長 ρ（常為正值），以及有向線段 OP 和三坐標軸的方向角 α, β, γ，叫做 P 點的極坐標*。



（第 41 圖）

（注意）　空間坐標系，即為用一組三個數定一點的位置，在此似有 $\rho, \alpha, \beta, \gamma$ 四數。但三方向角合於

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

的關係，所以仍只有三個獨立的數。

向徑 Radius vecter　極坐標 Polar coordinates

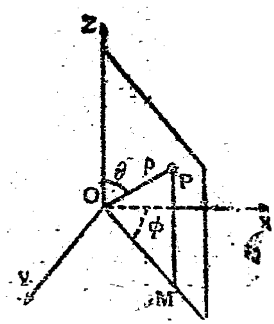
定理 笛氏直角坐標對於極坐標的關係為

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma。$$

在此顯有 $$\rho^2=x^2+y^2+z^2$$

並可求出用 x,y,z 來表示 α,β,γ 的關係式。

74. **球面坐標** 空間一點 P 的向徑長 ρ，向徑 OP 與 z 軸所成的角 θ，以及 OP 在 XY 面上射影與 x 軸所成的角 ϕ，叫做 P 的球面坐標*。θ 叫做餘緯度，* ϕ 叫做經度*。一點的球面坐標記為 (ρ,θ,ϕ)。



(第42圖)

按第42圖， $z=MP=\rho\cos\theta$，

$$OM=\rho\sin\theta。$$

且 $$x=OM\cos\phi,\quad y=OM\sin\phi,$$ 故得

定理 笛氏直角坐標對於球面坐標的關係為

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi,\quad z=\rho\cos\theta$$

就上式可以解出用 x,y,z 來表示 ρ,θ,ϕ 的關係式。

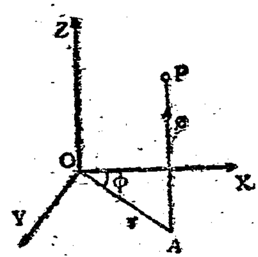
75. **柱面坐標** 自 XY 面到一點 $P(x,y,z)$ 的距離 z，以及 P 點在 XY 面上射影 $A(x,y,0)$ 的極坐標 (r,ϕ)，叫做 P 的柱面

球面坐標 Spherical coordinates 餘緯度 Co-latitude 經度 Longitude

坐標,* 如第 43 圖。一點的柱面坐標,記為(r, ϕ, z),

定理 笛氏坐標對於柱面坐標的關係為:

$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$。



(第 43 圖)

假如求以笛氏直角坐標表柱面坐標的關係式,就是平面中極坐標對笛氏直角坐標的關係,再加 $z=z$ 卽得。

76. 直角坐標系 以上所說三種坐標系和笛氏直角坐標,有一公共特點,卽是有三系平面,每系中各取一面,所得三面都兩兩垂直,由其公共交點,決定位置。笛氏坐標系,是由三系兩兩垂直的平行面構成。極坐標系,是由一系球和以球心為頂點,以二垂直半徑為軸的二系直圓錐構成。球面坐標系,是由一系球,過一定直徑的一系平面,及以這徑為軸,頂點在球心的一系直圓錐構成,球面坐標系是過一定直徑的一系平面,和與這直線垂直的一系平面,及以這直線為軸的一系直圓柱構成。有這種特點的坐標系,不以上列的四種為限,如所謂橢性坐標系*卽為一例,但高中程度,尙不容易了解,故從略。

柱面坐標 Cylindrical coordinates　橢性坐標系 Elliptic space coordinates

習題十八

1. 試求下列三點的極坐標，球面坐標，與柱面坐標：

$(0,2,0)$；$(3,4,12)$，$(-2,2,-1)$。

2. 試定下列球面坐標所表的點，並求其笛氏直角坐標：

$(2,90°,60°)$，$(5,120°,90°)$，$(9,-135°,120°)$。

3. 試定柱面坐標為$(4,45°,6)$的一點，並求其笛氏直角坐標。

4. 試證以 x,y,z 表 ρ,θ,ϕ 的關係式為

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\arccos\frac{z}{\rho},\quad \phi=\arctan\frac{y}{x}。$$

5. 若用一曲面對於極坐標系的方程式，如何求這曲面的截距？用其對於球面或柱面坐標系的方程式時如何？

6. 試化下列各方程式成對於極坐標系者：

(1) $x^2+y^2+z^2=25$。　(2) $x^2-y^2-z^2=0$。

(3) $2x^2-y^2-z^2=0$。　(4) $x^2-y^2+z^2=0$。

7. 試化下列各方程式成對於球面坐標系者：

(1) $x^2+y^2+z^2=16$。　(2) $2x+3y=0$。

(3) $3(x^2+y^2)=7z^2$。　(4) $x^2-y^2+z^2=0$。

8. 試化下列各方程式成對於柱面坐標系者：

(1) $5x-y=0$。　(2) $x^2+y^2=4$。

(3) $x^2+y^2-z^2=0$。　(4) $x^2-y^2-z^2=0$。

9.試說明下列方程式所表的軌跡:

(1)極坐標系: (a) $\rho=$ 常數, (b) $\alpha=$ 常數。

(2)球面坐標系: (a) $\rho=$ 常數, (b) $\theta=$ 常數。

(c) $\phi=$ 常數。

(3)柱面坐標系: (a) $r=$ 常數, (b) $\phi=$ 常數。

10.有二點的極坐標爲 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 求證這二點間距離的平方爲

$$\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)。$$

11.求證極坐標中球的普徧方程式爲

$$\rho^2+\rho(G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma)+K=0.$$

77. **坐標軸的平移** 如將坐標軸自第一位置 $O\text{-}XYZ$ 平行移動到第二位置 $O'\text{-}X'Y'Z'$, 即使 $O'X' \parallel OX$, $O'Y' \parallel OY$, $O'Z' \parallel OZ$,且均同向,便叫做平移*。

定理 一點 P 對於原來三軸的坐標爲 (x,y,z), 將軸平移至一新原點 (h,k,l) 後的坐標爲 (x',y',z'),則

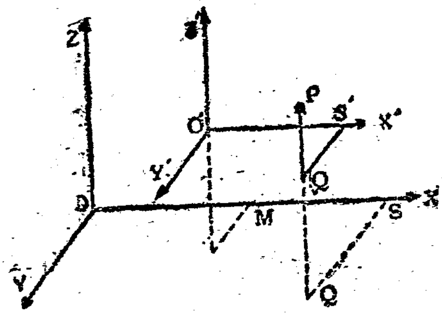
$$x=x'+h, \quad y=y'+k, \quad z=z'+l.$$

證 如第 44 圖,

$$OM=h, \quad OS=x, \quad O'S'=x',$$

---

*平移 Translation



(第 44 圖)

但 $$OS=OM+MS=OM+O'S'$$

即 $$=x'+h$$

同理可得他二式。

(註) 上式叫平移方程式*。

78. **平移的應用** 已知一曲面關於原軸的方程式，而欲求其對新軸的方程式時，可將平移方程式中的 x, y, z 值，代入已知方程式，再簡化即得所求結果。平移的應用在選定適宜的新軸，以簡化題設的方程式。對於二次方程式，即求化去一次項。舉例如下：

例 用平移化去下列方程式中的一次項：

$$x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0。$$

解 按代數中的配方術，將一次項與平方項配成一次式的

---

*平移方程式 Equations for translation of axes

平方，如

$$(x^2-6x+9)+(y^2-8y+16)-(z^2-10z+25)=9+16-25$$

即 $$(x-3)^2+(y-4)^2-(z-5)^2=0。$$

如令 $x'=x-3,\quad y'=y-4,\quad z'=z-5$

或 $x=x'+3,\quad y=y'+4,\quad z=z'+5$

便可化原式爲 $$x'^2+y'^2-z'^2=0。$$

又解 設新原點爲(h,k,l)，則按平移方程式，得

$$(x'+h)^2+(y'+k)^2-(z'+l)^2-6(x'+h)-8(y'+k)$$
$$+10(z'+l)=0。$$

即 $$x'^2+y'^2+z'^2+x'\left|\begin{matrix}2h\\-6\\ \end{matrix}\right.+y'\left|\begin{matrix}2k\\-8\\ \end{matrix}\right.+z'\left|\begin{matrix}-2l\\+10\\ \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}h^2-6h=0,\\k^2-8k\\-l^2+10l\end{matrix}\right.$$

欲結果中無一次項，只須

$$2h-6=0,2k-8=0,\ -2l+10=0;\ h,k,l=3,4,5。$$

即應作平移 $x=x'+3,\ y=y'+4,\ z=z'+5。$

（註） 如原式中不含某一變數的平方項，則不能化去這變數的一次項。

79. **四面體體積公式又證** 設有$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ $P_3(x_3,y_3,z_3)$，$P_4(x_4,y_4,z_4)$所成四面體的體積爲V。將原點平移到P_4，則有

$$x_1=x_1'+x_4,\quad y_1=y_1'+y_4,\quad z_1=z_1'+z_4$$

等式，或 $x_1'=x_1-x_4,\quad y_1'=y_1-y_4,\quad z_1'=z_1-z_4;$

$$x_2'=x_2-x_4,\quad y_2'=y_2-y_4,\quad z_2'=z_2-z_4;$$

$$x_3'=x_3-x_4,\quad y_3'=y_3-y_4,\quad z_3'=z_3-z_4。$$

按§40(一)，

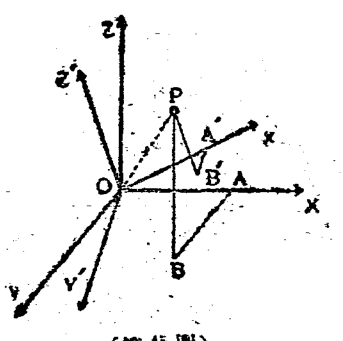
$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}=\frac{D'}{6}$$

但照行列式的性質，有

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & 0 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 & 0 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=D'$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{6}D。$$

80. **坐標軸的旋轉** 固定原點 O，將 OX, OY, OZ 三軸視作剛體而作旋轉，各至新軸 OX', OY', OZ' 的位置，即稱爲旋轉*。設新舊各軸所成方向角如下表：



(第45圖)

---

*旋轉 Rotation

	OX'	OY'	OZ'
OX	α_1	α_2	α_3
OY	β_1	β_2	β_3
OZ	γ_1	γ_2	γ_3

則得

定理 一點 $P(x,y,z)$ 經旋轉後,新坐標為 (x',y',z'),則

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,$$

$$y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,$$

$$z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3。$$

證 如第45圖,設 $\angle XOP=\theta$,並命 OP 對新軸的方向角為 α',β',γ'。由上表知 OX 對新軸的方向角是 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$,故按 §14,有

$$\cos\theta=\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\beta_1+\cos\gamma'\cos\gamma_1.$$

以 $\rho\,(=OP)$ 徧乘,而注意

$$\rho\cos\theta=x,\ \rho\cos\alpha'=x',\ \rho\cos\beta'=y',\ \rho\cos\gamma'=z',$$

卽得定理中第一式,同理可得他二式。

(註) 上式叫旋轉方程式*。

81. 旋轉方程式的討論 有二點可以注意:

旋轉方程式 Equations for rotation of axes

(一)旋轉方程式,看來很繁,實易記憶,看上節的表,OX'是記x'的軸就用x'乘下面的第一直行。同法,用y',z'分乘第二,三直行,再將各橫列中三項加起來,便得極左邊各軸所記的坐標x,y,z。

(二)平移方程式內有三個參數h,k,l,旋轉方程式內似乎有九個;實在只有三個獨立的,因為$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$是$OX'$對於舊軸的方向角,故有 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$。

同理,更有 $\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1$,

$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1。$$

又因OX',OY',OZ'三軸也兩兩垂直,所以

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,$$

$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0。$$

一共有六個獨立的關係式,故可知九參數中只有三個是獨立的。

習題十九

1.依所指定的點為新原點而作平移,以求下列各方程式化成的結果:

(1) $x^2+y^2-4x+2y-4z+1=0$; $(2,-1,-1)$。

（2）$2x^2-5y^2-3z^2+20x-4z-46=0$；$\left(-5, 0, \frac{2}{3}\right)$。

（3）$x^2+y^2-4z^2-4x-y-4z-3=0$；$\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$。

2. 如將坐標軸依（1）x 軸（2）y 軸或（3）z 軸作一 θ 角的旋轉，試求旋轉方程式。

3. 求依一坐標軸將他二軸作一旋轉，以化下列各方程式成右端的結果：

（1）化 $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$ 成 $x^2-7y^2+5z^2=5$。

（2）化 $y^2+4z^2-16x-6y+16z+9=0$ 成 $y^2+4z^2=16x$。

（3）化 $2x^2-5y^2-5z^2-6yz=0$ 成 $x^2-4y^2-z^2=0$。

（4）化 $9x^2-25y^2+16z^2-24zx-80x-60z=0$ 成 $x^2-y^2=4z$。

4. 用平移化去下列方程式中的一次項。

（1）$x^2+4y^2+6z^2-8x+8y=0$。

（2）$x^2+y^2+6y-6z-18=0$。

5. 依 x 軸將他二軸作一旋轉，使 y' 軸的方向餘弦為 0，$\frac{1}{2}\sqrt{3}$，$\frac{1}{2}$，則方程式

$$5x^2-2y^2+11z^2+12xy+12yz-16=0。$$

化成的結果如何？

6. 將坐標軸作一旋轉至方向餘弦為

$$\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3};\quad \frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$$

的新位置，以簡化方程式

$$5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0。$$

7. 將坐標軸作一旋轉至方向參數為

$$2,-1,-1;\quad 0,1,-1;\quad 1,1,1。$$

的新位置，以簡化方程式

$$x^2+2y^2+6z^2-2x-2y+18z+9=0。$$

8. 如依 x 軸將其他二軸作一旋轉，必可移去

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+B_1xy+K=0$$

中的 xy 一項，試加證明。

9. 求證二次方程式 $A_1x^2+C_1x+C_2y+C_3z+K=0$ 表示一柱面。

（提示） 可用上題的方法作旋轉，則可使結果的方程式中缺去一未知數。

10. 設 (x,y,z) 與 (x',y',z') 為一點在坐標軸旋轉前後的新舊坐標，求證

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

11. 上式的幾何意義如何？不用旋轉方程式，能直接由幾何

意義證明嗎?

82. **反變換** 坐標軸轉移到新位置後，如再用一轉移，使回到原來的地位，便叫這二個迴移爲反變換*。

(一)平移 原點平移到(h, k, l)後，原來的原點對新坐標軸的坐標便是$(-h, -k, -l)$，所以這個相反的平移方程式應爲

$$x'=x+(-h),\quad y'=y+(-k),\quad z'=z+(-l)。$$

或就§77解出x', y', z'，所得的結果也相同。

(二)旋轉 就§80的表，可見在旋轉後，舊軸對新軸的方向角順次是

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\quad \beta_1, \beta_2, \beta_3;\quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3。$$

所以反變換的方程式應爲

$$x'=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1,$$

$$y'=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2,$$

$$z'=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3。$$

我們如就§80解出x', y', z'，結果也是一樣，解法可用$\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$順次乘§80中的第一，二，三式，然後相加，更按§81(二)中第四，六兩個關係式，立得上面的第一式，餘類推。

---

*反變換 Inverse transformation.

（註） （二）中三個方程式記憶的方法，也和§81（一）所說的一樣。

（注意） 照§81（二）所說的理，九個方向角間，又有另外的六個關係式，

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$
$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1,$$
$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1。$$

以及
$$\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=0,$$
$$\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\cos\gamma_3\cos\alpha_3=0。$$

但這一組六個方程式，本身雖互相獨立，但對於§81（二）的一組說，這二組不為獨立。換句話說，我們可從任一組，用代數的運算，化成第二組，其證法見習題二十內第10至14各題。

83. 方程式次數的不變性

定理 代數方程式的次數，不因軸的旋轉與平移而減低或升高。

證 因按§§77，80，可知平移和旋轉方程式，都是含x'，y'，z'的一次式。故代入任一代數方程式，其中含x，y，z的各項，次數決不能升高。

次數也不能降低的原因，在於平移和旋轉都有反變換。如軸的旋轉與平移可使次數降低，則作反變換時，這代數方程式須復返原狀，而次數非增高不可。

（註） 代數曲面，可視其次數分類，即因此故。

84. 普通二次方程式的討論 普通二次方程式

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+B_1yz+B_2zx+B_3xy+C_1x+C_2y+C_3z+K=0$$

所表的曲面，叫做**二次曲面***。這一種曲面，可分許多類不同的形態，下節先舉各類名稱，下章再分究其形態。今先就截面，論其一二性質。

定理一 二次曲面與任意一平面的截口爲一錐線（即二次曲線）或實或虛，或變態或常態。

證 由坐標軸的旋轉，任意一平面可成 XY 面，即 $z=0$，但按上節二次曲線的方程式，不因軸的平移而增減其次數。故仍呈上式的形狀。所以在平面 $z=0$ 上截口的方程式應爲

$$A_1x^2+A_2y^2+B_3xy+C_1x+C_2y+K=0。$$

而表一錐線，或變態或常態。

（注意） 二次曲線叫做錐線的緣故，即因其可以平面截旋轉錐面而得。旋轉錐即一直線以一相交線爲軸旋轉所成，含有二葉。這理的說明，已載本局出版著者所編的新中國平面解析幾何學第六章。在此可知即爲上理的特例。

定理二 一二次曲線，被一系平行平面所截的截口爲同類的錐線。

證 所謂同類，即同爲拋物線（或特殊情形的二平行線或二相合線），橢圓（或特殊情形的點橢圓），或雙曲線（或特殊情

---

* 二次曲面 Quadric surface（簡稱 Quadric）或 Conicoid

形的二相交線），其檢驗的標準，由判別式的爲零爲負或爲正而定，可參看本局新中國平面解析幾何學第七章。

欲證本理，可仿定理一，取 $z=k$ 爲一系平行平面的方程式；在二次曲面方程式中，令 $z=k$，得

$$A_1x^2+A_2y^2+B_3xy+C'_1x+C'_2y+\lambda=0。$$

式中　$C_1'=B_2k+C_1$，$C_2'=B_1k+C_2$，$\lambda=A_3k^2+C_3k+K$

這錐線的判別式 $B_3^2-4A_1A_2$ 中並不含 k；所以截口的類別，不因截面的平行移動而改變。

85．普通二次方程式的簡化　將坐標軸作一旋轉後，則普通二次方程式化成的結果中各係數，顯見均含有旋轉時的各方向角按。§81（二），各方向角中，僅有三個爲獨立，我們可使化成結果中 yz，zx，xy 的三係數爲零，以決定這三個獨立的方向角。換句話說，就是可得一旋轉，使化成結果中，不復含 yz，zx，xy 三項，而得下形

$$A_1'x^2+A_2'y^2+A_3'z^2+C_1'x+C_2'y+C_3'z+K'=0。$$

（註）在此所說的化法，理論甚簡而實行計算則極繁難，幾不可能。在高等幾何學中須從幾何上或不變式的觀點去它，可參看 Bell：An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of Three Dimensions 第十一章。

（一）如 A_1'，A_2'，A_3' 均不爲零，則將坐標軸平移，可化去其一次項而得

$$A_1''x^2+A_2''y^2+A_3''z^2+K''=0_\circ$$

(1)如$K''\neq 0$,則按各係數的正負,可化成下列範式:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1_\circ\end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

(2)如$K''=0$,則可化成下列範式:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (\mathrm{II})$$

其所表曲面的名稱,於下節中分類列舉,形態則於下章分別討論。

(注意) 上面看來,似乎尚有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 幾種,但如書為 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,則可見實與第三種相同,不過各坐標軸變動而已。

(二)如A_1',A_2',A_3'有一為零,設為$A_3'=0$,所得結果即可代表。

(3)如$C_3'\neq 0$,即可化去含x,y的一次項與常數項,得

$$A_1''x^2+A_2''y^2+C_3'z=0_\circ$$

就各係數的正負,可再化成下列範式:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz,\quad \frac{x_2}{a_2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz。\qquad\text{(III)}$$

（4）如 $C_3'=0$，可化得 $A_1'x^2+A_2''y^2+K''=0$

（i）在此若 $K''\neq 0$，可再化成範式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1。\qquad\text{(IV)}$$

（ii）若 $K''=0$，則得範式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0。\qquad\text{(V)}$$

（三）如 A_1',A_2',A_3'，有二為零，設為 $A_2'=A_3'=0$，在此可先作平移化去 x 項，得 $A_1''x^2+C_2''y+C_3''z+K=0$。

（5）C_2'' 與 C_3'' 皆不為零，則可以旋轉移去 y 項或 z 項（如 C_2'' 與 C_3'' 有一為零，此步可省）。再作平移，可除去常數項，終得範式

$$\frac{x^2}{a^2}=cy\qquad\text{(VI)}$$

（6）$C_2''=C_3''=0$, $K''\neq 0$，則得範式

$$\frac{x^2}{a^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}=-1\qquad\text{(VII)}$$

（7）$C_2''=C_3''=K''=0$，得 $x^2=0$ (VIII)

86．二次曲面的分類 今將上節化得各範式所表曲面分

類如下表。各曲面後註明其方程式。例如實橢面的方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，餘可類推。

- 二次曲面
  - 非　奇*（有奇點）
    - 有心*
      - 橢面*
        - 實 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
        - 虛 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
      - 葉雙曲面*
        - 單 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
        - 雙 ……$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
    - 無心*
      - 拋物面*
        - 橢性 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$
        - 雙曲 ……$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$
  - 常態*
    - 錐
      - 實 ……$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
      - 虛 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
    - 橢圓柱
      - 實 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
      - 虛 ……$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

有心 Central. 橢面 Ellipsoid. 非奇 Non-singular. 無心 Non-central. 常態 Non-degenerated. 單葉雙曲面 Hyperboloid of one sheet. 雙葉雙曲面 Hyperboloid of two sheets. 橢性拋物面 Elliptic paraboloid. 雙曲拋物面 Hyperbolic paraboloid.

- 奇* (無奇點)
  - 雙曲柱 ……… $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
  - 拋物柱 …… …$\frac{x^2}{a^2}=2cy$
- 變態*
  - 相交平面
    - 實 …$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
    - 虛 …$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
  - 平行平面
    - 實 …$\frac{x^2}{a^2}=1$
    - 虛 …$\frac{x^2}{a^2}=-1$
  - 相合平面 ……$x^2=0$

非奇和奇的區別，在乎曲面上有無奇點*。所謂奇點，用通俗的話來說明，乃是面上有稜角的地方，爲錐的頂點相交平面交線上的點(但柱的頂點，平行面的交線，在無窮遠處)。變態和常態的區別，在乎二次方程式能否分解成二個一次因式；或同或不同均可，能分解時，便表一組二個平面。至於有心，無心，橢面，雙曲面，拋物面命名的原因，待至下章討論其形態時自明。

(註) 一個二次方程式究表何種曲線，不必化成範式，只須就其係數所成的幾個不變式，即可判定，但在中學程度，尚難詳論及此。Dresden: Solid Analytical Geometry and Determinats, § 102 內有一表，頗爲明晰，可以參考。

奇 Singular. 變態 Degenerated. 奇點 Singular point.

習題二十

1.作坐標軸轉移，以化下列方程式爲範式，並指出其所表爲何種拋物面。

(1) $z=xy$　　　　(2) $z=x^2+xy+y^2$

(3) $z^2-2y^2-4x-6y+2z+1=0$。

2.一動點與一定點及一定平面等距離，求證其軌跡爲一橢圓拋物面。

(提示) 以定點爲原點，並使定平面與一坐標軸垂直。

3.一動點與二不相交線等遠，求證其軌跡爲一雙曲拋物面。

4.指出下列各奇二次曲面的名稱：

(1) $9x^2-36y^2+4z^2=0$。　(2) $16x^2-4y^2-z^2=0$。

(3) $4x^2+z^2-16=0$。　(4) $y^2-9z^2+36=0$。

(5) $4y^2-25=0$。　(6) $3y^2+7z^2=0$。

(7) $8y^2+25z=0$。　(8) $z^2+16=0$。

5.化下列各二次方程式成範式，並指出其所表曲面的名稱：

(1) $x^2+xy+y^2+z^2-3=0$。

(2) $3y^2-5yz+3z^2-8x=0$。

(3) $x^2+3xy+y^2+z^2-6z=0$。

(4) $x^2+xy+y^2-2z^2+5x=0$。

6. 化下列方程式爲範式，並由此判別其中的變態與常態曲面:

(1) $x^2-y^2+z^2-6z+9=0$。

(2) $x^2+4y^2-z^2-2x+8y+5=0$。

(3) $z^2-y^2-6z+9=0$。

(4) $x^2+y^2-2z^2+2y+4z-1=0$。

(5) $x^2+yz=0$。

(6) $3x^2-6xy-2x-2y=1$,

7. 求習題十九中第1題各平移的反變換，並施之於各款中的結果，看所得是否和題設方程式相同?

8. 求習題十九中第6題內旋轉的反變換，並施之於該題結果，看所得是否和題設方程式相同。

9. 求習題十九中第7題內旋轉的反變換，並施之於該題結果，看所得是否和題設方程式相同?

10. 令旋轉前後新舊位置各坐標軸的方向餘弦如下表:

$$\begin{array}{c|ccc} & OX' & OY' & OZ' \\ \hline OX & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ OY & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ OZ & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{array}$$

即 $\cos\alpha_1=\lambda_1$, $\cos\alpha_2=\lambda_2$ ……
$\cos\beta_1=\mu_1$, $\cos\beta_2=\mu_2$ ……
$\cos\gamma_1=\nu_1$, $\cos\gamma_2=\nu_2$ ……
餘類推。

試由§81(二)中 $\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0$,………三式證明

$$\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 = \begin{vmatrix} \mu_2 & \nu_2 \\ \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \nu_2 & \lambda_2 \\ \nu_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

11. 試作比例上的變化，從上題證明

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

(提示) 用§81(二)中 $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1$ 等關係。

12. 由上二題及§81(二)中各關係，證明

$$\lambda_1 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \mu_2 & \nu_2 \\ \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \nu_2 & \lambda_2 \\ \nu_3 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \nu_1 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

及 $$\lambda_2 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \mu_3 & \nu_3 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}, \cdots\cdots; \quad \lambda_3 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}, \cdots\cdots$$

13. 由上題結果，求證§82(註)中前三關係式，即

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1, \quad \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1, \quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1。$$

(提示) 注意行列式 δ 的子式展開結果。以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，分乘相當各…兩邊相加即得。

14. 由第12題，求證§82(註)中後三關係式，即

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3=\cdots\cdots=0。$$

(提示) 與上題證法相仿。

第六章　二次曲面

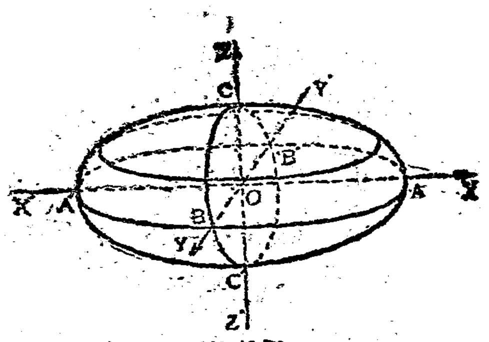
87.　本章目的　上章末節所列的各種二次曲面中，奇的各種，如錐，如柱，如一組二個平面的情形，均已在前文論及，故本章只討論非奇各實二次曲面。並附述直線，平面，與二次曲面的關係。

（註）本書爲求初學易明曲面形態起見，另附模型圖。

88.　橢面　方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

（一）截距　在三軸上的截距爲：$x=\pm a$，$y=\pm b$，$z=\pm c$。

如第 46 圖中的 $AA'=2a$，$BB'=2b$，$CC'=2c$。



（第 46 圖）

（二）主截口　三坐標平面上的主截口，皆爲橢圓，即 $ABA'B'$，$BCB'C'$，$ACA'C'$。其方程式各爲

$$\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{x^2}{a^2}=1 \end{cases}$$

（三）對稱　橢面對稱於三坐標平面，三坐標軸，和原點，因此各稱為主面*，主軸*，和中心*。

（註）有時線段 AA'，BB'，CC' 也叫主軸，乃指長度而言。

（四）截口　今以 XY 面的平行面 $z=k$ 截橢面，得在這平面上的截口方程式為：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}, \quad \text{即} \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

式內 $a'^2=\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)$，$b'^2=\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)$，所表顯為一橢圓，或實或虛。在 k 的值自 0 增至 c 或自 0 減至 $-c$ 時，截面離 XY 面漸遠，橢圓的軸長也各為 $2a$，$2b$ 漸減，以至於 0，那時橢圓縮成一點。如 $k>c$ 或 $k<-c$，就成虛橢圓而無實軌跡。所以這橢面完全界於 $z=\pm c$ 二平面的中間。

用相同的方法，可知與 YZ 面或是與 ZX 面平行的平面上，截口也是橢圓，且當截面離開漸遠時，軸長漸減，所以橢面完全在平面 $x=\pm a$ 及 $y=\pm b$ 的中間。

如果 $a=b$，則橢面 $z=k$ 上的截線是圓，但 k 的值須合於

---

*主面 Principal plane.　主軸 Principal axes.　中心 Center.

$-c<k<c$，這時橢面為一迴轉橢面，以 z 軸為旋轉軸，取這面在 ZX 面的截口旋轉而成。如果 $b=c$ 或是 $c=a$，也為迴轉橢面，但各以 x 軸或 y 軸為旋轉軸。

如果 $a=b=c$，則成一球，方程式成為 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

89. **單葉雙曲面** 方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。凡左端三平方項係數兩正一負，右端為1的都是。我們只須取一種情形來討論，便可收舉一反三之效。

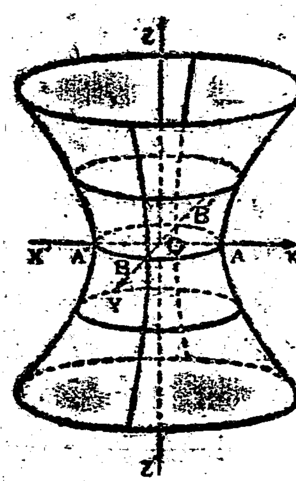
（一）截距 在 x 軸與 y 軸上的截距為 $x=\pm a$，$y=\pm b$，但在 z 軸上則為虛。

（二）主截口 在三坐標軸面上的主截口為

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$x=0,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



（第47圖）

第一式表一橢圓，軸長為 $AA'=2a$，$BB'=2b$，他二式則表雙曲線，一以 BB' 為貫軸，一以 AA' 為貫軸，如第47圖。

（三）對稱 單葉雙曲面對稱於各坐標平面，各坐標軸和原

點，因此各稱為主面，主軸，和中心。

（四）截口 用 XY 面的平行面 $z=k$ 為截面，則得這平面上的截口方程式為，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \quad 或 \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

式內 $a'^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)$，$b'^2=\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)$，所表為一橢圓。在 k 的值自 0 無窮增大，或自 0 無窮減小時，截面離 XY 面漸遠，橢圓軸長，各自 $2a$, $2b$ 無窮增大。所以這曲面離 XY 面無窮伸張，而與 z 軸相去漸遠。

用相同的方法，可見與平面 $x=k'$ 或 $y=k''$ 相截，得截口為雙曲線，當 k' 或 k'' 的絕對值增大時，雙曲線的軸長漸減，至 $k'=\pm a$ 或 $k''=\pm b$ 時，雙曲線化成變態的情形，為二相交直線。若 k' 或 k'' 過此再增大，雙曲線的貫軸和配軸的方向，與以前的互易，而軸長則無窮增大。

（註） 這種位置的單葉雙曲面，不與 z 軸相交，可說是"沿 z 軸豎立"。

方程式 $\frac{x^2}{a_2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，　$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

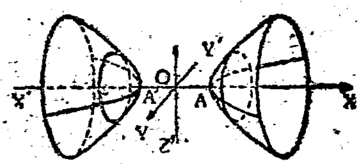
表示"沿 y 軸"和"沿 x 軸"豎立的單葉雙曲面。

如 $a=b$ 則沿 z 軸豎立的單葉雙曲面是一迴轉面，以 z 軸為旋轉軸；沿 y 軸或沿 x 軸豎立的單葉雙曲面，各於 $a=c$，$b=c$ 時成迴轉面。

90. **雙葉雙曲面**　方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。凡在左端三平方項係數一正兩負，右端為1的都是。我們只須取一種情形討論，餘可類推。

(一)截距　在 x 軸上的截距為 $x=\pm a$。但 y 軸和 z 軸上則為虛。

(二)主截口　在 XY 面，ZX 面上的主截口，各為雙曲線，方程式為



(第48圖)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

若以 $AA'=2a$ 為貫軸，如第48圖。

(三)對稱　與橢面，單葉雙曲面情形相同。

(四)截口　作 XZ 面的平行截面 $x=k$，則得其上截口方程式為

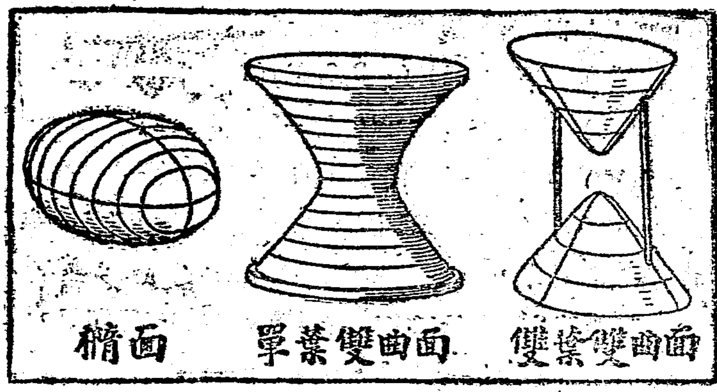
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1 \quad 或 \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

式內 $b'^2=\frac{b^2}{a^2}(k^2-a^2)$，$c'^2=\frac{c^2}{a^2}(k^2-a^2)$，而表一橢圓，或實或虛。在 $-a<k<a$ 時，截口為一虛橢圓，即無實軌跡。在 $k=\pm a$ 時，軌跡為點橢圓，若 k 自 a 無窮增大或自 $-a$ 無窮減小，則得實橢圓。由此可見曲面含有二葉，離 YZ 無窮伸張，而與 x 軸

相去漸遠。

同法可知用 XY 面或 ZX 面的平行面做截面，所得截口皆是雙曲線，當截面離坐標平面漸遠時，其軸長漸增。

（註）這種位置的雙葉雙曲面，可稱是"沿 x 軸豎立"。



模型圖一

習題二十一

1. 舉出沿 y 軸或沿 z 軸豎立的雙葉雙曲面方程式來。

2. 何時雙葉雙曲面成迴轉面。

3. 討論下列各方程式所表的曲面。

（1）$x^2+4y^2+9z^2=36$。　（2）$x^2+4y^2-9z^2=36$。

（3）$x^2-4y^2-9z^2=36$。　（4）$4x^2+9y^2-9z^2=36$。

（5）$x^2-y^2-z^2=1$。　（6）$9x^2-4y^2-z^2=36$。

(7) $9x^2+y^2-z^2=36$。 (8) $9x^2-16y^2+4z^2=64$。

(9) $x^2-4y^2+9z^2+36=0$。 (10) $x^2+y^2-9z^2=1$。

(11) $x^2+4y^2-z^2=16$。 (12) $x^2-8y+2z^2=16$。

4. 設一有心曲面方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$ 而經過下列各組點,試定所表的曲面:

(1) $(2,-1,1),(-3,0,0),(1,-1,-2)$,

(2) $(4,-2,-1),(0,1,-3),(3,5,2)$。

(3) $(-1,-1,\sqrt{5}),(2\sqrt{5},-2,4),(0,0,-2)$。

5 一動點與(1,0,0)的距離爲與平面 $x=4$ 距離的一半,試求其所成的軌跡,並定其爲何種二次曲面。

6. 假設第2題中的二次曲面經過(2,1,3)一點和下列各曲線,試定所表的曲面爲那一種:

(1) $z=4,\ 3x^2+y^2=9$。 (2) $z=4,\ x^2+y^2-25=0$。

7. 一動點與空間二垂直交線距離的平方和爲定量,試證所成的軌跡是一迴轉橢面。

8. 以解析法證明任一曲面與橢面相截成橢圓。

9. 有沿某軸豎立的單葉雙曲面,過這軸作截面,求證所得截口是雙曲線。

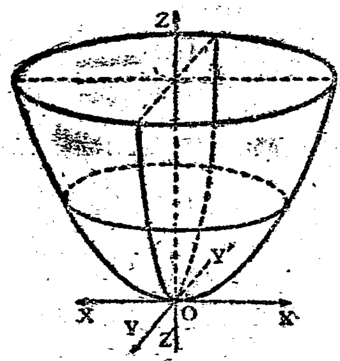
10. 上題對雙葉雙曲面的情形如何?

91. 橢圓拋物面 方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$。凡左端含同

號二平方項，右端爲第三變數的一次項皆是。

（一）截距　都是零，可見曲面經過原點。

（二）主截口　在三坐標平面上的主截口方程式爲



（第 49 圖）

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$$

$$y=0,\ \frac{x^2}{a^2}=2cz;$$

$$x=0,\ \frac{y^2}{b^2}=2cz;$$

第一式表點橢圓，其餘二式爲拋物線，如第 49 圖。

（三）對稱　這曲面對稱於 YZ 面，ZX 面和二者的交線 z 軸，但無對稱中心，換句話說，即橢性拋物面有二主面和一主軸，但無中心。

（四）截口　用 XY 面的平行面 $z=k$ 相截，得其上的截口方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ck,\ 即\ \frac{x^2}{2a^2ck}+\frac{y^2}{2b^2ck}=1$$

如 c 與 k 同號，則上式表一實橢圓；如異號，則表虛橢圓而無軌跡。所以 $c>0$ 時曲面完全在 XY 面上，若 k 的值自 0 起無窮增

大，即截面離 XY 面遠去，則橢圓軸長也無窮增加。可見曲面離 XY 面無窮伸張，而去 z 軸漸遠。

同法可證 YZ 面或 ZX 面的平行面上截口是拋物線。當截面離坐標平面漸遠時，拋物線的頂點，也離開 XY 面漸遠。

（註） 這種位置的橢性拋物面，可說是"沿 z 軸豎立"。方程式

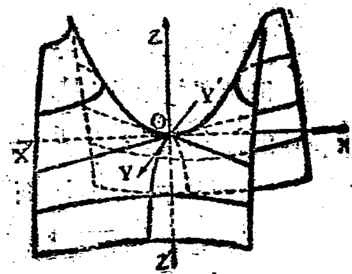
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2ax,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2by$$

則各表"沿 x 軸"和"沿 y 軸"的情形。由此可知所沿的軸，與方程式中一次項內變數相當，且就這項的正負，定所沿爲正向或負向。

92． 雙曲拋物面 方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$，凡左端含異號的二平方項，右端爲第三變數的一次項皆是。

（一）截距 都是零，卽曲面經過原點。

（二）主截口 在三坐標軸上的主截口方程式爲



（第50圖）

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2cz;\qquad x=0,\quad -\frac{y^2}{b^2}=2cz,$$

第一式表二相交直線，其餘二式都表拋物線，如第50圖。

(三)對稱　這曲面對稱於 YZ 面和 ZX 面，和二者的交線 z 軸，但無對稱中心。情形恰和橢性拋物面相同。

(四)截口　用 XY 面的平行面 $z=k$ 相截，其上截口方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ck \quad 卽 \quad \frac{x^2}{2a^2ck}-\frac{y^2}{2b^2ck}=1,$$

而表雙曲線，如 $c>0$，則視 k 爲正或負，這雙曲線的貫軸平行於 x 軸或 y 軸，設 k 值自 0 無窮增大，或自 0 無窮減小，則截面離 XY 面漸遠，雙曲線的軸長也無窮增大。可見這曲面離 XY 面無窮伸張，而去 z 軸漸遠，其形狀很和馬鞍相像。

同法可知與他二坐標平面平行的截面上截口是拋物線，於截面離坐標平面遠移時，其頂點去 XY 面也漸遠。

〔註〕這種位置的雙曲拋物面，可說是"沿 z 軸豎立"。方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2by, \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2ax$$

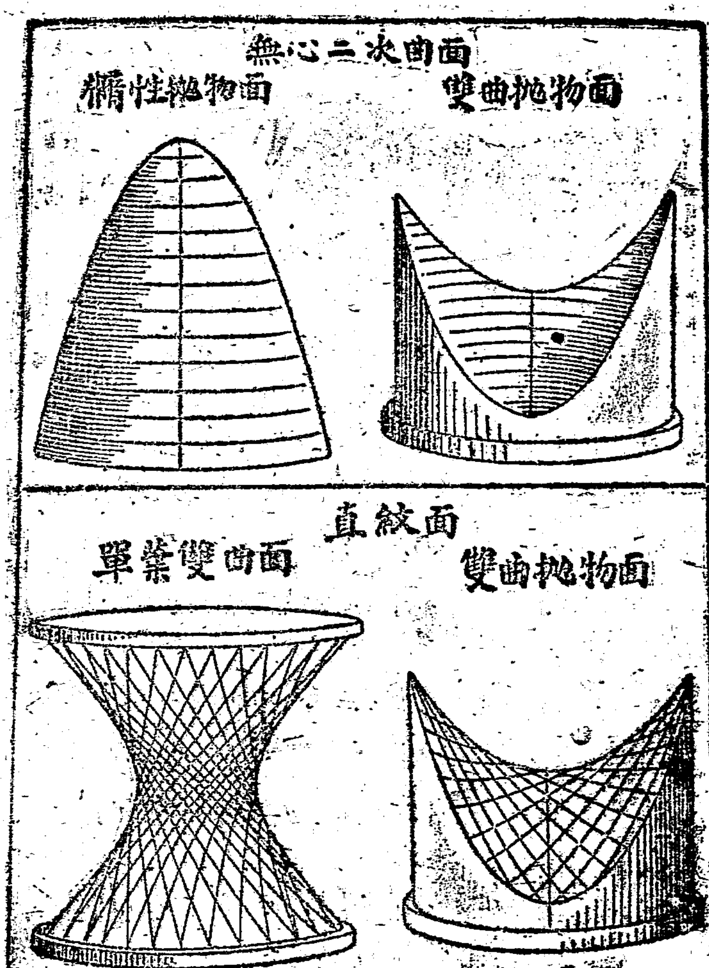
則各表"沿 y 軸"和"沿 x 軸"的情形。由此可知所沿的軸，與方程式中一次項內變數相當。

93，**雙曲拋物面的又一方程式**　方程式 $z=kxy$ 也表一雙曲拋物面。因可依 z 軸，將他二坐標軸作一 $45°$ 的旋轉，卽令

$$z=z', \quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

代入得　$$z'=\frac{k}{2}(x'-y')(x'+y')=\frac{1}{2}k(x'^2-y'^2)$$

(註) 以 x, y, z 表理想氣體*的壓力，體積，和溫度，上式便稱爲氣體方程式*。



標型 圖二

理想氣體 Perfect gas. 氣體方程式 Gas equation.

習題二十二

1.討論並作下列各曲面的圖，指明其爲那一種：

（1） $x^2+y^2=4z$。　（2） $y^2-z^2=6x$。

（3） $y^2-4x^2=16z$。　（4） $3x^2+z^2-4y=0$。

（5） $y^2=2x^2+4z$。　（6） $2(y^2+x)+3z^2=0$。

2.兩種拋物面中，有無爲迴轉面的可能？在什麼情形下，纔是迴轉面？

3.設一無心二次曲面方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz=0$，試求過下列各組點的曲面方程式，並定其所屬種類：

（1） $(1,0,1),(0,2,1)$；（2） $(1,2,1),(2,1,1)$。

4.試求上題中經過曲線 $z=4,\ 2x^2+y^2=4$ 的拋物面方程式。

5.求證以主面的平行面截二種拋物面所得爲拋物線的截口，都是全等形。

6.方程式 $\dfrac{x^2}{a^2-k}+\dfrac{y^2}{b^2-k}+\dfrac{z^2}{c^2-k}=1,\ (a>b>c)$ 中，k 爲參數，則表一系有心二次曲面。問 k 的那些數值必須除外？又 k 值如何，曲面爲橢面，如何爲單葉雙曲面？如何爲雙葉雙曲面？

7.試證上題中各曲面在坐標軸上的主截口成共焦點錐線

系。

8. 方程式 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=2cz$ 中，k 爲參數，表一系無心二次曲面。k 值如何，曲面爲橢性拋物面？又如何爲雙曲拋物面？

9. 試按第5題說明如何可移動一拋物線以成二種拋物面。

10. 求證第6題中，當 k 值增加趨於 c^2 時，橢面漸漸變扁。化去式中分母，示明當 $k=c^2$ 時的極限情形，乃 XY 面上一橢圓的內部，並定此橢圓的方程式。

94. **直線與二次曲面的關係** 一直線如不在一二次曲面上，則至多與此曲面只能有二個交點。因如果有三點，則以過這直線的任一平面去截二次曲面，所得曲口與直線有三交點，而非錐線，如此便和 §84 定理一相矛盾。所以直線與二次曲面就交點多寡論，有四種關係如下：

(一)直線完全在曲面上，例如 $z=0$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 二直線卽在雙曲拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 上(§92 (二))。在這種情形，曲面爲直紋面，以直線爲一母線。

(二)直線與曲面交於二點，這線叫割線*，二點間的線段叫弦*。

割線 Secant line. 弦 Chord.

(三)直線與曲面只交於一點，這線叫切線*，交點叫切點*。

(四)直線不和曲面相交。

95. ρ 方程式 設一直線的參數方程式爲

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,\quad z=z_1+\rho\cos\gamma$$

式中(x_1, y_1, z_1)爲線上一點 P_1 的坐標，α, β, γ 是這線的方向角，ρ 是參數，(x, y, z)是線上動點的位置。今求這直線與一二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 的交點，也就是定 ρ 的值，使動點位置，合於曲面方程式，亦即使

$$F(x_1+\rho\cos\alpha,\quad y_1+\rho\cos\beta,\quad z_1+\rho\cos\gamma)=0。$$

式中 $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$ 皆是已知數。但 $F(x, y, z)=0$ 是含 x, y, z 的二次方程式，所以上式簡化後，必成下形：

$$A\rho^2+B\rho+C=0。$$

式中 A, B, C 含有 $F(x, y, z)$—式中各係數和 $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$ 等。這方程式，叫做曲面 $F(x, y, z)=0$ 的 **ρ 方程式***，由其判別式 $\delta=B^2-4AC$ 即可判定直線和曲面的關係。

(註) 方向餘弦也可用方向參數代替。

(一) δ 爲正，則 ρ 方程式有二實根，也就可定直線與曲面的二交點，這時直線是曲面的割線。

切線 Tangent line(簡稱 Tangent)， 切點 Point of contact， ρ 方程式 Equation in ρ.

(二) δ 爲零，則 ρ 方程式有一重根，這時直線和曲面相切，而爲其切線，求出的交點便是切點。

(三) δ 爲負，則 ρ 方程式無實根，直線不與曲面相交

下面的幾種情形，值得注意。

(I) $C=0$，則 ρ 方程式有一根爲零，也就是 (x_1, y_1, z_1) 在曲面上。

(II) $B=0$，則 ρ 方程式二根同値異號；我們知 ρ 即表自 P_1 至動點 P 的長，所以 P_1 與二交點等遠，即 P_1 爲交弦的中點。

（注意）如限於實點，則須 δ 爲正。在此 $\delta=-4AC$，故必 A 和 C 異號。

(III) $A=0$，則 ρ 方程式有一個無窮大根，我們可說是直線和曲面有一無窮遠處的交點，或稱這直線的方向爲曲面的漸近方向*。

(IV) $B=C=0$，則 ρ 方程式二根皆是零，即直線與曲面相切，而以 P_1 爲切點。

(V) $A=B=0$，則 ρ 方程式二根皆爲無窮大，可說是直線與曲面在無窮遠處相切，或稱這直線爲曲面的一漸近線*。

(VI) $A=B=C=0$，則 ρ 爲任何値均合，也就是直線任何點均在曲面上，而爲曲面的母線。

96. 各種情形例解

漸近方向 Asymptotic direction. 漸近線 Asymptote.

例一　求證 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 錐上任一母線都是單葉雙曲面 $F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ 的漸近線。

證　這錐上任一母線的方程式，可寫做

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma$$

但 $$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=0$$

代入 $$F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

得 ρ 方程式爲 $$\rho^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)-1=0$$

故 $A=B=0$, $C=1\neq 0$，即示明任何母線皆是漸近線。

（註）這錐叫做單葉雙曲面的漸近錐面*。

例二　求證直線 $z=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ 在曲面 $F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2cz=0$ 上。

證　書出直線的參數式 $x=a\rho,\ y=b\rho,\ z=0$ 代入得 $F(a\rho,b\rho,0)\equiv 0$，故爲一母線。

例三　試求直線 $x=2+\rho\cos\alpha,\ y=1+\rho\cos\beta,\ z=-1+\rho\cos\gamma$ 與曲面 $F(x,y,z)\equiv x^2-y^2+3z=0$ 相切的條件。

---

*漸近錐面 Asymptotic cone.

解 將參數式代入曲面方程式，得

$$(2+\rho\cos\alpha)^2-(1+\rho\cos\beta)^2+3(-1+\rho\cos\gamma)=0$$

或 $\rho^2(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)+\rho(4\cos\alpha-2\cos\beta+3\cos\gamma)=0$

即 $A=\cos^2\alpha-\cos^2\beta,\ B=4\cos\alpha-2\cos\beta+3\cos\gamma,\ C=0$

可見 $P_1(2,1,-1)$ 即爲曲面上一點，欲這線成切線，只須

$$\delta=B^2-4AC=B^2=0,\ 即\ B=4\cos\alpha-2\cos\beta+3\cos\gamma=0$$

合於條件時，已知直線爲切線，以 P_1 爲切點。

例四 一系平行直線的方向餘弦爲 $\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$ 試求這系直線與曲面 $x^2-y^2+2z^2=16$ 相交所成弦的中點的軌跡。

解 書這系直線參數式爲：

$$x=x_1+\frac{2}{3}\rho,\ y=y_1-\frac{1}{3}\rho,\ z=z_1-\frac{2}{3}\rho$$

式中設 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 即爲所求中點，代入曲面方程式，得

$$(x_1+\frac{2}{3}\rho)^2-(y_1-\frac{1}{3}\rho)^2+2(z_1-\frac{2}{3}\rho)^2-16=0$$

或 $\frac{11}{9}\rho^2+\frac{2}{3}(2x_1+y_1-4z_1)\rho+x_1^2-y_1^2+2z_1^2-16=0$

即 $A=\frac{11}{9},\ B=\frac{2}{3}(2x_1+y_1-4z_1),\ C=x_1^2-y_1^2+2z_1^2-16$

欲 P_1 爲弦的中點，必須 $B=0$，即 $2x_1+y_1-4z_1=0$。換句話說，

即 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 應在 $2x_1+y_1-4z_1=0$ 一平面上，這就是所求的軌跡。

（註） 同法可證一系平行直線與任一二次曲線相交所成弦的中點的軌跡，亦是一平面，叫做這曲面相當於這平行方向的徑面*。其直接證法演算稍繁，本書從略。

如徑面和相當方向垂直，則得主面（§88.（三））。這方向叫主方向*。高等幾何學中化二次普通方程式爲範式的一種方法，即從主方向着手，可參看 Bell 或 Dresden 的書。

97. **直紋二次曲面** 我們可以證明二次曲面中有實母線的（即本書所謂直紋面）只有單葉雙曲面和雙曲拋物面二種，其證從略（可參考 Dresden 書 §§84, 102 或 Bell 書 §99）。今只就範式求這兩種直紋二次曲面上的母線。

（一）單葉雙曲面方程式可書爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$。則顯見其爲自下列直線系方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

消去參數 k 的結果。凡這系直線中任一線上各點的坐標，必合於上面的聯立方程式，也就必定合於單葉雙曲面的方程式。

同法可知下列聯立方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

徑面 Diametral plane. 主方向 Principal direction.

所表的直線系也完全在那單葉雙曲面上.

（二）雙曲拋物面方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$。顯含有下列二組聯立方程式即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k};$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k}$$

所表的二直線系。

（三）不但上述兩種曲面上各含有二系直線，並且卽可視爲由這種直線所構成的直紋面。換句話說，卽曲面上任意一點，都有這種直線經過。注意曲面方程式爲從直線系方程式消去參數 k 的結果，所以曲面上任意一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 合於這結式，必能使解聯立方程式對 k 有公共解。由這 k 值所定的直線，卽經過 P_1 而全在曲面上的母線。

（註）注意含有直線的曲面未必皆爲直紋面，必須由動直線構成者方是。

由上所論，卽得下面的

定理　單葉雙曲面和雙曲拋物面都含有二系直線；並且可以二種看法，視爲直紋面。

習題二十三

1. 試判別下列直線與二次曲面的關係:

(1) $x=-6+\frac{2}{3}\rho,\ y=6-\frac{2}{3}\rho,\ z=3-\frac{1}{3}\rho;\ x^2+y^2+4z^2=16$。

(2) $x=\frac{6}{7}\rho,\ y=9+\frac{3}{7}\rho,\ z=1-\frac{2}{7}\rho;\ y^2+4z^2=8x$。

(3) $x=4+\frac{2}{3}\rho,\ y=-2+\frac{2}{3}\rho,\ z=5+\frac{1}{3}\rho;\ x^2+y^2+z^2=36$。

(4) $x=3+\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho,\ y=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho,\ z=-2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho;\ x^2-z^2=2y$。

(5) $\frac{x-1}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{-5};\ x^2+4y^2-9z^2=36$。

2. 試求下列各直紋二次曲面上的二組母線。

3. 試用 ρ 方程式的方法證明§97中(一)和(二)中的理。

4. 求證§88(三)中的主面與§96例四註中所說的意義相同。

5. 求證錐面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 是雙葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的漸近錐面。

6. 求證雙曲拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 中各母線皆和 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 二平面之一平行。

7.求證二種拋物面上母線在主面上的射影，和曲面在這面上的截口相切。

8.一平面經過單葉雙曲面的中心，並含其一母線，求證其與曲面相交於另一母線，和前一母線平行。

9.如一平面經過直紋二次曲面的一母線，則必更經過他一母線，且二母線不同在一系內。求證。

10.試書單葉雙曲面的方程式如 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ 而定其二系母線，並證明和 § 97 所得結果相同。

98. 平面與二次曲面的關係 前已說明平面和二次曲面相截，成一錐線，或實或虛，或變態或常態（§ 84 定理一）。如截口為變態而成一點，二相交直線（對於非奇二次曲面），或一相合直線（對錐與柱）時，便叫做二次曲面的切面*。所約成的一點或二相交線的交點，或相合線上任意一點，叫做切點。這定義雖可較易顯出切面的意義，但不易作為切面求法的根據，且亦乏普徧性，較普徧的定義如下：

過任何曲面上一定點，在曲面上，任作一曲線，這定點與一鄰近點聯線，當後一點沿曲線趨近於這定點而相合時，聯線的極限位置，便成曲線的切線（和平面曲線情形一樣）。除特殊情形外，這些曲線的切線，必在一平面內，即成曲面的切面，這點

---

*切面 Tangent plane.（在不致混時也可簡稱 Tangent.）

叫切點。關於這理可參看著者譯葛,斯,龍 (Granville-Smith-Longley)微積分學§222。

注意在此所說的曲面上,曲線的切線,即是曲面的切線。下節即據此定義求二次曲面的切面。

99, **二次曲面的切面** 今就橢圓拋物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 求切面,可見一般情形也相同。

設以參數式表經過曲面上一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的一直線如下:

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,\quad z=z_1+\rho\cos\gamma$$

代入曲面方程式中,得 ρ 方程式 $A\rho^2+B\rho+C=0$。式中

$$A=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2},\quad B=\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}-c\cos\gamma$$

$$C=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-2cz_1=0\quad(\text{因 } P_1 \text{ 在曲面上})$$

欲這線為切線,按§96 (IV),更須 $B=0$。

就直線方程式解出方向餘弦,得

$$\cos\alpha=\frac{x-x_1}{\rho},\quad \cos\beta=\frac{y-y_1}{\rho},\quad \cos\gamma=\frac{z-z_1}{\rho}。$$

代入 $B=0$,得 $\frac{x_1(x-x_1)}{a^2\rho}+\frac{y_1(y-y_1)}{b^2\rho}=\frac{c(z-z_1)}{\rho}$

再按 $C=0$ 的關係簡化，即有

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=c(z+z_1)$$

便是二次曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 在其上一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 處的切面方程式。

用同一方法，便可得下面的

定理 有心二次曲面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ 在其上 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 一點的切面方程式是 $\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}\pm\frac{z_1z}{c^2}=1$；無心二次曲面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 在其上 P_1 一點的切面方程式是 $\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=c(z+z_1)$。

（注意） 由此理可知以 x_1x, y_1y, z_1z 分別代曲面方程式中的 x^2, y^2, z^2 以 $\frac{1}{2}(x+x_1)$，$\frac{1}{2}(y+y_1)$，$\frac{1}{2}(z+z_1)$ 代其中的 x, y, z，即得切面方程式。並且對普通二次方程式，這法也適用，但遇 xy, yz, zx 須各代以 $\frac{1}{2}(x_1y+xy_1)$，$\frac{1}{2}(y_1z+yz_1)$，$\frac{1}{2}(z_1x+zx_1)$。

（註） 如 P_1 不在曲面上，則由上法求得的方程式所表平面，叫做曲面對於 P_1 的極面*，P_1 叫做平面對於這二次曲面的極*。

極面 Polar plane. 極 Pole.

100. 結論　立體解析幾何與平面解析幾何二科中問題，有許多相同的地方，所用的方法和求得的結果，亦多類似。如二點間的距離公式，三角形的面積，與四面體的體積，自直線到一點的距離，與自平面到一點的距離，錐線的直徑和二次曲面的徑面，錐線的切線和二次曲面的切面等等。如能一一比較，自可觸類旁通，既便記憶，且易了解。但本書爲篇幅和程度所限，對這些地方，未能盡量列舉。例如錐線有焦點和準線的問題，對於二次曲面也有相類的要素，Chasles, Salmon, MacCullagh 諸氏曾證明一動點與一定點的距離平方對於與過一定直線二平面上的距離乘積所成比爲一定時，則軌跡爲一二次曲面，而任何二次曲面均可如此構成。定點卽焦點，定線卽準線。已知一二次曲面，他的焦點構成幾個錐線，叫做焦錐線*，而準線則成幾個柱面，叫做準柱*。讀者讀完本書，更努力精進，他日自然可以明白。

（註）焦錐線和準柱的討論可看 Dresden, §§ 120--121; Bell, §§ 129--130.

習題二十四

1. 如一平面經過直紋二次曲面上一點，且含有過這點的二母線，求證其必爲一切面，以這點爲切點。

---

*焦錐線 Focal conic,　準柱 Directrix cylinder.

2. 如一平面含有直紋二次曲面上一線，則必在這母線上某點與曲面相切，試加證明。

3. 求證一已知平面上一點對任一二次曲面的極面，必經過這平面對同一二次曲面的極。

4. 試證一點 P_1 對一球的極面，必和球心與 P_1 的聯線垂直。

5. 試證二點與球心距離的比，等於自各點至他一點對這球極面距離的比。

6. 設自原點到橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 處切面的距離爲 p，求證 $\frac{1}{p^2}=\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}$。

7. 試證平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 與上題中曲面相切的條件爲 $A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=D^2$。

8. 一橢面有三個互相垂直的切面，求證這三平面交點的軌跡爲一球。

9. 試求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 與拋物面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 相切的條件。

10. 求 § 100 所說由焦點準線所生軌跡的方程式。

中 文 索 引

（註阿拉伯碼指名詞出現節數，中文數字，指見第幾習題）

英 文 索 引

中華民國三十二年九月初版

新中國教科書 高級中學解析幾何學

全一冊 正中機造紙本 定價國幣六角

(外埠酌加運費匯費)

編著者 余介石
校訂者 何魯

發行人 吳秉常
印刷所 正中書局
發行所 正中書局

(1736)

[illegible](0.30)金·本 10/1

3
809081
(1)