Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1.*

Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für jedes Punktepaar $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit $a, b \in I$ die Verbindungsstrecke oberhalb des Graphen von f verläuft.

Aufgabe 20.2. Zeige, dass eine affin-lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax + b,$$

sowohl konvex als auch konkav ist.

Aufgabe 20.3. Zeige, dass der Betrag

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

konvex ist.

Aufgabe 20.4. Die Funktion

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

beschreibe eine zeitabhängige eindimensionale Bewegung. Bringe die Konzepte Bewegungsverlauf, Geschwindigkeitsverlauf, Beschleunigungsverlauf mit den Konzepten konvexe Funktion und Wendepunkt in Verbindung.

Aufgabe 20.5. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

konvex ist.

Aufgabe 20.6.*

Bestimme das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte der Funktion
$$f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1.$$

Aufgabe 20.7. Es sei
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $-f$ konkav ist.

Aufgabe 20.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 20.9. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit ungeradem Grad ≥ 3. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.10. Partnerarbeit: Finde die Wendepunkte auf der Nase des Partners. Für Fortgeschrittene: Finde die Wendepunkte auf dem Rücken des Partners.

Aufgabe 20.11. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, ein Polynom vom Grad $n \geq 2$. Zeige, dass f höchstens $n - 2$ Wendepunkte besitzt.

Aufgabe 20.12. Definiere die Begriffe *streng konvex*, *streng konkav* und *strenger Wendepunkt* .

Aufgabe 20.13. Es sei $a < b < c$ und seien $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(b) \neq h(b)$. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ für } x \leq b\,, \\ h(x) \text{ für } x > b\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f nicht konvex ist.

Aufgabe 20.14. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in a und in b isolierte lokale Minima besitzt. Zeige, dass f nicht konvex ist.

Aufgabe 20.15.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe differenzierbare Funktion. Zeige, dass in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen in $(a, f(a))$ mit dem Graphen oberhalb eines (eventuell einpunktigen) Intervalles übereinstimmt.

Aufgabe 20.16.*

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reelle Intervalle und

$$f\colon I \longrightarrow J$$

eine bijektive wachsende konvexe Funktion. Zeige, dass die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

konkav ist.

Aufgabe 20.17. Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reelle Intervalle und

$$f\colon I \longrightarrow J$$

eine bijektive fallende konvexe Funktion. Zeige, dass die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 20.18. Es seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvexe Funktionen. Zeige, dass die Summe $f + g$ ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 20.19. Es seien
$$f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass die Differenz $f-g$ konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.20. Es seien
$$f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass das Produkt fg konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.21. Formuliere und beweise die konkave Version der Jensenschen Abschätzung.

Aufgabe 20.22.*

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion und $x \in I$ ein Punkt mit
$$f''(x) = 0$$
und
$$f'''(x) \neq 0.$$
Zeige, dass x ein Wendepunkt von f ist.

Aufgabe 20.23.*

Zeige mit Hilfe der Jensensschen Ungleichung, angewendet auf die konkave Logarithmusfunktion, die allgemeine Abschätzung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, also die Aussage, dass für
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$
die Abschätzung
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
gilt.

Aufgabe 20.24. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 20.25. Bestimme die Ableitung der Funktion
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2 \cdot \exp\left(z^3 - 4z\right).$$

Aufgabe 20.26.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = xe^x.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) \;=\; (x+n)e^x$$

ist.

Aufgabe 20.27.*

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 20.28.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = t^2e^{-t}.$$

Aufgabe 20.29.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 20.30.*

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 20.31.*

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

Aufgabe 20.32.*

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}.$$

Aufgabe 20.33. Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

Aufgabe 20.34. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 20.35.*

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ eine auf einem offenen Intervall definierte Funktion. Wir interessieren uns für den Limes

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}$$

zu einem Punkt $x \in I$.

(1) Bestimme diesen Limes für die Funktion
$$f(x) = a^x$$
mit einem $a \in \mathbb{R}_+$.

(2) Es sei f in $x \in I$ differenzierbar. Zeige
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

(3) Überprüfe das Ergebnis aus (1) mit Hilfe der Formel aus (2).

Aufgabe 20.36. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^{i}.

Aufgabe 20.37. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 20.9).

Aufgabe 20.38. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 15.10 (4).

Aufgabe 20.39. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 20.40.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 20.41. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 20.42. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)^n.$$

Aufgabe 20.43. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 20.44.*

Beweise den Satz über die Ableitung der Exponentialfunktionen zu einer Basis $a > 0$.

Aufgabe 20.45. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

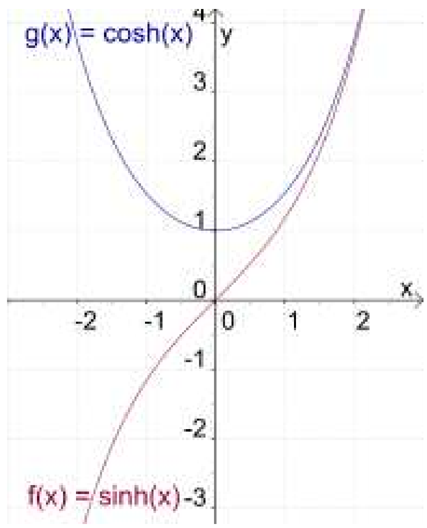
Aufgabe 20.46. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 20.47. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\ln x}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}_+$.



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cosh z = \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big)$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

Aufgabe 20.48. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh z + \sinh z = e^z\,.$$

(2)
$$\cosh z - \sinh z = e^{-z}\,.$$

(3)
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1\,.$$

(4)
$$\cosh \mathrm{i}z = \cos z \text{ und } \sinh \mathrm{i}z = \mathrm{i} \cdot \sin z\,.$$

AUFGABE 20.49. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

AUFGABE 20.50. Beweise die Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen, also

a)

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y .$$

b)

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y .$$

AUFGABE 20.51.*

Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

AUFGABE 20.52. Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgrund dieser beiden Aufgaben gibt es Umkehrfunktionen, die man *Areasinus hyperbolicus* bzw. *Areakosinus hyperbolicus* nennt.

AUFGABE 20.53.*

Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

gilt.

AUFGABE 20.54.*

Zeige, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln x$$

nach unten beschränkt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.55. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Zeige die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Aufgabe 20.56. (3 Punkte)

Bestimme das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x + 5.$$

Aufgabe 20.57. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ungerade Funktion, die nicht linear sei. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.58. (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin(\cos z)\,.$$

Aufgabe 20.59. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x.$$

Abbildungsverzeichnis