# USAGE
# DE L'ANALYSE,
# OU
# LA MANIERE DE L'APPLIQUER

à découvrir les proprietés des figures de la
Geometrie ſimple & compoſée, à reſoudre
les Problêmes de ces ſciences & les Problêmes
des ſciences Phyſico-mathematiques,
en employant le calcul ordinaire de
l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul
integral. Ces derniers calculs y ſont auſſi
expliqués & démontrés.

DEDIÉ À MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

*Par* le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

SECONDE EDITION,

*Augmentée des Remarques de M. de Varignon.*

TOME II.

A PARIS,
Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité,
rue Galande près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVIII.
*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.*

26.566
Hon. Chas. F. Adams,
July 2, 1891.

# PRÉFACE,

## *QUI EST UN EXTRAIT DU VIII^e LIVRE ou ſecond Volume, ſur l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie, & dans les Sciences Phyſico-Mathematiques.*

CE huitiéme Livre contient les uſages de l'Analyſe que l'on a expliquée & démontrée dans les ſept premiers Livres. Les Lecteurs qui commencent, y verront les utilités de l'Analyſe, & la maniere d'en appliquer les methodes à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie ſimple & compoſée, & à réſoudre les Problêmes de ces Sciences, & les Problêmes des Sciences Phyſico-Mathematiques. Ils y apprendront auſſi les nouveaux calcus *differentiel* & *integral*, qui ſervent principalement à la connoiſſance des lignes courbes. Pour les faire concevoir clairement, il falloit auparavant faire connoître la maniere dont l'Analyſe réduit les lignes droites & courbes à des équations; que ces équations expriment les principales proprietés, &, pour ainſi dire, la nature des lignes courbes ; & tirer de là l'idée qu'on doit ſe former de toutes les courbes. Ce huitiéme Livre eſt diviſé en trois Parties : Les uſages de l'Analyſe, en n'employant que le calcul ordinaire de l'Algebre, ſont expliqués dans la premiere. La ſeconde contient le calcul differentiel, & les uſages qu'en fait l'Analyſe. On fait découvrir dans la troiſiéme, par le moyen de l'Analyſe, les regles du calcul integral, & l'on fait voir enſuite les uſages qu'elle fait de ces regles.

## PREMIERE PARTIE.

### *Sur l'uſage de l'Analyſe, en n'employant que le calcul ordinaire de l'Algebre.*

ON fait voir dans la premiere Section, que l'Analyſe repreſente les lignes & les figures de la Geometrie par les lettres de l'Alphabet, & tous les rapports ſimples & compoſés que peuvent avoir ces lignes & ces figures par le calcul de ces lettres ; & que par conſequent les lignes & les figures ſont les valeurs geometriques des expreſſions litterales, & les rapports de ces lignes & de ces figures ſont comme les objets repreſentés par les calculs de l'Analyſe. Cela doit faire appercevoir aux Commençans l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie, & leur faire concevoir tout l'artifice des Methodes qu'elle donne pour en réſoudre les Problêmes, qui conſiſte en ceci:

Elle repreſente par des lettres differentes les grandeurs inconnues que l'on cherche, & les grandeurs connues ou données dans chaque Problême ; elle trouve par le calcul les équations qui expriment les rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues, leſquels rapports ſont les conditions qui déterminent la nature du Problême : Elle découvre les grandeurs inconnues, en les ſeparant des grandeurs connues, & faiſant en ſorte, par des calculs regés, que les lettres des inconnues deviennent égales à des lettres des ſeules grandeurs connues jointes enſemble par l'addition, ou la ſouſtraction, ou la multiplication, &c. & c'eſt là la réſolution analytique du Problême. Pour avoir la réſolution geometrique qu'elle repreſente, l'Analyſe employe la Geometrie, & elle fait tracer les lignes & les figures qui ayent entr'elles les rapports & les proportions exprimées par la réſolution analytique ; ce qui donne les lignes & les figures qui ſont la réſolution geometrique du Problême.

L'art qu'on vient d'expliquer eſt mis en pratique dans tout ce huitiéme Livre. Pour commencer par les choſes les plus faciles, on l'employe dans la premiere Section à découvrir les proprietés des triangles rectangles conſiderés ſeuls, & enſuite dans le cercle ; & à trouver par ces proprietés la réſolution geometrique des équations du ſecond degré, c'eſt-à-dire, les lignes qui ſont les valeurs de l'inconnue de ces équations.

Pour faire voir l'utilité de l'Analyſe dans les Sciences Phyſico-Mathematiques, on l'employe dans la ſeconde Section à découvrir la réſolution des Problêmes de l'art de jetter des bombes, & de ceux qui ſont ſur les centres de peſanteur & d'oſcillation ; ces derniers ſervent à donner la juſteſſe aux horloges.

Les Commençans pourront déja voir dans ces deux premieres Sections le parfait accord de l'Analyſe avec la Geometrie & avec la nature même. Car lorſque l'Analyſe exprime le Problême qu'on veut réſoudre par une équation du ſecond degré, & qu'elle donne deux valeurs poſitives de l'inconnue que l'on cherche dans le Problême, la réſolution geometrique fournit auſſi deux lignes differentes repreſentées par ces valeurs : dans les Problêmes de l'art de jetter les bombes, il y a deux inclinaiſons du mortier repreſentées par les deux valeurs analytiques, qui ſont propres à lui faire jetter la bombe par une même force de poudre à l'endroit où on la veut faire tomber ; & dans les Problêmes ſur le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé, il y a deux endroits dans le pendule, qui répondent aux deux valeurs analytiques, propres à placer la lentille, pour faire que les vibrations du pendule marquent les ſecondes. Quand les deux valeurs analytiques ſe trouvent égales, les lignes geometriques qu'elles repreſentent le ſont auſſi ; les deux inclinaiſons du mortier ſe reduiſent à celle de 45 degrés, qui donne la plus grande étendue de tous les jets de bombe par une même force de poudre ; & les deux endroits du pendule où il faut mettre la lentille ſe réuniſſent au point, où arrêtant la lentille, on rend les vibrations du pendule les plus promptes qu'il eſt poſſible. Quand l'Analyſe découvre que les deux valeurs ſont impoſſibles, on trouve une contradiction dans la réſolution geometrique ; l'endroit où l'on veut faire tomber la bombe, ſe trouve hors de la portée de la poudre ; & l'on trouve auſſi qu'il y a une contradiction dans les ſuppoſitions que l'on a faites ſur le pendule composé, &c. Tout le reſte du huitiéme Livre eſt employé à faire voir les uſages de l'Analyſe dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes, & dans la réſolution des Problêmes Phiſico-Mathematiques qui en dépendent.

On explique dans la troiſiéme Section la maniere de reduire les courbes à des équations qui en expriment les principales proprietés : la voici. On ſuppoſe ſur le plan où eſt chaque courbe une ligne droite dont la poſition eſt donnée ſur le plan, & un point fixe d'où elle part, qu'on nomme ſon *origine*, qui eſt auſſi donné. Cette droite ſe nomme la ligne des *coupées :* on ſuppoſe une infinité d'autres droites toutes paralleles entr'elles qui partent de tous les points de la courbe, & vont toutes couper la ligne des coupées, on les appelle les *ordonnées* ; la partie de la ligne des coupées depuis l'origine juſqu'à l'ordonnée qui la termine, eſt la coupée de cette ordonnée ; &, pour abreger on nomme chaque coupée & ſon ordonnée correſpondante, les *coordonnées*. Or dans toutes les courbes regulieres il y a un rapport commun qui regne entre les coordonnées, qu'on peut regarder comme le rapport commun à tous les points de la courbe d'où partent les ordonnées. Ainſi en nommant chaque coupée par une même lettre, qu'on appelle changeante, parcequ'elle repreſente ſucceſſivement toutes les coupées ; repreſentant de même chaque ordonnée par une autre lettre qu'on nomme changeante par la même raiſon ; marquant auſſi par des lettres differentes les lignes connues qui ſervent à déterminer le rapport commun aux coordonnées : l'Analyſe exprime ce rapport commun à tous les points de la courbe par une équation ; les changeantes des coordonnées y tiennent lieu de deux inconnues. On a fait voir dans la premiere Section, que l'on peut de même exprimer par une équation le rapport commun de tous les points d'une ligne droite, en concevant de tous ſes points des droites paralleles tirées à la ligne des coupées ſur le même plan où eſt la ligne droite.

C'eſt de ces équations, qui expriment la nature des courbes, que l'Analyſe deduit leurs proprietés, & la reſolution des Problêmes qui les regardent. C'eſt de ces mêmes équations qu'elle prend la diſtinction des courbes en geometriques & en mechaniques : les équations des premieres ne contiennent que des expreſſions ordinaires de l'Algebre, le nombre des dimenſions des changeantes eſt déterminé, & les coordonnées ſont toujours de ſimples lignes droites : Parmi les courbes mechaniques, les unes ont des courbes pour l'une ou l'autre des coordonnées, ou pour toutes les deux; d'autres ont des lignes droites égales à des arcs de courbe pour l'une ou l'autre des coordonnées, ou pour toutes les deux. Il y en a dont le nombre des dimenſions des coordonnées n'eſt pas déterminé ; la plûpart ne peuvent s'exprimer que par des équations qui contiennent des differentielles. Enfin les équations des courbes geometriques ſervent à les ranger en differens ordres qu'on appelle *genres*, ſelon le nombre des degrés où ſont élevées les puiſſances ſeparées des changeantes, ou ſelon le nombre des dimenſions du produit des changeantes multipliées l'une par l'autre, quand ce produit eſt le ſeul terme qui contient des changeantes, ou quand il a plus de dimenſions que la puiſſance la plus élevée de l'une ou de l'autre des changeantes ſeparées.

Les courbes geometriques les plus ſimples, ou du premier genre, ſont celles qui s'expriment par des équations où la plus haute puiſſance des changeantes ſeparées ne monte qu'au ſecond degré, ou bien dans leſquelles le produit des changeantes multipliées l'une par l'autre, n'eſt que de deux dimenſions ; on les appelle *Sections coniques*, parcequ'elles peuvent ſe former par la ſection commune d'un plan & d'un cône. Les Geometres anciens & nouveaux ſe ſont appliqués à décrire ces courbes, à en découvrir les proprietés, à en reſoudre les Problêmes, & à les faire ſervir à la reſolution de beaucoup d'autres Problêmes ; cela les a rendues de grand uſage. On enſeigne dans cette troiſiéme Section leur formation, c'eſt-à-dire, la maniere de les décrire ſur un plan, 1°. par le mouvement continu du point d'interſection de deux regles mobiles ; 2°. en trouvant ſucceſſivement les points par où elles doivent paſſer. On tire de leur formation les équations qui en expriment la nature, & l'on déduit de ces équations les principales proprietés de ces courbes. On a eu ſoin de n'oublier aucune de celles qui ſont neceſſaires à l'intelligence de ce huitiéme Livre, afin que les Lecteurs qui ſçavent au moins mediocrement les Elemens d'Euclide, n'euſſent beſoin d'aucun autre Ouvrage pour entendre celui-ci.

Dans les Sections coniques, ( & c'eſt à peu près la même choſe dans les courbes geometriques des genres plus élevés,) il y a une ligne déterminée des coupées pour chacun des angles que les ordonnées, paralleles entr'elles, peuvent faire avec leurs coupées : cette ligne déterminée s'appelle le diametre de la courbe. L'équation de la courbe par rapport à ce diametre eſt la plus ſimple de toutes, c'eſt-à-dire, qu'elle a le moins de termes : mais quand on prend ſur le plan de chacune de ces courbes une ligne des coupées differente du diametre, & qui ne lui eſt pas parallele ; l'équation de la courbe, par rapport à cette ligne des coupées, a un plus grand nombre de termes que l'équation la plus ſimple. Dans la reſolution des Problêmes qui ſe reduiſent aux Sections coniques, on trouve rarement l'équation la plus ſimple, laquelle feroit diſtinguer d'abord celle des Sections coniques à laquelle le Problême ſe rapporte : mais il ſe preſente ordinairement une équation qui a plus de termes que celle de la courbe par rapport au diametre ; & cependant les changeantes de l'équation n'ayant que deux dimenſions, la courbe qu'elle exprime eſt l'une des Sections coniques. Il faut donc avoir des marques certaines pour diſtinguer à laquelle des Sections coniques appartient l'équation qu'on a trouvée & des moyens pour trouver le diametre de cette Section conique, & les autres lignes neceſſaires pour la décrire par la même methode dont on s'eſt ſervi pour décrire une telle Section conique. On a mis pour cela un Problême dans la

troiſiéme

troiſiéme Section, qui en eſt le ſeptiéme, où l'on enſeigne à trouver, par le moyen de l'équation ſimple de chacune des Sections coniques, l'équation la plus compoſée de chacune des mêmes Sections, laquelle exprime le rapport commun à tous les points de la courbe par rapport à une ligne des coupées ſur le même plan de la courbe qui eſt differente du diametre, & ne lui eſt pas parallele, & dont l'origine eſt differente de l'origine du diametre. L'on tire de ces équations compoſées de chacune des Sections coniques, les marques certaines pour diſtinguer, dans la reſolution des Problêmes qui s'y reduiſent, la Section conique en particulier à qui convient l'équation que l'on peut trouver. L'on fait voir auſſi la maniere de ſe ſervir des équations compoſées de chacune des ſections coniques, que donne ce ſeptiéme Problême, pour trouver, dans les équations compoſées qui ſe preſentent dans la reſolution des Problêmes, & qui ſe rapportent à une Section conique, le diametre & les autres lignes neceſſaires pour la décrire. Cela ſe fait par la methode des indéterminées, en regardant les connues de chaque équation du ſeptiéme Problême comme des indéterminées, & en comparant chaque terme de cette équation avec chaque terme correſpondant de l'équation qui s'eſt preſentée dans la reſolution du Problême: car l'on détermine, par le moyen des équations que donnent ces comparaiſons, les valeurs du diametre & des autres lignes qu'il faut avoir pour décrire la Section conique exprimée par l'équation qui reſout le Problême.

En regardant de près les veſtiges que M^r^ Deſcartes a laiſſés dans le ſecond & dans le troiſiéme Livre de ſa Geometrie, on voit aſſez qu'il s'eſt ſervi de la methode dont on vient de parler, (qui eſt expliquée dans le ſeptiéme Problême de cette troiſiéme Section, & dans les Remarques qui le ſuivent,) pour diſtinguer dans la reſolution du Problême de *Pappus*, qu'il donne dans le ſecond Livre, à quelles Sections coniques ſe reduiſoient les équations qui ſe ſont preſentées à lui dans cette reſolution, & pour trouver le diametre & les autres lignes neceſſaires pour décrire ces Sections coniques. Il s'en eſt encore ſervi, dans la reſolution des équations qu'il donne dans le troiſiéme Livre, pour décrire les Sections coniques qui jointes enſemble ſe coupent en des points dont les ordonnées ou bien les coupées ſont la reſolution des équations. Cependant les Commentateurs de M$^r$ Descartes n'ont point expliqué cette methode qui auroit éclairci ſa Geometrie, & l'auroit rendue plus facile. *M$^r$ Craige* en Angleterre, & *M$^r$ le Marquis de l'Hôpital* en France, ſont les premiers qui l'ont donnée au Public.

On explique dans la même troiſiéme Section la methode generale de décrire toutes les courbes Geometriques, en trouvant ſucceſſivement les points par où elles doivent paſſer. On y a mis auſſi quelques Exemples des courbes mechaniques. Enfin, pour n'oublier aucune des courbes qu'on a pu imaginer juſqu'à preſent, l'on y donne une idée des courbes qu'on nomme *exponentielles* & *parcourantes*.

La quatriéme Section eſt ſur les uſages que l'Analyſe fait des courbes; l'on en explique ſeulement deux: le premier eſt pour trouver, par le moyen des courbes Geometriques, les lignes qui ſont les valeurs geometriques des équations déterminées, c'eſt-à-dire, qui n'ont qu'une inconnue; ceſt ce qu'on appelle *conſtruire les èquations*; le ſecond eſt pour reſoudre, par le moyen des courbes, pluſieurs Problêmes Phyſico-mathematiques. La conſtruction des équations eſt une des belles parties de la Geometrie composée. Pour l'expliquer à fond d'une maniere courte, mais ſans obſcurité, on l'a déduite du principe d'où elle dépend naturellement, que voici.

Si l'on prend les équations de deux lignes geometriques où les mêmes lettres changeantes marquent les coordonnées, & que l'on ôte l'une des deux changeantes, par exemple la changeante des coupées, dans l'une de ces deux équations par le moyen de l'autre équation, il en naîtra une troiſiéme équation qui n'aura qu'une ſeule changeante ou inconnue. Or les deux lignes geometriques de ces équations étant jointes l'une à l'autre de façon que leurs coupées ſoient communes ou paralleles entr'elles, & qu'elles partent d'une même origine, & qu'il en ſoit de même de leurs ordonnées, elles ſe couperont en autant de points qu'il y a de dimenſion dans la plus haute puiſſance de l'inconnue demeurée ſeule dans la troiſiéme équation: Et ſi l'on tire de tous les points d'interſection de ces deux lignes geometriques, des ordonnées juſqu'à la ligne des coupées de celle qu'on a décrite la premiere, elles ſeront les valeurs geometriques de l'inconnue de la troiſiéme équation, ſi cette inconnue eſt celle des ordonnées; les coupées qui ſe terminent à ces ordonnées ſeront les valeurs geometriques de l'inconnue de la troiſiéme équation, ſi c'eſt l'inconnue des coupées qui y ſoit demeurée. Ce principe répand une lumiere ſur la methode que donne l'Analyſe pour trouver les équations des lignes geometriques, qui priſes deux à deux ſont propres à conſtruire telle équation déterminée qu'on voudra; & pour joindre enſemble ces deux lignes geometriques d'une maniere propre à les faire couper dans les points qui auront pour ordonnées ou pour coupées les lignes qui ſont les valeurs geometriques de l'inconnue de cette équation déterminée; il répand, dis-je, une lumiere ſur cette methode qui la rend claire aux commençans, quoiqu'elle ſoit très-courte. On prend pour exemple la conſtruction de toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, & l'on fait voir la maniere de l'executer par l'union d'une parabole donnée & du cercle; & encore par l'union d'une hyperbole donnée entre les aſymptotes dont l'Angle eſt aigu ou obtus, & du cercle. On a mis cette derniere maniere de conſtruire toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, parcequ'elle renferme quelques difficultés qui auroient pû embarraſſer les commençans.

On pourra encore remarquer en cet endroit l'exacte convenance de l'Analyſe & de la Geometrie. Il y a autant d'interſection des deux lignes geometriques employées à conſtruire l'équation, qu'il y a de valeurs analytiques de l'inconnue de cette équation. Quand toutes les valeurs que fournit l'Analyſe ſont poſitives & differentes, les lignes qui en ſont les valeurs geometriques ſont toutes differentes, & du côté des lignes poſitives. Lorſque l'Analyſe donne des valeurs négatives, les valeurs geometriques ſont du côté des lignes négatives. Quand le ſecond terme de l'équation eſt évanoui, la ſomme des valeurs négatives que donne l'Analyſe eſt égale à celle des poſitives; l'on trouve auſſi dans la conſtruction geometrique, que la ſomme des lignes du côté des grandeurs négatives eſt égale à celle des lignes qui ſont du côté des poſitives. S'il y a des valeurs analytiques égales, l'on trouve autant d'interſections des lignes geometriques qui ſe réuniſſent enſemble. Enfin dans les cas où l'Analyſe trouve des valeurs impoſſibles, les lignes geometriques employées à la conſtruction ne ſe coupent ni ne ſe touchent point du côté que devroient être les valeurs geometriques correſpondantes.

On explique à la fin de la même quatriéme Section quelques uſages des courbes pour la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques. On fait voir que les traces des bombes jettées à toutes les inclinaiſons poſſibles du mortier, ſont des paraboles. On tire d'ordinaire des proprietés de la parabole la reſolution des Problêmes de l'art de jetter les bombes: mais comme l'on à reſolu ces Problêmes dans la ſeconde Section ſans ſe ſervir de la parabole, on donne la reſolution de deux autres Problêmes ſur toutes les paraboles que peut décrire une bombe jettée par une même force de poudre à toutes les differentes inclinaiſons qu'on peut donner au mortier. On fait voir auſſi dans la même Section que l'ellipſe & l'hyperbole ſont les figures qu'il faut donner aux verres, afin que les rayons qui y entrent paralleles à l'axe ſoient diſpoſés, par les refractions qu'ils ſouffrent en paſſant de l'air dans les verres, ou des verres dans l'air, à ſe réunir dans un point donné. Enfin on fait découvrir par l'Analyſe, que la cycloïde eſt la courbe que le centre de peſanteur d'un pendule ſimple, ou le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé doit décrire, afin que ſes vibrations grandes ou petites ſoient toutes d'une égale durée: ce qui fait concevoir qu'un tel pendule eſt ce qu'il y a de plus propre à moderer le mouvement des horloges, & à les rendre la meſure exacte du temps.

## SECONDE PARTIE.

### *Sur le calcul differentiel, & ſur l'uſage de l'Analyſe en ſe ſervant de ce calcul.*

ON fait remarquer dans la premiere Section, que ce n'eſt point une choſe nouvelle dans la Geometrie que de conſiderer des parties de grandeur d'une ſi extrême petiteſſe, qu'on ne peut les faire entrer en comparaiſon avec les grandeurs ordinaires que l'on peut déterminer. Les plus anciens Geometres, comme on le voit dans le douziéme Livre d'Euclide, & dans les Ouvrages d'Archimede, ont pris ces parties infiniment petites pour principe de quelques-unes de leurs démonſtrations. Car pour démontrer, par exemple, que deux cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, & deux circonferences comme leurs diametres; ils ont ſuppoſé qu'on pouvoit concevoir dans l'un & l'autre de ces cercles deux polygones ſemblables inſcrits, ou deux polygones ſemblables qui leur fuſſent circonſcrits, dont les côtés fuſſent d'une telle petiteſſe, que la difference des polygones inſcrits ou circonſcrits d'avec leurs cercles fût moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée, quelque petite que pût être cette grandeur. Or ces polygones étant entr'eux comme les quarrés des diametres des cercles, & leurs circuits comme ces mêmes diametres; la ſuppoſition qu'ils avoient faite leur faiſoit conclure que les cercles & les circonferences avoient le même raport que les aires & que les circuits de ces polygones.

Ce n'a donc point été de nos jours une nouvelle découverte que d'employer dans la Geometrie ces parties des grandeurs entieres, ſi petites qu'elles n'ont aucun raport fini avec elles. Ce que les illuſtres Auteurs du calcul differentiel & integral ont ajouté à cette ſuppoſition que les Anciens ont priſe de la nature, n'a été que de donner des expreſſions convenables à ces petites parties qui ſont les premiers élemens des grandeurs; & de trouver un calcul qui leur fût tellement propre, qu'on pût leur appliquer les methodes de l'Analyſe, & qu'on pût remonter de ces parties infiniment petites aux grandeurs entieres ou integrales dont elles ſont les premiers élemens. Le fondement du calcul differentiel eſt commun aux anciens & aux nouveaux Geometres. La certitude des démonſtrations poſées ſur ce fondement eſt la même. La maniere même d'employer, dans les démonſtrations & dans les reſolutions des Problêmes, ces parties des grandeurs plus petites que toute grandeur qu'on peut déterminer, eſt commune aux uns & aux autres. Car comme les Anciens ne ſuppoſoient cette difference infiniment petite entre le cercle & le polygone d'une infinité de côtés qui lui étoit inſcrit ou circonſcrit, que pour faire leur démonſtration ; qu'ils ne la concevoient ſubſiſtante que pendant la démonſtration ; & qu'au moment qu'ils l'avoient faite, ils regardoient cette difference comme devenant nulle, & que le polygone inſcrit ou circonſcrit, qui étoit pour ainſi dire l'infinitiéme, ne differoit en rien du cercle. Les nouveaux Geometres n'employent auſſi les même differences infiniment petites que pendant la reſolution des Problêmes ; ils ne les reçoivent réelles & ſubſiſtantes que pendant leur calcul ; & au moment qu'il leur a donné la reſolution, ils ſuppoſent que les differences s'évanouiſſent & deviennent nulles, & que les grandeurs qu'ils ſuppoſoient ne differer des grandeurs entieres qu'ils cherchoient que par des differences infiniment petites, n'en different point du tout. La certitude du calcul differentiel doit donc être au même degré que celle des démonſtrations des anciens Geometres qui avoient le même principe, & qui ont été reçues de tout le monde. La ſeule difference eſt que les Anciens ne faiſoient ſur ce principe que des démonſtrations qu'on appelle *per abſurdum*, & que les nouveaux calculs démontrent tout directement.

On apperçoit même diſtinctement, en y regardant de près, les *ſecondes differences* renfermées dans la ſuppoſition des Anciens, quoiqu'ils n'y fiſſent pas de reflexion, & qu'ils n'en euſſent pas beſoin dans leurs démonſtrations. Car dans l'exemple qu'on a pris d'eux ſur le polygone inſcrit dans le cercle, qui devoit avoir tant de côtés que la difference de l'aire du polygone inſcrit dans le cercle, fût plus petite que toute grandeur finie & déterminée ; il eſt évident qu'il falloit qu'ils conçuſſent celui des polygones inſcrits, qui étoit, pour ainſi dire, le dernier, comme ayant un nombre infini de côtés ; autrement la difference de ſon aire d'avec le cercle eût été finie & déterminée, ce qui auroit détruit leur ſuppoſition : Or l'on conçoit diſtinctement que la difference de l'aire de ce dernier polygone d'avec le cercle, moindre, par la ſuppoſition, qu'aucune grandeur finie, étoit compoſée du nombre infini des petits ſegmens de cercle, dont les petits côtés du polygone étoient les cordes : C'eſt pourquoi ces petits ſegmens étoient juſtement ce qu'on appelle des *ſecondes differences* dans les nouveaux calculs, puiſqu'il y en avoit une infinité pour faire une premiere difference, qui étoit celle de l'aire du polygone inſcrit d'avec l'aire du cercle.

Après avoir établi la ſuppoſition des parties des grandeurs plus petites qu'aucune grandeur finie, on donne les expreſſions de ces petites parties qu'on nomme *differences* ou *differentielles*. L'on a pris les expreſſions de M^r^ Leibnits comme moins capables de cauſer des mépriſes dans les calculs & dans l'impreſſion, & parcequ'elles ſoulagent davantage l'imagination: On met enſuite le calcul des premieres differences, des ſecondes differences, des troiſiémes, &c. C'eſt ce qu'on nomme le *calcul differentiel.*

On explique dans les trois Sections ſuivantes l'uſage de l'Analyſe en ſe ſervant du calcul differentiel. Mais comme l'on s'eſt propoſé d'être court dans ce Volume des uſages de l'Analyſe, & d'y apprendre cependant à fond aux commençans la maniere de découvrir les principales proprietés de toutes les courbes; on a réduit à des formules generales les Problêmes qui les font trouver. Ces Problêmes ſont de deux ſortes; la reſolution complette des uns dépend du ſeul calcul differentiel; la reſolution des autres ſe commence par le calcul differentiel, & s'acheve par le calcul integral. On fait découvrir aux Lecteurs dans la ſeconde Section les formules pour reſoudre les Problêmes qui ne dépendent que du calcul differentiel, comme les formules pour trouver les tangentes, les ſoutangentes, les perpendiculaires, les ſouperpendiculaires de toutes les courbes, & les autres lignes qui ont rapport à celles qu'on vient de nommer; les formules pour trouver les ordonnées & les coupées des points des courbes où les tangentes de ces points ſont paralleles aux coordonnées, ce qui comprend la reſolution des Problêmes ſur les quantités qu'on nomme *les plus grandes & les moindres*; les formules pour découvrir dans les courbes qui ſont en partie concaves, & en partie convexes, les points qui ſeparent ces parties, qu'on nomme les points *d'inflexion*; & dans les courbes qui rebrouſſent leur chemin, les points *de rebrouſſement.* Enfin les formules pour trouver les *developées* de toutes ſortes de courbes. Ces courbes developées ſervent à former les courbes dont elles ſont les developées, par le developement inſenſible d'un fil qu'on conçoit les enveloper. L'Extrémité de ce fil, à meſure qu'il ſe develope, décrit les courbes dont elles ſont les developées. Elles ſont devenues de grand uſage dans la geometrie compoſée & dans la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques depuis que *M. Hugens* en a fait la découverte. On donne des exemples pour apprendre aux commençans la maniere de ſe ſervir de toutes ces formules, & pour reſoudre par leur moyen les Problêmes des courbes particulieres dont ces formules expriment la reſolution generale.

On fait de même découvrir aux Lecteurs dans la troiſiéme Section les formules generales pour reſoudre les principaux Problêmes ſur toute ſorte de courbes, dont la reſolution ſe commence par le calcul differentiel, & s'acheve par le calcul integral; comme les formules de la rectification des courbes, c'eſt-à-dire, pour en trouver la longueur; celles qui ſervent à meſurer leurs aires, qu'on appelle leur quadrature; celles dont on tire la meſure des corps ſolides formés par la révolution des courbes autour d'une ligne droite priſe pour axe ſur le même plan; celles qui font connoître la mêſure des ſurfaces courbes de ces ſolides; enfin celles qui font découvrir les centres de peſanteur des courbes, de leurs ſurfaces, des ſolides qui en peuvent être formés, & des ſurfaces courbes de ces ſolides. On fait voir auſſi la maniere d'appliquer ces formules à l'uſage par des exemples particuliers. On a eu ſoin de mettre parmi ces exemples les differentielles particulieres de la rectification & de la quadrature des Sections coniques, qu'on appelle *les élemens* de leur rectification ou de leur quadrature, afin de s'en ſervir dans la troiſiéme Partie pour faire concevoir clairement les methodes qu'on y doit donner pour trouver, dans les cas où les methodes du calcul integral ne donnent pas les integrales exactes de quelques differentielles, pour trouver, dis-je, dans ces cas les integrales finies de ces differentielles, en les reduiſant à la rectification ou à la quadrature des Sections coniques.

Les Methodes qu'on a expliquées au long dans le ſeptiéme Livre, ſont miſes en uſage dans la quatriéme Section pour exprimer par *des ſuites* infinies les integrales des differentielles dont les Regles du calcul integral ne donnent pas les integrales exactes & finies. On auroit pu en donner une infinité d'exemples; mais on a choiſi ceux qui ſuffiſoient pour apprendre aux commençans à s'en former eux-mêmes tant qu'il leur plaira, ſans trouver d'autre peine dans l'application des Methodes, que celle du calcul, & qui pouvoient en même temps les inſtruire de choſes neceſſaires dans la Geometrie & dans les Parties pratiques des Mathematiques. Un de ces exemples ſur la rectification des arcs de cercle, fait découvrir une formule generale pour trouver, avec la corde ou le ſinus d'un arc donné, la corde ou le ſinus de tel autre arc qu'on voudra; cette formule peut ſuffire pour faire par de ſimples ſubſtitutions les tables des ſinus; & les Lecteurs peuvent trouver des formules ſemblables pour faire les tables des tangentes & des ſecantes. Un autre exemple ſur la quadrature de l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes fait découvrir une formule pour faire, par de ſimples ſubſtitutions, une table des logarithmes hyperboliques. L'on y explique ces logarithmes, la maniere de les reduire aux logarithmes ordinaires, & la maniere de trouver une formule, avec laquelle on puiſſe, par le moyen d'un logarithme donné, avoir le nombre dont il eſt le logarithme. On explique de plus les logarithmes des lignes. On verra dans la troiſiéme Section de la troiſiéme Partie, qu'ils ſont d'uſage dans la Geometrie compoſée. Enfin on fait voir que les mêmes methodes ne ſervent pas ſeulement à trouver *les ſuites* qui ſont les integrales des élemens des courbes, de leur quadrature, des ſurfaces courbes, & des ſolides formés par la revolution des courbes; mais auſſi *les ſuites* qui ſont les valeurs connues des lettres inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans ces élemens. On a mis pour exemple le Problême qui fait découvrir une formule pour trouver, par le moyen d'un ſecteur quelconque d'ellypſe, dont le ſommet eſt à l'un des foyers, & dont l'un des côtés eſt ſur l'axe, l'ordonnée de l'arc de l'ellypſe qui eſt la baſe du ſecteur. Cette formule donne la reſolution directe du Problême aſtronomique que *Kepler* propoſa à tous les Geometres de ſon temps, & dont il ne put trouver qu'une reſolution indirecte. Ce fameux Aſtronome, qui eſt à preſent fort ſuivi des Sçavans, ſuppoſe que les Planetes decrivent des ellypſes par leurs mouvemens propres, & il le prouve en particulier de Mars par le moyen des obſervations. Il ſuppoſe que le temps moyen d'une revolution entiere doit ſe meſurer par l'aire entiere de l'ellypſe, qu'on peut concevoir diviſée en 360 ſecteurs égaux, leſquels pris de ſuite meſurent le temps moyen des parties de la revolution entiere; il nomme *anomalie moyenne* chaque ſomme de ces ſecteurs priſe de ſuite depuis l'axe d'où il comptoit ces ſommes; il lui falloit, pour chacune de ces ſommes, ou pour chaque anomalie moyenne, trouver l'angle que formoient au foyer les deux côtés du ſecteur qui comprenoit chacune de ces ſommes, il appelloit cet angle *l'anomalie veritable*; c'eſt-à-dire, qu'il lui falloit trouver pour chaque lieu moyen de la planete, le vrai lieu de cette planete. La formule dont on vient de parler, ſert à découvrir les deux côtés du triangle rectangle, dont l'angle, qui eſt *l'anomalie veritable*, eſt l'un des angles aigus: ainſi elle fait trouver la reſolution de ce Problême, qui peut ſervir pour les tables aſtronomiques.

## TROISIEME PARTIE.

### *Sur l'uſage de l'Analyſe pour découvrir les regles du calcul integral, & ſur l'uſage que l'Analyſe fait de ces regles.*

LA methode de retourner des differentielles aux grandeurs entieres, qu'on appelle *integrales*, dont elles ſont les differentielles, eſt ce qu'on nomme *le calcul integral.* Ainſi les principes fondamentaux de ce calcul dependent du calcul differentiel. On établit dans la premiere Section trois propoſitions fondamentales du calcul integral, qui ſont des ſuites neceſſaires du calcul differentiel; & l'on en déduit, par le moyen de l'Analyſe, les regles du calcul integral pour trouver les integrales exactes des differentielles qui leur ſont ſoumiſes. La premiere & la plus feconde de ces propoſitions eſt pour découvrir les integrales des differentielles qui n'ont qu'une même changeante. On enſeigne aux Commençans dans les Corollaires de cette propoſition la maniere de trouver les integrales des differentielles les moins composées, & de toutes les grandeurs complexes, (dont les termes ſont diſtingués par les differentes puiſſances d'une même changeante, ) élevées à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif. On leur fait remarquer qu'une integrale qui a un terme conſtant, c'eſt-à-dire ſans changeante, donne la même differentielle que ſi elle n'en avoit pas ; & qu'à cauſe de cela une même differentielle peut avoir pour integrale la grandeur changeante dont elle eſt déduite, augmentée ou diminuée de telle grandeur conſtante qu'on voudra. Ainſi l'on a beſoin de la regle, qu'on explique dans cette premiere Section, pour s'aſſurer dans la reſolution des Problêmes particuliers, ſi l'integrale qu'on trouve eſt complette : ou s'il lui manque une grandeur conſtante ; & pour trouver, dans ce dernier cas, la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou en ôter, pour la rendre complette.

Après avoir apris la maniere de trouver les integrales dans les cas particuliers les plus faciles, en les reduiſant à la premiere propoſition, l'on donne des methodes generales qui conviennent aux differentielles les plus compoſées ; Et comme les principales difficultés ſont ſur les differentielles qui ſont compoſées de grandeurs complexes, c'eſt-à-dire qui ont pluſieurs termes, élevées à des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres rompus, ou des nombres négatifs, on rapporte toutes ces ſortes de differentielles à des formules generales, qu'on nomme *binomes*, quand la grandeur complexe n'a que deux termes ; *trinomes*, quand elle en a trois, & ainſi de ſuite. On enſeigne à reduire les differentielles particulieres aux generales, & l'on donne trois methodes qui font découvrir des formules generales des integrales de ces differentielles. La premiere n'eſt qu'un uſage de la table de la page 410, pour mettre les differentielles les plus compoſées en état d'y appliquer la premiere propoſition fondamentale : Cette premiere methode eſt facile à concevoir ; cependant les Commençans peuvent la paſſer dans les premieres lectures de cet Ouvrage, à cauſe de la longueur du calcul, & s'attacher à la ſeconde methode. Elle donne non ſeulement tous les termes des formules generales qui ſervent à trouver les integrales exactes des differentielles qui leur ſont ſoumiſes, mais encore les termes qui ſervent à trouver les integrales finies des differentielles qui n'en peuvent avoir d'exactes par les ſeuls termes des formules qui les donnent exactes ; & cela par la ſuppoſition des rectifications ou des quadratures des Sections coniques, ou du moins de celles des courbes plus ſimples que ne ſont les courbes à qui appartiennent les differentielles dont on cherche les integrales finies. On applique d'abord cette ſeconde methode aux differentielles binomes. On l'étend enſuite aux trinomes, & les Lecteurs pourront l'étendre de ſuite aux differentielles plus compoſées. La troiſiéme methode fait découvrir une formule generale pour trouver les integrales des differentielles complexes, qui ayent un tel nombre de termes qu'on voudra ; elle en fait même découvrir pour les differentielles complexes multipliées les unes par les autres. On donne deux manieres de trouver ces formules generales, qui ſont toutes deux utiles. Les formules que cette troiſiéme methode fait découvrir conviennent aux differentielles binomes, trinomes, &c. en ſuppoſant égaux à zero les termes de ces formules qui ſont inutiles à ces differentielles. On fait voir la maniere d'appliquer ces formules aux differentielles particulieres.

On a mis vers la fin de la premiere Section les deux autres propoſitions fondamentales du calcul integral ; l'une n'eſt que pour les differentielles qui font un membre d'une équation dont zero eſt le ſecond membre ; l'autre eſt pour trouver les integrales des differentielles qui ont pluſieurs changeantes multipliées les unes par les autres ; on donne des moyens pour reduire à cette propoſition les differentielles qui peuvent s'y rapporter ; mais comme il y en a un grand nombre qu'on n'y peut pas reduire, du moins facilement, on donne des moyens particuliers (car on n'a pas encore découvert de methode generale) pour ſeparer les changeantes dans les differentielles qui en ont pluſieurs multipliées les unes par les autres, afin de les rapporter aux methodes des differentielles qui n'ont qu'une ſeule changeante.

Enfin on étend, à la fin de la premiere Section, aux ſecondes differences, aux troiſiémes, &c. les methodes qu'on a données pour trouver les integrales des premieres differences.

Il y a un grand nombre de differentielles dont on ne peut pas trouver les integrales exactes par les methodes de la premiere Section. On peut bien trouver des *ſuites infinies* qui en ſoient les integrales; mais on aime mieux les avoir en termes finis. C'eſt ce qui a fait chercher des methodes pour avoir les integrales finies de ces differentielles en ſuppoſant les rectifications ou la quadrature des courbes plus ſimples que ne ſont celles auxquelles ſe rapportent ces differentielles; & il y en a un grand nombre dont on peut avoir les integrales en termes finis, en ſuppoſant les rectifications ou les quadratures des ſeules Sections coniques. On a mis dans la ſeconde Section les Problêmes qui font découvrir ces integrales en termes finis. Le premier ne donne rien de plus que les formules de la ſeconde methode de la premiere Section; on n'a pas laiſſé de le mettre pour faire voir comment on arrive au même but par differentes voyes. Le troiſiéme Problême, qui enſeigne à transformer les differentielles & les courbes en d'autres differentielles & en d'autres courbes dont les integrales & les aires ſoient égales, eſt de grand uſage pour changer les differentielles complexes où les puiſſances des changeantes ſont fort élevées en d'autres plus ſimples, & pour changer de même des courbes d'un genre fort élevé en d'autres plus ſimples, & même pour les reduire aux Sections coniques, de maniere que les aires de ces courbes plus ſimples ſoient égales aux aires des courbes plus compoſées dont elles ſont les transformées: ce qui rend plus facile la découverte des integrales des differentielles fort compoſées. On a mis auſſi dans la ſeconde Section une methode particuliere pour avoir en termes finis, en ſuppoſant la quadrature du cercle ou de l'hyperbole équilatere, les integrales des differentielles que l'on y peut reduire. Enfin on donne dans le quatriéme Problême la methode de trouver les integrales des differentielles des courbes méchaniques, dont les ordonnées ou bien les coupées ſont égales à des arcs de courbe, comme du cercle, de la parabole, &c. ou bien aux puiſſances quelconques de ces arcs, en ſuppoſant la rectification de ces arcs.

On explique dans la troiſiéme Section le calcul differentiel & le calcul integral qui conviennent aux courbes dont les équations contiennent des expreſſions *logarithmiques*, ou bien des expreſſions *exponentielles*. Ces calculs donnent les moyens d'appliquer à ces ſortes de courbes les formules de la ſeconde & troiſiéme Section de la ſeconde Partie, pour trouver leurs tangentes, leurs perpendiculaires, les points où les tangentes ſont paralleles à leurs coordonnées, leurs points d'inflexion ou de rebrouſſement, leurs developées, leurs rectifications, leurs quadratures, la meſure des ſolides formés par leur revolution autour d'une ligne droite, la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides, & les centres de peſanteur de ces courbes, de leurs ſurfaces, & des corps formés par leur revolution: l'on en donne des exemples, & l'on explique auſſi la maniere de conſtruire ces ſortes de courbe par le moyen de la *courbe logarithmique*. Les deux dernieres Sections ſont ſur l'uſage du calcul integral qui a été expliqué dans les trois premieres.

Les principaux uſages du calcul integral ſont de faire découvrir les rectifications des courbes, leurs quadratures, la meſure des ſolides formés par la revolution des courbes autour d'une ligne droite, la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides, & les centres de peſanteur de ces courbes, de leurs aires, des ſolides qui en peuvent être formés, & des ſurfaces courbes de ces ſolides. On explique dans la quatriéme Section la methode generale pour reſoudre ces Problêmes, qui ne conſiſtent qu'en ceci : Il faut ſubſtituer dans les formules de ces Problêmes qu'on a données dans la troiſiéme Section de la ſeconde Partie, les valeurs des lettres de ces formules priſes des équations particulieres des courbes auxquelles on veut les appliquer. Ces ſubſtitutions reduiront les formules à être les élemens de la rectification de ces courbes ou de leur quadrature, &c. Il faut enſuite trouver, par les methodes qu'on a données dans les trois premieres Sections de cette troiſiéme Partie, les integrales de ces élemens, ces integrales exprimeront les rectifications qu'il falloit trouver, ou les quadratures, &c.

On applique cette methode à des exemples dans la quatriéme Section, & pour être court, en faiſant voir cependant aux Commençans l'uſage des principales methodes qu'on a données pour trouver les integrales, on a mis un premier exemple qui en contient une infinité. L'on y fait découvrir la rectification d'une infinité de courbes compriſes ſous l'équation des paraboles de tous les degrés à l'infini. Avant la découverte des nouveaux calculs on avoit regardé avec admiration l'invention de la rectification de la ſeconde parabole cubique qui eſt à la fin du premier Volume de la geometrie latine de M$^r$ Deſcartes ; on verra dans ce premier exemple que les nouveaux calculs font trouver la rectification d'un nombre infini de courbes. Les Commençans pourront s'exercer à trouver eux-mêmes la rectification des courbes qu'il leur plaira de choiſir dans l'ordre de celles qu'on démontre, dans ce premier Exemple, avoir des rectifications exactes ; car ils n'auront qu'à prendre dans les équations des courbes qu'ils auront choiſies, les valeurs des lettres de la formule qui contient en general toutes ces rectifications, & les ſubſtituer dans cette formule. On démontre dans le même Exemple qu'il y a un autre nombre infini de courbes compriſes ſous la même équation de toutes les paraboles, dont on peut trouver la rectification exprimée par un nombre fini de termes, en ſuppoſant celle de la parabole ſimple ; on donne la methode generale de trouver ces rectifications finies, & on l'applique à des exemples, afin qu'il ne reſte plus que la ſeule peine du calcul à ceux qui voudront en faire eux-mêmes tant d'autres exemples qu'il leur plaira. Ils y verront l'uſage des formules de la ſeconde methode de la premiere Section, & du premier Problême de la ſeconde Section, & que ces deux methodes donnent les mêmes reſolutions.

Pour faire voir la maniere de trouver les quadratures des courbes, on a choiſi un exemple, où il faut ſeparer les changeantes qui ſont multipliées l'une par l'autre dans l'équation de la courbe de cet Exemple ; & il eſt en même temps très-propre à faire remarquer le juſte raport de l'Analyſe à la Geometrie compoſée. Car l'équation de la courbe eſt du troiſiéme degré ; elle n'a point de ſecond terme : Et en prenant l'une après l'autre toutes les valeurs déterminées poſitives & négatives que peut avoir la ligne des coupées, il ne reſte plus d'inconnue dans l'équation que celle des ordonnées. Or en prenant ſucceſſivement les valeurs poſitives que peut avoir la ligne des coupées, on voit que l'inconnue a trois valeurs, deux poſitives, & la troiſiéme négative qui eſt égale à la ſomme des poſitives ; ce qui fait connoître qu'il y a trois ordonnées ; les deux poſitives forment ſucceſſivement chacune une branche de la courbe du côté des ordonnées poſitives, & la négative forme une troïſiéme branche de la courbe de l'autre côté, & l'ordonnée de cette troiſiéme branche eſt toujours égale à la ſomme des ordonnées correſpondantes des deux autres branches. Il y a une valeur poſitive de la coupée où les deux valeurs poſitives de l'ordonnée deviennent égales; ce qui fait voir que les deux branches formées par les deux ordonnées poſitives ſe réuniſſent au point où conviennent ces deux ordonnées égales, & l'ordonnée de la troïſiéme branche eſt double de chacune de ces ordonnées égales: ſi l'on prend une valeur poſitive de la coupée qui ſurpaſſe celle qui convient aux deux ordonnées poſitives égales, on trouve que les deux valeurs poſitives de l'inconnue ſont impoſſibles, & qu'il ne reſte que la ſeule valeur négative; ce qui fait voir que les deux branches que forment les ordonnées poſitives ne s'étendent pas plus loin du côté des coupées poſitives, mais que la branche que forme l'ordonnée négative continue ſon chemin à l'infini. Quand on prend les valeurs négatives que peut avoir la coupée, on trouve toujours qu'il y a deux valeurs impoſſibles de l'inconnue des ordonnées, & qu'il ne reſte qu'une valeur réelle: Elle ſert à former une branche de la courbe du côté des coupées négatives. On fait voir auſſi dans le même Exemple la maniere de trouver les aſymptotes de cette courbe, pour apprendre aux Commençans comment ils doivent s'y prendre pour trouver les aſymptotes des autres courbes qui peuvent en avoir.

La cinquiéme & derniere Section eſt ſur l'uſage que fait l'Analyſe du calcul differentiel & du calcul integral pour trouver la nature des courbes, c'eſt-à-dire, pour trouver les équations qui en expriment les principales proprietés. La plûpart des Problêmes Phyſico-mathematiques ſe reduiſent à la recherche des courbes qui en donnent la reſolution. On en a mis pluſieurs Exemples vers la fin de cette derniere Section, & on les peut regarder comme en faiſant une ſeconde partie. On explique dans la premiere Partie ce qu'on appelle *la methode inverſe des tangentes:* cette methode eſt regardée comme l'un des grands avantages que la Geometrie composée a retiré de la découverte des nouveaux calculs: voici ce qu'on entend par cette methode. On a donné dans la ſeconde Section de la ſeconde Partie la maniere de

trouver,

trouver, par le moyen de l'équation des courbes, leurs tangentes, ſoutangentes, perpendiculaires, ſouperpendiculaires, & les autres lignes qui y ont raport; la maniere de retrouver les équations des courbes quand on en a les tangentes données, ou les ſoutangentes, ou les perpendiculaires, ou les ſouperpendiculaires, &c. eſt ce qu'on appelle *la methode inverſe des tangentes.* Cette methode étoit inconnue avant la découverte des nouveaux calculs; *M^r de Beaune* propoſa un Problême ſur cette methode à M^r Deſcartes, qui fit bien connoître le beſoin que l'on avoit de calculs differens, de ceux de l'Algebre ordinaire pour reſoudre ces ſortes de Problêmes. On a donné quatorze Exemples de cette methode pour la rendre familiere; le Problême de M^r de Beaune fait le quatorziéme; le premier, le ſecond, le ſeptiéme, le huitiéme, le onziéme & le treiziéme contiennent chacun une infinité d'autres Exemples; le douziéme, le treiziéme & le quatorziéme ne faiſant découvrir que des équations differentielles des courbes que l'on cherche, on donne la conſtruction de ces courbes, pour apprendre aux commençans la maniere de conſtruire les courbes dont on n'a que des équations differentielles.

On a mis dans la ſeconde partie de cette derniere ſection ſix Exemples Phyſico-mathematiques, pour faire voir l'uſage de l'Analyſe dans la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques en employant les nouveaux calculs. M^r Deſcartes, pour faire voir l'utilité de ſes découvertes pour ces ſortes de Problêmes, a mis dans le ſecond Livre de ſa Geometrie la conſtruction des courbes dont il faut donner les figures aux verres, afin qu'ils raſſemblent en un point donné les rayons qui partent d'un autre point donné, par le moyen des refractions de ces rayons à l'entrée ou au ſortir de ces verres. Ces courbes, qui ſont devenues celebres parmi les Geometres, s'appellent *les Ovales de M^r Deſcartes*; il a caché l'Analyſe qui lui a fait decouvrir & conſtruire ces ovales. On les a priſes pour le premier Exemple; l'on y verra combien l'invention en eſt facile par les nouveaux calculs; que les regles les plus ſimples de ces calculs font trouver d'abord la conſtruction de ces ovales; & que l'Analyſe fait découvrir par un calcul très-ſimple & très-facile que ces ovales deviennent des ellipſes quand les rayons y entrent paralleles, & des hyperboles, quand ils ſe preſentent paralleles pour en ſortir.

Ce celebre Auteur propoſe un autre Problême vers la fin du même ſecond Livre, & il laiſſe à ſes Lecteurs à en trouver la reſolution: le voici. L'une des ſurfaces d'un verre étant la figure formée par la revolution de laquelle on voudra des Sections coniques ſur leur axe, trouver la conſtruction de la figure qu'il faut donner à l'autre ſurface de ce verre, afin que les rayons qui partent d'un même point donné, ou qui ſont paralleles, ſoient diſpoſés par les deux refractions qu'ils doivent ſouffrir à l'entrée & au ſortir du verre à ſe réunir à un point donné. On prend pour ſecond Exemple ce Problême, ſans le borner aux ſeules Sections coniques, mais l'étendant à toutes les courbes, c'eſt-à-dire, ſuppoſé que l'une des ſurfaces d'un verre ait la figure de telle courbe qu'on voudra, (qui ſoit ſeulement ſuppoſée connue, ) il faut trouver la conſtruction de la figure qu'on doit donner à la ſeconde ſurface du verre, afin que les rayons qui partent d'un point donné, ou qui ſont paralleles, ſoient diſpoſés, par les refractions qu'ils doivent ſouffrir à l'entrée & au ſortir du verre, à ſe réunir à un point donné.

On a pris pour troiſiéme Exemple le Problême fameux où l'on cherche la courbe formée par une chaîne compoſée de petits anneaux égaux lorſqu'elle eſt attachée par ſes deux ſeules extremités ſur un plan vertical. L'illuſtre Auteur des nouveaux calculs a donné la conſtruction & de beaux uſages de cette courbe dans les Journaux des Sçavans & dans les Actes de Lipſic, mais il a ſupprimé l'équation de la courbe & l'analyſe de ſa conſtruction. On fait découvrir dans ce troiſiéme Exemple l'équation de cette courbe, l'on en donne trois conſtructions, dont la troiſiéme eſt celle de M^r^ Leibnits, & on les fait découvrir toutes trois par l'Analyſe.

Les trois derniers Problêmes ont été propoſés par M^r^ Bernoulli à preſent Profeſſeur à Baſle. Les Mathematiques lui ont de grandes obligations, & à feu M^r^ Bernoulli ſon frere, des nouvelles découvertes qu'ils ont faites ſur les nouveaux calculs, & de l'émulation qu'ils ont excitée parmi les Sçavans en leur propoſant des Problêmes qu'ils avoient reſolus, mais dont ils tenoient les reſolutions cachées, afin que les autres euſſent le plaiſir de les trouver eux-mêmes:

ce qui nous a donné la reſolution d'un grand nombre de Problêmes nouveaux & utiles. M^r^ le Marquis de l'Hôpital eſt celui qui a le plus enrichi les Mathematiques des reſolutions complettes de ces Problêmes, quelque difficiles qu'ils fuſſent: il a donné celle des trois Problêmes qui finiſſent cette Section, mais il a entierement ſupprimé l'Analyſe du premier, & il a ſupprimé une grande partie de celle des deux autres, par les mêmes motifs que M^rs^ Bernoulli.

Le quatriéme Exemple eſt le Problême où il s'agit de trouver la courbe ſur laquelle il faut qu'un corps peſant ſe meuve librement pour aller le plus promptement qu'il ſoit poſſible d'un point donné à un autre point donné, en ſuppoſant que ces deux points donnés ne ſont pas dans une même ligne verticale. On fait découvrir par l'Analyſe ſans y mêler aucune ſyntheſe, que la cycloïde eſt la courbe qui reſout le Problême.

Le cinquiéme exemple eſt le Problême où il faut trouver la courbe dont la revolution autour d'une ligne droite donnée, forme la ſurface courbe qu'il faut donner à la partie d'un Vaiſſeau qui eſt dans l'eau, afin qu'il trouve en voguant dans la mer la moindre reſiſtance de la part de l'eau qui ſoit poſſible. On fait découvrir par l'Analyſe l'équation de cette courbe, & la conſtruction que l'on en donne.

Enfin l'on cherche dans le ſixiéme Exemple quelle eſt la courbe ſur laquelle un corps peſant deſcendant par le ſeul mouvement qu'il recevroit de ſa peſanteur, il la preſſeroit en chaque point avec une force preciſément égale à celle de ſa ſeule peſanteur lorſqu'il eſt en repos, ou avec laquelle il tireroit un fil auquel il ſeroit attaché en repos. On fait auſſi découvrir par Analyſe l'équation de cette courbe, que l'on trouve être une courbe geometrique. Mais ce Problême ſuppoſant les propoſitions qui regardent la chûte des corps par le ſeul mouvement qu'ils reçoivent de leur peſanteur, au lieu de les mettre en ſuppoſitions, on les a démontrées, tant celles qui regardent les chûtes perpendiculaires, que celles qui ſont ſur les chûtes inclinées, & ſur les chûtes qui ſe font par des courbes; afin que les commençans viſſent clairement la reſolution que l'on donne en la deduiſant des premiers principes, ſans avoir beſoin d'aucun autre ouvrage pour entendre à fond celui-ci.

Ils auront dans les ſept premiers Livres, dans la premiere Section de la ſeconde Partie du huitiéme où eſt expliqué le calcul differentiel, & dans les trois premieres Sections de la troiſiéme Partie du huitiéme Livre où l'on a mis les Regles du calcul integral, les methodes qui leur ſont neceſſaires pour reſoudre les Problêmes des Mathematiques, & ils trouveront dans le huitiéme Livre entier ce qu'il leur faut ſçavoir de Geometrie compoſée. Car on leur fait connoître toutes les courbes que peut contenir cette ſcience. On leur fait découvrir par Analyſe les principales proprietés des courbes les plus ſimples qui ſont les Sections coniques. On leur apprend à reduire les courbes aux équations qui en expriment la nature. On leur enſeigne à tirer de ces équations les propriétés de ces courbes, & on leur a mis des formules generales qui leur feront découvrir celles de ces proprietés qui ſont les plus conſiderables & les plus utiles, par de ſimples ſubſtitutions. On leur a auſſi appris par beaucoup d'Exemples la maniere d'appliquer les methodes de l'Analyſe à la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques. Enfin on a eu ſoin, dans tout l'Ouvrage, & dans les reſolutions les plus compoſées, de marquer juſqu'aux moindres démarches de l'eſprit pour arriver à ces reſolutions, afin qu'ils ne fuſſent arrêtés nulle part, & qu'ils devinſſent en état d'entendre toutes les nouvelles découvertes, & de faire eux-mêmes celles qu'ils voudront entreprendre.

# ANALYSE COMPOSÉE,

OU

## ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui ſe réduiſent à des équations compoſées.

# LIVRE VIII.

*Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie & dans les Sciences phyſico-mathematiques; c'eſt-à-dire, on explique la maniere de ſe ſervir de l'Analyſe pour réſoudre les Problêmes de ces Sciences.*

### AVERTISSEMENT.

ON a ajouté ce dernier Livre pour les Lecteurs qui ſçavent au moins médiocrement la Geometrie ordinaire : Ils y verront comment les calculs & les operations de l'Analyſe ſont les expreſſions de tous les raports des lignes & des figures de la Geometrie ſimple & compoſée, qui en font découvrir les proprietez les plus compliquées, & réſoudre les Problêmes d'une maniere ſimple, facile, qui n'embaraſſe pas l'imagination, & qui laiſſe à l'eſprit l'étendue dont il a beſoin pour découvrir aiſément tout ce que ces Sciences peuvent contenir de plus difficile, & pour pénétrer juſqu'à l'infini.

Pour exciter la curioſité des Lecteurs, & pour faire voir l'utilité de l'Analyſe, qui étoit regardée par ceux qui ne la ſçavent pas comme contenant de pures ſpéculations, on a mêlé dans ce huitiéme Livre pluſieurs Problêmes des Sciences phyſico-mathematiques; comme ceux qui ſervent à donner aux pendules à ſecondes toute la juſteſſe poſſible pour les rendre la meſure exacte du tems; ceux qui ſervent à l'art de jetter les bombes, pour les faire tomber exactement où l'on voudra, ceux qui ſervent à faire connoître les figures que l'on doit donner aux verres pour raſſembler en un point les rayons de lumiere, &c.

On s'eſt ſeulement propoſé de faire connoître les uſages de l'Analyſe & la maniere de s'en ſervir dans la réſolution des Problêmes qui s'expriment par des figures; & non pas de faire un corps de Geometrie dont toutes les parties fuſſent liées par la dépendance mutuelle des propoſitions qui ſeroient déduites les unes des autres. Cependant on a tâché de mettre de l'ordre dans les matieres qu'on y traite, de maniere que les plus ſimples précedaſſent, autant que cela ſe pouvoit, les plus compoſées, & qu'elles ſerviſſent à s'éclaircir mutuellement; & l'on a pris ſoin pour rendre tous les Problêmes que l'on réſout clairs & faciles aux Lecteurs qui commencent, de mettre du moins en ſuppoſitions (n'étant pas ici le lieu de les démontrer) tous les principes d'où ils dépendent, & qu'il faut avoir en vûe pour en concevoir clairement la réſolution.

On partagera ce huitiéme Livre en trois parties. On expliquera dans la premiere la maniere de ſe ſervir de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques, en n'employant dans les operations que les calculs de l'Algebre ordinaire. Dans la ſeconde Partie on enſeignera les uſages de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes des mêmes Sciences, en y employant *le calcul differentiel.* On fera voir dans la troiſiéme Partie comment l'Analyſe fait trouver *les Regles du calcul integral*; & on expliquera enſuite l'uſage de ces Regles dans la réſolution des Problêmes de la Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques.

# PREMIERE PARTIE.

## *De l'uſage de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de la Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques, en ſe ſervant des ſeuls calculs de l'Algebre ordinaire.*

## PREMIERE SECTION.

### *Où l'on fait voir comment les calculs de l'Analyſe expriment tous les raports des lignes & des figures, en font découvrir les proprietez, & réſoudre les Problèmes.*

### PREMIERE SUPPOSITION OU DEMANDE.

267. POUR exprimer par les calculs de l'Analyſe les raports & les proprietez des figures de la Geometrie, il faut marquer les lignes de ces figures par les lettres de l'alphabet; par exemple dans la premiere figure on nommera $a$ le côté $AB$ du triangle $ABH$; $b$, le côté $BH$; $c$, le côté $AH$; & de même des autres figures. On marque ainſi ces dénominations, $AB = a$; $BH = b$; $AH = c$; ou bien $AB\,(a)$ &c. FIG. I.

Quand il y a dans les figures des lignes égales, on les nommera par une même lettre; de même quand une ligne eſt double, triple, &c. d'une autre ligne déja exprimée par la lettre $a$, on la nommera $2a$, $3a$, &c. quand elle en eſt la moitié, le tiers, &c. par $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c.

268. Il eſt évident que l'addition & la ſouſtraction des lettres qui expriment les lignes des figures, marquent que ces lignes ſont ajoutées enſemble, ou retranchées les unes des autres; par exemple ſi $AK = d$, & $AB = a$; la ſouſtraction $a - d$ marquera que $AK$ eſt retranchée de $AB$; par conſequent $a - d = KB$. Il en eſt de même de l'addition. FIG. I.

269. L'expreſſion $\frac{a}{b}$ marque le raport de la ligne $AB\,(a)$ à la ligne $BH\,(b)$, ce qu'il faut remarquer dans l'expreſſion de tous les autres raports des lignes.

270. La multiplication des grandeurs, par exemple de la grandeur $a$ par la grandeur $b$, que l'on marque par ces lettres jointes enſemble $ab$, ou par $a \times b$, eſt une proportion

dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond & le troiſiéme ſont les grandeurs $a$ & $b$ à multiplier l'une par l'autre, & le quatriéme terme eſt le produit $ab$ de ces grandeurs ; ainſi chaque produit dans les operations de l'Analyſe exprime une ligne qui eſt le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers termes qui ſont connus, ſont l'unité & les deux grandeurs multipliées l'une par l'autre. Par exemple dans la premiere figure, ſuppoſé que $AK$ ſoit l'unité ainſi $AK = 1$ ; que $AB = a$, $AM = e$ ; l'on a, en ſuppoſant $KM$ & $BH$ paralleles, cette proportion $AK\,(1) . AB\,(a) :: AM\,(e) . AH = \frac{ae}{1}$, ou ſimplement $ae = AH$ ; parcequ'on peut toujours ſous-entendre l'unité ſous un produit, ou ſous une grandeur ſans la marquer. L'on voit donc que le produit de deux lignes $AB\,(a)$ & $AM\,(e)$ eſt une autre ligne $AH = ae$, qui eſt la quatriéme proportionelle à l'unité $AK$ & à ces deux lignes $AB\,(a)$ & $AM\,(e)$.

En ſuppoſant que les triangles $AKM$, $ABH$, ſont ſemblables, que $AK = 1$, $AB = a$, $KM = k$, $BH = h$ ; $BH$ eſt auſſi le produit de $KM\,(k)$ par $AB\,(a)$ ; puiſqu'on a cette proportion $AK\,(1) . KM\,(k) :: AB\,(a) . BH\,(h = ak)$.

D'où l'on voit que quand on a deux lignes données $KM\,(k)$ & $AB\,(a)$ ; pour trouver la ligne $BH\,(h = ak)$, qui eſt leur produit, il n'y a qu'à faire les deux triangles ſemblables $AKM$, $ABH$, où $AK$ ſoit $= 1$, $KM = k$, $AB = a$, & l'on trouvera $BH = ak$.

271. Le produit de trois lignes $aef$, marque deux proportions ; par la premiere, l'unité eſt à la ligne $a$, comme la ligne $e$ eſt à la ligne $ae$, qui eſt la quatriéme proportionelle, à l'unité & aux lignes $a$ & $e$ ; par la ſeconde proportion l'unité eſt à la ligne $ae$, comme la ligne $f$ eſt au produit des trois $aef$, qui eſt une ligne quatriéme proportionelle à l'unité & aux lignes $ae$ & $f$.

D'où l'on voit que le produit de quatre lignes $aefg$, marque trois proportions ; le produit de cinq lignes $aefgh$, marque quatre proportions, &c. & que dans ces proportions le produit total n'eſt qu'une ligne qui réſulte de toutes ces proportions.

272. Quand les produits ſont compoſez de lettres égales, comme $1$, $a$, $aa$, $a^3$, $a^4$, $a^5$, &c. il eſt évident que les pro-

portions des lignes qui donnent ces produits ſont continues, & qu'ainſi tous ces produits pris de ſuite font une progreſſion geometrique de lignes, dont la premiere après l'unité eſt repréſentée par la lettre $a$, qui eſt la racine de tous ces produits, ou de toutes ces puiſſances.

273. La diviſion d'une grandeur $AH\,(ae)$ par une autre $AM\,(e)$, FIG. I. que l'on marque ainſi $\frac{ae}{e} = \frac{a}{1}$, ou ſimplement $a$, eſt une proportion inverſe de la multiplication, dont le premier terme eſt $AH\,(ae)$ ou la grandeur à diviſer; le ſecond terme eſt le diviſeur $AM\,(e)$; le troiſiéme terme eſt le quotient $AB\,(\frac{ae}{e} = a)$; le quatriéme terme eſt l'unité $AK\,(1)$; ou bien, en faiſant en ſorte que les trois premiers termes de la proportion ſoient les trois termes donnez, la diviſion eſt une proportion dont le premier terme eſt le diviſeur $AM\,(e)$, le ſecond terme eſt la grandeur à diviſer $AH\,(ae)$; le troiſiéme terme eſt l'unité $AK\,(1)$; le quatriéme eſt le quotient $AB\,(\frac{ae}{e} = a)$

D'ou l'on voit que le quotient d'une diviſion n'exprime qu'une ligne qui eſt le quatriéme terme d'une proportion dont le diviſeur eſt le premier terme, la grandeur à diviſer le ſecond, & l'unité le troiſiéme.

De même en ſuppoſant les triangles $AKM$, $ABH$ ſemblables, & que $AB = a$; $BH = h = ak$; $KM = k$, & $AK = 1$; la ligne $KM\,(k)$ ſera le quotient de $BH\,(ak)$ diviſée par $AB\,(a)$; puiſque $AB\,(a) . BH\,(ak) :: AK\,(1) . KM\,(k)$.

D'où il eſt évident que quand on a deux lignes données $BH\,(ak$ ou $h)$, & $AB\,(a)$; pour trouver la ligne $KM\,(k)$, qui eſt le quotient de $BH\,(ak)$ diviſée par $AB\,(a)$, il n'y a qu'à faire les deux triangles ſemblables $ABH$, $AKM$, ou $BH = ak$ ou $h$, $AB = a$, $AK = 1$, & la ligne $KM\,(k)$ ſera le quotient.

L'on voit auſſi que ſi la ligne à diviſer étoit repréſentée par le produit de pluſieurs lettres $aefg$, qui marque que cette ligne eſt le dernier terme d'une proportion précedée de pluſieurs autres, l'on pourroit par la diviſion en repaſſant par toutes ces proportions, revenir à la premiere, dont le dernier terme ne ſeroit exprimé que par deux lettres, comme $ae$.

74. Quand l'expreſſion de la grandeur ou de la ligne à divi-

ſer $AH$, n'a aucune lettre commune avec l'expreſſion du diviſeur $AB$, que $AH$ eſt, par exemple, exprimée par $c$, & $AB$ par $a$, la diviſion ſe marque ainſi $\frac{c}{a}$; & ſuppoſant que $AK$ eſt l'unité, l'on a toujours la même proportion $AB(a). AH(c) :: AK(1). AM = \frac{1c}{a}$.

275. D'où il eſt viſible que $\frac{AH}{AB}$ $(\frac{c}{a})$, qui eſt l'expreſſion du raport de $AH$ à $AB$, eſt la même choſe que $\frac{AM}{AK}$ $\left(\frac{\frac{c}{a}}{1}\right)$; les raports égaux exprimant des grandeurs égales, & l'on voit auſſi qu'on peut toujours ſous-entendre l'unité écrite ſous une grandeur entiere ou rompue, comme étant le dénominateur de la fraction dont cette grandeur eſt le numerateur, ſans que cela en change la valeur.

## REMARQUE.

276. ON doit remarquer que dans les comparaiſons des lignes, l'unité eſt ordinairement arbitraire; c'eſt-à-dire, qu'on peut prendre une des lignes données pour l'unité, en raportant toutes les autres à cette ligne comme à leur unité : Mais quand on a ainſi déterminé l'unité, on ne doit plus dans toute la queſtion que l'on veut réſoudre, prendre d'autre
Fig. I. ligne pour l'unité; ainſi ſuppoſant dans les deux triangles ſemblables $AMK$, $AHB$, que $AK = a$, $AB = b$, $AH = d$, $AM = c$; ſi l'on prend la ligne $AK$ $(a)$ pour l'unité l'expreſſion $\frac{bc}{a} = AH$ $(d)$ marquera le produit des lignes $AB(b)$, $AM(c)$, qui eſt $AH = \frac{bc}{a}$.

Quand on a ainſi déterminé une des lignes d'une queſtion comme $a$ pour être l'unité, on y trouve ces deux commoditez. 1°. On peut l'effacer des produits où elle ſe trouve, ce qui abrege l'expreſſion de ces produits, ſans en diminuer la valeur, l'unité ne changeant rien dans la valeur des produits où elle ſe trouve; ainſi $aabc = bc$, $\frac{bcd}{aa} = bcd$. 2°. On peut dans une équation rendre tous les termes d'un même nombre de dimenſions, en multipliant chaque terme par l'unité repetée autant de fois qu'il lui manque de dimenſions pour égaler les dimenſions des autres termes, ce qui les rendra homogenes. Ainſi on rendra tous les termes de $x^3 + px - bcd = 0$, homogenes, en écrivant $x^3 + apx - bcd = 0$; ou bien en diviſant les termes qui ont le plus de dimenſions par l'unité repetée autant de fois qu'il manque de dimenſions aux autres pour les égaler. Par exemple, on peut rendre homogenes tous les termes de $xx - bbcx - ccdd = 0$, en écrivant $xx - \frac{bbcx - ccdd}{aa} = 0$.

277. Les extractions des racines dans les calculs de l'Analyſe, que l'on marque par les ſignes radicaux $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, &c. comme $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, &c. & par les grandeurs mêmes qui ſont les racines, quand cela ſe peut, comme $a$ eſt la racine quarrée de $aa$, $b$ la racine cubique de $b^3$, &c. ſont les expreſſions des Problêmes ou des figures que l'on fait dans la Geometrie, pour trouver les lignes qui ſont moyennes proportionelles entre d'autres lignes, ou entre l'unité & d'autres lignes. Par exemple, $\sqrt{ab}$ marque la ligne qui eſt moyenne proportionelle entre la ligne $a$ & la ligne $b$; $\sqrt[3]{abc}$ exprime la premiere des deux lignes moyennes proportionelles entre la ligne qui eſt priſe pour l'unité, & la ligne qui eſt exprimée par le produit $abc$ des trois lignes $a, b, c$; & ainſi des autres.

## COROLLAIRE I.

278. IL eſt évident, après ce que l'on vient d'expliquer, que tous les calculs de l'Analyſe peuvent être repréſentez par les lignes & les figures de la Geometrie, par le moyen des triangles ſemblables & des proportions des lignes; & que tous les raports de ces lignes qui forment les figures de la Geometrie, peuvent être marquez par les expreſſions & les calculs de l'Analyſe.

## COROLLAIRE II.

279. IL eſt de même évident que l'on peut changer, pour la commodité du calcul, des expreſſions compoſées en d'autres plus ſimples, & des expreſſions embaraſſantes en d'autres plus faciles, ſans en changer la valeur.

Par exemple, en nommant $a$ la ligne priſe pour l'unité, on peut réduire les produits les plus compoſez à une ſeule lettre. Si l'on a $bcde$, 1°. faiſant $a . b :: c . \frac{bc}{a}$, qu'on ſuppoſera $= m$, l'on aura $am = bc$; & ſubſtituant $am$ au lieu de $bc$, on aura $amde = bcde$. 2°. Faiſant enſuite $a . m :: d . n$, l'on aura $an = md$; & ſubſtituant cette valeur de $md$ dans $amde$, on aura $aane = bcde$. 3°. Faiſant enfin $a . n :: e . p$, on aura $ap = ne$; & ſubſtituant cette valeur de $ne$ dans $aane$, on aura $a^3p = bcde$; où ſupprimant l'unité $a^3$, on aura $p = bcde$.

Si l'on avoit $\frac{bcde}{fgh}$, on trouveroit $a^3p = bcde$, & $aaq = fgh$; & l'on auroit $\frac{bcde}{fgh} = \frac{a^3p}{a^2q} = \frac{p}{q}$; enſuite faiſant $q . p :: a(1) . r$, on auroit $\frac{p}{q} = \frac{r}{a} = r$.

Si l'on avoit une fraction dont le numerateur & le dénominateur fuſſent complexes; c'eſt-à-dire, continſſent pluſieurs produits joints par + & —, on pourroit abreger de même l'expreſſion de cette fraction complexe.

On peut auſſi abreger l'expreſſion des fractions dont le numerateur & le dénominateur contiennent le produit de pluſieurs lettres comme $\frac{abcd}{efg}$, en faiſant en ſorte que la même lettre ſe trouve au numerateur & au dénominateur, ce qui la fait évanouir; car faiſant $a . b :: cm$, on aura $am = bc$, & $abcd = aamd$; puis faiſant comme $a . m :: d . n$, on aura $abcd = aaan$; faiſant de même pour le dénominateur $a . e :: f . p$, on aura $ap = ef$, & $efg = apg$; faiſant enſuite $a . p :: g . q$, on aura $aq = pg$; ainſi $efg = aaq$, & $\frac{abcd}{efg} = \frac{a^3n}{aaq} = \frac{an}{q}$; enfin faiſant $q . a :: n . r$, on aura $r = \frac{an}{q}$.

Si l'on avoit $bc — de$, en trouvant $m$ moyenne proportionelle entre $b$ & $c$, & $n$ moyenne proportionelle entre $d$ & $e$, l'on changeroit l'expreſſion $bc — dc$ en $mm — nn$ qui lui ſeroit égale.

Il y a beaucoup d'autres manieres de changer ainſi les expreſſions en d'autres, ſans en changer la valeur que l'on tire des triangles ſemblables, & des autres figures de la Geometrie ordinaire.

### *Seconde ſuppoſition ou demande.*

280. DANS les propoſitions de Geometrie où il s'agit de la ſurface des figures, les produits des calculs de l'Analyſe FIG. I. expriment les aires des figures; par exemple nommant $a$ la baſe $GF$ du quarré $GH$, & $a$ ſa hauteur $GI$, $aa$ eſt l'expreſſion de l'aire du quarré $GH$. De même nommant $a$ la baſe $AB$ du triangle rectangle $ABH$, & ſa hauteur $BH$, $b$; $\frac{1}{2}ab$ ſera l'expreſſion de l'aire du triangle $ABH$. Suppoſant auſſi dans le rectangle $GFBC$, ſa baſe $GF = a$, ſa hauteur $GC = b$; le produit $ab$ ſera l'expreſſion de l'aire de ce rectangle. Il en eſt ainſi des autres.

Dans les propoſitions qui regardent les corps ſolides, les produits des operations analytiques expriment la ſolidité des corps ; par exemple, nommant *aa* le quarré *GH* ; ſi l'on conçoit le cube dont ce quarré eſt la baſe, $a^3$ ſera l'expreſſion de la ſolidité de ce cube ; de même *abc* ſera l'expreſſion d'un priſme dont la baſe eſt repréſentée par le produit des lignes *a* & *b*, & la hauteur par *c* ; $\frac{1}{3}abc$ ſera l'expreſſion d'une piramide qui aura la même baſe & la même hauteur que le priſme précedent. Il en eſt ainſi des autres.

L'addition & la ſouſtraction des produits qui repréſentent des ſurfaces, expriment que ces ſurfaces ſont ajoutées les unes aux autres, ou retranchées les unes des autres : c'eſt la même choſe des produits qui expriment des ſolides.

### *Troiſiéme ſuppoſition ou demande ſur l'uſage des ſignes + & — par raport à la Geometrie.*

281. SUPPOSANT que les deux lignes *DAE*, *CAB* ſe coupent à angles droits au point *A*, & que les lignes paralleles à l'une & à l'autre qui ſont dans les quatre angles droits, comme *RM*, *KM*, *OL*, *AO*, *KL*, *ON*, *PN*, *RQ*, *QP*, &c. ſoient compriſes dans un Problême, quand on a beſoin de diſtinguer entre les paralleles à *AB*, celles qui vont vers la droite de celles qui vont vers la gauche, & entre les paralleles à *DAE*, celles qui deſcendent de celles qui vont en montant, on nomme parmi les premieres qui vont vers la droite ou vers la gauche, les unes poſitives & l'on met au devant le ſigne +, & les autres négatives & l'on met au devant le ſigne — ; on fait la même choſe pour diſtinguer entre les paralleles à *DAE*, celles qui deſcendent de celles qui montent. Il eſt libre au commencement de l'operation de prendre pour poſitives leſquelles on voudra entre celles qui vont de gauche à droite, ou de droite à gauche ; & de même entre celles qui deſcendent & celles qui montent : Mais ſi l'on ſe détermine à mettre le ſigne + devant celles qui vont de gauche à droite, comme *AB*, *DH*, *EF* ; celles qui vont de droite à gauche, comme *AC*, *DI*, *EG*, &c. doivent avoir le ſigne —. De même ſi l'on ſe détermine à mettre le ſigne + devant celles qui deſcendent, comme *AE*, *BF*, *CG*, &c. on doit écrire le ſigne — devant celles qui vont en montant, comme *AD*, *BH*, *CI*, &c. Le terme où commencent les poſitives & les négatives de gauche à droite, ou de droite à gauche, eſt la ligne *DAE* ; le terme où com- FIG. I.

mencent les poſitives qui deſcendent & les négatives qui montent, eſt la droite $CAB$.

Appellant l'angle $EAB$ le premier, $DAB$ le ſecond, $CAE$ le troiſiéme, & $DAC$ le quatriéme, les lignes du premier ſeront toutes poſitives; entre les lignes du ſecond, celles qui ſont vers la droite ſont poſitives, & celles qui montent ſont négatives; dans le troiſiéme, celles qui vont à gauche ſont négatives, & celles qui deſcendent, poſitives; & dans le quatriéme, les unes & les autres ſont négatives.

Suppoſant $AO = +a = +1$, $OL = +b$, $AE = +c$, l'on aura dans les triangles ſemblables $OAL$, $EAF$, $AO$ $(+a$ ou $+1)$. $OL\,(+b) :: AE\,(+c)$. $EF = +\frac{bc}{a}$; d'où l'on voit comment $+$ multiplié par $+$, donne un produit qui a $+$.

Faiſant $AO = +a = +1$, $AE = +c$, $ON = -d$, l'on aura dans les triangles ſemblables $OAN$, $EAG$, $AO$ $(+a$ ou $+1)$. $AE\,(+c) :: ON\,(-d)$. $EG = -\frac{cd}{a}$.

Comme auſſi en nommant $AK\,(+e)$, on aura à cauſe des triangles ſemblables $OAN$, $KAM$, $AO\,(+a$ ou $+1)$. $ON\,(-d) :: AK\,(+e)$. $KM = -\frac{de}{a}$; d'où l'on voit comment $+$ multiplié par $-$, ou $-$ par $+$, donne un produit qui a $-$.

Suppoſant encore $AR = -f$, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables $OAL$, $QAR$, $AO\,(+a$ ou $+1)$. $OL\,(+b) :: AR\,(-f)$. $RQ = -\frac{bf}{a}$; d'où l'on voit encore comment $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, donne un produit qui a $-$.

Enfin à cauſe des triangles ſemblables $OAN$, $RAM$, l'on aura $AO\,(+a$ ou $+1)$. $ON\,(-d) :: AR\,(-f)$. $RM = +\frac{df}{a}$; d'où l'on voit comment $-$ par $-$, donne un produit qui a $+$.

De même dans les ſurfaces le rectangle $AF$ fait du produit de $+AE$ par $+AB$, ſera poſitif.

Le rectangle $AH$ fait de $-AD$ par $+AB$, ſera négatif.

Le rectangle $AG$ fait de $+AE$ par $-AC$, ſera négatif.

Mais le rectangle $AI$ fait de $-AD$ par $-AC$, ſera poſitif; & du côté oppoſé au rectangle négatif $AH$ fait de $-DA$ par $+AB$. L'on ſuppoſe dans tous les produits l'unité poſitive.

D'où l'on voit que les aires qui ſont dans les côtez oppoſez de la ligne qu'on a priſe pour terme entre les grandeurs poſitives & les négatives, ſont l'une poſitive, & l'autre négative.

On peut aiſément appliquer ceci aux produits qui expriment la ſolidité des corps.

## COROLLAIRE.

282. Les deux mêmes lignes $DAE$, $CAB$, ſe coupant au point $A$ à angles droits, ou en faiſant enſemble au point $A$ tel angle aigu qu'on voudra; qu'on tire la ligne $FAI$, faiſant au point $A$ avec l'une ou l'autre tel angle aigu $OAL$, qu'on voudra : Concevant ces lignes prolongées à l'infini, & que par tous les points $DAE$ on mene des lignes comme $DI$, $RQ$, $OL$, $EF$, &c. paralleles à la ligne $CAB$, juſqu'à la rencontre de $FAI$, & de même par tous les points de $CAB$ des paralleles à $DAE$, juſqu'à la rencontre de la même ligne $FAI$, comme $PQ$, $CI$, $KL$, $BF$, &c. On ſuppoſera la ligne $AO = +a$, $OL = +b$; on nommera auſſi $+x$ chacune des lignes comme $AE$ depuis $A$ en deſcendant priſes ſur $AOE$, juſqu'à la rencontre de chaque parallele, comme $EF$; on nommera $+y$ chaque ligne comme $EF$ menée par ce point $E$, parallele à $AB$; mais on nommera $-x$ chacune des parties $AR$, $AD$ de la ligne $AD$, qui vont en montant, & qui ſe terminent aux paralleles $RQ$, $DI$, à $CBA$, & ces paralleles $RQ$, $DI$ ſeront nommées $-y$. FIG. I.

Cela ſuppoſé, il eſt évident, à cauſe des paralleles, que $AO(+a) . OL(+b) :: AE(+x) . EF(+y)$; & par conſequent $+bx = +ay$, & $+y = +\frac{bx}{a}$ :: Et de même $AO(+a) . OL(+b) :: AD(-x) . DI(-y)$; d'où l'on aura $-bx = -ay$, & $-y = -\frac{br}{a}$.

Il eſt évident que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ convient à chacune des paralleles menée de chacun des points de $AOE$ juſqu'à la ligne $ALF$; de ſorte qu'en déterminant la grandeur de chaque $x$, comme $AE$, la grandeur de $EF$ $(y)$ qui lui répond eſt déterminée. Il faut entendre la même choſe de l'équation $-y = -\frac{bx}{a}$ par raport aux paralleles $RQ$, $DI$ de l'autre côté.

D'où l'on voit que l'équation indéterminée $y = \frac{bx}{a}$; convenant à toutes les paralleles $y$ par raport aux $x$ qui leur répondent, & en exprimant la grandeur par raport à ces $x$ correſpondantes; elle détermine le lieu de tous les points de la ligne droite $AF$ qui paſſe par toutes les extrêmitez des $y$, & elle détermine ce lieu de la ligne droite $AF$ par raport à la ligne $AOE$. Cela eſt cauſe qu'on nomme l'équation $y = \frac{bx}{a}$ *le lieu à la ligne droite*, *ou l'équation à la ligne droite*; & la ligne droite $AF$ eſt la ligne à qui convient cette équation, qui étant prolongée en $AI$ eſt auſſi la ligne à qui convient l'équation $-y = -\frac{bx}{a}$, qui eſt la même que la précedente.

Dans un lieu, par exemple, exprimé par $y = \frac{bx}{a}$, & conſtruit geometriquement par la figure $EAF$, $DAI$, on nomme le point $A$ où commencent les $x$ poſitives priſes ſur $AE$, & les $x$ négatives ſur $AD$, *l'origine*: la ligne $AE$ & $AD$ ſur laquelle ſe prennent les $x$, ſe nomme *la ligne des coupées* ou *des abciſſes*: les lignes $AE$, $AD$, nommées $x$, s'appellent *les coupées* ou *les abciſſes*: les paralleles $EF$, $OL$, &c. qui ſont les $y$, ſe momment les *ordonnées*, & encore *les appliquées*; chaque abciſſe $x$ & ſon ordonnée correſpondante $y$, ſe nomment les *coordonnées*: la ligne $CAB$ menée par l'origine $A$ parallele aux ordonnées, s'appelle *la ligne des ordonnées*; & l'on peut concevoir que les $y$ ſe prennent ſur cette ligne, & raporter le lieu $IAF$ à cette ligne $CAB$ par le moyen des paralleles $KL$, $PQ$, &c. à la ligne $DAE$; car l'on aura $AK = OL(+b)$. $KL = AO(a) :: AB = EF(y)$. $BF = AE(x)$; d'où l'on déduira $BF(x) = \frac{ay}{b}$; l'on trouvera de même $PQ$ ou $CI(-x) = -\frac{ay}{b}$.

Dans une équation comme $y = \frac{bx}{a}$, qui exprime le lieu d'une ligne les $x$, & de même les $y$ marquant des lignes qui vont en croiſſant ſucceſſivement, ou en diminuant ſucceſſivement; on les appelle grandeurs *changeantes* ou *variables*, & les grandeurs déterminées, comme $AO(a)$, $OL(b)$, ſe nomment grandeurs *conſtantes*.

D'où l'on voit que dans les Problêmes de Geometrie, il faut diſtinguer les grandeurs variables, les inconnues, les indéterminées, & les déterminées ou connues. Les *variables* ſont celles qui dans une figure vont en croiſſant ou en diminuant ſucceſſivement, auſquelles convient un même raport,

& elles ſont marquées par des inconnues $x$, $y$, &c. Les inconnues ſont les grandeurs qu'on cherche pour la réſolution d'un Problême. Les indéterminées ſont les grandeurs qu'on met pour en repréſenter d'autres, comme dans $x^n$, l'expoſant $n$ repréſente les grandeurs qu'on peut mettre à la place de cet expoſant, comme 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. on avertit quand les grandeurs ſont indéterminées; l'on a vû dans les livres précedens des exemples des indéterminées. Les grandeurs déterminées, qu'on nomme auſſi données & connues, & qu'on nomme *conſtantes* dans les Problêmes où il y a des variables, ſont les lignes ou figures déterminées, comme ſont les trois côtez d'un triangle donné, comme ſont des angles donnez, des triangles, des quarrez connus, &c.

Quand une ligne eſt ſuppoſée tracée ſur un plan, ſi elle eſt indéterminée, on dit qu'elle eſt *donnée de poſition*; & ſi de plus ſa longueur eſt déterminée, on dit qu'elle eſt *donnée de grandeur.*

---

## *Exemple de l'uſage des calculs de l'Analyſe pour découvrir les proprietez des Figures.*

### AVERTISSEMENT.

L'ANALYSE ſuppoſe les plus ſimples proprietez des figures démontrées par la Geometrie, comme les proprietez des perpendiculaires, des paralleles, des angles, & celles qui ne contiennent pas de raports ou de proportions; mais elle ſert à démontrer toutes celles où entrent les raports & les proportions, ſi ce n'eſt la ſeule propoſition qui eſt le principe de toutes les proportions des lignes & des figures, ſçavoir que dans tous les triangles ſemblables, les côtez oppoſez aux angles égaux, qu'on nomme côtez relatifs ou homologues, ſont proportionels.

### EXEMPLE I. SUR LES TRIANGLES RECTANGLES.

$AEB$ eſt un triangle rectangle en $E$, ſon hypothenuſe $AB$, eſt le diametre de la circonference $AEB$ qui paſſe par le ſommet $E$ de l'angle droit; $ED$ eſt une perpendiculaire tirée du ſommet $E$ ſur $AB$. Pour découvrir les proprietez de ce triangle, on ſuppoſera $AE=a$; $EB=b$; $AB=d$; $BD=x$, ce qui donnera $AD=d-x$.

283. 1°. Les triangles ſemblables $AEB$, $AED$, donneront $AB\,(d) . AE\,(a) :: AE\,(a) . AD\,(d-x)$; d'où l'on aura la premiere équation $dd - dx = aa$. Par les triangles ſemblables $AEB$, $EDB$, l'on aura $AB\,(d) . BE\,(b) :: BE\,(b) . BD\,(x)$; d'où l'on déduira la ſeconde équation $dx = bb$. Ajoutant enſemble la premiere & la ſeconde équation, l'on trouvera $dd = aa + bb$, c'eſt-à-dire, *le quarré de l'hypothenuſe eſt égal à la ſomme des quarrez des côtez*, qui eſt la proprieté des triangles rectangles.

284. 2°. Les triangles ſemblables $ADE$, $EBD$, donnent auſſi, en ſuppoſant $DE = c$, $AD\,(d-x) . DE\,(c) :: DE\,(c) . DB\,(x)$; d'où l'on aura $dx - xx = cc$; c'eſt-à-dire *le quarré de DE, qui eſt moyenne proportionelle entre les deux parties AD, DB de l'hypothenuſe ou du diametre AB coupées par la perpendiculaire DE, eſt égal au rectangle des deux parties du diametre*, qui eſt une autre proprieté des triangles rectangles.

### *Corollaires qu'il faut ſe rendre familiers.*

#### I.

285. L'HYPOTHENUSE $AB\,(d)$ d'un triangle rectangle, peut s'exprimer ainſi $AB\,(d) = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2}$ $(\sqrt{aa+bb}.)$

#### II.

286. Le côté $AE\,(a) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2}$ $(\sqrt{dd-bb})$; le côté $BE\,(b) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2}$ $(\sqrt{dd-aa}.)$

#### III.

287. La perpendiculaire $ED\,(c) = \sqrt{AD \times DB}$ $(\sqrt{dx-xx})$; & ſuppoſant que le milieu de $AB\,(d)$ eſt au point $C$, & que $CD = x$, l'on aura $AD = AC + CD = \frac{1}{2}d + x$, & $DB = BC - CD = \frac{1}{2}d - x$; ce qui donnera $ED\,(c) = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{\frac{1}{4}dd - xx}$. Si l'on ſuppoſe $AD = e$, $DB = f$, $ED = c$, l'on aura $\overline{ED}^2\,(cc) = AD \times DB = ef$, & $c = \sqrt{ef}$.

#### IV.

288. Il eſt démontré dans la Geometrie qu'en tout cercle $AEB$, ſi l'on tire de l'extrêmité $A$ du diametre $AB$ une corde à un point quelconque $E$ de la circonference, & une autre

corde $EB$ de ce point $E$ à l'autre extrêmité $B$ du diametre, le triangle $AEB$ eſt toujours rectangle en $E$; ainſi les expreſſions précedentes conviennent à ces lignes du cercle; ſçavoir $\overline{AB}^2 (dd) = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = aa + bb$; & $AB (d) = \sqrt{aa + bb}$; & $AE (a) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{dd - bb}$; & $BE (b) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{dd - aa}$. De même $\overline{ED}^2 (cc) = AD \times DB = dx - xx$, & $ED (c) = \sqrt{dx - xx}$; mais auſſi $\overline{EB}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 = dx - xx + xx = dx$; c'eſt pourquoi l'on aura $BE = \sqrt{dx}$.

D'où il ſuit que ſi deux cordes égales $BE$, $\beta\varepsilon$ ſont en deux differens cercles, nommant dans l'un le diametre $AB$, $d$, & $DB$, $x$, & dans l'autre le diametre $\delta$, & la ligne qui répond à $BD$, $\xi$, l'on aura $\sqrt{dx} = \sqrt{\delta\xi}$; & par conſequent $dx = \delta\xi$, d'où l'on déduira $d . \delta :: \xi . x$.

Si l'on ſuppoſe $CD = x$, l'on aura $ED (c) = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}d + x} \times \overline{\tfrac{1}{2}d - x}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - xx}$, & $AD (\tfrac{1}{2}d + x) = \frac{\overline{ED}^2}{DB} \left(\frac{cc}{\frac{1}{2}d - x}\right)$

Si l'on ſuppoſe $EB = m$, $AB = d$, & $DB = x$, l'on aura $DB (x) . EB (m) :: EB (m) . AB (d)$; d'où l'on déduira $DB (x) = \frac{\overline{EB}^2}{AB} \left(\frac{mm}{d}\right)$, & $AB (d) = \frac{\overline{EB}^2}{DE} \left(\frac{mm}{x}\right)$. Il faut ſe rendre toutes ces expreſſions familieres.

## V.

L'on peut concevoir de tous les points $E$ de la demi- 289
circonference $BEA$, en commençant au point $B$ & allant de ſuite de $B$ par $E$ juſqu'à l'extrêmité $A$, des perpendiculaires comme $ED$ ſur le diametre $AB$; & ſuppoſant $AB = d$, chaque perpendiculaire $ED = y$, & chaque diſtance $BD$ du point $B$, juſqu'à la rencontre $D$ de chaque perpendiculaire, égale à $x$; il eſt évident que chaque $\overline{DE}^2 (yy)$ ſera égale au rectangle qui lui répond des deux parties du diametre $BD \times DA = dx - xx$; ainſi l'équation $yy = dx - xx$ convient à chacune de ces perpendiculaires $DE$. Les extrêmitez $E$ de toutes ces perpendiculaires $ED$ ſont dans la circonference; c'eſt-à-dire, la circonference paſſe par tous les points $E$; ainſi l'équation $yy = dx - xx$ marque le lieu de la circonference par raport au diametre $AB$;

& en déterminant la valeur de $x$ telle qu'on voudra, pourvû qu'elle ſoit moindre que le diametre $AB$, on trouvera la valeur de $y$ qui lui répond; & de même en déterminant telle valeur de $y$ qu'on voudra, pourvû qu'elle n'excede pas $\frac{1}{2}d$, on trouvera la valeur de $x$ qui lui répond, par la
*76. réſolution des équations du ſecond degré. * Cela eſt cauſe qu'on nomme l'équation $yy = dx - xx$, ou $xx - dx + yy = 0$, *l'équation au cercle*, ou *le lieu du cercle*. Les abciſſes $x$ ſont ſur le diametre $BA$, & $B$ eſt leur origine; & les $DE$ $(y)$ ſont les ordonnées.

## VI.

Suppoſant toujours $AB = d$, $ED = y$, ſi l'on ſuppoſe chaque $CD = x$, l'on aura $\overline{DE}^2$ $(yy) = AD \times DB = \frac{1}{2}\overline{d + x} \times \frac{1}{2}\overline{d - x} = \frac{1}{4}dd - xx$; ainſi $yy = \frac{1}{4}dd - xx$, ou $xx + yy - \frac{1}{4}dd = 0$, eſt auſſi *l'équation du cercle*, ou *le lieu au cercle*. L'origine eſt au centre $C$; les abciſſes $CD$ $(x)$ ſont ſur le demi diametre $CB$ ou $CA$, & les $ED$ $(y)$ ſont les ordonnées.

## VII.

290. On peut par le moyen du troiſiéme Corollaire, changer l'expreſſion d'un rectangle $ab$ en un quarré $cc$, ſans en changer la valeur; il n'y a qu'à mener une ligne droite $AB$ égale à la ſomme des lignes $AD$ $(a) + DB$ $(b)$, tracer une demi-circonference dont $AB$ ſoit le diametre, & élever au point $D$, où elles ſe joignent, la perpendiculaire $DE$, qu'on nommera $c$ jusqu'à la circonference; & l'on aura $\overline{DE}^2$ $(cc) = AD \times DB$ $(ab)$. D'où l'on voit que ſi l'on avoit $xx = ab$, on trouveroit de la même maniere la valeur de $x$, car faiſant $AD = a$, & $DB = b$, $DE$ ſera égale à $x$, étant moyenne proportionelle entre $AD$ $(a)$ & $DB$ $(b)$.

Si l'on avoit $xx = aa - bb$, on trouveroit de même la valeur de $x$, en faiſant $AD = a + b$, & $DB = a - b$, car $DE$ ſeroit égale à $x$, puiſque $\overline{DE}^2$ $(xx) = AD \times DB = aa - bb$, & $x = \sqrt{aa - bb}$.

291. On peut encore trouver de cette autre maniere la valeur de $x$ dans l'équation $xx = aa - bb$. Il faut faire $AB = a$, tracer un demi cercle ſur le diametre $AB$ $(a)$; & après avoir ouvert le compas de la grandeur de la ligne $AE$, qu'on ſuppoſe égale à $b$, & mis une des pointes ſur l'extrêmité $A$, il faut marquer le point $E$ où l'autre pointe coupe la demi-

la demi-circonference, & tirer *EB*, ce ſera la valeur de $x$; car $\overline{EB}^2 (xx) = \overline{AB}^2 (aa) - \overline{AE}^2 (bb)$; & $x = \sqrt{aa - bb}$.

292. Quand on a l'équation $xx = aa + bb$, on trouvera la valeur de $x$, en faiſant un angle droit *AEB* des deux lignes *AE*, *EB*, dont on ſuppoſe la premiere égale à $a$, & la ſeconde égale à $b$; puis tirant l'hypothenuſe *AB* par les extrêmitez *AB*, de ces lignes, *AB* ſera la valeur de $x$; car $\overline{AB}^2 (xx) = \overline{AE}^2 (aa) + \overline{EB}^2 (bb)$; & $x = \sqrt{aa + bb}$.

## VIII.

### *Réſolution geometrique des équations du ſecond degré.*

### PREMIERE MANIERE.

293. TOUTES les équations du ſecond degré peuvent ſe réſoudre geometriquement par les Corollaires précedens; c'eſt-à-dire, on peut trouver les deux valeurs en lignes de l'inconnue de ces équations; car toutes ces équations peuvent ſe réduire à cette formule $xx \pm dx \pm ce = 0$; $d$, $c$, $e$, repréſentent des lignes données dans les Problêmes de ces équations. Or il faut réduire le terme connu $ce$* à un quarré $bb$, & la formule ſera $xx \pm dx \pm bb = 0$. Il faut faire évanouir le ſecond terme, en ſuppoſant $x = z \mp \frac{1}{2}d$; & l'on aura la transformée $zz = \frac{1}{4}dd \mp bb$; & $z = \pm \sqrt{\frac{1}{4}dd \mp bb}$. On trouvera la valeur de $z$ par le ſeptiéme Corollaire, à laquelle ajoutant la ligne $= \frac{1}{2}d$, quand le ſecond terme a $-$, & en retranchant $\frac{1}{2}d$, quand le ſecond terme a $+$; l'on aura la valeur de $x$.

*290.

### SECONDE MANIERE.

294. POUR rendre cette réſolution plus diſtincte, on réduira toutes les équations du ſecond degré à ces quatre formules.

| | La premiere racine. | La ſeconde racine. |
|---|---|---|
| 1^re^, $xx - dx - bb = 0.$ | $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$ | $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$ |
| 2^e^, $xx + dx - bb = 0.$ | $x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$ | $x = -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$ |
| 3^e^, $xx - dx + bb = 0.$ | $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$ | $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$ |
| 4^e^, $xx + dx + bb = 0.$ | $x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$ | $x = -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$ |

Pour trouver les valeurs geometriques des deux racines de la premiere & de la ſeconde formule, dont l'une eſt Fig. II. poſitive, & l'autre négative, 1°. on tirera la ligne $CD$ égale à la moitié de la ligne repréſentée par $d$ dans les Problêmes exprimez par ces deux équations ; c'eſt-à-dire, on fera $CD = \frac{1}{2}d$. 2°. On élevera la perpendiculaire $DE = b$. 3°. Du centre $C$ avec l'hypothenuſe $CE$, on tracera la demi-circonference $AEB$, & on prolongera $CD$ de côté & d'autre juſqu'à la circonference ; & $AD$ ſera la racine poſitive de la premiere formule, & $DB$ ſa racine négative. Et au contraire $DB$ ſera la racine poſitive de la ſeconde formule, & $AD$ ſa racine négative.

Car $+ AD = CD \left(+ \frac{1}{2}d\right) + CA$ ou $CE$, ou $\sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{DE}^2}$ $\left(\sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}\right)$ ; ainſi $AD = x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}$ ; & $DB = - CB$ ou $- CE$, ou $- \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$ $\left(- \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}\right) + CD$ $\left(+ \frac{1}{2}d\right)$ ; ainſi $DB = x = + \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}$ ; & pour la ſeconde formule, il faut prendre la racine négative du côté de $DA$, & l'on aura $x = - DA = - DC \left(- \frac{1}{2}d\right) - CA$ ou $- CE$ $\left(- \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}\right)$ ; & la poſitive $x = + DB = + CB$ ou $+ CE$ $\left(+ \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}\right) - CD \left(- \frac{1}{2}d\right)$.

Pour trouver les valeurs des deux racines de la troiſiéme & de la quatriéme formule, 1°. Il faut faire le diametre $AB$ de la demi-circonference $AEB = d$ ; ainſi $CA$ ou $CE$ ou $CB = \frac{1}{2}d$. 2°. Il faut élever $BF$ perpendiculaire ſur $AB$ à l'extrêmité $B$ ; & faiſant $BF = b$, mener par $F$ la ligne $FE$ parallele à $BA$. 3°. Abaiſſer par le point $E$ où elle rencontre la demi-circonference, la perpendiculaire $ED$ au diametre qui le rencontrera en un point $D$ ; $AD$ ſera la premiere racine poſitive de la troiſiéme formule ; $DB$ ſa ſeconde racine poſitive. De même $AD$ ſera la premiere racine négative de la quatriéme formule, & $DB$ ſa 2^e^ racine négative

Car $x = AD = AC \left(+ \frac{1}{2}d\right) + CD$ ou $+ \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}$ $\left(+ \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}\right)$ ; & $x = + DB = + CB \left(+ \frac{1}{2}d\right) - CD$ ou $- \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}$ $\left(- \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}\right)$. Pour la quatriéme formule, la premiere racine négative eſt $x = - AD = - CA$ $\left(- \frac{1}{2}d\right) - CD$ ou $- \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}$ $\left(- \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}\right)$ ; & la ſeconde racine négative $x = - DB = - CB \left(- \frac{1}{2}d\right)$ $+ CD \left(+ \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}\right)$.

## REMARQUE.

295. QUAND dans la réſolution des deux dernieres formules $BF$ ($b$) ſurpaſſe $CB$ ($\frac{1}{2}d$) la parallele $FE$ au diametre $AB$ ($b$) ne peut pas rencontrer la demi-circonference ; & dans ce cas le Problême eſt impoſſible, c'eſt-à dire il renferme contradiction ; ce qui fait voir le parfait raport de l'Analyſe à la Geometrie ; car dans ce cas où $b$ ſurpaſſe $\frac{1}{2}d$, $bb$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}dd$ ; & $\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}$ eſt une grandeur imaginaire ; ainſi dans ce cas les deux racines de la troiſiéme & de la quatriéme formules ſont imaginaires.

Dans le cas où $BF$ ($b$) $=$ $CD$ ($\frac{1}{2}d$), la parallele $FE$ ne rencontre la demi-circonference qu'en ce point $E$, d'où menant la perpendiculaire $ED$ ($b$), elle tombe au centre $C$ ; alors les deux racines ſont égales, & valent chacune $AC$ ($\frac{1}{2}d$) ; dans ce cas $\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb} = 0$ ; & chaque racine eſt égale à $\frac{1}{2}d$.

## EXEMPLE II.

296. $ABDE$ eſt un quadrilatere inſcrit dans un cercle, pour y trouver des triangles ſemblables qui faſſent découvrir les proprietez qui lui conviennent ; il faut tirer les diagonales $AD$, $BE$, & la ligne $DF$ qui faſſe au point $D$ l'angle $EDF$ égal à l'angle $ADB$ ; & l'on aura 1°. le triangle $ADB$ ſemblable au triangle $EDF$ ; car l'angle $ADB$ eſt égal par la ſuppoſition à l'angle $EDF$, & les angles $DAB$, $DEF$ ſont égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc $BD$. 2°. Les triangles $ADE$, $BDF$ ſont auſſi ſemblables, parceque les angles $ADE$, $BDF$ ſont égaux, contenant chacun les angles $BDA$, $EDF$ égaux par la ſuppoſition ; & de plus l'angle commun $FDA$, & les angles $DAE$, $DBF$ ſont auſſi égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc $DE$. FIG. III.

Suppoſant à preſent $AE = a$, $AB = b$, $BD = c$, $DE = d$, $AD = e$, $BE = f$, $FE = x$ ; par conſequent $BF = BE$ ($f$) $-$ $FE$ ($x$). L'on aura à cauſe des triangles ſemblables $ADB$, $EDF$, $AD$ ($e$). $DE$ ($d$) :: $AB$ ($b$). $EF$ ($x$) ; d'où l'on déduira cette premiere égalité $ex = bd$. L'on aura auſſi à cauſe des triangles ſemblables $ADE$, $DBF$, $BF$ ($f - x$). $AE$ ($a$) :: $BD$ ($c$). $AD$ ($e$) ; d'où l'on déduira cette ſeconde égalité $ef - ex = ac$. Ajoutant ces deux égalitez, on trouve $AD \times BE\,(ef) = AE \times BD\,(ac) + AB \times DE\,(bd)$; c'eſt-à-dire *qu'en tout quadrilatere inſcrit au cercle, le rectangle des diagonales* $AD \times BE\,(ef)$, *eſt égal à la ſomme des rectangles des côtez oppoſez* $AE \times BD + AB \times DE$ $(ac + bd)$, qui eſt une proprieté de ce quadrilatere qui ſert dans la trigonometrie.

## EXEMPLE III.

Fig. IV. 297. PARTAGER une ligne donnée $AB\,(a)$ en deux parties $AC$, $CB$, en ſorte que la partie $AC$ ſoit moyenne proportionelle entre la ligne entiere $AB$ & la partie $CB$.

Soit la partie inconnue que l'on cherche $AC = x$, ainſi $CB = a - x$; & par les conditions du Problême l'on aura $AB\,(a) . AC\,(x) :: AC\,(x) . CB\,(a - x)$; d'où l'on déduira l'équation $aa - ax = xx$, ou $xx + ax - aa = 0$. On trouvera la valeur poſitive de $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + aa}$, ou $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en faiſant (fig 2.) $CD = \frac{1}{2}a$, la perpendiculaire $DE = a$; traçant du centre $C$ avec l'hypothenuſe $CE$ priſe pour rayon l'arc $BE$, & prolongeant $CD$ juſqu'à l'arc en $B$, car $DB$ ſera $= x = +CB$ ou $+CE\,(+\sqrt{\frac{1}{4}aa + aa})$ $- CD\,(-\frac{1}{2}a) = AC$ (fig. 4.) que l'on cherchoit.

## AVERTISSEMENT.

CES Exemples ſuffiſent pour faire voir l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie ſimple ; il ſera plus utile de faire voir l'uſage de l'Analyſe dans les ſciences Phyſico-mathematiques qui ſervent à perfectionner les Arts, & dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes.

# SECTION II.

## *Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe dans les ſciences Phyſico-mathematiques qui ſervent à perfectionner les Arts.*

## Uſage de l'Analyſe pour réſoudre les Problêmes de l'art de jetter les Bombes.

### *Principes que l'on ſuppoſe pris des traitez du mouvement.*

### DÉFINITIONS.

### I.

298. ON ſuppoſera la maſſe du mobile $=m$, ſa viteſſe $=v$, la longueur parcourue $=l$, le temps employé à parcourir cette longueur $=t$. Quand il y aura differentes maſſes, viteſſes, longueurs, temps, on marquera les maſſes differentes par des m differentes, & de même les viteſſes, les longueurs & les temps.

### II.

299. La quantité du mouvement eſt le produit de la maſſe par la viteſſe, c'eſt-à-dire $mu$; mais pour ne pas multiplier les difficultez, on ne conſiderera dans la ſuite qu'un même mobile; ainſi la quantité ou la force du mouvement ſera ſa viteſſe.

### III.

300. Le mouvement *égal* ou *uniforme* eſt celui dont la viteſſe demeure la même pendant la durée du mouvement. Le mouvement *acceleré* eſt celui qui à chaque inſtant de ſa durée reçoit une nouvelle augmentation de viteſſe; le mouvement *retardé*, celui qui perd à chaque inſtant une partie de la viteſſe qu'il avoit : Le mouvement *uniformement* ou *également acceleré* ou *retardé*, celui qui à chaque inſtant reçoit une égale augmentation ou perd une égale quantité de ſa viteſſe. Comme on ne parlera ici que du mouvement acceleré ou retardé de cette derniere maniere, on le nommera ſimplement mouvement acceleré ou retardé.

## SUPPOSITIONS QU'IL FAUT SE RENDRE FAMILIERES.

### I.

### *Pour comparer enſemble les mouvemens uniformes.*

301. DANS les mouvemens uniformes la viteſſe eſt égale à la longueur parcourue diviſée par le temps employé à la parcourir, $u = \frac{l}{t}$; par conſequent $t = \frac{l}{u}$, & $l = tu$.

302. Par conſequent quand les mouvemens uniformes ſont differens, $V . u :: \frac{L}{T} . \frac{l}{t} :: Lt . lT$; & $T . t :: \frac{L}{V} . \frac{l}{u} :: Lu . lV :: \frac{L}{l} . \frac{V}{u}$; & $L . l :: TV . tu :: \frac{T}{t} . \frac{u}{V}$.

303. Il ſuit de là, 1°. que quand $V = u$; $\frac{L}{T} = \frac{l}{t}$, & $L . l :: T . t$, ce qu'il faut bien remarquer, & que $Lt = lT$.

304. 2°. Que quand $T = t$; $L . l :: V . u$, ce qu'il faut bien remarquer, & que $Lu = lV$.

305. 3°. Que quand $L = l$; $V . u :: t . T$, & que $VT = ut$.

### II.

### *Sur la peſanteur.*

306. LA peſanteur, dont on n'examinera point ici la cauſe, fait qu'un corps peſant en deſcendant librement depuis le repos, acquiert à tous les inſtans de la chûte des degrez égaux de viteſſe. L'on n'aura ici nul égard à la reſiſtance de l'air, l'experience faiſant connoître qu'elle n'apporte pas de changement conſiderable à un corps très-peſant comme l'eſt une bombe. C'eſt pourquoi on ſuppoſera que les degrez de viteſſe que le corps peſant acquiert pendant chaque inſtant de ſa chûte, ſe conſervent entiers dans les inſtans ſuivans de la chûte, pendant leſquels le même corps en acquiert toujours de nouveaux. De ſorte que partageant la durée de la chûte en trois temps égaux, dont chacun ſoit $= t$, le premier degré de viteſſe s'acquiert depuis le repos juſqu'à la fin de $1t$, & il eſt tout acquis à la fin de $1t$, & il demeure entier dans les deux temps ſuivans; pendant le ſecond temps le corps peſant acquiert un ſecond degré de viteſſe égal au premier, & ce ſecond degré eſt tout acquis à la fin de $2t$; & le mobile a deux degrez de viteſſe acquiſe à la fin de $2t$. Le troiſiéme degré de viteſſe s'acquiert pendant le troiſiéme temps, & il eſt tout acquis à la fin de $3t$, & alors le corps peſant a trois degrez de viteſſe acquiſe.

## III.

### *Sur les mouvemens accelerez.*

307. LEs longueurs parcourues par un même corps qui deſcend librement, priſes chacune depuis le repos, ſont entr'elles comme les quarrez des temps employez à les parcourir; elles ſont auſſi entr'elles comme les quarrez des viteſſes acquiſes à la fin des temps employez à parcourir ces longueurs.

Par exemple un corps peſant tombant librement depuis le repos $A$, parcourt $AB$ pendant $1t$; $AC$ pendant $2t$; $AD$ pendant $3t$; $AE$ pendant $4t$. La viteſſe acquiſe à la fin de $1t$ eſt $u$; à la fin de $2t$, elle eſt $2u$; à la fin de $3t$, elle eſt $3u$; à la fin de $4t$, elle eſt $4u$. FIG. V.

$AB . AC :: 1tt . 4tt :: 1uu . 4uu$. De même $AC . AD :: 4tt . 9tt . :: 4uu . 9uu$. De même $AD . AE :: 9tt . 16tt :: 9uu . 16uu$. De même $AC . AE :: 4tt . 16tt :: 4uu . 16uu$, &c.

Ainſi nommant $L$ une longueur parcourue depuis le repos; $T$, le temps employé à la parcourir; $V$, la viteſſe acquiſe à la fin de ce temps; & $l$ une autre longueur parcourue depuis le repos; $t$, le temps employé à la parcourir; $u$, la viteſſe acquiſe à la fin de ce temps; on aura cette expreſſion generale de la troiſiéme ſuppoſition $L . l :: TT . tt :: VV . uu$.

### COROLLAIRE.

308. D'Où il ſuit que dans les mouvemens accelerez $V . u :: \sqrt{L} . \sqrt{l} :: T . t$. Par conſequent dans les mouvemens accelerez on peut exprimer les viteſſes par les racines des longueurs parcourues depuis le commencement, ou depuis le repos; on peut auſſi exprimer les temps par les racines des mêmes longueurs; puiſque ces viteſſes ſont entr'elles, & ces temps entr'eux comme les racines de ces longueurs; ainſi $V = \sqrt{L}$; $u = \sqrt{l}$, & de même $T = \sqrt{L}$, $t = \sqrt{l}$.

## IV.

### *Sur les mouvemens retardez.*

309. UN corps peſant qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec une viteſſe quelconque toute acquiſe, perd à chaque inſtant de la montée un degré de ſa viteſſe égal à celui qu'il acquiereroit à chaque inſtant en deſcendant, juſqu'à

ce que l'action de la peſanteur lui ait fait perdre au dernier inſtant de la montée le dernier degré de la viteſſe avec laquelle il avoit été pouſſé en haut; après quoi il retombe librement par l'action de la peſanteur. Les longueurs que les viteſſes qu'il perd (en partageant en temps égaux la durée de la montée) l'empêchent de parcourir, priſes depuis le commencement, ſont entr'elles comme les quarrez des temps, & auſſi comme les quarrez des viteſſes perdues; c'eſt-à-dire, nommant $-L$ la longueur priſe depuis le commencement de la montée, qu'empêche de parcourir la viteſſe perdue $-V$ au corps peſant pouſſé en haut, pendant le temps $T$, eſt à une autre longueur $-l$ priſe auſſi depuis le commencement qu'empêche de parcourir la viteſſe perdue $-u$ pendant un autre temps $t$, comme $TT$ à $tt$, & comme $VV$ à $uu$; ainſi $-L . -l :: TT . tt :: VV . uu$; & $-\sqrt{L}, -\sqrt{l} :: -V . -u :: T . t$.

### V.

### *Pour comparer les mouvemens accelerez & retardez avec les uniformes.*

310. UN corps peſant étant deſcendu depuis le repos pendant un temps quelconque $T$ de la longueur $L$ en acquierant la viteſſe $V$; ſi dans le même temps $T$, il eſt mû uniformement ſelon une direction quelconque, ſoit verticale, ſoit horizontale ou inclinée avec la même viteſſe $V$ toute acquiſe, il parcourera une longueur $2L$ double de la premiere $L$. On peut appliquer la même propoſition au mouvement retardé.

### COROLLAIRES.

### I.

311. POUR réduire les mouvemens accelerez ou retardez aux uniformes, il faut prendre les viteſſes des mouvemens accelerez toutes acquiſes, & les concevoir comme demeurant uniformes; & ſi l'on prend les mêmes temps, il faut doubler les longueurs parcourues par la viteſſe qui s'acquieroit dans le mouvement acceleré. Ainſi dans le mouvement acceleré la viteſſe $V$ qui s'acquieroit faiſoit parcourir la longueur $L$ dans le temps $T$; pour le réduire à l'uniforme, il faut concevoir que la même viteſſe $V$ toute acquiſe fera parcourir $2L$ dans le même temps $T$.

Par

### I I.

312. Par conſequent la même viteſſe *V* toute acquiſe fera parcourir la même longueur *L* dans le mouvement uniforme dans la moitié du temps *T* ; c'eſt-à-dire, dans le temps $\frac{1}{2}$ *T* ; elle fera, dis-je, parcourir la même longueur *L* qu'elle feroit parcourir dans le mouvement acceleré pendant qu'elle s'acquieroit dans le temps entier *T*. Car puiſque la viteſſe acquiſe *V* dans le temps *T* feroit parcourir 2*L* dans le mouvement uniforme ; dans le même mouvement uniforme, elle fera parcourir *L* moitié de 2*L* dans $\frac{1}{2}$ *T*, qui n'eſt que la moitié du temps *T*, pendant lequel la même longueur *L* ſeroit parcourue dans le mouvement acceleré pendant que la viteſſe *V* s'acquiert.

Il faut s'appliquer à concevoir clairement ce ſecond Corollaire, & ſe le rendre bien familier pour n'être pas embarraſſé dans la ſuite : car c'eſt celui qui n'étant pas bien conçu, feroit de la difficulté au Lecteur.

### I I I.

313. Si un corps peſant en deſcendant librement depuis le repos au point *A*, & parcourant la longueur *AE* (*L*), acquiert la viteſſe *V* dans le tems *T*, & qu'il ſoit repouſſé en haut de *E* vers *A* avec la même viteſſe toute acquiſe *V*, il eſt évident que ſa peſanteur lui fera perdre dans un temps égal au premier *T* ſa viteſſe *V*, & que cette viteſſe *V* ſera détruite par l'action de la peſanteur preciſément à la fin du temps *T*. Fig. V.

### I V.

314. Suppoſé qu'un corps étant deſcendu par le mouvement acceleré de ſa peſanteur depuis le repos en *A*, & ayant parcouru la longueur *AE* (*L*) en acquerant la viteſſe *V* dans le temps *T*, ſoit repouſſé de *E* vers *A* avec la même viteſſe toute acquiſe *V*, & remonte par un mouvement retardé à cauſe de ſa peſanteur, il remontera preciſément à la même hauteur dans le même temps *T* qu'il avoit employé à deſcendre, c'eſt-à-dire, il parcourera en remontant preciſément la même hauteur *EA* (*L*) dans le même temps *T*, & il ne ſçauroit remonter plus haut. Car avec la viteſſe *V* toute acquiſe il remonteroit 2*L* dans le temps *T* *, ſi elle demeuroit uniforme, & que le mouvement ne fût pas retardé par la peſanteur ; mais la viteſſe *V* dans le temps *T* étant entierement détruite par le Corollaire précedent, la viteſſe perdue Fig. V. * 310.

dans le temps $T$ eſt $-V$ égale à la viteſſe poſitive $+V$, & la longueur $-l$ que la viteſſe $-V$ empêche de parcourir en ſe perdant par le mouvement retardé, eſt à la longeur $+L$ que la viteſſe $+V$ feroit parcourir en s'acquierant par le mouvement acceleré, comme le quarré du temps $t$ du mouvement retardé au quarré du temps $T$ du mouvement acceleré; & encore comme le quarré de la viteſſe $-V$ au
* 307. quarré de la viteſſe $+V$.* $-l . +L :: tt . TT :: VV . VV$; & comme les viteſſes ſont égales, les temps le ſont auſſi; & $-l = +L$: Par conſequent puiſque le corps en remontant avec la viteſſe acquiſe $V$, parcoureroit $2L$ ou $2EA$ dans le même temps $T$, ſi le mouvement demeuroit uniforme, il ne parcourera que $L$ ou $EA$ dans le mouvement retardé, puiſqu'il faut ôter $-L$ de $+2L$, c'eſt-à-dire $-EA$ de $+2EA$; & ſa viteſſe $V$ étant entierement détruite par la peſanteur à la fin du temps $T$, il ne peut pas remonter plus haut que $EA$ ($L$), d'où il étoit deſcendu.

V.

315. Un corps pouſſé par un mouvement uniforme ſuivant telle direction qu'on voudra avec la viteſſe $V$ qu'il auroit acquiſe
Fig. V. en tombant de la hauteur $AE$ ($L$) dans le temps $T$, parcourera $2L$ dans le même temps $T$, & $4L$ dans $2T$; & dans le mouvement retardé, s'il eût été pouſſé en haut avec la même viteſſe $V$, il n'auroit remonté pendant le temps $T$ que la hauteur $L$, & enſuite retombant par la peſanteur dans le ſecond temps $T$ égal au premier, il auroit parcouru la même hauteur $L$, & ſeroit arrivé au point d'où on l'auroit pouſſé en haut; c'eſt-à-dire qu'avec cette même viteſſe $V$ dans le temps $T$ de la montée $L$ du mouvement retardé, le corps parcourera deux fois $L$ par le mouvement uniforme; & dans le temps de la montée & de la deſcente du mouvement retardé & acceleré, il parcourera quatre fois $L$ par le mouvement uniforme.

## SIXIÉME SUPPOSITION.

*Sur les mouvemens compoſés.*

316. UN corps $A$ eſt pouſſé en même temps par deux forces,
Fig. VI. l'une ſuivant la direction $AB$, l'autre ſuivant $AD$, qui font l'angle quelconque $BAD$, de maniere que la viteſſe que donne la premiere ſoit à la viteſſe que donne la ſeconde dans

le même temps, comme $AB$ eſt à $AD$; ſi l'on achève le parallelogramme $BD$, & qu'on tire la diagonale $AC$, cette diagonale $AC$ marquera le chemin que tiendra le mobile, la longueur qu'il parcourera dans le même temps, & la viteſſe qu'il aura reçue des deux forces; c'eſt-à-dire $AB$ eſt à $AC$ comme la viteſſe ſuivant $AB$ eſt à la viteſſe ſuivant $AC$, & de même la viteſſe ſuivant $AD$ eſt à la viteſſe ſuivant $AC$, comme $AD$ ou ſon égale $BC$ eſt à $AC$, & il parcoureroit chacune de ces trois lignes en des temps égaux avec la viteſſe reſpective qui leur convient.

## COROLLAIRES.

### I.

317. QUAND un corps $A$ parcourt l'hypothenuſe $AC$ d'un triangle rectangle $ABC$ d'un mouvement uniforme, ſa viteſſe peut être regardée comme venant de deux forces qui lui donneroient des viteſſes ſuivant les deux côtés qui ſeroient entr'elles comme $AB$ & $BC$, & qui lui feroient parcourir ſeparément ces côtés dans le même temps qu'il parcourt $AC$. FIG. VII.

### II.

318. Quand un corps $A$ va rencontrer obliquement un plan ou une ligne $BC$ au point $C$ ſuivant $AC$, en tirant d'un point $A$ pris ſur $AC$ la perpendiculaire $AB$ à $BC$, & prenant $AC$ pour exprimer la force totale ou la viteſſe totale du mobile $A$, $AB$ exprimera l'effort de ce mobile contre $BC$, ou la viteſſe avec laquelle il pouſſe $BC$. FIG. VII.

## PROBLÊME I.

319. LE côté $BA$ ($a$) du triangle rectangle $ABC$ étant ſuppoſé FIG. VII.
vertical, ſon côté $BC$ ($b$) horizontal, & l'hypothenuſe $AC$ ($c$)
inclinée ſur l'horizontale $AK$: ſuppoſant qu'un mobile ſoit
pouſſé de $A$ en $B$ avec la viteſſe qu'il auroit acquiſe par le
mouvement acceleré en tombant depuis le repos de la hauteur $BA$ dans le temps $T$, & parcourre d'un mouvement
uniforme $AB$ avec cette viteſſe acquiſe $=\sqrt{AB}$* ($\sqrt{a}$) dans * 308.
le temps $\frac{1}{2}T$*: Trouver, 1°. de quelle hauteur, qu'on nom- * 312.
mera $x$, il devroit tomber pour acquerir la viteſſe $\sqrt{x}$*, avec * 308.
laquelle il parcourera d'un mouvement uniforme le côté
horizontal $BC$ ($b$) dans le temps $\frac{1}{2}T$. 2°. De quelle hauteur,

qu'on nommera $y$, il devroit tomber pour acquerir la viteſſe
*308. $\sqrt{y}$ * avec laquelle il parcourera d'un mouvement uniforme l'hypothenuſe $AC\,(c)$ dans le même temps $\frac{1}{2}T$.

*Réſolution*. Le temps étant égal, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}T$, 1°. $AB\,(a)$.
*304. $BC\,(b) :: \sqrt{AB}\,(\sqrt{a}) . \sqrt{x}$.* Donc $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$, & $\sqrt{x} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$, & $x = \frac{bb}{a} = \frac{BC \times BC}{AB}$. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*
*304. 2°. $AB\,(a) . AC\,(c) :: \sqrt{AB}\,(\sqrt{a}) . \sqrt{y}$*. Donc $a\sqrt{y} = c\sqrt{a}$, & $\sqrt{y} = \frac{c\sqrt{a}}{a}$ & $y = \frac{cc}{a} = \frac{AC \times AC}{AB}$. *Ce qu'il falloit ſecondement trouver.*

FIG. VII. *Réſolution geometrique*. Il faut mener par le point $C$, $CH$ perpendiculaire à $AC$, & le point $H$ où elle rencontrera
*288. $AB$ prolongée, déterminera, 1°. $BH =$* $\frac{BC \times BC}{AB} = \frac{bb}{a} = x$.
*288. 2°. $HA$* $= \frac{AC \times AC}{AB} = \frac{cc}{a} = y$.

## COROLLAIRE.

320. SI l'on tire dans un demi cercle $ACEGH$, dont le diame-
FIG. VIII. tre $HA$ eſt vertical, de tous les points $C$, $E$, $G$ de la demi-circonference des perpendiculaires $CB$, $ED$, $GF$ &c. au diametre $HA$, & les cordes $CA$, $CH$; $EA$, $EH$; $GA$, $GH$, &c. de chacun de ces points aux extrêmitez du diametre, on aura autant de triangles rectangles qu'il y a de points dans la demi-circonference ; & ce que l'on a dit du triangle rectangle $ABC$, convient à chacun de ces triangles.

Ainſi nommant $d$ le diametre $HA$; $x$, chacun des côtez verticaux $AB$, $AD$, $AF$, &c. de tous les triangles le reſte du diametre $HB$, $HD$, $HF$, &c. ſera $= d - x$; chacune
*288. des hypothenuſes $AC$, $AE$, $AG$, &c. ſera $= \sqrt{dx}$*; chacun
*287. des côtez horizontaux $BC$, $DE$, $FG$, &c. ſera $= \sqrt{dx - xx}$.* La viteſſe acquiſe par le mouvement acceleré dans le temps $T$ pour faire parcourir chaque côté vertical $x$ d'un mouvement
*312. uniforme dans le temps $\frac{1}{2}T$, ſera $\sqrt{x}$*; $\sqrt{d - x}$ ſera la viteſſe pour faire parcourir chaque côté horizontal $\sqrt{dx - xx}$ dans le même temps $\frac{1}{2}T$; & $\sqrt{d}$ ſera la viteſſe pour faire parcourir dans le même temps $\frac{1}{2}T$ chaque hypothenuſe $\sqrt{dx}$.

### *Application de ces principes à l'art de jetter les Bombes.*

## DEMANDE.

321. SI une Bombe étoit jettée verticalement par un mortier
FIG. VIII. ſuivant la ligne verticale $ABH$ avec quelle force de poudre

on voudra, il eſt évident que quand la bombe ſeroit montée au point le plus haut où l'action de ſa peſanteur lui auroit entierement fait perdre la viteſſe de ſon impulſion, que l'on ſuppoſe être le point *H*; elle retomberoit de cette même hauteur *HA*, & elle auroit acquis par ſa peſanteur en arrivant au point *A* d'où elle étoit partie preciſément la même viteſſe avec laquelle elle avoit été pouſſée par la force de la poudre qui l'avoit fait monter de *A* en *H*.

## DÉFINITION.

322. ON prendra *pour la meſure de la force de la poudre* ou de la viteſſe qu'elle donne à une bombe ſuivant quelque direction *AC*, *AE*, *AG*, &c. que ce puiſſe être, la hauteur *HA* d'où il faudroit que la bombe tombât librement depuis le repos pour acquerir par cette chûte une viteſſe égale à celle avec laquelle elle eſt pouſſée par la force de la poudre. On l'appelle auſſi *la force du jet*. FIG. VIII.

## COROLLAIRE.

323. EN prenant le diametre *HA* (qu'on ſuppoſe vertical) du demi cercle *HGECA* pour repréſenter une force quelconque de poudre, toutes les cordes *AC*, *AE*, *AG*, &c. menées à tous les points de la demi-circonference, repréſenteront toutes les inclinaiſons qu'on peut donner au mortier ſur l'horizontale *AK*, & par conſéquent les directions de tous les jets obliques qu'on peut faire par cette force de poudre. Nommant $d$ la hauteur *HA*; $x$, le côté vertical *AB*, *AD*, *AF*, &c. des triangles rectangles *ABC*, *ADE*, &c. qui ont pour hypothenuſes les jets obliques *AC*, *AE*, *AG*, &c. faits par une même force de poudre *HA*; les reſtes du diametre *BH*, *DH*, *FH*, &c. ſeront exprimés par $d - x$, les côtés horizontaux des triangles comme *BC*, *DE*, *FG*, &c. par $\sqrt{dx - xx}$; & les cordes *AC*, *AE*, *AG*, &c. par $\sqrt{dx}$. FIG. VIII.

La viteſſe que la force de la poudre donne par chacune des cordes *AC*, *AE*, &c. eſt $\sqrt{HA}$ ($\sqrt{d}$) qui demeure uniforme ſuivant la direction de la corde pendant tout le jet. Et comme cette viteſſe uniforme eſt ſuivant l'hypothenuſe $\sqrt{dx}$ d'un triangle rectangle,* elle peut être regardée comme venant de deux forces qui imprimeroient à la bombe l'une une viteſſe uniforme ſuivant le côté vertical du triangle qui

* 317.

eſt repréſenté par $x$, & l'autre une viteſſe auſſi uniforme ſuivant le côté horizontal $\sqrt{dx-xx}$; & ces deux viteſſes, pour faire parcourir chacune leur côté dans le même temps, doivent être l'une à l'autre comme ces côtés, c'eſt-à-dire, comme $x$ eſt à $\sqrt{dx-xx}$. Afin que ces deux viteſſes ayent entr'elles ce raport des côtés, la viteſſe uniforme par le côté vertical $x$, doit être égale à celle que la bombe auroit acquiſe
*319. en deſcendant depuis le repos de la hauteur $x$*, ainſi la viteſſe uniforme par le côté $x$ eſt égale à $\sqrt{x}$; & demeurant uniforme par ce côté $x$, elle doit le faire parcourir dans la moitié du temps $T$ que la bombe employeroit à tomber de la hauteur $x$; & la viteſſe uniforme par le côté horizontal $\sqrt{dx-xx}$, doit être égale à celle que la bombe auroit acquiſe en tombant depuis le repos de la hauteur du reſte du diametre
*319 $d-x$*: ainſi la viteſſe uniforme qui fera parcourir le côté horizontal, ſera exprimée par $\sqrt{d-x}$.

La viteſſe $\sqrt{d}$ fera donc parcourir la corde $\sqrt{dx}$, dans le même temps que la viteſſe $\sqrt{x}$ fera parcourir le côté vertical $x$, & que la viteſſe $\sqrt{d-x}$ fera parcourir le côté horizontal $\sqrt{dx-xx}$, en les ſuppoſant toutes trois uniformes, & que le temps pendant lequel elles font chacune parcourir les trois lignes qui leur conviennent, eſt la moitié du temps que la bombe employeroit à deſcendre depuis le repos de la hauteur du côté vertical $x$. Par conſequent dans ce temps entier ces trois viteſſes feront parcourir par un mouvement
*310. uniforme le double des lignes du triangle rectangle*, & en deux fois ce temps entier, le quadruple de ces mêmes lignes; c'eſt-à-dire dans le temps de la chûte accelerée, ou de la montée retardée par $x$, elles feront parcourir par un mouvement uniforme le double de ces trois lignes; & dans le temps de la montée & de la chûte, le quadruple de ces mêmes lignes. On doit ſe rendre ces choſes familieres pour entendre facilement les Problêmes ſuivans.

## PROBLÊME II.

324. LA force de la poudre $HA$ étant donnée, par exemple,
FIG. VIII. de 400 toiſes, trouver pour telle inclinaiſon qu'on voudra donner au mortier qu'on ſuppoſe au point $A$. 1°. La diſtance $AO$ ſur l'horizontale $AK$ qui eſt depuis le mortier $A$ juſqu'au

point $O$ qui eſt dans la verticale $OMN$ où la bombe eſt pendant le jet au point le plus élevé. 2°. Trouver la diſtance horizontale $AK$ depuis le point $A$ juſqu'au point $K$ où la bombe retombera ſur l'horizontale $AK$.

Pour réſoudre ce Problême, je remarque. 1°. Que la force du jet étant donnée, $HA$ $(d)$ eſt connue ; & concevant $HA$ diviſée en 400 parties égales, elle repréſentera la force du jet. Prenant une inclinaiſon du mortier déterminée comme l'angle $CAK$ que fait le mortier avec l'horizon $AK$, la poſition de la corde $AC$ eſt donnée, & par conſéquent le point $C$ où elle rencontre la demi-circonference ; ainſi le côté vertical $AB$ $(b)$, l'horizontal $BC$ $(\sqrt{db - bb},)$ l'hypothenuſe $AC$ $(\sqrt{db})$ du triangle rectangle $ACB$, ſont donnés. 2°. Que la viteſſe par l'oblique $AC$ eſt $\sqrt{HA}$ $(\sqrt{d})$, qui demeure uniforme pendant le jet ; que la viteſſe par l'horizontale $BC$ ou $\sqrt{db - bb}$, eſt $\sqrt{HA - BA}$ $(\sqrt{d - b})$ ; & que la viteſſe par la verticale $AB$ ou $b$, eſt $\sqrt{AB}$ $(\sqrt{b})$. 3°. Que la moitié $\frac{1}{2}T$ du temps $T$ que la bombe employeroit à deſcendre $AB$ par le mouvement acceleré, ou à monter $AB$ dans le mouvement retardé, cette moitié, dis-je, $\frac{1}{2}T$ eſt le temps pendant lequel dans le mouvement uniforme ces trois lignes du triangle rectangle $ABC$ ſont parcourues par les viteſſes qui leur conviennent ; ainſi dans le temps entier $T$ de la montée de la bombe à l'endroit le plus haut du jet, les mêmes viteſſes feront parcourir le double de ces trois lignes par le mouvement uniforme ; & dans le temps $2T$ de la montée & de la deſcente de la bombe au point $K$ de l'horizontale, elles feront parcourir le quadruple de ces trois lignes.

*Réſolution.* Soit la diſtance inconnue $AO = z$, & la diſtance inconnue $AK = s$ ; l'on aura, 1°. la longueur horizontale inconnue $AO$ $(z)$ eſt à la verticale $2BA$ $(2b)$, toutes deux parcourues par un mouvement uniforme dans le temps entier $T$, qui eſt celui où la bombe doit monter au point le plus élevé du jet ; comme la viteſſe par l'horizontale qui eſt $\sqrt{d - b}$, eſt à la viteſſe par la verticale qui eſt $\sqrt{b}$. L'on aura donc $z\sqrt{b} = 2b\sqrt{d - b}$ ; par conſequent $AO$ $(z) = 2\sqrt{db - bb}$ $=^{*} 2BC$. L'on aura, 2°. la diſtance horizontale inconnue *288,
$AK$ $(s)$ eſt à la verticale $4AB$ $(4b)$ parcourues l'une & l'autre

d'un mouvement uniforme pendant $2T$ qu'il faut à la bombe pour monter & enſuite retomber au point $K$; comme la viteſſe par la premiere qui eſt $\sqrt{d-b}$, eſt à la viteſſe par la ſeconde qui eſt $\sqrt{b}$. Donc $s\sqrt{b} = 4b\sqrt{d-b}$, & $s = 4\sqrt{db-bb}$
*288. $=^{*} 4BC$.

En marquant $AB$ par une indéterminée $x$, on aura $AO$ ($z$) $= 2\sqrt{dx-xx}$; & $AK$ ($s$) $= 4\sqrt{dx-xx}$.

## COROLLAIRES.

### I.

325. D'Où l'on voit que la diſtance horizontale $AK$ depuis le mortier $A$ juſqu'au point $K$ où tombe la bombe de chaque jet (ce qu'on nomme *l'étendue du jet*) eſt toujours quadruple du côté horizontal $BC$, ou $DE$, ou $FG$, &c. du triangle rectangle qui répond à ce jet; & que la diſtance $AO$ ſur la même horizontale juſqu'à la verticale qui paſſe par le point le plus haut de chaque jet, eſt double de ce même côté horizontal.

### II.

326. Par conſéquent dans le demi cercle $HGECA$, le diametre $HA$ étant pris pour une force de poudre quelconque, toutes les perpendiculaires $CB$, $ED$, $GF$, &c. menées des cordes $AC$, $AE$, $AG$, &c. qui marquent toutes les directions du mortier : ces perpendiculaires, dis-je, ſeront chacune le quart de l'étendue du jet qui lui convient par raport à cette même force de poudre, & elles ſeront la moitié de la diſtance horizontale qui eſt depuis le mortier juſqu'à la verticale qui paſſe par le point le plus haut du jet.

FIG. VIII.

### III.

327. Comme le demi diametre $DE$ eſt plus grand qu'aucune des perpendiculaires $BC$, $FG$, &c. & que $DE$ convient au jet ſuivant la corde $AE$ qui fait l'angle d'inclinaiſon $EAK$ de 45 degrés; de tous les jets qui ſe peuvent faire par la même force de poudre, celui qui ſe fait, le mortier étant incliné de 45 degrés ſur l'horizon, a la plus grande étendue, c'eſt-à-dire, a la plus grande portée : & cette étendue étant quadruple du demi diametre, eſt double du diametre, c'eſt-à-dire, la force $HA$ du jet eſt la moitié de l'étendue du jet de 45 degrés.

Et

Et comme les perpendiculaires $FG$, $BC$, qu'on ſuppoſe également éloignées du centre $D$, ſont égales; tous les jets poſſibles qu'on peut faire avec la même force de poudre, ont deux à deux une égale étendue, l'un au-deſſous de 45 degrés, & l'autre autant au-deſſus de 45 degrés que le premier eſt au-deſſous. Il n'y a que le jet de 45 degrés qui a la plus grande étendue, qui ſoit unique.

## PROBLÊME III.

328. UN mortier ou un canon étant pointé de but en blanc, c'eſt-à-dire dans une direction $BC$ horizontale au-deſſus d'une tour dont la hauteur repréſentée par $AB$ ($b$) ſoit connue par exemple de 10 toiſes au-deſſus d'une plaine horizontale repréſentée par $AO$; ſuppoſé qu'on tire une bombe ou un boulet avec une force donnée de poudre repréſentée par $HA$ ($d$); trouver la diſtance horizontale $AO$ ($z$) où tombera la bombe ou le boulet ſur l'horizon. FIG. VIII.

La viteſſe du jet, c'eſt-à-dire la viteſſe de la bombe par l'horizontale $BC$ ($\sqrt{db - bb}$), eſt ici $\sqrt{d}$*; la viteſſe verticale qu'acquierera la bombe par ſa peſanteur en tombant pendant le jet de la hauteur $AB$ ($b$), eſt $\sqrt{b}$; & cette viteſſe lui feroit parcourir dans le temps $T$ par le mouvement uniforme $2AB$ ($2b$). On aura donc, la viteſſe du jet $\sqrt{d}$ eſt à la viteſſe verticale $\sqrt{b}$ acquiſe par la deſcente de la bombe de la hauteur $BA$ dans le temps $T$; comme la longueur horizontale parcourue par le mouvement uniforme avec la viteſſe $\sqrt{d}$, laquelle longueur eſt $AO$ ($z$), eſt à $2AB$ ($2b$) qui eſt la hauteur verticale que la viteſſe $\sqrt{b}$ lui feroit parcourir par le mouvement uniforme; ce qui donnera $z\sqrt{b} = 2b\sqrt{d}$, & $z = 2\sqrt{db} = 2\sqrt{HA \times BA} = 2AC$*. *Ce qu'il falloit trouver.*

* 320.

* 238.

*Les Problêmes ſuivans contiennent la pratique de l'art de jetter les bombes.*

## PROBLÊME IV.

329. *TROUVER par un ſeul jet de bombe à telle inclinaiſon du mortier qu'on voudra, la force du jet, & par conſequent l'étendue ou la portée de tous les jets poſſibles par cette même charge de poudre.*

### I. CAS. *Quand on eſt dans une plaine.*

FIG. VII. IL faut donner au mortier l'inclinaiſon $CAK$ qu'on voudra, & lui donner auſſi la charge quelconque de poudre dont on voudra trouver la force, & la remarquer ; & après avoir jetté une bombe, remarquer le point $K$ ſur l'horizontale $AK$ où elle ſera tombée, & meſurer la diſtance horizontale $AK$, qu'on ſuppoſe, par exemple, de 1000 toiſes ; le quart de la portée $AK$, qui eſt dans l'exemple 250 toiſes, ſera le côté horizontal $BC$ d'un triangle rectangle $ABC$ qui convient à ce jet : Ainſi l'on connoît dans ce triangle rectangle $ABC$, le côté horizontal $BC$ de 250 toiſes ou parties égales, l'angle $ACB$ égal à l'angle d'inclinaiſon du mortier qu'on a choiſi, & l'angle droit $ABC$ ; le côté vertical $BA$ & l'hypothenuſe $AC$ ſeront donc connus par la trigonometrie, ou en faiſant un triangle rectangle ſemblable ; & cela ſuppoſé,

La figure ſeule fait voir qu'il n'y a qu'à faire $AB . AC :: AC . AH$, & $AH$ ſera la force du jet*. Mais pour faire
*322. voir l'uſage de l'Analyſe, voici la réſolution analytique.

Soit $z$ la force du jet que l'on cherche, $AB = b$, $BC = c$, $AC = e$.

*320. La viteſſe par $AC$ ($e$) eſt $\sqrt{z}$* ; la viteſſe par $AB$ ($b$) eſt $\sqrt{b}$.

*304. L'on aura donc, * $\sqrt{z} . \sqrt{b} :: AC (e) . AB (b)$ ; par conſequent $b\sqrt{z} = e\sqrt{b}$, & $z = \frac{ee}{b} = \frac{\overline{AC}^2}{BA} = AH$ ; ainſi mettant le nombre des toiſes qui ſont les valeurs de $b$ & de $e$, à leur place, on aura le nombre des toiſes de $HA$ qui eſt la force du jet que l'on cherchoit. Et tirant par $C$ la perpendiculaire $CH$ à $AC$ juſqu'à la rencontre $H$ de $BA$ prolongée, $HA$ ſera la ligne qu'on cherchoit qui exprime la force du jet.

FIG. VIII. Faiſant $HA$ le diametre d'un demi-cercle, & menant à tous les degrés les cordes $AC$, $AE$, $AG$, &c. & tirant les perpendiculaires horizontales $CB$, $ED$, $GF$, &c. les cordes marqueront les directions de tous les jets poſſibles par cette force ; les horizontales marqueront le quart de l'étendue de ces jets ; & le diametre $HA$ ſera la moitié de l'étendue du jet de 45 degrés. *Ce qu'il falloit trouver.*

### II. CAS. *Quand on eſt ſur un terrain inégal, & que la bombe tombe ſur une hauteur ou dans un lieu plus bas que le mortier.*

FIG. IX. LE mortier ſoit en $A$, l'horizontale qui paſſe par $A$ eſt

$ARK$ ; on donnera au mortier telle inclinaiſon $CAK$ qu'on voudra, mais quand on l'aura choiſie, elle eſt déterminée & connue ; on donnera auſſi au mortier la charge quelconque de poudre dont on voudra trouver la force, il faudra la remarquer ; il faudra enſuite jetter une bombe avec cette charge ; & ſuppoſé qu'elle tombe ſur le lieu $Q$ plus élevé que le mortier, ou au lieu $q$ plus bas que le mortier en $A$, il faudra meſurer la diſtance $AQ$ ou $Aq$, l'angle $QAR$ ou $qAR$, ce qui donnera l'angle $PAQ$ ou $PAq$ ; il faudra trouver par la Geometrie pratique la verticale $QR$ ou $qR$, l'horizontale $AR$ & $PR$ ; ce qui donnera auſſi $PQ$ ou $Pq$. Ces choſes ſuppoſées, on trouvera ainſi l'étendue du jet qu'on ſuppoſe être $AK$ ou $Ak$, après avoir tiré la verticale $KS$ ou $ks$ juſqu'à la rencontre de $AC$ prolongée.

Soient les connues $AR=r$, $QR$ ou $qR=q$, $PR=p$, $PQ=p-q$, ou $Pq=p+q$ ; l'inconnue $AK$ ou $Ak=z$ ; on aura, à cauſe des triangles ſemblables, $ARP$, $AKS$, ou $Aks$ ; $AR\,(r).\,PR\,(p)::AK$ ou $Ak\,(z).\,KS$ ou $ks=\frac{pz}{r}$.

La viteſſe de la bombe, ſuivant la direction inclinée $ACPS$, eſt uniforme, comme auſſi la viteſſe ſuivant l'horizontale $ARK$, ainſi cette viteſſe horizontale demeurant la même, les temps employés à parcourir $AR$, $AK$ ou $Ak$, ſont comme ces longueurs $AR\,(r)$ & $AK$ ou $Ak\,(z)$, & on les peut prendre pour marquer ces temps ; mais dans le temps que la bombe auroit parcouru $AR\,(r)$, la viteſſe qu'elle a perdue par ſa peſanteur ſuivant la direction verticale, l'a empêchée de parcourir $PQ$ ou $Pq\,(p\mp q)$, puiſqu'on ſuppoſe qu'elle eſt tombée en $Q$ ou en $q$ ; & dans le temps qu'elle auroit parcouru l'étendue $AK$ ou $Ak\,(z)$, la viteſſe perdue l'auroit empêchée de parcourir la verticale $SK$ ou $sk\,(\frac{pz}{r})$, ce qui donne
* $PQ\,(p-q)$ ou $Pq\,(p+q).\,SK$ ou $sk\,(\frac{pz}{r})::\overline{AR}^2\,(rr).$ * 309.
$\overline{AK}^2$ ou $\overline{Ak}^2\,(zz)$ ; d'où l'on déduira $AK$ ou $Ak\,(z)=\frac{pr}{p\mp q}$ ; c'eſt-à-dire $PQ$ ou $Pq\,(p\mp q).\,PR\,(p)::AR\,(r).\,AK$ ou $Ak=z=\frac{pr}{p\mp q}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

L'étendue $AK$ du jet étant connue, on trouvera la force $HA$ du jet, & l'étendue de tous les jets poſſibles par cette force de poudre, comme dans le premier cas.

### III. CAS. *Quand on eſt ſur une hauteur comme une tour ou un baſtion, qu'il y a une plaine au pied, & qu'on donne une direction horizontale au mortier.*

FIG. VIII. ON donnera au mortier qu'on ſuppoſe en *B* ſur la hauteur *AB*, dont la direction eſt ſuivant l'horizontale *BC*, la charge de poudre dont on voudra trouver la force, & il faudra la remarquer, comme auſſi le point *O* où l'on ſuppoſe que tombera la bombe ſur l'horizontale *AO*; & meſurer la hauteur *AB*, qu'on nommera $b$, & l'horizontale *AO*, qu'on nommera $a$.

Pour trouver la force du jet *HA*, qu'on nommera $x$, on fera ce raiſonnement : La viteſſe acquiſe par la chûte de *HA* ($x$) qui eſt $\sqrt{x}$, eſt à la viteſſe acquiſe par la chûte de *AB* ($b$) qui eſt $\sqrt{b}$; comme la longueur horizontale *AO* ($a$) parcourue par la premiere d'un mouvement uniforme, eſt à deux fois la hauteur *BA* ou 2*BA* ($2b$) que la ſeconde auroit fait parcourir à la bombe d'un mouvement uniforme dans le temps qu'elle eſt deſcendue par ſa peſanteur d'un mouvement acceleré de la hauteur *AB* ou *NO*; d'où l'on déduira $2b\sqrt{x} = a\sqrt{b}$, & $x = \frac{aa}{4b}$; ce qui donne, *BA* ($b$). $\frac{1}{2}AO\,(\frac{1}{2}a) :: \frac{1}{2}AO\,(\frac{1}{2}a).\ AH = x = \frac{aa}{4b}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

La force du jet étant découverte, on trouvera, comme dans le premier cas, l'étendue de tous les jets poſſibles par cette force.

### REMARQUE.

ON peut par ce quatriéme Problême trouver la force de toutes les charges de poudre, la plus grande étendue de chacune de ces forces, qui eſt double de la force, & les étendues de tous les jets poſſibles par chacune de ces forces, & en faire une table.

## PROBLÊME V.

330. *FAIRE tomber une bombe ſur l'endroit qu'on voudra, avec une charge de poudre telle qu'on voudra choiſir, dont la force eſt ſuppoſée connue par le quatriéme Problême; pourvû que cet endroit ne ſoit pas hors de la portée de la force de la poudre dont on veut ſe ſervir, ce que la réſolution analytique fera même connoître.*

### I. CAS. *Quand l'endroit où l'on veut faire tomber la bombe eſt ſur le plan horizontal qui paſſe par le mortier, c'eſt-à-dire dans une plaine.*

LA queſtion ſe réduit à trouver l'inclinaiſon $CAK$ qu'il Fig. VIII. faut donner au mortier, afin qu'avec la force qu'on a choiſie, qu'on ſuppoſe repréſentée par $HA$, la bombe ſoit jettée à l'endroit $K$ de l'horizontale $AK$ qui paſſe par le mortier qu'on ſuppoſe en $A$; on ſuppoſe auſſi cette diſtance horizontale $AK$ connue par la Geometrie pratique. Pour trouver l'inclinaiſon $CAK$, il eſt évident qu'il ſuffit de trouver le côté vertical $BA$ du triangle $BAC$.

Soit la force connue du jet $HA = d$, la diſtance horizontale auſſi connue $AK = h$; par conſequent le côté horizontal $BC =$ * $\frac{1}{4} AK = \frac{1}{4} h$. Soit le côté vertical que l'on * 325. cherche $BA = x$, d'où l'on aura $HB = d - x$.

*Réſolution.* La viteſſe par l'horizontale $AK$ ($h$), qui eſt $\sqrt{d-x}$*, fera parcourir cette horizontale $AK$ ($h$) par un * 320. mouvement uniforme dans le temps que la bombe montera à la plus grande hauteur du jet qui eſt égale à $AB$ ($x$), & deſcendra de la même hauteur juſqu'à l'horizontale à l'endroit $K$, c'eſt-à-dire, dans le temps que la viteſſe par la verticale $AB$ ($x$) qui eſt $\sqrt{x}$*, lui feroit parcourir d'un mou- * 320. vement uniforme $4AB$ ($4x$); par conſequent $\sqrt{d-x} . \sqrt{x} :: AK (h) . 4AB (4x)$; d'où l'on déduira $xx - dx + \frac{1}{16} hh = 0$. Les deux valeurs de $x$ dans cette équation ſont poſitives; la premiere eſt * $x = \frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd - \frac{1}{16} hh}$; la ſeconde, * 76. $x = \frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd - \frac{1}{16} hh}$; ce qui fait voir qu'il y a deux inclinaiſons du mortier par leſquelles on feroit tomber la bombe au même endroit $K$ de l'horizontale $AK$, & on les trouvera en mettant dans ces valeurs de $x$ à la place de $d$ & de $h$, les nombres de toiſes qui leur ſont égaux; car $HA$ Fig. VIII. & $BA$ étant connues, le triangle rectangle $ABC$ eſt connu, & la poſition de la corde $AC$ qui eſt la direction du mortier.

## REMARQUES.

### I.

ON trouveroit la même réſolution par la ſeule proprieté de la 8^e figure; car $HB (d-x) . BC (\frac{1}{4} h) :: BC (\frac{1}{4} h) . BA (x)$; d'où l'on déduit la même équation $xx - dx + \frac{1}{16} hh = 0$.

### I I.

Quand $d = \frac{1}{2}h$, c'eſt-à-dire quand la force du jet $HA$ ($d$) eſt égale à la moitié de l'étendue $AK$ ($h$), les valeurs de $BA$ ($x$) ſont la ſeule grandeur $\frac{1}{2}d$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}HA$, ce qui convient à l'inclinaiſon de 45 degrés.

### I I I.

Il eſt évident que le Problême eſt poſſible dans tous les cas où $\frac{1}{4}h$ eſt moindre que $\frac{1}{2}d$, ou eſt égale à $\frac{1}{2}d$; ou, ce qui eſt la même choſe, quand $\frac{1}{2}h$ eſt moindre que $d$ ou égale à $d$; & qu'il eſt impoſſible dans tous les cas où $\frac{1}{2}h$ ſurpaſſe $d$, c'eſt-à-dire, quand le point $K$ eſt hors de la plus grande portée
*327. ou de la plus grande étendue du jet qui eſt égale à $2d$.*

## SECOND CAS DU CINQUIÉME PROBLÊME.

*Quand l'endroit ſur lequel on veut jetter la bombe eſt plus élevé ou plus bas que l'horizontale qui paſſe par le mortier, comme quand on veut la jetter ſur le flanc d'un baſtion, ſur une tour, ſur quelqu'endroit d'un fort qui eſt ſur une montagne, ou quand le mortier eſt lui-même ſur une montagne.*

FIG. IX. LA queſtion ſe réduit comme au premier cas, à trouver le côté vertical $AB$ du triangle rectangle $ABC$, qui fera connoître la direction de la corde $AC$ qu'il faut donner au mortier pour faire tomber la bombe, avec la force de poudre $HA$ qu'on ſuppoſe connue, ſur l'endroit $Q$, qu'on ſuppoſe élevé ſur l'horizontale $ARK$ qui paſſe par le mortier $A$, ou ſur l'endroit $q$ plus bas que le mortier.

Pour trouver $BA$, il faut meſurer l'angle $QAR$ ou $qAR$, & trouver par la Geometrie pratique l'oblique $AQ$, la verticale $QR$ ou $qR$, & l'horizontale $AR$; & ſuppoſant $HA = d$, $AQ$ ou $Aq = a$, $AR = r$, $QR$ ou $qR = q$,
*288. & l'inconnue $AB$ qu'on cherche $= x$; l'on aura $BC =$* $\sqrt{dx - xx}$; l'étendue du jet $AK$ ou $Ak$, qui eſt quadruple
*325. * de $BC = 4\sqrt{dx - xx}$; la verticale $KS$ ou $ks = 4BA = 4x$; & à cauſe des triangles ſemblables $KAS$, $PAR$, on aura $AK\,(4\sqrt{dx - xx})\,.\,KS\,(4x) :: AR\,(r)\,.\,PR = \frac{rx}{\sqrt{dx - xx}}$;

d'où l'on déduira $PQ = PR - QR = \frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$, & $Pq = \frac{rx + q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$. On ſe contentera de donner la réſolution du Problême par raport à *PQ*; le Lecteur pouvant facilement l'appliquer à *Pq*.

*Réſolution.* La bombe qu'on ſuppoſe jettée ſuivant la direction *ACPS*, rencontre la hauteur *Q* dans le temps que par le mouvement horizontal uniforme, elle auroit parcouru *AR*; & s'il n'y avoit pas eu de hauteur *Q*, elle ſeroit tombée au point *K* ſur l'horizontale *AK*, dans le temps que par le mouvement uniforme, elle auroit parcouru l'horizontale *AK*; ainſi la viteſſe étant uniforme, c'eſt-à-dire la même par l'horizontale *ARK*, les temps par *AR* & par *AK**, peuvent *303. s'exprimer par ces longueurs. Mais dans le temps du mouvement uniforme par *AR*, la viteſſe verticale que la peſanteur a fait perdre à la bombe, l'a empêchée de parcourir *PQ*; & dans le temps du mouvement uniforme par *AK*, la viteſſe verticale que la peſanteur lui auroit fait perdre, l'auroit empêchée de parcourir *SK*; par conſequent* $\overline{AR}^2\,(rr) \,.$ *309. $\overline{AK}^2\,(16 \times \overline{dx - xx}) :: PQ\left(\frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx-xx}}\right) \cdot KS\,(4x)$; ce qui donne cette équation $4rrx = 16 \times \overline{dx - xx} \times \frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$, qui ſe réduit à $xx - \frac{drr - 2dqq - \frac{1}{2}rrq}{rr + qq} \times x + \frac{\overline{\frac{rr}{4} + dq}^2}{rr + qq} = 0.$

Cette équation a deux racines poſitives*, ainſi il y a deux * 29. valeurs de *BA* ($x$) qui donnent deux angles d'inclinaiſon Cor. 8. pour le mortier, par chacune deſquelles on lui fera jetter la bombe ſur l'endroit *Q*; ces deux valeurs ſont *AB* ($x$)

$$= \frac{drr + 2dqq + \frac{1}{2}rrq}{2 \times \overline{rr + qq}} \pm \sqrt{\frac{\overline{drr + 2dqq + \frac{1}{2}rrq}^2}{2 \times \overline{rr + qq}^2} - \frac{\overline{\frac{rr}{4} + dq}^2}{rr + qq}}.$$

Mais à cauſe du triangle rectangle *AQR*, $\overline{AQ}^2(aa) = \overline{AR}^2\,(rr) + \overline{QR}^2\,(qq)$; ainſi mettant aux dénominateurs $aa$ à la place de $rr + qq$, & aux numerateurs $aa - qq$ à la place de $rr$, les deux valeurs de *AB* ſeront

$$AB\,(x) = \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{4}q + \overline{d - \tfrac{1}{2}q} \times \tfrac{qq}{2aa} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{4}q + \overline{d - \tfrac{1}{2}q} \times \tfrac{qq}{2aa}}^2 - \overline{\tfrac{1}{4}a - \overline{q + 4d} \times \tfrac{q}{4a}}^2}.$$

Par exemple, ſuppoſé que la force de la poudre *HA* ($d$) ſoit de 300 toiſes; l'éloignement *AQ* ($a$) de 320 toiſes; la hauteur *QR* ($q$) de 83 toiſes; en ſubſtituant ces valeurs de $d$,

$a$, $q$, à leur place dans les valeurs de *AB* ($x$), on trouvera que la plus petite eſt de 85 toiſes, & la plus grande de 273 toiſes. Ainſi partageant le diametre *HA* du demi cercle en 300 parties égales, prenant, 1°. *AB* de 85 parties, & tirant la perpendiculaire *BC*, la corde *AC* ſera la premiere direction qu'il faut donner au mortier pour faire tomber la bombe en *Q*. 2°. Prenant *AF* de 273 parties, & tirant la perpendiculaire *FG*, la corde *AG* ſera la ſeconde direction qu'il faut donner au mortier pour le même effet.

## REMARQUES.

### I.

LE Problême eſt toujours poſſible quand la quantité négative qui eſt dans les deux valeurs de $x$ ſous le ſigne $\surd$, eſt moindre que la poſitive qui eſt ſous le même ſigne $\surd$, ou quand elle lui eſt égale; & il eſt impoſſible * quand elle eſt plus grande. * 78.

### II.

Si l'angle d'inclinaiſon du mortier *CAK* étoit donné, & qu'on voulût trouver la charge de poudre, c'eſt-à dire, la force du jet propre à faire tomber la bombe à l'endroit *Q*, dans cette ſuppoſition l'angle *PAR* eſt connu, & l'on trouvera par la Geometrie pratique les lignes *AQ* ($a$), *AR* ($r$), *QR* ($q$), *PR*, qu'on nommera $p$; nommant auſſi l'étendue inconnue du jet *AK* ($z$), on trouvera par le ſecond cas du quatriéme Problême l'étendue *AK* ($z$), *BC* ($\frac{1}{4}$ *AK* $= \frac{1}{4} z$); enſuite on trouvera la force du jet *HA* ($d$) que l'on cherchoit, comme dans le quatriéme Problême. FIG. IX.

---

## *Uſage de l'Analyſe pour trouver le centre de peſanteur des corps peſans.*

Principes que l'on ſuppoſe pris des traités de Méchanique.

### PREMIERE DE'FINITION.

331. UN *levier* eſt une ligne droite comme *AB*, qu'on ſuppoſe inflexible & que l'on conſidere, pour l'exactitude des démonſtrations, comme n'ayant aucune peſanteur. On y diſtingue trois choſes, 1°. Un de ſes points, ſoit à l'une ou l'autre de ſes extrêmités *A* ou *B*; ou entre les extrêmités comme *C*, ſur FIG. IV.

ſur lequel il eſt appuyé, ou par lequel il eſt ſuſpendu ; & on appelle ce point *l'appui* ; 2°. Un poids attaché à un point de ce levier comme en $A$ ou $B$, ou $C$, &c. ou quelqu'autre force qui tire ce levier par ce point ; 3°. Une autre force à un autre point du même levier, qui tire auſſi le levier par ce point.

### PREMIERE SUPPOSITION.

332. LE levier $AB$ étant ſuppoſé horizontal, appuyé ou ſuſpendu au point $C$, & deux poids $A$ & $B$ aux extrêmités ; ſi le poids $A$ eſt au poids $B$, reciproquement comme la diſtance $BC$ où eſt $B$ de l'appui $C$, à la diſtance $AC$ où eſt $A$ du même appui $C$, ces deux poids $A$ & $B$ ſeront en équilibre : Et reciproquement ſi $A$ & $B$ ſont en équilibre, l'on aura $A . B :: BC . AC$. FIG. IV.

Ainſi ſuppoſant le plus petit poids $A = p$, le plus grand $B = np$, le raport $\frac{BC}{AC} = \frac{p}{np} = \frac{1}{n}$ : Suppoſant la diſtance $BC = d$, & par conſequent la diſtance $AC = nd$ ; l'on aura $A \times AC (ndp) = B \times BC (ndp)$.

### COROLLAIRE I.

333. SI au lieu des poids $A$ & $B$ attachés aux extrêmités du levier, l'on conçoit deux corps $A$ & $B$ qui choquent ou qui tirent les extrêmités du levier, ſçavoir $A$ avec la viteſſe $v$, & $B$ avec la viteſſe $u$ ; $A \times v$ ſera la force avec laquelle $A$ agit au point $A$, & $B \times u$ ſera la force avec laquelle $B$ agit au point $B$ ; par conſequent ſi $A \times v . B \times u :: BC . AC$, il y aura équilibre entre ces deux forces ; & s'il y a équilibre, $A \times v . B \times u :: BC . AC$ ; d'où l'on déduit $A \times v \times AC = B \times u \times BC$.

### SECONDE DE'FINITION.

334. LE point $C$ d'un levier, dont les diſtances $CA$, $CB$ des poids $A$ & $B$ qui ſont aux points $A$ & $B$ du levier, ſont entr'elles reciproquement comme ces poids, s'appelle le *centre de peſanteur* de ces poids ; la ligne tirée de ce centre $C$ perpendiculairement à l'horizon, s'appelle *la ligne de direction* de ce centre, ou ſimplement la ligne de direction. La peſanteur de chacun des poids conſiderés ſeparés du levier, s'appelle leur peſanteur ou leur force *abſolue* ; comme auſſi

le produit $A \times v$ ou $B \times u$ de la maſſe de chacun des deux corps $A$ & $B$ en mouvement (qui choqueroient ou tireroient le levier aux points $A$ & $B$) par leur viteſſe $v$ ou $u$, en les conſiderant ſans raport au levier, s'appelle auſſi *la force abſolue* de chacun de ces corps. Mais le produit de la peſanteur abſolue de chacun des poids $A$ & $B$, ou de leur force abſolue, par la diſtance où eſt ce poids ou ce corps du centre de peſanteur ou de l'appui $C$, s'appelle *l'effort* de ce poids ou de cette force ſur le levier; on le nomme en latin *momentum.* Ainſi $A \times AC$, $B \times BC$, $A \times v \times AC$, $B \times u \times BC$, ſont les efforts des poids $A$ & $B$, & des forces $A \times v$ & $B \times u$, agiſſant l'une ſur l'autre par le moyen du levier.

## SECONDE SUPPOSITION.

*335. FIG. IV. SI le levier eſt appuyé ou ſoutenu à ſes deux extrêmités $A$ & $B$, & qu'il y ait un poids $C$ à un point quelconque $C$ entre les points $A$ & $B$, les appuis en $A$ & en $B$ ſoutiennent chacun une partie du poids $C$, & la partie que le poids $C$ communique à l'appui $A$, eſt à la partie qu'il communique à l'appui $B$, réciproquement comme la diſtance $BC$ eſt à la diſtance $AC$.

Ainſi nommant $a$ la partie de ſa peſanteur que le poids $C$ communique à l'appui $A$, & $b$ celle qu'il communique à l'appui $B$; l'on aura $a . b :: BC . AC$; d'où il ſuit que $a + b$ ou le poids entier $C . b :: AB . AC$; & l'on aura auſſi $a + b . a :: AB . BC$; c'eſt-à-dire, le poids entier $C$ eſt à la partie de ſa peſanteur qu'il communique, par exemple, à l'appui $B$, comme la diſtance $AB$ entre les deux appuis, eſt à la diſtance $CA$ du point $C$ de l'autre appui $A$.

S'il n'y avoit qu'un appui en $A$, & qu'en $B$ ce fût ſeulement quelque force qui reſiſtât à l'effort que le poids $C$ communique au point $B$, il eſt clair que ce ſeroit la même choſe que s'il y avoit un appui au point $B$, & que le poids $C$ communiqueroit au point $B$ la même partie de ſa peſanteur.

Si au lieu du poids $C$, c'étoit un corps en mouvement qui pouſsât ou tirât le point $C$, & que la viteſſe de ce corps fût $v$, il eſt évident qu'il faudroit prendre la force $C \times v$ pour le poids $C$, & que cette force ou quantité de mouvement ſe diſtribueroit aux points $A$ & $B$ en raiſon réciproque des diſtances $AC$, $BC$.

## TROISIE'ME SUPPOSITION.

336. QUAND les directions $AD$, $BE$ des forces ou des poids qui tirent les points $A$ & $B$ du levier, ne ſont pas perpendiculaires au levier $AB$, il faut tirer de l'appui $C$ des perpendiculaires $CD$, $CE$ aux directions $AD$, $BE$ des forces, & prendre ces perpendiculaires ou ces diſtances des directions des forces ou des poids, pour les diſtances où ſont les forces ou les poids de l'appui $C$, & mettre ces diſtances des directions pour les diſtances des forces dans la ſeconde ſuppoſition qui précede. Fig. X. & XI.

Cependant dans le cas où les directions des forces ſont paralleles entr'elles, on peut prendre $AC$ & $CB$ pour les éloignemens où ſont les forces ou les poids de l'appui $C$, parcequ'elles ont le même raport $AC \,.\, CB :: CD \,.\, CE$. Fig. X.

## QUATRIE'ME SUPPOSITION.

337. IL y a dans tous les corps peſans, c'eſt-à-dire dans toutes les figures peſantes, un point qu'on appelle *le centre de peſanteur* de la figure, par la ligne de direction duquel la figure étant ſuſpendue ou ſoutenue, toutes les parties de la figure demeurent en équilibre ou en repos.

Ainſi on peut concevoir un corps peſant comme compoſé d'une infinité de petits poids, qui deux à deux ſe tiennent en équilibre par un levier qui paſſe par le centre commun de peſanteur de tout le corps peſant.

### *Propoſition fondamentale pour trouver le centre de peſanteur.*

338. CONCEVANT un plan proche d'un corps peſant P, & partageant par l'eſprit le corps peſant en autant de petits poids qu'on voudra, qu'on nommera $a$, $b$, $d$, $e$, $f$, &c. pour rendre la choſe plus claire; ſi des centres de peſanteur de chacun de ces petits poids, on conçoit des lignes droites menées perpendiculairement à ce plan, nommant $\alpha$ celle qui eſt tirée du centre de peſanteur du petit poids $a$; $\beta$, celle qui eſt tirée de $b$, &c. ſi l'on conçoit auſſi la perpendiculaire $\kappa$ menée du centre commun de peſanteur $C$ à ce même plan, la ſomme des produits $a\alpha + b\beta + d\delta + e\varepsilon +$ &c. de chacun des petits poids par ſa perpendiculaire, eſt égale au ſeul produit $\kappa \times P$ de la perpendiculaire $\kappa$ du centre de peſanteur multipliée

par le corps peſant entier ; ou, ce qui eſt la même choſe par la ſomme des petits poids $a, b, d,$ &c. c'eſt-à-dire $a\alpha + b\beta + d\delta + e\varepsilon +$ &c. $= \kappa \times \overline{a + b + d + e} +$ &c. $= \kappa \times P$.

FIG. XII. Pour découvrir la verité de cette propoſition par l'Analyſe, il ſuffit de conſiderer deux des petits poids dans leſquels on conçoit le corps peſant partagé. Ces deux petits poids ſoient $a$ & $b$ ; le levier par le moyen duquel on les conçoit en équilibre ſoit $aCb$, qui paſſe par le centre de peſanteur commun $C$, lequel point $C$ eſt comme l'appui de ce levier ; le poids $a$ ſoit nommé $a$, le poids $b$ ſoit $= na$ ; ainſi * $a . na :: bC . aC$, & $a . a + na :: bC . ba$ ; ainſi $\frac{a}{a+na} = \frac{1}{1+n} = \frac{bC}{ba}$. * 332.

La ligne $\beta\kappa\alpha$ repréſente le plan qui eſt proche du corps peſant ; & $b\beta$, qu'on nommera $\beta$, eſt la ligne perpendiculaire tirée du centre de peſanteur du petit poids $b$ au plan $\beta\kappa\alpha$ ; $Cd\kappa$, qu'on nommera $\kappa$, eſt la perpendiculaire tirée du centre commun de peſanteur $C$ au même plan ; & $ae\alpha$ eſt la perpendiculaire menée du centre de peſanteur du petit poids $a$ au même plan. On menera $bde$ parallele à ce plan $\beta\kappa\alpha$ ; & les trois lignes $b\beta$, $d\kappa$, $e\alpha$, ſont égales entr'elles, & chacune eſt $= b\beta\,(\beta)$ ; $Cd = C\kappa - d\kappa = \kappa - \beta$. Il faut démontrer que $b \times b\beta + a \times a\alpha = C\kappa \times \overline{b + a}$.

A cauſe des triangles ſemblables $abe$, $Cbd$, on aura $bC . ba\,(1 . 1 + n) :: Cd\,(\kappa - \beta) . ae = \kappa - \beta + \kappa n - \beta n$ ; Ainſi $ae + e\alpha = \kappa + \kappa n - \beta n$. Or le produit de $b \times b\beta = a\beta n$ ; (à cauſe de $b = an$, & de $b\beta = \beta$) ; celui de $a$ par $a\alpha = a\kappa + a\kappa n - a\beta n$ ; ainſi $b \times b\beta + a \times a\alpha = a\kappa + a\kappa n$. Le produit de la ſomme des deux petits poids $a$ & $b$ par $C\kappa$, eſt auſſi $\overline{a + an} \times \kappa = a\kappa + a\kappa n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE.

339. IL eſt évident que ce qu'on vient de démontrer pour deux des petits poids dans leſquels on conçoit qu'un corps peſant eſt partagé, convient à tous ; & qu'ainſi pour trouver la diſtance du centre de peſanteur d'un corps à un plan, il faut trouver la ſomme des produits de tous les petits poids dans leſquels on peut concevoir le corps partagé par les lignes perpendiculaires tirées de chacun à ce plan, c'eſt-à-dire, la ſomme des produits de chacune de ces perpendiculaires multipliée par ſon petit poids, & diviſer cette ſomme par la ſomme de tous les petits poids, c'eſt-à-dire, par le

corps entier, & le quotient ſera la perpendiculaire tirée du centre de peſanteur du corps à ce plan, c'eſt à-dire ſa diſtance de ce plan.

### AVERTISSEMENT.

ON pourroit ici trouver par analyſe, en ſe ſervant du calcul ordinaire, le centre de peſanteur des differentes figures; mais la méthode étant bien plus aiſée en ſe ſervant du calcul differentiel & du calcul integral, on n'en parlera que dans les parties ſuivantes; il ſuffit ici d'avoir démontré le principe de la méthode par le calcul ordinaire.

---

## *Uſage de l'Analyſe pour trouver le centre d'oſcillation des pendules compoſés ; ce qui ſert à donner la regularité aux horloges.*

### AVERTISSEMENT.

340. LA regularité des horloges dépend de ce qui en modere le mouvement; l'on n'a rien trouvé qui le fît avec plus de juſteſſe que les pendules, parceque l'on a découvert l'art de faire en ſorte qu'un pendule fît toutes ſes vibrations chacune d'une égale durée, c'eſt-à-dire, que l'effort du poids de l'horloge agiſſant par le moyen des roues & des pignons ſur le pendule quelquefois un peu plus fort, d'autre fois un peu moins fort, on a trouvé le moyen de faire que les plus grandes & les moindres vibrations du pendule ſe fiſſent en des temps égaux, ou fuſſent chacune d'une même durée. Ainſi donnant aux roues & aux pignons de l'horloge le nombre de dents propres à faire que l'effort du poids ne pouſſe le pendule que de ſecondes en ſecondes, ce qui eſt facile, il ne faut plus que trouver un pendule qui faſſe chacune de ſes vibrations en une ſeconde de temps; & l'on aura une horloge qui ſera la meſure exacte du temps. Pour cela il faut trouver deux choſes, la premiere eſt qu'en ſe ſervant d'un pendule compoſé, c'eſt-à-dire, qui a deux ou pluſieurs poids (ce qui ſert à avancer ou à retarder facilement l'horloge, quand elle en a beſoin) il faut trouver l'endroit où doit être placé chacun des poids, afin que les vibrations ſe faſſent chacune en un temps donné, comme en une ſeconde; la ſeconde, quelle eſt la courbe que doit décrire le point du pendule où l'on

conçoit que l'effort des poids eſt réuni, afin que les durées de chacune des vibrations ſoient égales, & le moyen de faire décrire cette courbe à ce point là dans les horloges. L'Analyſe fait trouver l'une & l'autre de ces deux choſes. Voici la premiere.

## DE'FINITION.

341. Fig. XIII. UN *pendule ſimple* eſt une ligne infléxible *SC*, qu'on conſidere comme n'ayant aucune peſanteur, qui eſt ſuſpendue à un point *S*, qu'on appellera le point de ſuſpenſion, au bout de laquelle eſt un poids *C*, & l'on conçoit que le poids *C* eſt comme réuni au point *C* qui eſt l'extrêmité de la ligne. La diſtance *SC* du point de ſuſpenſion juſqu'à ce point *C*, eſt la longueur du pendule ſimple. Si l'on retire un peu le pendule de la ſituation verticale, il fera de petites vibrations qui ſeront ſenſiblement d'une égale durée.

Fig. XIV. & XV. *Un pendule compoſé* eſt celui où il y a pluſieurs poids enfilés par la même ligne infléxible, & l'on conſidere ici chacun de ces poids comme ſi ce n'étoit qu'un point. La diſtance depuis le point de ſuſpenſion *S* d'un pendule compoſé juſqu'au point *C* (fig. 14), & juſqu'au point *K* (fig. 15), que l'on ſuppoſe égale à la longueur d'un pendule ſimple *iſochrone*, c'eſt-à-dire, qui feroit ſes vibrations dans le même temps que le pendule compoſé, s'appelle *la diſtance du centre d'oſcillation*; & le point *C* ou *K* s'appelle *le centre d'oſcillation.*

## PREMIERE DEMANDE.

342. Fig. XIV. & XV. DANS un même pendule compoſé, qu'on ſuppoſe infléxible, les poids differens comme *A, L,* (fig. 14), & *A, B, L,* (fig. 15), ne ſçauroient ſe mouvoir qu'ils ne décrivent dans le même temps des arcs ſemblables *AQ*, *LP*; par conſéquent le temps étant le même, les viteſſes des poids ſont neceſſairement entr'elles comme ces arcs; & ces arcs comme leurs rayons *SA, SL*: ainſi les viteſſes des poids *A* & *L* ſont comme leurs diſtances *AS, LS*, du point de ſuſpenſion.

## SECONDE DEMANDE.

343. L'EFFORT de la peſanteur ſur les corps peſans leur imprime au premier inſtant de leur chûte à chacun un même petit degré de viteſſe, qu'on nommera 1. Ainſi le produit

de chaque poids par 1, par exemple $A \times 1$, $L \times 1$, &c. ou $A$, $L$, eſt * la quantité du mouvement de chaque poids au * 299. premier inſtant de la chûte.

## PROBLÊME I.

*TROUVER la diſtance du centre d'oſcillation d'un pendule composé, c'eſt-à-dire, la longueur du pendule ſimple qui feroit ſes vibrations dans le même temps que le pendule composé, & qu'on appelle iſochrone.*

### PREMIER CAS.

*Lorſque le pendule composé a deux poids* A *&* L.

344. SOIT le poids $A = a$, le poids $L = l$, la diſtance $SA = e$, Fig. XIV. la diſtance $SL = f$; la longueur inconnue $SC$ du pendule ſimple iſochrone, ou la diſtance du centre d'oſcillation du pendule composé ſoit $= z$. Soit auſſi le mouvement inconnu du poids $A$ ($a$) dans le pendule composé au premier inſtant de la deſcente $= y$; le diviſant par le poids * $A$ ($a$), on aura * 299. la viteſſe du poids $A$ ($a$) dans le pendule composé $= \frac{y}{a}$. Mais dans le premier inſtant la viteſſe $\frac{y}{a}$ du poids $A$ dans le pendule composé, eſt à la viteſſe du poids $C$ dans le pendule ſimple iſochrone, ou du point $C$ dans le composé qui eſt à la même diſtance $SC$, laquelle viteſſe eſt 1 dans le même premier inſtant par la ſeconde demande, comme la diſtance $SA$ ($e$) eſt à la diſtance $SC$ ($z$) par la premiere demande: Donc $SC$ ($z$) $= \frac{ae}{y}$. Ainſi il ne s'agit plus que de trouver la valeur de $y$ pour avoir celle de $SC$ ($z$). Voici comment on la trouve.

La peſanteur au premier inſtant de la deſcente des poids $A$ ($a$) & $L$ ($l$) du pendule composé, leur imprime à chacun la même viteſſe 1 (par la ſeconde demande) ainſi leur quantité de mouvement eſt $a \times 1$, $l \times 1$, ou $a$ & $l$: mais le poids $A$ ($a$) à cauſe du pendule infléxible, ne peut pas dans ce même inſtant parcourir une longueur qui ſoit égale à celle que parcourt le poids $L$ ($l$), mais il eſt neceſſité par le pendule à parcourir une longueur $AQ$ moindre que celle que parcourt $l$ qui eſt $LP$; le poids $a$ perd donc une partie du mouvement $a \times 1$ que lui donne la peſanteur, & il retient ſeulement la partie $y$ de ce mouvement laquelle nous cherchons; & l'autre partie qui eſt $a \times 1 - y$, ou $a - y$, eſt celle

qu'il perd. Cette partie perdue $a - y$ ſe diſtribue au point
* 335. de ſuſpenſion $S$ & au poids $L$ ($l$) *; la partie de cette perte
$a - y$ qui ſe communique au point de ſuſpenſion, doit s'y
perdre entierement, parceque ce point eſt immobile. L'autre
partie de la perte $a - y$ qui ſe diſtribue au poids $l$, ſe trouve
* 335. ainſi * $SL(f) . SA(e) :: a - y . \frac{ae-ey}{f}$; par conſequent la
quantité de mouvement que reçoit de la peſanteur au premier
inſtant le poids $l$, qui eſt $l \times 1$, eſt augmentée de $\frac{ae-ey}{f}$;
ainſi la quantité de mouvement du poids $l$ dans le pendule
* 299. compoſé eſt $\frac{fl+ae-ey}{f}$; la diviſant par le poids $l$, l'on aura *
pour la viteſſe du poids $l$ dans le pendule compoſé $\frac{fl+ae-ey}{fl}$.
* 342. Or cette viteſſe $\frac{fl+ae-ey}{fl}$ eſt * à la viteſſe $\frac{y}{a}$ du poids $a$ dans le
même inſtant, comme $SL(f)$ à $SA(e)$. L'on a donc $\frac{fy}{a}$
$= \frac{efl+aee-eey}{fl}$; d'où l'on déduit $y = \frac{aefl+aaee}{aee+ffl}$. Mettant cette
valeur toute connue de $y$ à ſa place dans $SC(z) = \frac{ae}{y}$, l'on
trouve $SC(z) = \frac{eea+ffl}{ae+fl}$; c'eſt la longueur du pendule iſochrone,
ou la diſtance $SC$ du centre d'oſcillation que l'on
cherchoit.

## SECOND CAS.

### *Lorſque le pendule compoſé a trois poids* A, B, L.

345. AJOUTANT aux deux poids $a$ & $l$ un troiſiéme poids $B$,
FIG. XV. qu'on nommera $b$, & ſa diſtance $SB = g$; il faut trouver la
nouvelle diſtance inconnue $SK$, qu'on nommera encore $z$,
du centre d'oſcillation qu'on ſuppoſe en $K$, & qui étoit auparavant
en $C$.

Soit $x$ la quantité du mouvement du poids $B$ ($b$) dans le
* 299. pendule compoſé, par conſequent * $\frac{x}{b}$ eſt ſa viteſſe; mais la
viteſſe du poids $b$ dans le pendule compoſé qui eſt $\frac{x}{b}$, eſt à la
viteſſe du poids qui eſt au bout du pendule ſimple iſochrone;
ou, ce qui revient au même, du point $K$ qu'on ſuppoſe être
le centre d'oſcillation du pendule compoſé de trois poids,
* 343. laquelle viteſſe eſt 1 *, comme la diſtance $SB$ ($g$) eſt à la lon-
* 342. gueur $z$ du pendule iſochrone *, ou à la diſtance $SK$ ($z$) du
centre d'oſcillation que l'on cherche. Donc $SK(z) = \frac{bg}{x}$.

Pour avoir la valeur de $SK$ ($z$), il ne faut plus que trouver
la valeur de $x$ de la maniere ſuivante : Par la 2$^e$ demande,
la quantité de mouvement que reçoit $b$ de ſa peſanteur dans

le

le premier inſtant, eſt $b \times 1$; ainſi ne lui reſtant à cauſe du pendule infléxible que la quantité $x$, il perd la quantité de mouvement $b \times 1 - x$, ou $b - x$. Une partie de cette perte ſe diſtribue au point de ſuſpenſion $S$ où elle ſe perd entierement, & l'autre partie ſe diſtribue au centre d'oſcillation $C$ des deux poids $a$ & $l$, où l'on conçoit qu'eſt réuni leur effort commun. Pour trouver cette proportion* $SC\,(\frac{eea+ffl}{ea+fl}) . SB\,(g) :: b - x . \frac{eabg+bfgl-eagx-fglx}{eea+ffl} =$ *335. à la partie de la perte $b - x$ du mouvement de $b$ qui ſe diſtribue au centre $C$ d'oſcillation des deux poids $A$ & $L$, où tout leur mouvement eſt conçu comme réuni.

Ainſi on conçoit à ce point $C$ la ſomme des mouvemens des poids $A$ & $L$, qui eſt (par le premier cas de ce Problême, en mettant dans $y + \frac{fl+ae-ey}{f}$, la valeur de $y = \frac{aefl+aaee}{aee+ffl}$) $\frac{aefl+aaee}{aee+ffl} + \frac{fl+ae-\frac{e \times \overline{aefl+aaee}}{aee+ffl}}{f} = \frac{aaee+2aefl+ffll}{aee+ffl}$; & de plus l'on y conçoit la partie de la perte $b - x$ du mouvement de $b$ qui eſt diſtribuée à ce point, & qu'on vient de trouver $= \frac{abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$. Ainſi le mouvement entier qu'on conçoit au point $C$, eſt $\frac{aaee+2aefl+ffll+abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$.

Mais la diſtance $SB\,(g)$ eſt à la diſtance $SA\,(e)$, comme la viteſſe $\frac{x}{b}$ du poids $b$ dans le pendule, eſt à la viteſſe du poids $a$ dans le même premier inſtant; ainſi la viteſſe de $a$ dans le pendule de trois pieds eſt $\frac{ex}{bg}$; la multipliant par le poids $a$*, l'on aura $\frac{aex}{bg}$ pour la quantité de mouvement du *299. poids $a$ dans le pendule à trois poids. De même $SB\,(g)$ eſt à $SL\,(f)$, comme la viteſſe $\frac{x}{b}$ du poids $b$ eſt à la viteſſe du poids $l$, laquelle eſt par conſequent $= \frac{fx}{bg}$; la multipliant par le poids $l$,* l'on aura $\frac{flx}{bg}$ pour la quantité de mouvement *299. du poids $l$ dans le pendule à trois poids; leur ſomme eſt donc égale à la quantité de mouvement qu'on a trouvée en concevant leur mouvement réuni au point $C$; ainſi l'on a l'équation $\frac{aex+flx}{bg} = \frac{aaee+2aefl+ffll+abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$; d'où l'on déduit $x = \frac{aabeeg+2abefgl+bffgil+abbegg+bbfggl}{aaeg+aeefl+aeffl+fgll+abegg+bfggl}$.

Pour avoir la diſtance $SK\,(z)$ du centre d'oſcillation du pendule à trois poids, ou la longueur du pendule iſochrone, il ne faut plus que ſubſtituer cette valeur de $x$ dans $SK\,(z) = \frac{bg}{x}$, & l'on aura après avoir diviſé le numerateur & le dénominateur qu'on trouvera enſuite de la ſubſtitution par $abeg + bfgl$, l'on aura, dis-je, $SK$ ($z$) $= \frac{eea + ggb + ffl}{ea + gb + fl}$. *Ce que l'on cherchoit.*

### COROLLAIRE.

346. EN continuant cette Analyſe pour les pendules à quatre poids, à cinq poids, &c. on trouvera toujours que la diſtance du centre d'oſcillation eſt égale à une fraction dont le numerateur contient la ſomme des produits des poids chacun par le quarré de ſa diſtance du point de ſuſpenſion, & le dénominateur contient la ſomme des produits des mêmes poids chacun par la ſimple diſtance où il eſt du point de ſuſpenſion.

### AVERTISSEMENT.

L'ON met d'ordinaire au pendule d'une horloge deux poids connus, l'un qui eſt le plus peſant eſt attaché fixement au bout du pendule, l'autre eſt petit qu'on appelle la lentille, & l'on peut le faire couler le long du pendule en le hauſſant ou l'abbaiſſant, pour retarder ou pour avancer l'horloge ſelon le beſoin; & on peut par une vis l'arrêter au point qu'il faut pour faire marquer les ſecondes à l'horloge.

## PROBLÊME II,

### Qui eſt l'application du précedent à la pratique.

347. *AYANT un pendule à deux poids* A *&* L, *comme l'on vient de dire, trouver l'endroit du pendule où il faut arrêter la lentille ou le petit poids* A, *afin que le pendule faſſe ſes vibrations chacune dans une ſeconde ou dans une autre partie de temps déterminé.*

FIG. XIV. IL eſt clair que la queſtion ſe réduit à trouver la diſtance $SA$ du point de ſuſpenſion $S$, où il faut mettre le petit poids $A$, afin que le pendule compoſé ait ſa diſtance $SC$ du centre d'oſcillation égale à la longueur d'un pendule ſimple iſochrone, c'eſt-à-dire du pendule ſimple qui fait ſes vibrations chacune dans une ſeconde.

Il faut donc apprendre de l'uſage qui eſt maintenant aſſez connu, quelle eſt la longueur $SC$ du pendule ſimple qui fait ſes vibrations chacune dans une ſeconde. On ſuppoſe cette

longueur, que l'on ſçait être de trois pieds huit lignes & demie $= K$; on ſuppoſe le gros poids connu $L = l$, ſa diſtance $SL$ auſſi connue $= f$; le petit poids $A$ connu $= a$; ſa diſtance $SA$ inconnue $= x$. Ayant trouvé* que la diſtance *344.
du centre d'oſcillation d'un pendule à deux poids eſt $\frac{eea + ffl}{ea + fl}$; il faut ſuppoſer que $e$ étant à preſent indéterminée, repréſente $x$, & l'on aura, en mettant $x$ à la place de $e$, $\frac{axx + ffl}{ax + fl} = K$, ce qui donne l'équation du ſecond degré $xx - Kx - \frac{fKl}{a} + \frac{ffl}{a} = 0$, dont les deux racines* ſont $x = \frac{1}{2} K \pm \sqrt{\frac{1}{4} KK + \frac{fKl - ffl}{a}}$. *76.
Ces deux racines ſont poſitives* *29. Cor. 8.
quand $K$ eſt moindre que $f$; parcequ'alors le dernier terme $- \frac{fKl + ffl}{a}$ eſt poſitif. Ainſi l'on aura deux points dans le pendule composé, dont les diſtances du point $S$ ſont déterminées, étant les valeurs de $x$ qu'on vient de trouver; & mettant la lentille $A$ auquel on voudra de ces deux points, les vibrations du pendule composé ſe feront chacune dans une ſeconde.

Suppoſant donc que $SL$ ($f$) ſurpaſſe $SC$ ($K = 3$ pieds $8\frac{1}{2}$ lig.) par exemple que $f = 3$ pieds 1 pouce, que $l = 3$ livres, que la lentille $A$ ($a = 1$ once), en mettant ces nombres à la place des lettres dont ils ſont les valeurs dans chacune des valeurs de $x$, on aura deux diſtances du point $S$; & mettant la lentille à laquelle on voudra, les vibrations du pendule marqueront les ſecondes. *Ce qu'il falloit trouver.*

## REMARQUE.

### *Où l'on fait voir l'étendue des réſolutions des Problèmes que l'Analyſe fait découvrir.*

348. 1°. SI l'on vouloit que les vibrations du pendule à deux poids ſe fiſſent dans une autre partie du temps qu'une ſeconde, il n'y auroit qu'à apprendre de l'experience la longueur du pendule ſimple dont les vibrations ſe feroient chacune en cette partie du temps; & mettre cette longueur à la place de $K$, & l'on auroit la diſtance du point $S$ où il faudroit mettre la lentille $A$, afin que le pendule composé fît ſes vibrations chacune pendant cette même partie du temps. FIG. XIV.

2°. Si on vouloit que le pendule composé fît ſes vibrations chacune en une ſeconde, & qu'on voulût auſſi que la diſtance $SA\ (x)$ de la lentille $A$ fût determinée, & toujours $= \frac{1}{2}K$, il n'y auroit qu'à ſuppoſer dans $SA = \frac{1}{2}K \pm \sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{fKl - ffl}{a}}$, que $\sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{fKl - ffl}{a}} = 0$, & prendre la diſtance du plus gros poids $L$, qui eſt $f$, pour inconnue, & l'on auroit l'équation du ſecond degré $ff - Kf - \frac{aKK}{4l} = 0$, dont la racine poſitive $f = \frac{1}{2}K + \sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{aKK}{4l}} = \frac{1}{2}K + \frac{K}{2}\sqrt{1 + \frac{a}{l}}$, marqueroit la diſtance $SL\ (f)$ qu'il faudroit donner au gros poids $L$, afin que le pendule compoſé dans lequel la diſtance de la lentille $SA$ eſt $\frac{1}{2}K$, fît ſes vibrations chacune dans une ſeconde. Ainſi mettant dans cette valeur de $SL\ (f)$ les nombres repréſentés par $a$, $K$, $l$, l'on aura la diſtance $SL$ du gros poids $L$ propre à cet effet.

3°. On peut trouver par la valeur de $SA\ (x) = \frac{1}{2}K \pm \sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{fKl - ffl}{a}}$, les cas où le ſecond Problême eſt poſſible, & ceux où il eſt impoſſible. Car ſuppoſant $\sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{fKl - ffl}{a}} = 0$, on aura l'équation $KK + \frac{4flK - 4ffl}{a} = 0$, dont la racine poſitive eſt $K = -\frac{2fl}{a} + \sqrt{\frac{4ffll}{aa} + \frac{4ffl}{a}} = -\frac{2fl}{a} + \frac{2f}{a} \times \sqrt{ll + al}$; ce qui fait voir que quand $K$ ſurpaſſe $-\frac{2fl}{a} + \frac{2f}{a} \times \sqrt{ll + al}$, le Problême eſt poſſible; parceque les grandeurs poſitives qui ſont ſous le ſigne $\surd$ dans la valeur de $x$, ſurpaſſent la négative: mais quand $K$ eſt moindre que $-\frac{2fl}{a} + \frac{2f}{a} \times \sqrt{ll + al}$, la négative ſurpaſſe les poſitives, & les valeurs de $SA\ (x)$ ſont imaginaires.

4°. On peut appliquer la réſolution du ſecond Problême aux pendules compoſés de plus de deux poids, en ſuppoſant la diſtance inconnue du ſeul petit poids qui tiendroit lieu de lentille.

# SECTION III.

## *Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire l'uſage de l'Analyſe par raport à toutes les lignes courbes, pour en découvrir les proprietés & les uſages.*

### AVERTISSEMENT.

C'EST dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes, que paroît ſur-tout l'uſage, & même la neceſſité de l'Analyſe; depuis qu'on l'a appliquée à cette ſcience, on y a fait des progrès ſurprenans; & ſi elle n'étoit pas infinie, on auroit dans l'Analyſe, en employant le calcul *differentiel* & *integral* (inventé de notre temps) le moyen de l'épuiſer. Comme la ſcience des lignes courbes ſert à la Phyſique & à toutes les ſciences Phyſico-Mathematiques, d'où dépend la perfection des Arts; c'eſt dans cette ſcience que paroît évidemment l'utilité de l'Analyſe.

On applique l'Analyſe aux lignes courbes, en réduiſant chaque courbe à une équation qui en exprime une des principales proprietés; & enſuite on découvre par le ſeul calcul de l'Analyſe, en ſe ſervant de cette équation, tout ce que l'on peut deſirer de ſçavoir de cette courbe. L'Analyſe même fournit le moyen d'exprimer une infinité de courbes par une même équation par le moyen des lettres indéterminées, & de découvrir par le même calcul les proprietés de toutes ces courbes. C'eſt ce que l'on va expliquer dans cette ſection.

### PREMIERE DE'FINITION.

349. QUAND deux lignes données $AB$, $BC$, font un angle quelconque $ABC$, & que la premiere $AB$ ou une de ſes puiſſances, comme $\overline{AB}^2$, $\overline{AB}^3$, &c. ou le produit de la premiere $AB$, ou de quelqu'une, ou de pluſieurs de ſes puiſſances par d'autres lignes données; quand, dis-je, cette premiere ligne $AB$, où ce produit eſt égal à la ſeconde $BC$ ou à quelques-unes de ſes puiſſances, ou au produit de $BC$, ou des puiſſances de $BC$ par des lignes connues; on dira que cette égalité ou équation exprime le raport des lignes $AB$ FIG. XVI. XVII. & XVIII.

& $BC$. Ainſi ſuppoſé $AB = a$, $BC = b$, & une autre ligne donnée $= p$; ſuppoſé auſſi que $ap = bb$, ou $aap = b^3 + pbb$; on dira que cette équation exprime le raport de $AB$ à $BC$.

### *Explication de la maniere dont l'Analyſe réduit les courbes à des équations qui en expriment la nature, c'eſt-à-dire, les principales proprietés.*

350. Fig. XVI. XVII. & XVIII. $CAc$ eſt une ligne ſoit droite ſoit courbe ſur un plan; $ABb$ eſt une ligne droite donnée de poſition, dont le point fixe ou l'origine $A$ eſt déterminée, mais la ligne eſt indéterminée de côté & d'autre; ſoit $gAG$ une ligne droite qui coupe $AB$ au point $A$ en faiſant avec elle un angle quelconque $BAG$, ſoient auſſi de tous les points de $CAc$ des lignes droites $CB$, $cb$, &c. tirées ſur $AB$, paralleles entr'elles & à $gAG$; ſuppoſé que l'équation qui exprime le raport de la premiere parallele $BC$ avec la premiere $AB$, ſoit la même que celle qui exprime le raport de la ſeconde $bc$ avec la ſeconde ligne $Ab$ correſpondante, de la troiſiéme $bc$ avec la troiſiéme $Ab$ qui lui répond, & ainſi de toutes les autres, de maniere qu'en mettant chaque $bc$ dans la premiere équation à la place de la premiere $BC$, & la correſpondante $AB$ de chaque nouvelle $BC$ à la place de la premiere $AB$, ce ſoit la même équation; on peut faire une équation qui convienne à tous les points de la ligne droite ou courbe $cAC$, en nommant la *changeante* $AB$, $x$; la changeante $BC$, $y$; & mettant dans la premiere équation $x$ à la place de $AB$, & $y$ à la place de $BC$, & l'on a l'équation de la ligne droite ou courbe $cAC$.

## EXEMPLES.

351. SI l'on a les deux lignes droites données $p$ & $d$, & que l'équation qui exprime le raport de chaque $BC\,(y)$ à chaque $AB\,(x)$, ſoit $px = dy$; *la ligne* $ACC$ *eſt droite**. *282.

Si l'équation qui exprime le raport de chaque $BC\,(y)$ à chaque $AB\,(x)$, eſt $px = yy$; la ligne $ACC$ eſt courbe, & ſe nomme la *parabole*; & $px = yy$, eſt *l'équation à la parabole*.

Si l'équation eſt $\frac{d}{p}\,yy = dx - xx$, la courbe $ACC$ ſe nomme *l'ellipſe*.

Si l'équation eſt $yy = dx - xx$, la courbe $ACC$ eſt la *circonference du cercle**. *289.

Si l'équation eſt $\frac{d}{p}yy = dx + xx$, la courbe $ACC$ ſe nomme *l'hyperbole*.

Si l'équation eſt $ppx = y^3$, la courbe *ACC* ſe nomme la *premiere parabole cubique.*

Si l'équation eſt $pxx = y^3$, la courbe *ACC* ſe nomme la *ſeconde parabole cubique.*

Si l'équation eſt $x^3 = dyy - xyy$, la courbe *ACC* ſe nomme *la ciſſoïde.*

Comme il y a une infinité de courbes differentes, il y a auſſi une infinité d'équations differentes qui les expriment; & il eſt inutile d'en faire ici une longue énumeration; ce que l'on vient de dire ſuffit pour faire concevoir comment l'Analyſe réduit chaque courbe à une équation qui exprime ſa principale proprieté, d'où l'on déduit les autres.

Si l'on tire des points *CCcc* de la ligne *CCAcc* des paralleles *CG*, *cg*, &c. à la ligne *AB* qui ſe terminent à la ligne *gAG* qui eſt ſuppoſée parallele aux lignes *BC*, *Bc*, *bc*, &c. il eſt évident qu'à cauſe des paralleles, les lignes *AG*, *Ag*, &c. ſont égales aux lignes *BC*, *bc*, &c. chacune à ſa correſpondante; ainſi chaque $AG = y$; & que de même les lignes *GC*, *gc*, &c. ſont égales aux lignes *AB*, *Ab*, &c. chacune à celle qui lui répond, ainſi chaque $GC = x$. D'où il eſt clair qu'en rapportant les points de la ligne *ACC* à la ligne droite *gAG*, par le moyen des paralleles *CG*, *cg*, &c. l'on aura la même équation que l'on avoit de la même ligne *CCAcc*, en rapportant tous ſes points à la droite *ABb* par le moyen des paralleles *BC*, *bC*, &c. FIG. XVI.

## SECONDE DE'FINITION.

353. DANS toutes les courbes qu'on peut réduire à une équation qui en exprime la proprieté, la ligne droite *AB* à laquelle on raporte tous les points de la courbe, s'appelle *la ligne des coupées* ou *des abſciſſes*, & la changeante *AB*, *Ab*, &c. s'appelle *la coupée* ou *l'abſciſſe*; le point fixe *A* s'appelle *l'origine*. Les paralleles *BC*, *bC*, &c. s'appellent *les ordonnées* ou *les appliquées*: & comme l'on a vû qu'on pouvoit prendre auſſi les coupées ſur *AG* paralleles aux ordonnées, & les ordonnées ſur *ABB*, chaque *AB* & ſa correſpondante *BC* s'appellent *les coordonnées*; & les deux lignes *ABB*, *AG* qui ſe coupent à l'origine *A*, les lignes des *coordonnées*; & l'angle *GAB* qu'elles font enſemble, *l'angle des coordonnées*; & les quatre angles *GAB*, *GAH*, *gAH*, *BAg*, qu'elles FIG. XVI.

font enſemble à l'origine *A*, ſont *les quatre angles des deux lignes des coordonnées.*

## *Diviſion des courbes en differens genres.*

354. LEs lignes comme *CCAcc* dont on peut exprimer la nature, c'eſt-à-dire, la principale proprieté par une équation algebrique qui contienne le raport des coordonnées changeantes $x$ & $y$*, leſquelles coordonnées ne ſont que de ſimples lignes droites, s'appellent *Geometriques* ou *Algebriques*, & on les diſtingue en differens genres, dont chacun prend ſon nom du nombre qui eſt l'expoſant de la plus haute puiſſance de celle des deux coordonnées $x$ ou $y$, qui eſt élevée au plus haut degré ſans mêlange de l'autre dans l'équation, ou du nombre des dimenſions du produit de l'une par l'autre dans l'équation, quand ce produit a plus de dimenſions que la plus haute puiſſance ſeparée de l'une & de l'autre.

*350.

Les lignes dont l'équation ne contient que $x$ & $y$ lineaires ſans être multipliées l'une par l'autre, comme $px = dy$, ſont *les lignes du premier genre* : & il n'y a dans ce premier genre que la ligne droite.

Les lignes dont l'équation contient le quarré de l'une des coordonnées $x$ ou $y$, ou le quarré des deux $xx$ & $yy$, ou le produit des deux $xy$, ſont *les lignes du ſecond genre* : Mais comme elles ſont auſſi les premieres courbes ou les courbes les plus ſimples, on les appelle *les courbes du premier genre.*

Toutes les courbes dont l'équation contient la troiſiéme puiſſance de l'une ou de l'autre des coordonnées $x^3$ ou $y^3$, ou de toutes les deux $x^3$ & $y^3$, ou un produit des deux qui a trois dimenſions $xxy$ ou $xyy$, ſont *les lignes du troiſiéme genre*, & en même temps *les courbes du ſecond genre*; & ainſi de ſuite à l'infini.

## *La maniere d'exprimer par une ſeule équation une infinité de courbes toutes de differens genres.*

355. EN mettant dans l'équation à la parabole $p^1 x^1 = y^2$ des expoſans indéterminés $m$ & $n$, on aura l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$, qui exprime *les paraboles de tous les genres à l'infini*, en concevant que $m$ & $n$ repréſentent tous les nombres entiers que l'on peut mettre à leur place dans cette équation. Par exemple ſi $m = 1$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera l'équation à la

à la parabole du premier genre $p^1 x^1 = y^2$: Si $m = 2$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $ppx = y^3$, qui eſt l'équation à la premiere parabole cubique: Si $m = 1$, $n = 2$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $pxx = y^3$, qui eſt la ſeconde parabole cubique : Si $m = 3$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $px = y^4$, qui eſt la premiere parabole du troiſiéme genre; & ainſi à l'infini.

De même en mettant dans l'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}y^2 = x^1 \times \overline{d-x}^1$, & dans l'équation à l'hyperbole $\frac{d}{p}y^2 = x^1 \times \overline{d+x}^1$, les expoſans indéterminés $m$ & $n$; l'on aura 1°. l'équation $\frac{d}{p}y^{m+n} = x^m \times \overline{d-x}^n$, qui exprime les ellipſes de tous les genres à l'infini, $m$ & $n$ repréſentant tous les nombres entiers qu'on peut mettre à leur place; & 2°. l'équation $\frac{d}{p}y^{m+n} = x^m \times \overline{d+x}^1$, qui exprime les hyperboles de tous les genres à l'infini par la même raiſon.

On peut de même rendre generales les équations de toutes les courbes qu'on peut imaginer.

### TROISIE'ME DE'FINITION.

356. DANS les courbes du premier genre, quand la ligne des coupées $ABB$ coupe par la moitié chacune des ordonnées $CBc$ terminées de côté & d'autre à la courbe, elle s'appelle *un diametre* de la courbe, & le point $A$ où ce diametre rencontre la courbe eſt nommé *le ſommet* de ce diametre; il ſuffit qu'il en coupe deux differentes par la moitié, pour les couper toutes. Quand le diametre eſt coupé perpendiculairement par les ordonnées, on l'appelle *l'axe* de la courbe; la ligne droite donnée $p$ dans les équations $px = yy$, $\frac{d}{p}yy = x \times \overline{d-x}$, $\frac{d}{p}yy = x \times \overline{d+x}$, s'appelle *le parametre* du diametre qui eſt la ligne des coupées $x$ dans l'équation. Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole les diametres ſe croiſent dans un point $K$ qu'on appelle *le centre*. Dans l'une & dans l'autre le diametre $dD$ qui eſt parallele aux ordonnées, s'appelle *le ſecond* ou *le diametre conjugué* du *premier* diametre $Aa$ qui les coupe chacune par la moitié, & on les appelle *conjugués* l'un de l'autre. Une ligne qui touche une courbe dans un ſeul point, comme $CS$, s'appelle *la tangente* en ce point là qui s'appelle *le point touchant*; & la partie de la ligne des coupées comme $BS$, qui eſt interceptée entre l'ordonnée $BC$ du point touchant $C$, & le

FIG. XVI.

FIG. XVII. XVIII.

FIG. XIX. XX. XXI.

point *S* où elle eſt rencontrée par la tangente prolongée, Fig. XIX. s'appelle *la ſoutangente :* une droite *CD* perpendiculaire à la tangente au point touchant, s'appelle *une perpendiculaire à la courbe*, & la partie *BD* de la ligne des coupées entre l'ordonnée *BC* au point touchant, & le point *D* où cette perpendiculaire coupe la ligne des coupées, ſe nomme la *ſouperpendiculaire.*

Une ligne droite ſur le même plan de la courbe, dont la courbe s'approche de plus en plus à l'infini ſans jamais la toucher, comme *KE*, s'appelle une *aſymptote* de la courbe. Fig. XXI.

357. Les mêmes définitions conviennent aux courbes des genres plus élevés, neanmoins comme la même courbe dans ces genres plus élevés, a d'ordinaire pluſieurs branches de chacun des côtés du diametre, quand elle a un diametre: lorſque la ligne des coupées coupe chaque ordonnée de maniere que la ſomme des parties de l'ordonnée terminées aux points de chaque branche de la courbe d'un côté, eſt égale à la ſomme des parties de la même ordonnée terminées aux branches de la courbe qui ſont de l'autre côté; alors la ligne des coupées eſt un diametre de la courbe, & ce diametre eſt *l'axe*, quand les ordonnées lui ſont perpendiculaires.

### *De la formation ou deſcription des courbes, ſur-tout du premier genre.*

358. ON peut tracer les courbes ſur un plan de deux manieres, 1°. Par le mouvement continu d'un point, ce qui ſe peut faire de differentes manieres : par exemple, on peut faire mouvoir deux longues regles ſur deux points fixes qu'on appelle *les Poles*, de façon qu'elles ſe croiſent pendant leur mouvement en des points dont la ſuite eſt la courbe que l'on veut décrire : l'une des deux regles peut ſe mouvoir parallelement le long d'une ligne donnée de poſition, pendant que l'autre tournera ſur ſon pole, & la ſuite des points où elles ſe croiſent pendant leur mouvement ſera auſſi une courbe; l'on peut faire mouvoir une figure rectiligne ou courbe le long d'une regle immobile, pendant qu'une autre regle ſe mouvant ſur ſon pole, coupera la courbe en des points dont la ſuite ſera une ligne courbe. On peut imaginer une infinité d'autres manieres de décrire les courbes par le mouvement continu, 2°. En trouvant pluſieurs points de la courbe très-proches les uns des autres, & les joignant enſem-

ble par de petites lignes, l'on a à peu près la courbe que l'on veut décrire.

De toutes les manieres que l'on a trouvées de décrire les courbes du premier genre par un mouvement continu, la plus commode eſt la ſuivante, dont *M. le Marquis de l'Hôpital* eſt l'auteur, parcequ'elle ſert non ſeulement à les tracer avec les axes, mais auſſi avec tel diametre de la courbe qu'on voudra; & de plus elle donne d'abord l'équation de la courbe la plus ſimple par raport à ſes axes ou à ſes diametres.

359. Il faut remarquer que les courbes du premier genre ſe nomment ordinairement *les ſections coniques*, parcequ'en concevant deux cones égaux qui ont le même ſommet, & qu'un plan coupe l'un des deux ou tous les deux, la ſection eſt une parabole, quand le plan coupant eſt parallele à un côté de la ſurface du cone, qui eſt le côté du triangle qui coupe le cone par le ſommet perpendiculairement à ce plan; une ellipſe; quand le plan coupe les côtés oppoſés de la ſurface du cone, & ne fait pas les angles avec ces côtés, égaux à ceux qui font ces côtés ſur la baſe du cone; un cercle, quand le plan coupe les côtés oppoſés, & fait avec eux les angles égaux à ceux que font ces côtés ſur la baſe; une hyperbole, quand le plan coupe les deux cones oppoſés au ſommet: c'eſt ce qui a fait appeller par les Anciens, *ſections coniques*, les courbes du premier genre; mais cette maniere de concevoir ces courbes comme formées par la ſection du cone, étant plus embarraſſante que la maniere de les décrire ſimplement ſur un plan, celle-ci étant la ſeule qui eſt d'uſage; on ne parlera point ici de la premiere. On ſe contentera d'expliquer la ſeconde, d'en déduire les équations des ſections coniques, & les principales proprietés neceſſaires pour entendre ce huitiéme Livre.

### *La formation de la parabole.*

360. 1°. IL faut tirer une droite *AB* indéterminée, & prenant le point *A* pour l'origine, mener une autre droite *gAGP* par *A* faiſant l'angle *BAG* avec *AB* égal à celui que l'on veut que faſſent les ordonnées avec *ABb*; & ayant pris *AP* de la grandeur que doit être le parametre du diametre *AB* ou d'une grandeur déterminée telle qu'on voudra, qui ſera le parametre du diametre *ABb* de la parabole qu'on décrira, FIG. XVI.

il faut mener par *P* la ligne indéterminée *FPf* parallele à *ABb*.

2°. Il faut prendre une longue regle *ACF*, l'attacher par un clou au point *A* autour duquel elle puiſſe ſe mouvoir ſur le pole *A*, & la mettre d'abord ſur la ligne *gAGP*; il faut enſuite prendre une longue regle *GC*, & la faire gliſſer toujours parallele à *AB* le long de la ligne *AGP*, & la mettre d'abord le long de *ABb*.

3°. Pour décrire la partie de la parabole qui eſt à la droite de *AB*, il faut faire mouvoir en bas la regle *ACF* ſur le pole *A*, & faire en même temps gliſſer la regle *GC*, le long de *AGP*, faiſant en ſorte que *AG* ſoit toujours égale à *PF*, & marquer avec un ſtile *C* la ligne courbe *AC* qui paſſe par tous les points *C*, où les regles ſe croiſent dans leur mouvement, & ce ſera la partie de la parabole qui eſt vers la droite du diametre *ABb*.

4°. Pour décrire l'autre partie *Ac* de la parabole, il faut faire mouvoir la regle *Af* en haut au-deſſus de *P*, & faire gliſſer la regle *gc* le long de *Ag*, faiſant en ſorte que *Ag* ſoit toujours égale à *Pf*, & marquer avec un ſtile *c* la courbe qui paſſe par tous les points *c* où les regles *Ac* & *gc* ſe croiſent dans leur mouvement continu, & ce ſera la ſeconde partie de la parabole.

### *La deſcription de l'ellipſe & de l'hyperbole.*

361. Fig. XVII. & XVIII. LA longueur *A*a du diametre ou de l'axe doit être determinée, comme auſſi la longueur *AP* du parametre qui convient à ce diametre ou à l'axe; & l'on doit d'abord faire ce qui eſt marqué dans les deux premiers articles de la parabole, excepté que la ſeconde regle a*C* doit être mobile autour du pole a, qui eſt la ſeconde extrêmité du diametre *A*a.

Pour décrire la partie de l'ellipſe ou de l'hyperbole qui eſt à la droite de *ABb*, on fera mouvoir en bas au-deſſous de *P* la premiere regle *ACF* ſur le pole *A*, & en même temps la ſeconde regle a*C* ſur le pole a, faiſant en ſorte que *AG* ſoit toujours égale à *PF*; & l'on marquera avec un ſtile en *C* la courbe qui paſſe par tous les points *C* où ſe croiſent les deux regles; & ce ſera la premiere moitié de l'ellipſe ou de l'hyperbole *AC*.

Pour décrire l'autre moitié, on fera mouvoir en haut la premiere regle *Af* au-deſſus de *P* toujours ſur le pole *A*, & l'autre regle a*c* du côté gauche de *ABb*, faiſant en ſorte que *Ag* ſoit toujours égale à *Pf*, & l'on marquera avec un ſtile en *c* la courbe *Acc*, qui paſſe par tous les points *c* où ces regles ſe croiſent; & ce ſera la ſeconde partie de l'ellipſe ou de l'hyperbole.

L'hyperbole ayant en particulier une autre hyperbole a$\varkappa$ à l'extrêmité a du diametre *A*a entierement égale & ſemblable à la premiere *AC*; on décrira cette ſeconde hyperbole a$\varkappa$ en faiſant mouvoir la premiere regle *AC* en *A*$\varkappa$ ſur le même pole *A*, & en même temps la ſeconde en a$\varkappa$ ſur le pole a, faiſant en ſorte que *A*$\gamma$ ſoit toujours égale à P$\varphi$; & traçant avec un ſtile en $\varkappa$ la courbe qui paſſe par tous les points $\varkappa$ où ſe croiſent les deux regles, elle ſera la ſeconde hyperbole a$\varkappa$ ſemblable & égale à la premiere *AC*.

### *La maniere dont on déduit des formations précedentes les équations de la parabole, de l'ellipſe & de l'hyperbole.*

### POUR LA PARABOLE.

362. SOIT le parametre $AP = p$, chaque $PF$ ou $Pf = f$, chaque coupée $AB$, $Ab = x$, chaque ordonnée $BC$, $bc = y$. Les triangles *APF*, *ABC*, ſont ſemblables, comme auſſi *APf*, *Abc*, à cauſe des paralleles *AGP*, *BC*, & *ABb*, *fPF*: par conſequent $AP(p) . PF(f) :: BC(y) . AB(x)$; d'où l'on déduit $px = fy$: Mais à cauſe des paralleles, $BC(y) = AG = PF(f)$ par la conſtruction: ainſi mettant $y$ à la place de $f$, l'on a l'équation à la parabole $px = yy$, c'eſt-à-dire, chaque ordonnée $BC(y)$ eſt moyenne proportionelle entre la coupée $AB(x)$ & le parametre $AP(p)$; ou bien le produit $px$ du parametre par la coupée eſt toujours égal au quarré de l'ordonnée $yy$. FIG. XVI.

Il eſt évident que la même équation convient à la ſeconde moitié de la parabole *Ac*.

### COROLLAIRES.

### I.

363. SI l'on prolonge chaque *BC* vers la gauche juſqu'à ce qu'elle rencontre la parabole en *c*, l'on aura $Bc = BC$; car mettant la regle *fAc* dans la ſituation où elle faſſe $fP = FP$,

l'on aura $Ag = fP$; par conſequent $Ag$ ſera égale à $PF = AG$, & $gc$ ſera égale à $AB = GC$; mais $Bc$ eſt toujours égale à $Ag$ à cauſe des paralleles : ainſi quand $fP = FP$, $Ag$ eſt égale à $AG$, & $gc = AB = GC$ : ainſi dans l'équation $px = yy$, qui convient à $BC$ & à $Bc$, $y = y$, & $x = x$, & $p$ eſt la même grandeur.

D'où l'on voit que ſi l'on plioit la parabole de façon que le pli fût dans la ligne $ABb$, la partie $ACC$ de la parabole s'ajuſteroit ſur l'autre partie $Acc$, quand les ordonnées $y$ ſont perpendiculaires aux coupées $x$.

### II.

364. La ligne $PGAg$ touche la parabole au ſeul point $A$ qui eſt le ſommet du diametre $ABb$; car il faut que la regle $AC$ ou $Ac$ faſſe un angle avec $GAg$ au point $A$, pour donner chaque autre point $C$, $c$ de la parabole, & $GAg$ eſt ſeule tangente au point $A$; car toute autre ligne $AC$ ou $Ac$ paſſant par $A$, & faiſant un angle avec $GAg$ au point $A$, donne un point de la parabole, & par conſequent elle paſſe par deux points de la parabole; d'où l'on voit que la tangente par le ſommet $A$, eſt parallele aux ordonnées du diametre $ABb$.

### III.

365. La parabole $ACC$ eſt concave à l'égard du diametre $ABb$, car chaque corde $AC$, $Ac$, eſt entre l'arc qu'elle ſoutient, & le diametre $ABb$.

### IV.

366. Quand l'angle $BAG$ eſt droit, les ordonnées $CB$ ſont perpendiculaires au diametre $AB$; ainſi dans ce cas $ABb$ eſt l'axe dont $AP$ eſt le parametre : dans tout autre cas $AB$ eſt ſimplement un diametre dont $AP$ eſt le parametre, qui n'eſt pas alors le même que celui de l'axe ou d'un autre diametre.

### V.

367. L'angle $GAB$ que fait la tangente $GAB$ au ſommet $A$ avec le diametre $AB$, eſt celui que fait en ce point $A$ la courbe même avec ſon diametre $AB$.

### VI.

368. Dans la parabole, les coupées $AB$, $Ab$, (fig. 19.) ſont entr'elles comme les quarrés des ordonnées; car nommant $AB$ ($x$), $Ab$ ($u$), $BC$ ($y$), $bc$ ($z$), l'on aura $\frac{px}{pu} = \frac{x}{u} = \frac{yy}{zz}$; & par conſequent les ordonnées $BC$ ($y$), $bc$ ($z$), ſont entr'elles comme les racines des coupées $AB$ ($x$), $Ab$ ($u$) : puiſque $yy . zz :: x . u$; & $y . z :: \sqrt{x} . \sqrt{u}$.

### VII.

369. Le parametre $p$ eſt à la ſomme de deux ordonnées $bc + BC\ (z+y)$, comme la difference des mêmes ordonnées $bc - BC = ec\ (z-y)$ eſt à la difference des coupées $Ab - AB = Bb$ ou $Ce\ (u - x)$; car $px = yy$, & $pu = zz$: donc $pu - px = zz - yy$; d'où l'on déduit $p \,.\, z+y :: z-y \,.\, u-x$. FIG. XIX.

### VIII.

370. L'équation $yy = px$ fait voir que les $x$ augmentans, les $y$ augmentent auſſi; ainſi la parabole s'écarte de plus en plus à l'infini de ſon diametre.

## PROBLÊME I.

### *Où l'on donne une méthode generale pour mener les tangentes des courbes geometriques.*

371. *UNE parabole* ACc *étant décrite ſur un plan avec ſon diametre* ABb *&* *ſon parametre* AP, *mener la tangente* SC *par un point donné* C, *dont l'ordonnée eſt* BC. FIG. XIX.

IL eſt évident qu'il ſuffit de trouver la ſoutangente $BS$; car il n'y aura plus qu'à tirer la droite $SC$, & elle ſera la tangente. Entre toutes les méthodes pour trouver les tangentes des courbes, on a choiſi la ſuivante qui convient à toutes les courbes geometriques, comme ayant le plus de raport à la méthode de les trouver par le calcul differentiel.

*Réſolution.* 1°. Il faut concevoir une ſecante $SCc$ qui paſſe par le point donné $C$, & coupe la parabole en un autre point $c$; & mener l'ordonnée $cb$; & nommant $AP\ (p)$, $AB\ (x)$, $BC\ (y)$, $BS\ (s)$, $Bb$ ou $Ce\ (e)$; l'équation pour le point $C$ eſt $yy - px = 0$. 2°. Il faut trouver la valeur de $ce$, par le moyen des triangles ſemblables $SBC$, $Cec$, qui donneront $SB\ (s) \,.\, BC\ (y) :: Ce\ (e) \,.\, ce = \frac{ey}{s}$. 3°. Pour avoir l'équation par raport au point $c$, il faut mettre dans l'équation à la courbe, $Ab\ (x+e)$ à la place de $AB\ (x)$, & $bc\ (y + \frac{ey}{s})$ à la place de $BC\ (y)$, & ordonner la nouvelle équation de maniere que tous les termes de la premiere ſoient le premier terme de la ſeconde; le ſecond terme contienne toutes les grandeurs où $e$ eſt lineaire; le troiſiéme terme contienne toutes celles où ſe trouve $ee$, & ainſi de ſuite; & l'on aura

$yy + \frac{2evy}{s} + \frac{eevy}{ss} = 0$. 4°. Il faut ôter le premier terme
$- px - ep$.

de cette équation qui eſt égal à zero par la ſuppoſition, puiſque c'eſt l'équation de la courbe ; & le reſte doit par conſequent être auſſi égal à zero. 5°. Il faut diviſer cette équation reſtante par $e$, ce qui laiſſera le premier terme ſans $e$. 6°. Il faut ſuppoſer la diſtance $Bb$ ou $Ce$ ($e$) des deux ordonnées $BC$, $bc$ égal à zero, ce qui détruira tous les termes excepté le premier, qui eſt égal à zero. 7°. Enfin il faut trouver dans ce terme la valeur de l'inconnue $s$, & mettre au lieu de $y$ ſa valeur en $x$ priſe de l'équation de la courbe, & ce ſera la ſoutangente qu'on cherchoit ; car il eſt évident que la difference $Bb$ entre les ordonnées devenant zero ou s'anéantiſſant, que les deux points $C$, $c$ deviennent le ſeul point $C$, & que la ſecante $SCc$ devient la tangente au point $C$, & par conſequent $BS$ ($s$) devient la ſoutangente.

Dans notre exemple, ayant ôte le premier terme, diviſé l'équation par $e$, & ſuppoſé enſuite $e = 0$, l'équation reſtante ſera $\frac{2}{s}yy - p = 0$ ; ou mettant $px$ à la place de $yy$, l'on aura $\frac{2}{s}px - p = 0$, d'où l'on déduit $BS\ (s) = 2x$.

Ce qui fait voir qu'en prenant $AS = AB$, le point $S$ ſera celui où la tangente $CS$ rencontre le diametre.

### REMARQUE.

372. S'IL arrivoit, lorſqu'on cherche la tangente des differens points de la courbe, qu'en mettant dans le terme où $e$ eſt lineaire, des valeurs déterminées de $x$ & de $y$, cela rendît le numerateur & le dénominateur de la fraction qu'on trouve ordinairement pour la valeur de $s$, chacun égal à zero, il faudroit prendre le troiſiéme terme où ſe trouve $ee$, le diviſer par $ee$ ; ſuppoſer enſuite $ee = 0$, ce qui rendroit tous les termes ſuivans égaux à zero, & l'on trouveroit par le ſeul terme reſtant où étoit $ee$ qui feroit lui ſeul l'équation, la valeur de $s$ qui donneroit la ſoutangente qu'on cherche ; & ainſi de ſuite, c'eſt-à-dire, ſi le terme où eſt $ee$ donnoit une valeur de $s$, dans laquelle le numerateur & le dénominateur ſe trouvaſſent égaux chacun à zero par la ſuppoſition de quelques valeurs déterminées de $x$ & de $y$ miſes à leur place dans cette fraction ou valeur de $s$, il faudroit paſſer au terme où ſe trouve $e^3$, & ainſi de ſuite ; & l'on remarquera que quand il faut paſſer au terme $ee$, l'on trouve d'ordinaire deux valeurs de $s$ ; quand il faut paſſer au terme $e^3$, on trouve trois valeurs

de $s$ ;

de $s$; ce qui fait voir dans le premier cas que la courbe a deux ſoutangentes au point déterminé dont on cherche les ſoutangentes; qu'elle en a trois dans le ſecond cas, & ainſi de ſuite; c'eſt-à-dire, cela arrive ordinairement.

### *Corollaires de ce Problême pour la parabole.*

### I.

373. SI l'on mene par le point touchant *C*, une perpendiculaire *CD* à la tangente, ſuppoſant que *ABD* eſt l'axe, la ſouperpendiculaire *BD* eſt toujours égale à la moitié du parametre de l'axe $\frac{1}{2}p$: Car $SB\ (2x) .\ BC\ (y) :: BC\ (y) .\ BD = \frac{yy}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$, en mettant au lieu de $yy$ ſa valeur $px$. Fig. XIX.

### I I.

374. Si après avoir trouvé la tangente *SC* au point *C*, on tiroit *CI* parallele à l'axe *ABb*, *AI* parallele à la tangente qui ſeroit égale à *SC*, & qu'en nommant la coupée $CI\ (x)$, l'ordonnée $AI\ (y)$, on prît une ligne $p$ telle que $CI\ (x) .\ IA$ ou $CS\ (y) :: CS\ (y) .\ p$; cette ligne $p$ ſeroit le parametre du diametre *CI*, car $px = yy$: ainſi l'on pourroit décrire la même parabole par la formation (fig. 16.) * en prenant *CI* (fig. 19.) pour *ABb* (fig. 16.), *CS* pour *GAg*; la grandeur $p$ qu'on vient de trouver $= \frac{yy}{x}$ pour le parametre *AP*. Fig. XIX. * 360.

### I I I.

375. D'où l'on voit que tous les diametres de la parabole ſont paralleles à l'axe & entr'eux: Ce que l'on vient de dire du diametre *CI* pouvant être appliqué à tous les autres: Et que $AS = {}^{*} AB = CI = Ct$, à cauſe des paralleles. * 371.

### I V.

376. D'où l'on peut trouver en toute parabole tracée l'axe & ſon parametre, lorſqu'on n'a qu'un diametre & le parametre de ce diametre, en menant deux perpendiculaires *cBC*, *cbc* à ce diametre, qui ſe terminent des deux côtés à la parabole, les partageant chacune par la moitié en *B*, *b*; & tirant *bBA* par les points *B*, *b*, *ABb* ſera l'axe, *BC*, *bc* ſes ordonnées; enfin faiſant $AB\ (x) .\ BC\ (y) :: BC\ (y) .\ p$, la ligne $p$ ſera le parametre de l'axe.

## POUR L'ELLIPSE.

377. SOIT le parametre donné $AP = p$, chaque coupée $AB = x$, l'ordonnée $BC = y$, le diametre *Aa*, qui eſt donné $= d$, & $PF = f = AG$; les triangles *APF*, *ABC* ſont Fig. XVII.

ſemblables, comme auſſi $APf$, $Abc$; c'eſt pourquoi $AP\,(p)$. $PF\,(f)$ :: $BC\,(y)$. $AB\,(x)$; d'où l'on tire $f = \frac{px}{y}$: Mais les deux triangles $AaG$, $BaC$ étant auſſi ſemblables, l'on a $Aa\,(d)$. $AG\,(f)$ :: $aB\,(d - x)$. $BC\,(y)$; d'où l'on déduit $f = \frac{dy}{d-x} = \frac{px}{y}$, qui ſe réduit à $\frac{d}{p}yy = dx - xx = \overline{d - x} \times x$, qui eſt l'équation de l'ellipſe, où l'on voit que $AP\,(p)$. $Aa\,(d)$ :: $\overline{BC}^2\,(yy)$. $AB \times Ba\,(dx - xx)$, ce qui convient aux ordonnées $y$ de tous les points de l'ellipſe.

## DE'FINITION.

378. LA ligne $Aa\,(d)$ eſt *le premier diametre*; le point du milieu $K$ du diametre eſt *le centre*; la ligne $Dd$ parallele aux ordonnées par le centre $K$, & terminée des deux côtés à l'ellipſe, eſt *le ſecond diametre*, ou *le diametre conjugué* du premier diametre $Aa$. Ces diametres s'appellent l'un *le premier axe*, & l'autre *le ſecond axe*, quand les ordonnées leur ſont perpendiculaires. Le *parametre* $p$ d'un diametre $Aa\,(d)$, dont on ſuppoſe le diametre conjugué $DKd = \delta$, eſt toujours la 3$^e$ proportionelle au premier diametre $d$ & au ſecond $\delta$; ainſi $d$. $\delta$ :: $\delta$. $p$, & $p = \frac{\delta\delta}{d}$. Le *parametre* $\pi$ du ſecond diametre $Dd\,(\delta)$, eſt de même la 3$^e$ proportionelle à $\delta$ & $d$; ainſi $\delta$. $d$ :: $d$. $\pi$, & $\pi = \frac{dd}{\delta}$; d'où l'on voit que $d$. $p\,(\frac{\delta\delta}{d})$ :: $dd$. $\delta\delta$; & $\delta$. $\pi\,(\frac{dd}{\delta})$ :: $\delta\delta$. $dd$.

### *Autre expreſſion de l'équation à l'ellipſe.*

379. EN prenant le centre $K$ pour l'origine des coupées, & nommant chaque $KB\,(x)$, $BC\,(y)$, $Aa\,(d)$, $AP\,(p)$, il eſt évident que $KA = \frac{1}{2}d$; ainſi $AB = \frac{1}{2}d - x$. Mettant $\frac{1}{2}d - x$ au lieu de $x$ dans l'équation $\frac{d}{p}yy = dx - xx$, il vient cette autre équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = \frac{1}{4}dd - xx = \overline{\frac{1}{2}d - x} \times \overline{\frac{1}{2}d + x}$, qui donne $AP\,(p)$. $Aa\,(d)$ :: $\overline{BC}^2\,(yy)$. $AB \times Ba\,(\frac{1}{4}dd - xx.)$.

380. Puiſque $\frac{d}{p} = \frac{dd}{\delta\delta}$, on peut mettre dans chacune de ces équations de l'ellipſe $\frac{dd}{\delta\delta}$, au lieu de $\frac{d}{p}$, & la premiere $\frac{d}{p}yy = dx - xx$, deviendra $\frac{dd}{\delta\delta}yy = dx - xx$; & la ſeconde $\frac{d}{p}yy = \frac{1}{4}dd - xx$ deviendra $\frac{dd}{\delta\delta}yy = \frac{1}{4}dd - xx$. Multipliant cette derniere par $\frac{\delta\delta}{dd}$, elle deviendra $yy = \frac{1}{4}\delta\delta - \frac{\delta\delta}{dd}xx$; & tranſpoſant $\frac{\delta\delta}{dd}xx = \frac{1}{4}\delta\delta - yy$, ou bien $\frac{\delta\delta}{dd}xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$,

& mettant $\frac{\delta}{\pi} = \frac{\delta\delta}{dd}$, l'on aura $\frac{\delta}{\pi} xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$, qui eſt l'équation à l'ellipſe par raport au diametre conjugué $dD = \delta$, dont le parametre eſt $\pi$, laquelle donne cette proportion, Le parametre $\pi$ du ſecond diametre $dD$ eſt au ſecond diametre $dD$ $(\delta)$, comme le quarré de l'ordonnée $Ce = BK$ $(x)$ eſt au produit $de \times eD = \frac{1}{4}\delta\delta - yy = \overline{\frac{1}{2}\delta + y} \times \overline{\frac{1}{2}\delta - y}$.

*Corollaires de la formation de l'ellipſe.*

381. LE premier, le ſecond, le troiſiéme, le quatriéme & le cinquiéme Corollaires de la parabole conviennent auſſi à l'ellipſe.

### VI.

382. On peut voir par l'équation $\frac{dd}{\delta\delta} yy = \frac{1}{4} dd - xx$, les endroits où l'ellipſe rencontre le diametre *A*a, & le point qui en eſt le plus écarté. Car, 1°. quand $KB$ $(x)$ eſt zero, ce qui arrive au centre $K$, $yy = \frac{1}{4}\delta\delta$, ainſi $y = \frac{1}{2}\delta = KD$, qui eſt le point de l'ellipſe le plus éloigné du diametre *A*a. 2°. Quand $KB$ $(x) = KA$ ou Ka $(\frac{1}{2}d)$, alors $\frac{dd}{\delta\delta} yy = \frac{1}{4} dd - \frac{1}{4} dd = 0$; ainſi $y = 0$ au ſommet $A$, & de même au point a; ce qui fait voir que l'ellipſe rencontre chaque diametre comme *A*a en deux points $A$ & a également éloignés du centre $K$. 3°. $KB$ $(x)$ ne peut pas ſurpaſſer $AK$ $(\frac{1}{2}d)$, parcequ'autrement le ſecond membre $\frac{1}{4} dd - xx$ ſeroit négatif, & par conſequent la valeur de $y$ ſeroit imaginaire, c'eſt-à-dire impoſſible.

### VII.

383. Les quarrés de deux ordonnées $BC$, $bC$, ſont entr'eux comme les produits des ſegmens $AB \times aB$, $Ab \times ba$, dans leſquels ces ordonnées partagent le diametre.

### VIII.

384. Si l'on décrivoit un cercle ſur le diametre *A*a, & qu'on prolongeât les ordonnées $BC$ juſqu'à la circonference, les quarrés des ordonnées du cercle étant égaux chacun au produit des ſegmens du diametre dans leſquels ces ordonnées le partagent*, les quarrés des ordonnées $BC$, $bC$ à l'ellipſe ſeroient entr'eux comme les quarrés des ordonnées au cercle par les mêmes points; d'où il ſuit, en prenant les racines de ces quarrés, que les ordonnées à l'ellipſe ſont

* 289.

entr'elles comme les ordonnées au cercle par les mêmes points.

## PROBLÊME II.

385. *MENER une tangente* SC *par un point donné* C *de l'ellipſe dont* Aa (d) *eſt le premier diametre*, Dd ($\delta$) *le ſecond diametre*, BC (y) *l'ordonnée au point donné* C, *&* KB (x) *la coupée; & l'équation eſt* $\frac{dd}{\delta\delta}yy - \frac{1}{4}dd + xx = 0$.

Fig. XX.

*371. IL faut trouver la ſoutangente $BS = s$, & ſuppoſer* $x = x + e$, & $y = y - \frac{ey}{s}$; parceque les $KB$ ($x$) croiſſant, les $BC$ ($y$) diminuent; & mettre dans l'équation ces valeurs de $x$ & de $y$, & faiſant comme dans la parabole, on trouvera

$$\begin{array}{llll} \frac{dd}{\delta\delta}yy & - \frac{2dd}{\delta\delta s}eyy & + \frac{dd}{\delta\delta ss}eeyy & = 0. \\ -\frac{1}{4}dd & + 2ex & + ee & \\ + xx & & & \end{array}$$

d'où l'on déduira $\frac{dd}{\delta\delta s}yy = x$, & (en mettant pour $\frac{dd}{\delta\delta}yy$ ſa valeur $\frac{1}{4}dd - xx$) $\frac{1}{4}dd - xx = sx$, & $BS$ ($s$) $= \frac{\frac{1}{4}dd - xx}{x}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

386. D'où l'on déduit $KS = s + x = \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$. Ce qui donne cette proportion $KB$ ($x$). $KA$ ($\frac{1}{2}d$) :: $KA$ ($\frac{1}{2}d$). $KS$ ($s + x$) $= \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$, qu'il faut remarquer.

387. Si on vouloit ſe ſervir de l'équation par raport au ſecond diametre $Dd$ qui eſt $\frac{\delta\delta}{dd}xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$, l'on trouveroit la ſoutangente $ef$ ($\sigma$) $= \frac{\frac{1}{4}\delta\delta - yy}{y}$, & $Kf = \frac{\frac{1}{4}\delta\delta}{y}$; ce qui donneroit $Ke$ ou $BC$ ($y$). $KD$ ($\frac{1}{2}\delta$) :: $KD$ ($\frac{1}{2}\delta$). $Kf$ ($\sigma + y$) $= \frac{\frac{1}{4}\delta\delta}{y}$.

### *Corollaire du Problême precedent.*

388. SI l'on tire le diametre $CKc$, & qu'on prenne ce diametre pour $AKa$ (fig. 17), & la ligne $fCS$ (fig. 20) pour la ligne $PGAg$ (fig. 17), & qu'on prenne auſſi pour parametre $AP$ ($p$) (fig. 17), la 3$^{e}$ proportionelle au diametre $CKc$ (fig. 20), & à ſon diametre conjugué $GKg$ qui eſt la parallele à la tangente $SCf$ par le centre $K$, & qu'on forme l'ellipſe* comme

Fig. XX. & XVII.

*361.

* 361. dans la figure 17*, l'on tracera la même ellipſe de la figure 20; dont l'équation ſera, en tirant $AI$ parallele à $CS$, $\frac{cc}{p} \times \overline{AI}^2 = CI \times Ic$; d'où l'on voit que tous les diametres de l'ellipſe paſſent par le centre $K$, & qu'ils ſont partagés à ce centre $K$ en deux parties égales $KC$, $Kc$; ce que l'on vient de dire du diametre $CKc$ convenant à tous les autres.

### POUR L'HYPERBOLE.

389. SOIT le parametre $AP = p$, chaque coupée $AB = x$, chaque ordonnée $BC = y$, le diametre $Aa = d$, $PF = f$. A cauſe des triangles ſemblables $APF$, $ABC$, comme auſſi $APf$, $Abc$, l'on a, $AP\,(p) . PF\,(f) :: BC\,(y) . AB\,(x)$, d'où l'on déduit $f = \frac{px}{y}$; les triangles ſemblables $AaG$, $BaC$, donnent auſſi, $Aa\,(d) . AG = PF\,(f) :: aB\,(d + x) . BC\,(y)$, d'où l'on tire $f = \frac{dy}{d+x} = \frac{px}{y}$, ce qui donne l'équation à l'hyperbole $\frac{d}{p} yy = dx + xx = d + x \times x = aB \times AB$; ainſi dans l'hyperbole $AP\,(p) . Aa\,(d) :: \overline{BC}^2\,(yy) . aB \times AB\,(dx + xx)$. FIG. XVIII.

390. Si au lieu de $AB = x$, on ſuppoſe $KB = x$ ($K$ eſt le milieu du diametre $Aa$, & ſe nomme le *centre*), alors $aB = \frac{1}{2}d + x$, & $AB = KB - KA = x - \frac{1}{2}d$, & l'on aura cette ſeconde expreſſion de la même équation $\frac{d}{p} yy = xx - \frac{1}{4}dd$.

391. Pour avoir d'autres expreſſions de l'équation à l'hyperbole, on remarquera que chaque diametre comme $Aa\,(d)$ a ſon parametre déterminé $AP\,(p)$; & que ſon ſecond diametre $Dd\,(\delta)$ qui paſſe par le centre $K$, eſt parallele aux ordonnées $BC$ du premier diametre, & qu'il eſt la ligne moyenne proportionelle entre le premier diametre $Aa\,(d)$ & ſon parametre $AP\,(p)$; ainſi $Aa\,(d) . Dd\,(\delta) :: Dd\,(\delta) . AP\,(p)$; par conſequent $p = \frac{\delta\delta}{d}$, & $\delta = \sqrt{dp}$: le ſecond diametre a auſſi ſon parametre $\pi$, qui eſt la ligne troiſiéme proportionelle au ſecond diametre $\delta$ & au premier $d$; ainſi $\pi = \frac{dd}{\delta}$ & $d = \sqrt{\pi\delta}$.

### *Autre expreſſion de l'équation à l'hyperbole.*

392. IL ſuit de là que $\frac{d}{p} = \frac{dd}{\delta\delta}$ en mettant dans $\frac{d}{p}$ au lieu de $p$ ſa valeur $\frac{\delta\delta}{d}$; ainſi on peut mettre dans les équations précedentes à l'hyperbole $\frac{dd}{\delta\delta}$ au lieu de $\frac{d}{p}$, & elles ſeront changées en $\frac{dd}{\delta\delta} yy = dx + xx$; & $\frac{dd}{\delta\delta} yy = xx - \frac{1}{4}dd$.

393. On peut auſſi rapporter l'hyperbole immédiatement à ſon ſecond diametre $Dd\,(\delta)$, en ſe ſervant de la ſeconde équation ; car puiſque $\frac{dd}{\delta\delta}yy = xx - \frac{1}{4}dd$, en multipliant le tout par $\frac{\delta\delta}{dd}$, & tranſpoſant l'on aura $\frac{\delta\delta}{dd}xx = yy + \frac{1}{4}\delta\delta$ ; & mettant encore, ſi l'on veut, au lieu de $\frac{\delta\delta}{dd}$ ſa valeur $\frac{\delta}{\pi}$, puiſque $\pi = \frac{dd}{\delta}$, l'on aura $\frac{\delta}{\pi}xx = yy + \frac{1}{4}\delta\delta$, c'eſt-à-dire le parametre du ſecond diametre $\pi . Dd\,(\delta) :: \overline{bC}^2 = \overline{KB}^2\,(xx) . \overline{Kb}^2 + \overline{KD}^2\,(yy + \frac{1}{4}\delta\delta)$.

## COROLLAIRES.

394. LES cinq premiers Corollaires de la parabole conviennent auſſi à l'hyperbole.

### V I.

395. L'ÉQUATION de l'hyperbole *ACC* convient auſſi à l'hyperbole oppoſée $a\kappa$, & on peut la déduire de la même maniere de la formation de l'hyperbole ; car nommant $a\beta\,(x)$, $\beta\kappa\,(y)$, $P\varphi\,(f)$, $Aa\,(d)$, $AP\,(p)$, les triangles ſemblables $AP\varphi$ & $A\beta\kappa$ donneront $AP\,(p) . P\varphi\,(f) :: \beta\kappa\,(y) . A\beta\,(d+x)$ ; d'où l'on aura $f = \frac{p \times \overline{d+x}}{y}$ : Les triangles ſemblables $Aa\gamma$ & $a\beta\kappa$ donneront auſſi $Aa\,(d) . A\gamma = P\varphi\,(f)$ (par la ſuppoſition *) :: $a\beta\,(x) . \beta\kappa\,(y)$ ; d'où l'on aura $f = \frac{dy}{x} = \frac{p \times \overline{d+x}}{y}$, qui ſe réduit à $\frac{d}{p}yy = dx + xx$, qui eſt la même équation qu'on avoit trouvée pour l'hyperbole *ACC*, par laquelle on voit que quand $a\beta\,(x) = AB\,(x)$, $\beta\kappa\,(y)$ ſe trouve neceſſairement $= BC\,(y)$ ; ce qui fait voir que ces deux hyperboles ſont égales, de maniere qu'on peut les ajuſter l'une ſur l'autre.

FIG. XVIII.

* 361.

### V I I.

396. Il eſt évident par cette équation que plus les $x$ augmentent, plus les $y$ augmentent auſſi, ce qui fait voir que l'hyperbole s'écarte à l'infini de ſon diametre.

## PROBLÊME III.

397. *MENER une tangente* SC *par un point donné* C *de l'hyperbole dont le premier diametre eſt* Aa (d) ; *le ſecond* Dd ($\delta$) ; *le parametre du premier diametre* Aa (p) ; *la coupée* KB (x) ; *l'ordonnée* BC (y) ; *la ſoutangente* BS (s), *& l'équation* $\frac{d}{p}yy + \frac{1}{4}dd - xx = 0$.

FIG. XXI.

Il faut * mettre dans l'équation $x+e$ à la place de $x$, & $y+\frac{ey}{s}$ à la place de $y$, parceque $AB\ (x)$ augmentant de $+e$, $y$ augmente auſſi de $+\frac{ey}{s}$; & l'on aura * 371.

$$\begin{array}{llll} \frac{d}{p}yy & +\frac{2de}{ps}yy & +\frac{dee}{pss}yy & =0, \\ -xx & -2ex & -ee & \\ +\frac{1}{4}dd & & & \end{array}$$

d'où l'on tire * $\frac{d}{ps}yy=x$, & (en mettant au lieu de $\frac{d}{p}yy$ ſa valeur $xx-\frac{1}{4}dd$) $BS\ (s)=\frac{xx-\frac{1}{4}dd}{x}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente $BS\ (s)$ que l'on cherchoit, puiſque $BK\ (x)$ eſt ſuppoſée connue. * 371.

398. D'où l'on déduit $KS=KB-BS\ (x-s)=\frac{\frac{1}{4}dd}{x}$; par conſequent $KB\ (x).\ KA\ (\frac{1}{2}d) :: KA\ (\frac{1}{2}d).\ KS\ (x-s)$ *Ce qu'il faut remarquer.*

## COROLLAIRE I.

399. L'ON peut déduire de ce Problême le même Corollaire que l'on a tiré du Problême de l'ellipſe, pour décrire la même hyperbole par le moyen du nouveau premier diametre $CKc$, de la tangente $SC$ & du parametre de ce nouveau diametre $CKc$, lequel parametre ſe trouve en menant par le ſommet $A$ l'ordonnée $AI$ au nouveau diametre parallele à la tangente $SC$, & faiſant enſuite cette proportion. Le produit des ſegmens $cI$ par $CI$ du diametre $cKC$ prolongé, eſt au quarré de l'ordonnée $AI$ à ce diametre $CKc$, comme ce diametre $CKc$ eſt au parametre de ce diametre $CKc$. Cette proportion eſt déduite de l'équation à l'hyperbole; & les trois premiers termes étant connus, le parametre du diametre $CKc$ devient auſſi connu; le nommant $p$, l'équation ſera $\frac{cKc}{p}\times\overline{AI}^2=CI\times Ic$.

## COROLLAIRE II.

*Où l'on trouve la maniere de tirer les aſymptotes de l'hyperbole.*

400. AYANT trouvé que $KS\ (x-s)=\frac{\frac{1}{4}dd}{x}$; ſi l'on ſuppoſe $KS=0$, l'on aura 1°. $x-s=0$, & par conſequent la ſoutangente $s=x$, quand $KS=0$; & $AS$ qui eſt la diſtance du ſommet $A$ au point $S$ de la ſoutangente devient $KA\ (\frac{1}{2}d)$; 2°. $\frac{\frac{1}{4}dd}{x}=0$ dans ce cas: or quand une fraction eſt égale à FIG. XXI.

zero, il faut que le dénominateur ſoit infiniment grand par raport au numerateur; ainſi quand $KS = 0$, & $s = x$, il faut que la coupée $AB\,(x)$ ſoit infinie par raport à $\frac{1}{4}dd$. Mais les $x$ croiſſant, les $y$ croiſſent auſſi; c'eſt pourquoi quand $x$ eſt infinie, $y$ l'eſt auſſi : d'où l'on voit que quand $KS = 0$, c'eſt-à-dire, quand la ſoutangente commence au centre $K$, la tangente $SC$ ne touche l'hyperbole qu'à une diſtance infinie; & c'eſt ce qu'on appelle *l'aſymptote* de l'hyperbole : & la ſeconde branche $Acc$ de l'hyperbole ayant une ſemblable tangente, étant entierement égale à la premiere, elle a auſſi ſon aſymptote, & ces deux aſymptotes le ſont auſſi des deux branches de l'hyperbole oppoſée $acc$.

L'on a déja un point des aſymptotes au centre $K$; voici la maniere de trouver le ſecond point. L'équation $\frac{d}{p}yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$ par raport à $KB\,(x)$ infinie, & à $BC\,(y)$ auſſi infinie, c'eſt-à-dire, par raport au point $C$ infiniment éloigné de $K$ où l'aſymptote touche l'hyperbole, devient $\frac{d}{p}yy - xx = 0$; car $\frac{1}{4}dd$ s'évanouit de l'équation, étant zero par raport aux deux autres termes où ſont $y$ & $x$; l'on a donc $dyy = pxx$ & $y\sqrt{d} = x\sqrt{p}$, ce qui donne $x . y :: \sqrt{d} . \sqrt{p}$. Or en menant $tAT$ par le ſommet $A$ parallele aux ordonnées $BC$, l'on a deux triangles ſemblables $KAT$, $KBC$, dont le dernier eſt infiniment grand, & cependant l'eſprit peut l'appercevoir & le ſuppoſer; l'on a donc $KB\,(x) . BC\,(y) :: KA . AT$ : mais $x . y :: \sqrt{d} . \sqrt{p}$, donc $\sqrt{d} . \sqrt{p} :: KA\,(\frac{1}{2}d) . AT = \frac{\frac{1}{2}d\sqrt{p}}{\sqrt{d}} = \frac{1}{2}\sqrt{dp}$; par conſequent ſi l'on fait $AT = \frac{1}{2}\sqrt{dp}$, c'eſt-à-dire, égale à la moitié de la moyenne proportionelle entre le premier diametre $Aa$ & ſon parametre $p$ (laquelle moyenne proportionelle eſt auſſi le ſecond demi-diametre *), & qu'on tire la droite $KT$, elle ſera l'aſymptote de la branche $ACC$, & tirant de même $At$, ce ſera l'aſymptote de la ſeconde branche $Acc$; & les prolongeant du côté de l'hyperbole oppoſée $acc$, elles en ſeront auſſi les aſymptotes.

* 391.

On trouve par une ſemblable méthode les aſymptotes des courbes des autres genres plus élevés qui en ont.

THEORÊME.

## THEORÊME.

### *Des proprietés de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes.*

401. UNE hyperbole $ccACC$ & ſon oppoſée étant tracée ſur un plan avec un de ſes diametres quelconque donné $A$a, ſon ſecond diametre $dKD$, & la tangente $tAT$ à l'extrêmité de ce diametre qui eſt toujours parallele au ſecond diametre; ſi l'on fait $AT$, $At$ chacune égale à la moitié du ſecond diametre $dKD$, qu'on tire $KT$, $Kt$, & qu'on les prolonge à l'infini du côté de $A$ & du côté de a; ces lignes ſeront *les aſymptotes* de l'hyperbole $cAC$ & de ſon oppoſée; c'eſt-à-dire, que chacune des quatre branches des hyperboles oppoſées s'approchera toujours de plus en plus de ſon aſymptote ſans pourtant la rencontrer, ſi ce n'eſt à une diſtance infinie. FIG. XXI.

## DEMONSTRATION.

NOMMANT $KA(\frac{1}{2}d)$, $KD(\frac{1}{2}\delta)$, $KB(x)$, $BC(y)$, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables $KAT$, $KBE$, $KA(\frac{1}{2}d) . AT = KD(\frac{1}{2}\delta) :: KB(x) . BE = \frac{\delta x}{d}$; ainſi $CE = \frac{\delta x}{d} - y$. Or l'équation à l'hyperbole $\frac{dd}{\delta\delta}\,\underline{yy = xx - \frac{1}{4}dd}$, donne $y = \frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; ainſi $CE = \frac{\delta}{d} \times \overline{x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}}$; d'où il ſuit que plus $x$ augmente, & plus $CE$ diminue, & par conſequent l'hyperbole approche toujours de ſon aſymptote, & que cependant elle ne la rencontrera qu'à une diſtance infinie; car la valeur de $CE$ demeurera toujours poſitive, juſqu'à ce que $x$ ſoit infinie; & quand elle le ſera, $CE$ deviendra zero, ($-\frac{1}{4}dd$ étant zero par raport à $+xx$); & l'aſymptote touchera l'hyperbole.

## PREMIERE PROPRIETÉ.

402. SI l'on tire des paralleles $ecBCE$ à la tangente $tT$; ou, ce qui eſt la même choſe, au ſecond diametre $dD$, qui ſe terminent de part & d'autre aux aſymptotes; $CE \times Ce = \overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$; car, par ce qui précede, $CE = \frac{\delta}{d} \times \overline{x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}}$; & $Ce = Be(\frac{\delta}{d}x) + BC(+y = +\frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd})$; donc $CE \times Ce = \frac{\delta}{d} \times \overline{x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}} \times \frac{\delta}{d} \times \overline{x + \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}} = +\frac{1}{4}\delta\delta = \overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$.

Il eſt évident qu'on prouvera de même que $ce \times cE = \overline{At}^2 = \overline{Kd}^2$.

403. Si l'on mene auſſi des paralleles $Ce\varepsilon\varkappa$ au premier diametre, qui ſe terminent aux hyperboles oppoſées, & qui coupent les aſymptotes en e, $\varepsilon$; $Ce \times C\varepsilon = \overline{KA}^2$; car les triangles ſemblables $KBE$, Kbe donneront $BE(\frac{\delta x^*}{d}) . KB(x) :: Kb(y = \frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}) . be = \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; d'où l'on aura $Ce = x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$, & $C\varepsilon = Cb + b\varepsilon = x + \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; donc $Ce \times C\varepsilon = + \frac{1}{4}dd = \overline{KA}^2$.

Fig. XXII.

* 401.

## SECONDE PROPRIETÉ.

404. SI l'on tire par un point quelconque $C$ de l'hyperbole ou de ſon oppoſée, des lignes droites comme $GCg$, $ECe$, &c. qui coupent chacune l'hyperbole en deux points $C$, $c$; $C$, $i$, & qui ſe terminent aux aſymptotes en $E$, $e$, en $G$, $g$; les deux parties de chacune de ces lignes droites compriſes entre l'hyperbole & l'aſymptote, comme $CE$, $ce$, ou $CG$, $ig$, &c. ſont égales. Si l'on en tire de même aux hyperboles oppoſées, comme $Ce\varepsilon\varkappa$, $CLl\varkappa$, les parties $Ce$, $\varkappa\varepsilon$, ſont égales, comme auſſi $CL$, $\varkappa l$ ſeront égales.

Fig. XXII.

1°. Cette propriété eſt évidente par raport aux lignes droites paralleles au demi-diametre $dD$; car la ligne $BE$, par exemple de $ECBce$, eſt égale à $Be$; & de plus l'ordonnée $BC$ à l'ordonnée $Bc$; ainſi $CE = ce$. Il en eſt de même des paralleles $Ce\varepsilon\varkappa$ au premier diametre.

2°. Voici la démonſtration pour les autres lignes comme $GCig$; il faut démontrer que $CG = ig$. Pour le faire on menera par $C$ & par $i$ les paralleles au ſecond diametre $ECce$, $Hqih$, & on nommera $CE = ce(e)$, $Ce = cE(c)$, $qH = ih(i)$, $iH = qh(h)$, $iC(b)$; & les lignes qu'on veut prouver égales $CG(z)$, $ig(u)$. Les triangles ſemblables $HGi$, $EGC$ donneront $iH(h) - CE(-e) . CE(e) :: iC(b) . CG(z = \frac{be}{h-e})$. De même les triangles ſemblables $Cge$, $igh$, donneront $Ce(c) - ih(-i) . ih(i) :: iC(b) . ig(u = \frac{bi}{c-i}$. Il reſte à démontrer que $CG(z = \frac{be}{h-e}) = ig(u = \frac{bi}{c-i}$. Il n'y a qu'à les réduire au même dénominateur, & l'on aura $z = \frac{bce - bei}{\overline{h-e} \times \overline{c-i}}$, & $u = \frac{bih - bei}{\overline{h-e} \times \overline{c-i}}$; effaçant dans chacune $-bei$, & diviſant chaque reſte par $\frac{b}{\overline{h-e} \times \overline{c-i}}$, il reſte d'un côté $ce$, & de l'autre $ih$. Or $ce = Ce \times CE$, & $ih = iH \times qH$; & ces deux produits ſont égaux * chacun à $\overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$ ; ainſi ils ſont égaux ; donc $CG = ig$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 402.

On démontrera de même que $CL = \varkappa l$ en menant par $L$ & $l$ des paralleles au premier diametre $KA$.

## COROLLAIRE.

### *Où l'on donne une deſcription facile de l'hyperbole.*

405. ON trouve par cette proprieté tous les points qu'on veut d'une hyperbole & de ſon oppoſée, dont on a les aſymptotes & un ſeul point $C$ ; car il n'y a qu'à mener par $C$ tant de lignes droites qu'on voudra, comme $Cg$, $CG$, $C\varkappa$, &c. & prendre ſur chacune, par exemple ſur $GCg$ la partie $ig = CG$, & le point $i$ ſera un des points de l'hyperbole : il en eſt de même des autres, & chaque point qu'on trouve, peut ſervir de même à en trouver tant d'autres qu'on voudra.

## TROISIE'ME PROPRIETE',

### *Où l'on explique l'équation de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes.*

406. SI l'on tire par le ſommet $A$ du diametre $Aa$, $AF$ parallele à l'aſymptote $Kftg$, & $Af$ parallele à l'autre aſymptote, & qu'on tire par un point quelconque $c$ de l'hyperbole les paralleles $cM$, $cN$ aux aſymptotes juſqu'à la rencontre des aſymptotes en $M$ & $N$ ; l'on aura toujours $KM \times Mc = Kf \times Af$. Il en eſt de même de l'hyperbole oppoſée, ce qui donne $KM \,.\, Kf :: Af \,.\, Mc$. FIG. XXII.

1°. Il eſt évident que la tangente $tAT$ étant partagée également en $A$, $Af$ parallele à la baſe $KT$ du triangle $KtT$ partage auſſi $Kt$ en deux parties égales en $f$; ainſi $Kf$, $ft$, & $AF$ qui eſt parallele à $Kf$, ſont trois lignes égales. Par la même raiſon $KF$, $FT$, $Af$, ſont égales. 2°. Menant par $c$, $ecCE$ parallele à la tangente, on nommera les connues $AT = At = KD\,(\frac{1}{2}\delta)$ ; $KF = FT = Af\,(a)$ ; $Kf = ft = AE\,(b)$ ; les inconnues $KM = Nc\,(x)$, $Mc = KN\,(y)$ ; & l'on aura à cauſe des triangles ſemblables $AFT$, $cNE$, $AF\,(b) \,.\, AT\,(\frac{1}{2}\delta) :: Nc\,(x) \,.\, cE = \frac{\frac{1}{2}\delta x}{b}$ ; de même les triangles ſemblables $Aft$, $cMc$, donneront $Af\,(a) \,.\, At\,(\frac{1}{2}\delta) :: Mc\,(y) \,.\, ce = \frac{\frac{1}{2}\delta y}{a}$. Mais $cE \times ce = \overline{AT}^2$ * ; ainſi $\frac{\frac{1}{4}\delta\delta xy}{ab} = \frac{1}{4}\delta\delta$ ; * 402.

d'où l'on déduit $xy = ab$, c'eſt-à-dire $KM \times Mc = Kf \times fA$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ainſi $KM \times Mc = Kf \times fA$; c'eſt-à-dire, $xy = ab$ eſt l'équation de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes, & elle exprime le raport de tous les points $c$ de l'hyperbole à l'aſymptote $KM$ par le moyen des coupées $KM (x)$, & des ordonnées $Mc (y)$; & elle convient de même à l'autre branche & à l'hyperbole oppoſée.

## PROBLÊME IV.

407. FIG. XXII. *MENER une tangente* Sqs *par un point donné quelconque* q *de l'hyperbole, en ſe ſervant de l'équation aux aſymptotes* xy — ab = 0; *c'eſt-à-dire, ayant mené l'ordonnée* qV, *trouver la ſoutangente* VS.

SOIT $KV = x$, $Vq = y$, $VS = s$, on trouvera par la * 371. methode * en mettant $x + e$ à la place de $x$, & $y - \frac{ey}{s}$ à la place de $y$ dans $xy - ab = 0$, $s = x$; ce qui fait voir qu'en prenant $VS (s) = KV (x)$; & tirant $Sqs$, elle ſera la tangente.

### COROLLAIRE I.

408. PUISQUE l'ordonnée $qV$ partage $KS$ en deux parties égales, il eſt évident qu'étant parallele à la baſe $Ks$ du triangle $KSs$, elle partage auſſi la tangente $Sqs$ en deux parties égales au point touchant $q$.

### COROLLAIRE II.

*Où l'on explique l'hyperbole équilatere.*

409. SI l'on mene par le centre K & par le point touchant $q$ une ligne $Kq$, ce ſera la moitié d'un premier diametre, & la moitié $qS$ de la tangente $sqS$ ſera égale à la moitié du ſecond * 401. diametre *, & lui ſera parallele. Or ſi un ſeul premier diametre de l'hyperbole eſt égal à ſon ſecond diametre, (ce qui ne peut pas arriver que le premier & le ſecond diametre * 391. ne ſoient chacun égal au parametre *), 1°. l'angle $FKf$ des aſymptotes ſera droit; 2°. chaque premier diametre de l'hyperbole ſera toujours égal à ſon ſecond diametre, & par conſequent auſſi à ſon parametre.

1°. Car ſoit $Kq$ la moitié d'un premier diametre quelconque, & $sqS$ la tangente au ſommet $q$ de ce premier diametre, la moitié $qS$ de la tangente ſera égale à la moitié du ſecond diametre; par conſequent ſi le premier diametre eſt égal à ſon ſecond diametre, $Kq$ ſera égale à $qS$, & le triangle $KqS$ étant iſocele, l'ordonnée $qV$ au point touchant parallele à l'aſymptote $Kf$ partageant $KS$ en deux parties égales en $V$, ſera perpendiculaire ſur l'aſymptote $KF$; l'aſymptote $Kf$ ſera donc auſſi perpendiculaire au point K ſur $Kf$.

2°. Puiſqu'il ſuit de l'égalité d'un ſeul premier diametre & de ſon ſecond diametre, que l'angle des aſymptotes eſt droit, une ordonnée quelconque $qV$ étant parallele à l'autre aſymptote $Kf$, ſera perpendiculaire ſur $KF$; & ſi l'on mene par ce point $q$ une tangente $qS$ & un diametre $Kq$, le point $V$ de la perpendiculaire $qV$ étant au milieu de $KS$, le point touchant $q$ ſera également éloigné de K & de $S$; par conſequent $Kq = qS$; la moitié $Kq$ d'un premier diametre quelconque ſera donc égale à la moitié $qS$ de ſon ſecond diametre.

### *Définition de l'hyperbole équilatere.*

110. UNE hyperbole dont l'angle des aſymptotes eſt droit, s'appelle *équilatere*, & dans une hyperbole équilatere, chaque premier diametre eſt égal à ſon ſecond diametre, comme auſſi à ſon parametre. L'équation de l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes eſt $xy = aa$, quand $KA$ eſt l'axe; & $xy = ab$, quand $KA$ eſt un autre diametre que l'axe. Cette équation convient auſſi à toute autre hyperbole par raport aux aſymptotes; ainſi l'équation à l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes ne differe pas des autres : Mais par raport aux diametres, l'équation à l'hyperbole $\frac{d}{p} yy = xx - \frac{1}{4} dd$ devient pour l'hyperbole équilatere $yy = xx - \frac{1}{4} dd$; & par raport au ſecond diametre $xx = yy + \frac{1}{4} \delta\delta$, $\frac{1}{4} \delta\delta = \frac{1}{4} dd$. On ſe ſert beaucoup dans la réſolution des Problêmes de l'hyperbole équilatere, parcequ'elle eſt la plus ſimple.

## PROBLÊME V.

### *Uſage de la méthode des tangentes pour trouver par une même operation les tangentes d'une infinité de courbes.*

111. *TROUVER les ſoutangentes de toutes les courbes à l'infini représentées par cette équation* $p^{m-1} x = y^m$, *ou bien (ſuppoſant, pour abreger le calcul, le parametre* $p = 1$) $1x = y^m$.

On remarquera que quand $m$ eſt une grandeur poſitive, l'équation précedente eſt l'équation qui convient aux paraboles de tous les degrés à l'infini, & que quand $m$ eſt négative, $1x = y^{-m}$, ou bien $xy^m = 1$ eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés à l'infini par raport aux aſymptotes.

* 371. Il faut mettre dans l'équation $y^m - 1x = 0$, $\overline{y+\frac{ey}{s}}^{\,m}$ * à
la place de $y^m$, & $x+e$ à la place de $x$; & il ſuffit d'aller ici
juſqu'au ſecond terme où $e$ eſt lineaire, ſi ce n'eſt dans les cas
*372. de la remarque*: ainſi l'on trouvera $\begin{array}{ll} y^m & +\frac{me}{s}y^m = 0 \\ -x & -1e \end{array}$, ce qui
donne $s = my^m$, & en mettant pour $y^m$ ſa valeur $1x$, l'on
trouve $s = mx$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Quand dans l'équation $y^m - 1x = 0$, $m = 2$, la ſoutangente $s$ eſt égale à deux fois la coupée $x$, comme on l'a
* 371. trouvé ci-deſſus*; quand $m = 3$, la ſoutangente eſt égale à
$3x$, & ainſi à l'infini. Quand $m$ eſt négative, & que l'équation
$xy^m - 1 = 0$, eſt aux hyperboles de tous les degrés par
raport à leurs aſymptotes, ſi $m = 1$, la ſoutangente eſt $s =$
*407. $- 1x$, comme on l'a trouvée ci-deſſus*, la valeur négative
$- 1x$ de la ſoutangente marque qu'il la faut prendre du
côté oppoſé à l'origine K, comme l'on a pris *VS* (fig. 22.)
Si $m = 2$, la ſoutangente $S = - 2x$, & ainſi à l'infini.

412. On trouvera de même en mettant $x+e$ au lieu de $x$, & $y+\frac{ey}{s}$ au lieu de $y$, que les ſoutangentes des ellipſes de tous les degrés à l'infini, dont l'équation eſt $\frac{d}{p}y^{m+n} = x^m \times \overline{d-x}^{\,n}$, ſont repréſentées par $s = \frac{\overline{m+n} \times \overline{dx-xx}}{md-mx-nx}$; & que les ſoutangentes de toutes les hyperboles dont les équations par raport à leurs diametres ſont repréſentées par $\frac{d}{p}y^{m+n} = x^m \times \overline{d+x}^{\,n}$, ſont auſſi repréſentées par $s = \frac{\overline{m+n} \times \overline{dx+xx}}{md+mx+nx}$. Les
Lecteurs les trouveront facilement par l'application qu'on
*371. vient de faire de la méthode* des tangentes à l'équation
generale des paraboles & des hyperboles de tous les genres,
laquelle ſuffit pour faire concevoir la maniere de l'appliquer
à toutes les autres équations generales & particulieres des
courbes geometriques.

## *De la deſcription des courbes en trouvant pluſieurs de leurs points très-proches les uns des autres.*

### POUR LES TROIS SECTIONS CONIQUES.

13. ON menera d'abord les deux lignes des coordonnées $OAa$, $OE$, perpendiculaires l'une à l'autre, parceque la deſcription ſuivante convient aux axes des trois ſections coniques. On ſuppoſe un point donné $F$ ſur $OAa$ qu'on appelle *le foyer*; & deux lignes connues $og$, $gh$, qu'on nommera la premiere $m$, la ſeconde $n$: Cela ſuppoſé, 1°. il faut partager $OF$ en $A$, de façon que $OA . AF :: og\,(m) . gh\,(n)$; en faiſant à part l'angle quelconque $hof$, & prenant $og = m$, $gh = n$, & $of = OF$, joignant $hf$, & tirant par $g$, $ga$, parallele à $hf$, l'on aura $oa . af :: og\,(m) . gh\,(n)$; ainſi l'on aura le point $A$ qu'on cherchoit ſur $OAF$. 2°. Il faut faire $AG$ perpendiculaire ſur $OAF$ égale à $AF$, & tirer la ligne indéfinie $OGHD$. 3°. Pour avoir tel point qu'on voudra de la ſection conique qu'on veut décrire, il faut prendre ſur l'axe $OAF$ le point $B$ où l'on voudra, & après avoir élevé $BD$ perpendiculaire à l'axe juſqu'à la ligne $OGHD$, ouvrir le compas de la grandeur de $BD$, & mettant une pointe ſur le foyer $F$, tracer avec l'autre pointe un arc qui coupe $BD$ en $C$. FIG. XXIII.

Le point $C$ ainſi trouvé eſt un point de la parabole, quand $m = n$; de l'ellipſe, quand $m$ ſurpaſſe $n$; de l'hyperbole, quand $m$ eſt moindre que $n$; & l'on trouvera de la même maniere tant d'autres points que l'on voudra, & auſſi proches les uns des autres qu'on voudra. On va mettre en Problême la maniere de démontrer ces trois cas.

## PROBLÊME VI.

### POUR LA PARABOLE.

414. *QUAND* m = n, *trouver l'équation de la courbe, dont* C *eſt l'un des points.*

SOIT $OA = \frac{1}{4}p$, ainſi $AF = OA = \frac{1}{4}p$; ſoit $AB = x$, $BC = y$; ſoit menée la ligne $FC$ égale à $BD$ par la conſtruction. A cauſe des triangles rectangles ſemblables $OAG$, $OBD$, l'on a $OA\,(\frac{1}{4}p) . AG\,(\frac{1}{4}p) :: OB\,(\frac{1}{4}p + x) . BD = FC = \frac{1}{4}p + x$; l'on a auſſi $FB = AB\,(x) - AF\,(-\frac{1}{4}p) = x - \frac{1}{4}p$: & à cauſe du triangle rectangle $FCB$, $\overline{FC}^2\,(\frac{1}{16}pp + \frac{1}{2}px + xx) - \overline{FB}^2\,(-xx + \frac{1}{2}px - \frac{1}{16}pp) = \overline{BC}^2\,(yy)$; d'où l'on déduit $px = yy$, qui eſt l'équation à la parabole : $AB$ eſt l'axe, parceque les ordonnées $BC$ $(y)$ lui ſont perpendiculaires, & $p = 4OA$ $(4 \times \frac{1}{4}p)$ eſt le parametre de l'axe.

### REMARQUES.

### I.

415. LA ligne $OGHD$ eſt tangente du point $H$ où ſe termine l'ordonnée au foyer $FH$; car nommant $AF$ $(x)$, $OF$ ſera égale à $2x$, qui eſt la ſoutangente de la parabole*. * 371.

### II.

416. Fig. XXIV. Si par un point quelconque $C$ de la parabole on mene une ligne $CF$ au foyer, & la ligne $CE$ parallele à l'axe $AB$, qui par la conſtruction eſt égale à $FC$, & après avoir tiré $FE$, & partagé $FE$ au milieu en $L$, on mene la ligne $CLS$, elle ſera tangente au point $C$; car les triangles $ELC$, $SLF$, ſeront rectangles en $L$, puiſque le triangle $ECF$ eſt iſocele, & ils ſeront ſemblables & égaux, ayant les côtés $EL$, $LF$ égaux; par conſequent $SF = EC = OB$; d'où l'on voit que $SO = FB$, par conſequent $AS = AB$; ainſi $SB = 2AB$ $(2x)$ eſt la ſoutangente du point $C$*. * 371.

### III.

417. D'où il ſuit que l'angle $sCM$ que fait la tangente $SCs$ avec la parallele $ECM$ à l'axe par le point $C$, étant égal à l'angle oppoſé au ſommet $ECS$, il eſt auſſi égal à l'angle $SCF$, qui par la conſtruction eſt égal à l'angle $ECS$.

D'où l'on voit que ſi l'on donnoit à du métal bien poli la figure parabolique que formeroit la parabole $CHA$ en la faiſant tourner autour de ſon axe $AFB$, on auroit un miroir qui raſſembleroit au foyer $F$ tous les rayons comme $MC$ qui ſeroient paralleles à l'axe $AFB$; & qui reflechiſſant les rayons d'un point lumineux qui ſeroit au foyer $F$, les rendroit tous paralleles à l'axe; puiſque dans la reflexion chaque angle d'incidence $MCs$ eſt toujours égal à ſon angle de reflexion $FCS$.

### POUR L'ELLIPSE ET L'HYPERBOLE.

418. QUAND $m$ eſt plus grande ou plus petite que $n$, trouver l'équation de la courbe dont $C$ eſt l'un des points.

Fig. XXIII & XXV. Comme l'ellipſe rencontre ſon axe en deux points $A$ & $a$, qui ſont les extrêmités de l'axe; & que l'hyperbole & ſon oppoſée ont

ont auſſi les ſommets aux deux extrêmités $A\alpha$ de l'axe principal : Pour abreger le calcul, il faut, 1°. trouver la longueur $Aa$ & $A\alpha$ de l'axe, le ſecond foyer $f$ ou $\varphi$, & le raport de l'axe $Aa$ à la diſtance $Ff$ des foyers, & de $A\alpha$ à $F\varphi$ ; 2°. après l'avoir partagé au milieu $K$ dans l'ellipſe, & $k$ dans l'hyperbole, il faut trouver la ligne $OK$ & $Ok$. Puiſque le point a appartient à la courbe, $OA . AF :: Oa . aF$ ; en diviſant, $OA - AF . AF :: Oa - aF = OF . aF$ ; or les trois premiers termes $OA - AF$, $AF$, & $OF$ ſont connus : on trouvera donc le quatriéme $aF$, & y joignant $AF$, la grandeur de l'axe ſera connue ; & faiſant $af = AF$, l'on aura le ſecond foyer $f$ ; & comme $OA$ ſurpaſſe $AF$, $aF$ eſt poſitive & ſe trouve du même côté que $A$ par raport à $O$. Dans l'hyperbole l'on trouvera $OA - AF . AF :: - OF . - \alpha F$ ; & comme $OA$ eſt moindre que $AF$, $\alpha F$ eſt négative, & doit être priſe en allant vers la gauche de $F$ à $\alpha$. On prendra auſſi $\alpha\varphi = AF$, & $\varphi$ ſera le ſecond foyer de l'hyperbole, & $A\alpha$ ſera ſon grand axe.

Pour trouver le raport de $Aa$ à $Ff$, l'on a déja $Oa . aF :: OA . AF$, en faiſant le changement alterne, $Oa . OA :: aF . AF$, en diviſant $Oa - OA = Aa . OA :: aF - AF = Ff . AF$ ; donc $Aa . Ff :: OA . AF$ : dans l'hyperbole on trouvera $O\alpha + OA = A\alpha . OA :: \alpha F + AF = F\varphi . AF$ ; par conſequent $A\alpha . F\varphi :: OA . AF$.

Pour trouver la valeur de $KO$ ou $kO$, ſoit $Aa$ ou $A\alpha = a$ ; $Ff$ ou $F\varphi = f$. On fera cette proportion pour l'ellipſe, $KF\left(\frac{1}{2}f\right) . KA\left(\frac{1}{2}a\right) :: AF\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}f\right) . OA = \frac{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}af}{\frac{1}{2}f}$ ; ainſi $KO = OA + AK = \frac{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}af + \frac{1}{4}af}{\frac{1}{2}f} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$. Dans l'hyperbole on aura $kF\left(\frac{1}{2}f\right) . kA\left(\frac{1}{2}a\right) :: AF = kF - kA\left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}a\right) . OA = \frac{\frac{1}{4}af - \frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$, & $kO = kA - OA = \frac{\frac{1}{4}af - \frac{1}{4}af + \frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$. L'on remarquera que $KO$ & $kO = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$ ; donnant cette proportion $KF$ & $kF\left(\frac{1}{2}f\right) . KA$ & $kA\left(\frac{1}{2}a\right) :: KA$ & $kA\left(\frac{1}{2}a\right) . KO$ & $kO\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right)$, la ligne $OH$ eſt tangente * au point $H$ où eſt * 386. 398.

l'ordonnée $FH$ au foyer $F$. Ces choſes ſuppoſées, on trouvera l'équation de la courbe de la maniere ſuivante.

Soit $KB$ ou $kB = x$, $BC = y$, $KA$ ou $kA = \frac{1}{2}a$, $KF$ ou $kF = \frac{1}{2}f$, $OB = \mathrm{K}O - KB$ dans l'ellipſe ; & dans l'hyperbole $kB - kO = \pm \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} \mp x$. $FB$ (dans l'ellipſe) $= KF - KB$; (dans l'hyperbole) $= kB - kF = \pm \frac{1}{2}f \mp x$. Or les triangles ſemblables $OAG$, $OBD$, donnent $OA . AG :: OB . BD = FC$ par la conſtruction; mais $OA . AG :: \frac{1}{2}A\mathrm{a}$, ou $\frac{1}{2}A\alpha (\frac{1}{2}a) . \frac{1}{2}Ff$ ou $\frac{1}{2}F\varphi$ $(\frac{1}{2}f)$; ainſi $\frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: OB (\pm \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} \mp x)$. $BD$ ou $FC = \pm \frac{1}{2}a \mp \frac{fx}{a}$. Maintenant dans le triangle rectangle $FBC$, $\overline{FC}^2 - \overline{FB}^2 = \overline{BC}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{4}aa - fx + \frac{ffxx}{aa} - \frac{1}{4}ff + fx - xx = yy$, qui ſe réduit à $\frac{aa}{ff-aa}yy = xx - \frac{1}{4}aa$, qui eſt l'équation de l'hyperbole, parceque $F\varphi\,(f)$ ſurpaſſe $A\alpha\,(a)$ : mais dans l'ellipſe où $A\mathrm{a}\,(a)$ ſurpaſſe $Ff\,(f)$, il faut tranſpoſer les membres de l'équation, & l'on aura $\frac{aa}{aa-ff}yy = \frac{1}{4}aa - xx$, qui eſt l'équation à l'ellipſe.

Dans l'une & dans l'autre ſi l'on prend 1°. une ligne $\delta = \sqrt{aa - ff} = \sqrt{\overline{A\mathrm{a}}^2 - \overline{Ff}^2} = \sqrt{2AF \times 2\mathrm{a}F}$ dans l'ellipſe, $= \sqrt{\overline{F\varphi}^2 - \overline{A\alpha}^2} = \sqrt{2AF \times 2\alpha F}$ dans l'hyperbole, $\delta$ ſera le ſecond axe, & l'on aura $\frac{aa}{\delta\delta}yy = \mp xx \pm \frac{1}{4}aa$. 2°. Si l'on fait $a . \delta :: \delta . \frac{\delta\delta}{a} = p$, $p$ ſera le parametre du grand axe, & l'équation ſera $\frac{a}{p}yy = \mp xx \pm \frac{1}{4}aa$.

### COROLLAIRE I.

419. Fig. XXIII. & XXV. LA ſomme $FC + fC$ des deux lignes menées des deux foyers $F$, $f$ à un point quelconque $C$ de l'ellipſe, eſt égale à l'axe $A\mathrm{a}$, & la difference $\varphi C - FC$ des deux lignes menées des deux foyers à un point $C$ de l'hyperbole, eſt égale à l'axe $A\alpha$.

### DE'MONSTRATION.

SI l'on prend dans l'ellipſe $\mathrm{K}b = \mathrm{K}B$, qu'on mene $bcd$ & $Fc$, ces deux lignes ſont égales par la conſtruction. Et comme $\mathrm{K}b = \mathrm{K}B$, $bc$ eſt auſſi égale à $BC$; ainſi les triangles rectangles $fBC$, $Fbc$ ſont égaux, & $Fc = fC$. On prouvera de même dans l'hyperbole, en ſuppoſant $kB = k\beta$, que $\varphi C = F\varkappa$;

ainſi il faut démontrer que $FC + Fc = Aa$; & que $Fx - FC = A\alpha$. $OA . AG :: \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: OB \left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} - x\right) . BD = FC = \frac{1}{2}a - \frac{fx}{a}$. De même $OA . AG :: \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: Ob \left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} + x\right) . bd = Fc = \frac{1}{2}a + \frac{fx}{a}$. Donc $FC + Fc$, ou $FC + fC = a = Aa$.

On fera les mêmes proportions pour l'hyperbole $OA . AG :: \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: OB \left(x - \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right) . BD = FC = \frac{fx}{a} - \frac{1}{2}a . OA . AG :: \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: O\beta \left(x + \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right) . \beta\delta = \varphi C = \frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a$. Donc $\varphi C - FC = a = A\alpha$.

## REMARQUE,

*Où l'on donne la deſcription ordinaire de l'ellipſe & de l'hyperbole.*

420. ON déduit de cette proprieté la maniere ordinaire de décrire l'ellipſe & l'hyperbole, l'axe $Aa$ ou $A\alpha$ étant donné, & les points $F$, $f$, ou $F$, $\varphi$ des foyers étant auſſi donnés: en prenant dans l'ellipſe avec le compas un ſegment quelconque $AB$ de l'axe $Aa$, & du foyer $F$ pour centre avec ce rayon $AB$ tirant un arc de cercle, & décrivant enſuite de l'autre foyer $f$ pour centre un autre arc avec l'autre ſegment $Ba$ pour rayon, l'interſection des deux arcs $C$ ſera un point de l'ellipſe; de même dans l'hyperbole décrivant un arc du centre $F$ avec le ſegment quelconque $AB$ de l'axe $\alpha A$ prolongé, & enſuite de l'autre foyer $\varphi$ pour centre décrivant avec l'autre ſegment $\alpha B$ de l'axe $\alpha A$ prolongé un ſecond arc, le point d'interſection $C$ de ces deux arcs ſera un point de l'hyperbole. FIG. XXIII. & XXV.

## COROLLAIRE II.

421. SI l'on mene des foyers $F$, $f$ par un point quelconque $C$ de l'ellipſe, les lignes $FC$, $fC$, & ayant prolongé $fC$ en $M$ en faiſant $CM = CF$, on tire $FM$, enſuite partageant $FM$ qui eſt la baſe du triangle iſocele $FCM$ en deux moitiés en $L$, on tire $CLS$, qui eſt perpendiculaire à $FM$, elle ſera la tangente au point $C$. FIG. XXV.

### DE'MONSTRATION.

IL faut mener $LN$ parallele à $Ff$, & par le centre $K$ tirer $KN$ qui ſera auſſi parallele à $FLM$; car $LN$ partageant $MF$ en deux parties égales en $L$, partage auſſi $Mf$ en deux parties égales en $N$; ainſi $KN$, partageant $Ff$ en deux parties égales en K, & $fM$ en deux parties égales en $N$, eſt parallele à $FM$. Mais puiſque $Mf = FC + Cf = Aa$ $(a)$, $MN$
*419. $= NF = \frac{1}{2}a$, $CN^* = \frac{fx}{a}$, $LN$ eſt la moitié de $Ff$; ainſi $LN = \frac{1}{2}f$. Soit $SB = s$, les deux triangles ſemblables $CLN$, $CSf$ donnent cette proportion $CN\,(\frac{fx}{a}).\ CF\,(\frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a) ::$ $LN\,(\frac{1}{2}f).\ Sf = \frac{1}{2}f + \frac{\frac{1}{4}aa}{x}$, retranchant $Bf\,(\frac{1}{2}f + x)$ de $Sf$,
*385. l'on aura $SB\,(s) = \frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$, qui eſt * la ſoutangente de l'ellipſe.

D'où il eſt évident que les angles $FCS$, $fCs$ ſont égaux.

### COROLLAIRE III.

422. SI l'on mene des foyers $F$, $\varphi$ de l'hyperbole à un point
FIGURE quelconque $C$, les lignes $FC$, $\varphi C$, & ayant pris $CM = CF$,
XXVI. & mené $FM$, on tire $CLS$ par le milieu $L$ de $FM$ baſe du triangle iſocele $FCM$, $CLS$ eſt la tangente au point $C$.

### DE'MONSTRATION.

AYANT mené par le milieu de $MF$, $LN$ parallele à $Fk\varphi$, & tiré $kN$ qui ſera parallele à $MF$, il eſt évident, comme dans le ſecond Corollaire, que $M\varphi = \alpha A = a$, $NL = kF$
*419. $= \frac{1}{2}f$, $CM = CF = \frac{fx}{a} - \frac{1}{2}a^*$, ainſi $CN = \frac{fx}{a}$, $\varphi C = \frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a$. Soit $SB = s$, les triangles ſemblables $CNL$, $C\varphi S$ donneront cette proportion $CN\,(\frac{fx}{a}).\ C\varphi\,(\frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a) :: NL\,(\frac{1}{2}f)$ $.\ \varphi S = \frac{1}{2}f + \frac{\frac{1}{4}aa}{x} = x - s$; ôtant $\varphi k\,(\frac{1}{2}f)$ de $\varphi S$, l'on aura
*398. $kS = \frac{\frac{1}{4}aa}{x} = kB - SB = x - s$, qui eſt * la valeur de $kS$, c'eſt-à-dire, la diſtance du centre $k$ au point $S$ de la ſoutangente.

423. Il eſt évident que les angles $\varphi CS$, $FCS$ ſont égaux.

### *Methode generale de décrire les courbes algebriques en trouvant tant de points qu'on voudra de ces courbes très-proches les uns des autres, l'équation de la courbe étant donnée.*

424. 1°. Il faut d'abord tirer les lignes des coordonnées qui ſoient perpendiculaires, ſi l'on veut que ce ſoient les axes, & qui faſſent entr'elles l'angle qu'on voudra, ſi l'on veut qu'elles ſoient d'autres diametres que les axes; il faudra prendre les coupées ou les $x$ ſur l'une, & les ordonnées $y$ ſeront paralleles à l'autre. 2°. Après avoir déterminé le point où commencent les coupées $x$, il faut ſe ſervir de l'équation de la courbe, & ſuppoſer celle des deux inconnues qui monte au plus haut degré (on ſuppoſe par exemple que c'eſt $x$) égale à une grandeur connue très-petite, qu'on nommera $1a$; ſubſtituer cette grandeur connue dans l'équation de la courbe à la place de $x$, & l'équation deviendra déterminée, & n'aura d'inconnue que $y$. 3°. Il faut trouver les lignes qui ſont les valeurs de $y$, en réſolvant cette équation par les regles qu'on a données * quand l'équation ne paſſe pas le ſecond degré, & par celles qu'on donnera dans la ſuite quand elle paſſe le ſecond degré: & après avoir pris une coupée depuis l'origine des $x$ égale à $1a$, on menera par ſon extrêmité une parallele à la ſeconde des lignes coordonnées qu'on fera égale à la valeur de $y$ qu'on vient de trouver, & ſon extrêmité ſera un point de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de même une ſeconde ordonnée $y$ en mettant $2a$ à la place de $x$, une troiſiéme en y mettant $3a$, & ainſi de ſuite; & l'on aura à très-peu près la courbe qu'on vouloit tracer.

* 293 & 294.

### REMARQUE.

425. Quand $y$ a pluſieurs valeurs poſitives, la courbe a pluſieurs branches du côté où l'on a ſuppoſé les $y$ poſitives: quand $y$ a des valeurs négatives, il faut les tirer du côté des $y$ négatives. Quand on trouve que la valeur de $y$ eſt zero, c'eſt une marque que la courbe joint le diametre des $x$ à l'endroit de la valeur de $x$ qui a donné $y = 0$; quand on trouve des valeurs imaginaires, c'eſt une marque qu'il n'y a aucune partie de la courbe ſur la partie du diametre à qui conviennent ces valeurs imaginaires de $y$, comme on le trouve dans l'hyperbole, n'y ayant aucune partie de la courbe ſur l'axe

ni ſur ſes premiers diametres, & les hyperboles oppoſées commençant chacune aux extrêmités de l'axe ou de chacun des premiers diametres. Quand en prenant $-1a$, $-2a$, $-3a$, &c. pour les valeurs déterminées des $x$, on trouve des valeurs de $y$, il faut mettre ces ordonnées $y$ du côté des $x$ négatives.

L'énoncé de cette méthode paroît aſſez clair pour la faire clairement concevoir.

## PROBLÊME VII.

426. *QUAND on a l'équation d'une courbe, par exemple de quelqu'une des trois ſections coniques par raport à l'un de ſes diametres, trouver l'équation qui exprime le raport des points de la même courbe à une autre ligne droite donnée de poſition ſur le même plan.*

LES équations des ſections coniques par raport à leurs diametres étant diſpoſées de façon que zero en ſoit le ſecond membre, ſont :

$yy - px = 0$, équation à la parabole.

$\frac{d}{p}yy + xx - \frac{1}{4}dd = 0$, équation à l'ellipſe par raport à ſon premier diametre, ou bien $yy + \frac{p}{d}xx - \frac{1}{4}dp = 0$.

$\frac{\delta}{\pi}xx + yy - \frac{1}{4}\delta\delta = 0$, équation à l'ellipſe par raport à ſon ſecond diametre, ou bien $xx + \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$; & quand le diametre eſt égal au parametre, elle devient $xx + yy - \frac{1}{4}dd = 0$, qui eſt l'équation au cercle, quand les $y$ ſont perpendiculaires aux $x$.

$\frac{d}{p}yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$, équation à l'hyperbole par raport à ſon premier diametre, ou bien $yy - \frac{p}{d}xx + \frac{1}{4}dp = 0$; quand $d = p$, elle devient $yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$.

$\frac{\delta}{\pi}xx - yy - \frac{1}{4}\delta\delta = 0$, équation à l'hyperbole par raport à ſon ſecond diametre, ou bien $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$; quand $\delta = \pi = d$, elle devient $xx - yy - \frac{1}{4}dd = 0$.

On remarquera dans ces équations, 1°. Que $p$ eſt le parametre du premier diametre, $d$ eſt le premier diametre, $\pi$ eſt le parametre du ſecond diametre, $\delta$ eſt le ſecond diametre: dans l'ellipſe & dans l'hyperbole on prend l'origine des
Fig. XVI. coupées $x$ au centre K; mais dans la parabole l'origine
XVII. des $x$ eſt au ſommet $A$. 2°. Que dans l'équation à la parabole
XVIII. l'une des inconnues eſt élevée au quarré, & l'autre n'eſt que

lineaire ; dans l'ellipſe, elles ſont toutes deux élevées au quarré avec le même ſigne $+$ ; dans l'hyperbole, les deux inconnues ſont auſſi élevées au quarré, mais avec differens ſignes, l'un ayant $+$, & l'autre $-$. 3°. Que dans l'équation à l'ellipſe ſi $d = p$, alors $d = \delta$, & l'équation devient $yy + xx - \frac{1}{4} dd = 0$, qui eſt l'équation au cercle, quand les $y$ ſont perpendiculaires aux $x$ ; & quand dans l'équation à l'hyperbole $d = p$, alors $d = \delta$, & l'équation devient $yy - xx \pm \frac{1}{4} dd = 0$, qui eſt l'équation à l'hyperbole équilatere par raport à ſes diametres : il y a $+ \frac{1}{4} dd$, quand c'eſt le premier diametre, & $- \frac{1}{4} dd$, quand c'eſt le ſecond.

$xy - ab = 0$, ou $xy - aa = 0$ eſt l'équation à l'hyperbole par raport aux aſymptotes, & l'hyperbole eſt équilatere, quand l'angle des aſymptotes eſt droit.

### POUR LA PARABOLE.

27. AYANT l'équation $yy - px = 0$ de la parabole $AC$ par raport à ſon diametre $AB$, ſur lequel ſont les $AB\,(x)$, ſon parametre eſt $AP = p$, les ordonnées ſont $BC\,(y)$ faiſant l'angle donné $CBA$ avec le diametre $BA$ ; trouver l'équation à la même parabole $AC$ par raport à la ligne droite $ON$ donnée de poſition ſur le même plan, dont l'origine eſt $O$. FIGURE XXVII.

Il faut mener par $O$ la ligne $OLM$ parallele à $AB$, tirer par le ſommet $A$ la ligne $AL$ parallele aux ordonnées $BC$, prolonger l'ordonnée $CB$ juſqu'à la ligne $ON$, & elle coupera $OLM$ en $M$ ; prendre ſur $ON$ une ligne déterminée $OF$ qu'on nommera $f$, élever $FG$ parallele aux ordonnées $NC$, & on nommera la ligne connue $FG\,(g)$ ; elle déterminera $OG$ qu'on nommera $h$ : toutes les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles. On ſuppoſera $ON = u$, $NC = z$, la donnée $AL = l$, & la donnée $LO = i$, les triangles ſemblables $OGF$, $OMN$ donnent $OF\,(f) . ON\,(u) :: FG\,(g) . NM = \frac{g}{f} u$ ; & $OF\,(f) . ON\,(u) :: OG\,(h) . OM = \frac{h}{f} u$ ; l'on aura donc $BC = NC - NM - MB = z - \frac{g}{f} u - l$, & $AB = OM - OL = \frac{h}{f} u - i$. Cela ſuppoſé ;

Il faut mettre dans l'équation $yy - px = 0$ le quarré de la valeur de $BC$ à la place de $yy$, & la valeur de $AB$ à la place de $x$ ; & l'on aura

$$\begin{array}{l} zz - \frac{2g}{f} uz - 2lz + \frac{gg}{ff} uu + \frac{2gl}{f} u + ll = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{hp}{f} u + ip \end{array}$$

C'eſt l'équation à la même parabole $AC$ par raport à la ligne $ON$.

## REMARQUE.

428. ON remarquera que le coëficient $\frac{gg}{ff}$ qui multiplie le terme $uu$ eſt toujours égal au quarré de la moitié du coëficient $\frac{2g}{f}$, qui multiplie $uz$, & qu'ils doivent avoir des ſignes differens; l'expreſſion même le fait ici connoître : mais dans tous les cas où l'expreſſion ne le fait pas connoître, il n'eſt pas moins neceſſaire que cela ſe trouve; autrement l'équation ne ſeroit pas à la parabole; en voici la raiſon : Pour réduire l'équation précedente qui eſt à la ligne $ON$ differente du diametre $AB$ à l'équation $yy - px = 0$, qui eſt l'équation ſimple au diametre $AB$, il faudroit faire évanouir les termes où $z$ eſt lineaire, en ſuppoſant l'ordonnée $BC\ (y) = z - \frac{g}{f}u - l$, ou $y + \frac{g}{f}u + l = z$; & il faut en même temps que le quarré $uu$ de la ſeconde inconnue $u$ s'évanouiſſe; or cela ne ſçauroit ſe faire, comme on le peut voir en faiſant ſoi-même l'operation, que le coëficient qui multiplie $uu$, ne ſoit égal au quarré de la moitié du coëficient qui multiplie $uz$, & que ces coëficiens n'ayent des ſignes differens.

### *Pour l'hyperbole par raport à ſon premier diametre.*

429. AYANT l'équation $yy - \frac{p}{a}xx + \frac{1}{4}dp = 0$ de l'hyperbole

FIGURE XXVII. $AC$ par raport à ſon premier diametre $Aa = d$, ſur lequel ſont priſes les coupées $KB = x$ depuis le centre $K$, ſon parametre eſt $AP = p$, les ordonnées ſont $BC = y$ faiſant l'angle donné $CBA$ avec le diametre prolongé $aA$; trouver l'équation de la même hyperbole par raport à la ligne droite $ON$ donnée de poſition ſur le même plan, dont l'origine eſt le point fixe $O$.

Il faut mener par $O$ la ligne $OM$ parallele au diametre $aAB$, prolonger l'ordonnée $CB$ en $N$ qui coupera $OLM$ en $M$, tirer par le ſommet $A$ la ligne $AL$ parallele aux ordonnées $NC$, prendre ſur $ON$ la ligne déterminée arbitraire $OF$ qu'on nommera $f$, élever $FG$ qu'on nommera $g$ parallele aux ordonnées, elle déterminera $OG$ qu'on nommera $h$; on menera auſſi $Oim$ par $O$ parallele aux ordonnées $NC$; toutes les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles : on ſuppoſera $ON = u$, $NC = z$; les données $AL = BM = l$, $Ol = Ki = i$; les triangles ſemblables $OGF$, $OMN$ donnent comme ci-deſſus $NM = \frac{g}{f}u$, $OM = \frac{h}{f}u$; ainſi l'on a l'ordonnée

$BC = z - \frac{g}{f}u - l$, $KB = OM - Ol = iB - iK = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

Il faut mettre dans l'équation $yy - \frac{p}{d}xx + \frac{1}{4}dp = 0$, au lieu de $BC(y)$, ſa valeur $z - \frac{g}{f}u - l$; & au lieu de $KB\,(x)$ ſa valeur $\frac{h}{f}u - i$; & l'on aura

$$\begin{array}{l} zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{hhp}{dff}uu + \frac{2hip}{df}u - \frac{iip}{d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \frac{1}{4}dp \end{array}$$

C'eſt l'équation à la même hyperbole $AC$ par raport à la ligne $ON$ differente du diametre $AK$a.

*Pour l'hyperbole par raport à ſon ſecond diametre.*

30. $DKd\,(\delta)$ eſt le ſecond diametre de l'hyperbole $AC$, $Dp\,(\pi)$ eſt ſon parametre, $\beta C$ eſt l'ordonnée $(x)$, $K\beta(y) = BC$ eſt la coupée; & l'équation par raport à ce ſecond diametre eſt $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$. Il faut trouver l'équation à la même hyperbole par raport à la ligne $On$ ſur le même plan, dont $O$ eſt l'origine. FIGURE XXVII.

Il faut mener par $O$ la ligne $Oim$ parallele au ſecond diametre qui rencontre le premier diametre $A$a en $i$, & l'ordonnée $\beta C$ en $m$; il faut prendre $Of$ d'une grandeur donnée qu'on nommera $f$, mener $fg$ qu'on nommera $g$ parallele à $A$a; elle déterminera $Og$ qu'on nommera $h$; les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles: on ſuppoſera $On = u$, $nC = z$, $Ki = m\beta = l$, & $Oi = i$, & l'on aura comme dans les cas précedens $nm = \frac{g}{f}u$, $Om = l\beta = \frac{h}{f}u$, $\beta C = z - \frac{g}{f}u - l$, & $K\beta = BC = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

On ſubſtituera dans $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$, au lieu de $x = \beta C$, la valeur de $\beta C = z - \frac{g}{f}u - l$; & à la place de $K\beta$ ou $BC\,(y)$ la valeur de $K\beta = \frac{h}{f}u - i$; & l'on aura

$$\begin{array}{l} zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{hh\pi}{\delta ff}uu + \frac{2hi\pi}{\delta f}u - \frac{ii\pi}{\delta} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}\delta\pi \end{array}$$

C'eſt l'équation par raport à la ligne $On$ differente du ſecond diametre $Dd$; & elle ne differe de la précedente, qu'en ce que $-\frac{1}{4}\delta\pi$ a ici le ſigne $-$.

## REMARQUES.

### I.

431. DANS l'hyperbole équilatere où $d = \delta = p = \pi$, l'équation du premier & du ſecond diametre devient par raport à la ligne *ON* ou *On*,

$$\begin{array}{r} zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0. \\ -\frac{hh}{ff}uu + \frac{2hi}{f}u - ii \quad\; \\ \pm\frac{1}{4}dd \qquad\qquad \end{array}$$

Il y a $+\frac{1}{4}dd$ quand c'eſt le premier diametre, & $-\frac{1}{4}dd$ quand c'eſt le ſecond diametre.

### II.

432. Comme les quarrés des deux inconnues doivent ſe trouver ſous differens ſignes dans l'équation à l'hyperbole par raport à ſes diametres; il faut que le coëficient $\frac{gg}{ff} - \frac{hhp}{dff}$ qui multiplie $uu$ ſoit moindre que le quarré de la moitié du coëficient $-\frac{2g}{f}$, qui multiplie $uz$ dans les cas même où l'expreſſion ne le fait pas voir d'abord comme ici; autrement l'équation ne feroit pas à l'hyperbole.

### *Pour l'hyperbole par raport aux aſymptotes.*

433. FIGURE XXVIII. AYANT l'équation $xy - ab = 0$ de l'hyperbole *cPC* par raport aux aſymptotes *KB* (ſur laquelle ſont priſes les $x = KB$) & *Kb* à laquelle ſont paralleles les $y = BC$, ou $KQ = a$, & $QP = b$; trouver l'équation de la même hyperbole par raport à la ligne *ON* donnée de poſition ſur le même plan dont l'origine eſt le point fixe *O*.

Il faut mener *OM* parallele à *KB*, prolonger *CB* juſqu'en *N* qui rencontrera *OM* en *M*; mener par *O* la ligne *OL* parallele à *CN*, qui rencontrera *BK* prolongée au point *L*; prendre *OF* d'une grandeur déterminée qu'on nommera $f$, élever *FG*, qu'on nommera $g$ parallele à *CN*; elle déterminera *OG* qu'on nommera $h$; on ſuppoſera enſuite les données $KL = i$, $OL = l$, & les inconnues $ON = u$, $NC = z$, & l'on aura comme dans les cas précedens $NM = \frac{g}{f}u$, $OM = \frac{h}{f}u$, $BC = z - \frac{g}{f}u - l$, $KB = LB$ ou $OM - KL = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

Il faut ſubſtituer dans $xy - ab = 0$, au lieu de $x$ (*KB*) & de $y$ (*BC*), les valeurs de $KB = \frac{h}{f}u - i$, & de $BC = z$

$-\frac{g}{f}u - l$, & l'on aura après avoir multiplié tous les termes par $\frac{f}{h}$,

$$\begin{array}{l} uz - \frac{fl}{h}z - \frac{g}{f}uu - iu + \frac{fil}{h} = 0\,; \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{gl}{h}u - \frac{abf}{h} \end{array}$$

c'eſt l'équation de l'hyperbole entre les aſymptotes par raport à la ligne droite *ON* differente des aſymptotes.

### POUR L'ELLIPSE.

434. AYANT l'équation $yy + \frac{p}{d}xx - \frac{1}{4}dp = 0$ de l'ellipſe par raport à ſon premier ou ſecond diametre *A*a $= d$ (il n'importe pas) dont le parametre eſt $AP = p$, les coupées ſont $KB = x$, les ordonnées $BC = y$; trouver l'équation de la même ellipſe par raport à une ligne droite *ON* donnée de poſition ſur le même plan dont l'origine eſt le point fixe *O*. FIGURE XXIX.

Il faut mener par *O*, *OM* parallele au diametre *A*a, prolonger *CB* en *N* qui rencontrera *CM* en *M*; mener par *O*, *OL* parallele à *CN*; prendre une ligne déterminée *OF* qu'on nommera $f$; élever *FG* qu'on nommera $g$ parallele à *NC*, elle déterminera *OG* qu'on nommera $h$; on ſuppoſera auſſi $OL = BM = l$, $KL = i$, $ON = u$, & $NC = z$, & l'on aura $BC = z - \frac{g}{f}u - l$, & $KB = LB$ ou $OM - KL = \frac{h}{f}u - i$. Cela ſuppoſé,

On ſubſtituera dans $yy + \frac{p}{d}xx - \frac{1}{4}dp = 0$, à la place de *BC* ($y$), ſa valeur $z - \frac{g}{f}u - l$; & à la place de *KB* ($x$) ſa valeur $\frac{h}{f}u - i$, & l'on aura

$$\begin{array}{l} zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0\,; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{hhp}{dff}uu - \frac{2hip}{df}u + \frac{iip}{d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}dp \end{array}$$

c'eſt l'équation de l'ellipſe par raport à la ligne *ON* differente du diametre *A*a.

### *Remarques ſur l'équation précedente.*

### I.

435. COMME les quarrés des deux inconnues doivent être dans l'équation à l'ellipſe ſous le même ſigne, le coëficient $\frac{gg}{ff} + \frac{hhp}{dff}$ qui multiplie $uu$ doit toujours ſurpaſſer (quand même l'expreſſion ne le feroit pas voir comme ici) le quarré de la moitié du coëficient $-\frac{2g}{f}$.

### I I.

### *Où l'on fait voir la maniere de trouver l'équation du cercle par raport à une ligne differente de ſon diametre.*

436. FIGURE XXIX. Quand dans l'équation de l'ellipſe $d = p$, & que l'angle des ordonnées avec le diametre eſt droit, l'équation de l'ellipſe devient celle du cercle, & alors l'angle $OMN$ étant droit, $\overline{OF}^2\,(ff) = \overline{FG}^2\,(gg) + \overline{OG}^2\,(hh)$; ainſi mettant au lieu de $hh$ ſa valeur $ff - gg$, & $d$ à la place de $p$, l'équation devient

$$\begin{array}{l} zz - \frac{2z}{f}uz - 2lz + uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{2hi}{f}u + ii \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}dd \end{array}$$

c'eſt l'équation du cercle par raport à la ligne $ON$ differente du diametre $Aa$.

S'il n'y avoit que la ligne $OGM$ parallele au diametre $Aa$, & que l'angle $MON$ fût nul; alors $OF\,(f)$ devient $OG\,(h)$, & $FG\,(g)$ devient zero; par conſequent l'équation précedente au cercle devient

$$\begin{array}{l} zz - 2lz + uu - 2iu + ll = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + ii \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}dd \end{array}$$

### *Remarques generales ſur tout le Problême précedent, & ſur ſes uſages.*

### I.

437. FIGURE XXVII. XXVIII. XXIX. QUAND au lieu de l'équation par raport à une ligne droite $ON$, qui eſt oblique par raport au diametre des ſections coniques, on veut l'équation par raport à une ligne droite $OM$ parallele au diametre $Aa$; il eſt évident que dans ce cas, $FG\,(g)$ devient égale à zero, que $OF\,(f)$ & $OG\,(h)$ deviennent la même ligne; ainſi dans les équations précedentes il n'y aura qu'à effacer toutes les grandeurs où ſe trouve $g$ comme étant zero, & faire partout $f = h$, & les équations deviendront celles que l'on demande.

### I I.

438. D'où l'on voit que quand le terme $uz$ manque dans une équation aux ſections coniques, & que cependant il y a outre les quarrés $zz$, $uu$, des termes où $z$ & $u$ ſont lineaires, c'eſt une marque certaine que la ligne $OM$ à laquelle l'équation marque le raport, eſt parallele au premier diametre $Aa$ ou

au ſecond diametre dans l'hyperbole & dans l'ellipſe, & au diametre $AB$ dans la parabole.

### III.

439. Dans le même cas où $uz$ ne ſe trouve pas, toutes les grandeurs où eſt $g$ devenant zero, & $f$ devenant égale à $h$, la fraction qui multiplie $uu$ marque toujours le raport du parametre au diametre dans l'hyperbole & dans l'ellipſe; car alors le terme où eſt $uu$ devient neceſſairement $\mp \frac{p}{d}\, uu$, — dans l'hyperbole, & + dans l'ellipſe; parceque $\frac{gg}{ff}\, uu$ devient zero, & $\mp \frac{hhp}{dff}\, uu$ devient $\mp \frac{p}{d}\, uu$, à cauſe de $hh = ff$. Si dans le même cas $uu$ n'a aucun coëficient, l'hyperbole eſt équilatere, & dans l'ellipſe le diametre eſt égal au parametre; & ſi l'angle des ordonnées & du diametre eſt droit, l'équation de l'ellipſe devient l'équation du cercle.

### IV.

440. L'uſage des équations de la parabole, de l'ellipſe & de l'hyperbole & du cercle par raport à leur diametre & par raport à une autre ligne que le diametre (qu'on nomme ordinairement *les lieux geometriques* du premier genre) eſt, 1°. pour connoître tout d'un coup, quand en réſolvant un Problême on trouve une équation qui appartient à une ſection conique; pour connoître, dis je, ſi c'eſt une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipſe, ou un cercle: car quand l'équation qu'on trouve eſt ſemblable à quelqu'une des équations des ſections coniques par raport au diametre, & n'a pas plus de termes, on connoît d'abord à quelle ſection conique appartient l'équation qu'on a trouvée; & quand l'équation qu'on trouve a plus de termes que n'en ont les équations ſimples des ſections coniques par raport à leur diametre, on connoîtra en comparant l'équation trouvée avec les équations des ſections coniques par raport à une autre ligne que le diametre, à quelle ſection conique elle appartient; par exemple, ſi $uz$ ne s'y trouve pas, & qu'il n'y ait que le quarré de l'une des inconnues, c'eſt une parabole; ſi les deux quarrés des inconnues s'y trouvent ſous un même ſigne, c'eſt une ellipſe; ſous differens ſignes, c'eſt une hyperbole par raport au diametre: ſi les deux quarrés ont le même ſigne, & n'ont aucun coëficient, & que l'angle des ordonnées ſoit droit, c'eſt un cercle. Quand $uz$ s'y rencontre, après avoir ôté le coëficient de l'un des quarrés des deux inconnues, s'il en

avoit un, on connoîtra que l'équation eſt celle de la parabole, quand la fraction qui eſt le coëficient de *uu* eſt égale au quarré de la moitié du coëficient de *uz*; que l'équation appartient à l'hyperbole quand elle eſt moindre, & à l'ellipſe quand elle eſt plus grande; & que ſi les deux quarrés des inconnues n'ont pas de coëficient & ont le même ſigne, l'équation appartient au cercle. 2°. Pour tracer les courbes de ces équations, quand on a découvert, comme on vient de le dire, ſi elles appartiennent à la parabole, ou à l'hyperbole, ou à une ellipſe, ou au cercle: car ſi l'équation qu'on a trouvée eſt ſimple, & appartient à une ſection conique par raport au diametre, on la tracera par les articles 360, 361. Si l'équation trouvée appartient à une ſection conique par raport à une autre ligne qu'au diametre, on regardera celle des équations des ſections coniques par raport à une autre ligne qu'au diametre, à qui l'équation trouvée eſt ſemblable, comme étant la même équation que l'équation trouvée, & la figure de la ſection conique de la premiere de ces deux équations, comme étant la figure de la ſeconde, c'eſt-à-dire, de l'équation trouvée. On ſuppoſera les termes correſpondans de ces deux équations égaux entr'eux; & par les valeurs des indéterminées *f*, *g*, *i*, *l*, *d*, *p*, que feront trouver les équations particulieres de la ſuppoſition des termes correſpondans égaux, on aura la valeur du diametre *d* & du parametre *p* de la ſection conique de l'équation trouvée, & le centre de cette ſection conique, quand elle en a un, & on pourra la décrire par la méthode des art. 360, 361, en faiſant à l'exemple des figures 27, 28 & 29, une figure propre à l'équation trouvée. L'on remarquera que l'angle des coordonnées eſt toujours donné ou arbitraire; ce qui eſt cauſe qu'il ſuffit de déterminer les valeurs des lignes *OF* (*f*), *FG* (*g*) des figures 27, 28 & 29, pour avoir la valeur de la ligne *OG* (*h*).

## V.

441. Comme l'on a ſuppoſé dans les équations du Problême précedent les grandeurs *f*, *g*, *h*, &c. poſitives, quand la comparaiſon des termes correſpondans de ces équations avec ceux de l'équation qu'on trouve dans la réſolution d'un Problême, fait trouver les valeurs de ces lettres négatives ou une partie; cela marque qu'il faut tracer les lignes repréſen-

tées par ces lettres négatives du côté oppoſé à celui où on les a tracées dans les figures 27, 28 & 29.

## V I.

441. On remarquera enfin que quand on compare une équation d'une ſection conique à celle des équations précedentes qui lui répond, & que la premiere n'a pas tous les termes de la ſeconde; on ſuppoſera dans cette derniere, que les termes correſpondans à ceux qui manquent dans la premiere, ſont égaux à zero; ce qui fera connoître les lignes égales à zero, de celle des figures 27, 28 & 29, qui eſt la figure de la ſeconde équation; & quand $FG\,(g) = 0$, la ligne $OF\,(f)$ tombe ſur $OG\,(h)$, & elles ſont égales, & $\frac{h}{f} = 1$; ce qui arrive quand le terme $uz$ manque dans l'équation. Quand le terme $2lz$ manque dans l'équation, alors $BM\,(l) = 0$, & la ligne $OGM$ tombe ſur le diametre $AB$; & ſi en même temps le terme où eſt $uz$ manque auſſi, les trois lignes $AB$, $OGM$, $OF$, n'en ſont qu'une, qui eſt le diametre $AB$ & $OG\,(h) = OF\,(f)$.

Par exemple pour comparer l'équation $yy - \frac{9x-4a}{4a} = 0$, qui eſt l'équation d'une parabole*, avec l'équation de la parabole * 440.

$$\begin{aligned} zz - \tfrac{2g}{f}\,uz - 2lz + \tfrac{gg}{ff}\,uu + \tfrac{2gl}{f}\,u + ll &= 0, \\ - \tfrac{hp}{f}\,u + ip \quad & \end{aligned}$$

FIGURE XXVII.

on prendra $y$ pour l'ordonnée $z$, & $x$ pour la coupée $u$, & le terme $2lz$ manquant, on ſuppoſera $2lz = 0$, ce qui donnera $AL\,(l) = 0$; & de plus le terme $uz$ manquant auſſi, $OG\,(h) = OF\,(f)$, & les trois lignes $AB$, $OGM$, $OFN$, n'en ſont qu'une; le terme $\frac{gg}{ff}uu$ eſt auſſi égal à zero; & puiſque $l = 0$, les grandeurs $\frac{2gl}{f}$ & $ll$ ſont chacune égal à zero; & à cauſe de $h = f$, la grandeur $-\frac{hp}{f}u$ devient $-pu$. Ainſi les deux équations à comparer ſeront $yy - \frac{9x-4a}{4a} = 0$, & $zz - pu + ip = 0$: L'on aura donc, 1°. $\frac{9}{4a} = p$; ainſi le parametre de la parabole de l'équation propoſée eſt égal à $\frac{9}{4a}$. 2°. $+ ip = -\frac{4a}{4a}$; & mettant la valeur de $p$, on aura $\frac{9i}{4a} = -\frac{4a}{4a}$, & $Ai\,(i) = -\frac{4}{9}a$. Le ſigne $-$ marque qu'il faudra prendre $iA$ $(i = -\frac{4}{9}a)$, non pas en allant de $i$ vers $A$, mais en allant du côté oppoſé de $i$ vers (a); & le ſommet de la parabole de l'équation propoſée ſera en (a). On pourra la décrire par la méthode de l'article 360, puiſque l'on a ſon diametre & ſon parametre, & qu'on ſuppoſe que l'angle des ordonnées, & par conſequent celui de la tangente au ſommet qui lui eſt égal, eſt donné ou arbitraire.

## PROBLÊME VIII.

*Où l'on fait voir l'uſage des formules précedentes, & où l'on donne une maniere ſimple & facile de tracer toutes les ſections coniques par un mouvement continu.*

443. Fig. XXX & XXXI. *FAE*, *FBE* ſont deux angles quelconques formés chacun par deux regles, attachés ſur un plan aux points fixes *A* & *B* ſur leſquels ils ſont mobiles; en faiſant en ſorte que les deux côtés *AE*, *BE* pendant leur mouvement ſe coupent toujours ſur la ligne droite donnée *ED* qui rencontre la ligne *AB* qui joint les deux points fixes *A* & *B* en un point *D* diſtingué de ces deux points; il faut trouver l'équation de la courbe que forment les deux autres côtés *AF*, *BF* par leur point de concours *F* pendant le mouvement de ces deux angles mobiles ſur les poles *A* & *B*.

Il faut bien remarquer que les deux côtés *AE*, *BE* (qu'on appellera les premiers) ou leurs prolongemens *AS*, *BV*, ſont toujours ceux qui doivent ſe couper ſur la droite donnée *DE*, & que les deux côtés *AF*, *BF* (qu'on nommera les ſeconds) ou leurs prolongemens *AP*, *BM*, ſont toujours ceux qui décrivent la courbe en ſe coupant pendant le mouvement des angles dans les points *F*, qui forment la courbe.

Fig. XXX. Pour réſoudre le Problême, je remarque que quand les premiers côtés ſe coupent au point *D*, ils ne font qu'une même ligne droite qui eſt la ligne *AB* qui paſſe par les poles *A* & *B*, & que dans cette ſituation les deux ſeconds côtés *AF*, *BF* deviennent *AC*, *BC*, & ſont déterminés de poſition & de grandeur; parceque l'angle *BAC* eſt égal à l'angle donné *FAE*, & *CBA* eſt égal à l'angle donné *FBE*. Dans la figure 31, où le point *D* de la ligne *DE* eſt dans le prolongement de *BA*, lorſque les deux premiers côtés ſe coupent au point *D*, & ne font qu'une même ligne qui eſt *BAD*, le côté *AE* étant ſur *AD*, l'angle donné *EAF*, devient l'angle *DAC*, & le côté *AF* tombe ſur *AC*; mais le côté *BE* tombant en même temps ſur *BD*, le ſecond côté *BF* ne peut plus être coupé par le ſecond côté *AF*; c'eſt le prolongement *BM* devenu *BC* du ſecond côté *FB*, qui eſt coupé par le (Figure XXXI.)

ſecond

ſecond côté *AF* devenu *AC* : C'eſt pourquoi l'angle *ABC* eſt égal à l'angle *EBM* complement à deux droits de l'angle donné *FBE*, & non pas à l'angle donné *FBE*, & le triangle *ACB* eſt entierement donné.

Cela ſuppoſé, pour trouver l'équation de la courbe que forment les points de concours *F*, je prens pour la ligne des coupées la ligne droite *DE* déterminée de poſition, & je prens ſon origine au point *D* où elle rencontre la donnée *AB*, & je fais les ordonnées tirées des points *F* ſur *ED*, comme l'ordonnée *FI*, paralleles à la donnée *AB*; j'en tirerai cet avantage que l'équation me fera connoître, ſi les points fixes ou les poles *A* & *B* ſont eux-mêmes dans la courbe; puiſque ſi la courbe paſſe par *A* & *B*, *DA* & *DB* ſeront les ordonnées de ces deux points; je connoîtrai auſſi par la même équation que le point déterminé *C* eſt un des points de la courbe.

Soit donc la coupée $DI = u$, l'ordonnée $FI = z$, les données $AD = a$, $DB = b$, $DN = c$, $AN = d$, $DR = e$, $BR = f$. Pour former les équations particulieres qui me doivent donner l'équation du Problême, je remarque (fig. 30.) que les deux angles *CAF*, *DAE* ſont égaux, puiſque *CAD* & *FAE* ſont ſuppoſés égaux; & par la même raiſon *CBF* eſt égal à *DBE*; ainſi pour faire des triangles ſemblables, je tire *FG* qui faſſe l'angle $AFG = AED$, & par conſequent $AGF = ADE$, & de même *FH* qui faſſe $BFH = BED$, & $BHF = BDE$; ainſi j'ai les triangles ſemblables *AFG*, *AED*, & *BFH*, *BED*. Je prolonge *BC* juſqu'au point *R*, où elle rencontre *ED* prolongée, & je mene par *F* la ligne *KFLT*, parallele à *EDR*; ces lignes me donnent d'autres triangles ſemblables, comme *ADN*, *LGF*, &c.

Mais dans la figure 31. les angles *DAC* & *EAF* étant ſuppoſés égaux, en ajoutant à chacun l'angle commun *CAE*, les angles *DAE*, *FAC* ſont égaux : Je mene *FG* de maniere que $AFG = AED$ & $FGA = EDA$, & j'ai les deux triangles ſemblables *AFG*, *AED*. De même l'angle *ABC* eſt ſuppoſé égal à l'angle *EBM* complement à deux droits de *EBF*; ainſi ajoutant à chacun l'angle *EBC*, j'aurai l'angle $ABE = CBM$ qui eſt égal à ſon oppoſé au ſommet *FBH*; je tire *FH* de maniere que $BFH = BED$ & $FHB = BDE$, & j'ai les deux triangles ſemblables *BFH*, *BED* : Je mene auſſi *LFKT* parallele à *EDI*, & je prolonge *AC* juſqu'à *N*, & *BC* juſqu'à *R*, ce qui me donne d'autres triangles ſemblables *ADN*, *IQN*, *QFL*, à cauſe des paralleles ; & *GFL*, *ADN* ; parceque *AND* eſt égal à ſon alterne *GLF*, & que *ADN* eſt égal par la conſtruction à *FGL* ; comme auſſi *BDR*, *BKT*, à cauſe des paralleles, & *BDR*, *THF*, parceque $BRD = BTF$ à cauſe des paralleles, & que *BDR* le même que *BDE* eſt égal à *FHT* le même que *FHB* = (par la conſtruction) *BDE*. Je ſuppoſe à preſent l'inconnue $DE = x$ ; les triangles ſemblables me feront trouver deux valeurs differentes de $DE\ (x)$ deſquelles faiſant une équation, elle ſera l'équation de la courbe.

Fig. XXX. Les triangles ſemblables *BDR*, *BKT*, donnent $DB\ (b) . DR\ (e) :: KB\ (b - z) . KT = \frac{be - ez}{b}$ ; ainſi $FT = \frac{be - ez - bu}{b}$ ; & $DB\ (b) . BR\ (f) :: KB\ (b - z) . BT = \frac{bf - fz}{b}$. Les triangles ſemblables *BDR*, *THF*, donnent $BR\ (f) . DR\ (e) :: FT\ (\frac{be - ez - bu}{b}) . TH = \frac{bee - eez - beu}{bf}$ ; d'où l'on déduit $BH = BT - TH = \frac{bff - ffz - bee + eez + beu}{bf}$. Ils donnent encore $BR\ (f) . BD\ (b) :: FT\ (\frac{be - ez - bu}{b}) . FH = \frac{be - ez - bu}{f}$. Enfin les triangles ſemblables *BFH*, *BED*, donnent $BH\ (\frac{beu + eez - ffz + bff - bee}{bf}) . FH\ (\frac{-bu - ez + be}{f}) :: BD\ (b) . DE\ (x) = \frac{-b^3u - bbez + b^3e}{beu + eez - ffz + bff - bee}$ ; c'eſt la premiere valeur de $DE\ (x)$. Les triangles ſemblables *ADN*, *AKL*, donnent $AD\ (a) . DN\ (c) :: AK\ (a + z) . KL = \frac{ac + cz}{a}$ ; d'où l'on déduit $LF = \frac{ac + cz - au}{a}$. Ils donnent encore $AD\ (a) . AN\ (d) :: AK\ (a + z) . AL = \frac{ad + dz}{a}$. Les triangles ſemblables *ADN*, *LGF*, donnent auſſi $AN\ (d) . DN\ (c) :: LF\ (\frac{ac + cz - au}{a}) . LG = \frac{acc + ccz - acu}{ad}$ ; d'où l'on déduit $AG = AL - LG = \frac{add + ddz - acc - ccz + acu}{ad}$. Ils donnent encore $AN\ (d) . AD\ (a) :: LF\ (\frac{ac + cz - au}{a}) . FG = \frac{ac + cz - au}{d}$ Enfin les triangles ſemblables *AGF*, *ADE*, donnent $AG\ (\frac{acu - ccz + ddz + add - acc}{ad}) . FG\ (\frac{-au + cz + ac}{d}) :: AD\ (a) . DE\ (x) = \frac{-a^3u + aacz + a^3c}{acu - ccz + ddz + add - acc} = \frac{-b^3u - bbez + b^3e}{beu + eez - ffz - bee + bff}$, où ſuppoſant $- cc + dd = + xx$, & $+ ee - ff = - \varepsilon\varepsilon$, l'on a $\frac{-a^3u + aacz + a^3c}{acu + xxz + axx} = \frac{-b^3u - bbez + b^3e}{beu - \varepsilon\varepsilon z + b\varepsilon\varepsilon}$, qui ſe réduit à

$$\begin{array}{llll}
-a^3beuu & +aabcezu & -a^3b\varepsilon\varepsilon u & -aac\varepsilon\varepsilon zz = 0\,; \\
+b^3acuu & +a^3\varepsilon\varepsilon zu & +a^3bceu & +bb\varkappa\varkappa ezz \\
 & +abbcezu & +ab^3\varkappa\varkappa u & +aabc\varepsilon\varepsilon z \\
 & +b^3\varkappa\varkappa zu & -ab^3ceu & -a^3c\varepsilon\varepsilon z \\
 & & & +abb\varkappa\varkappa ez \\
 & & & -b^3\varkappa\varkappa ez \\
 & & & +a^3bc\varepsilon\varepsilon \\
 & & & -ab^3\varkappa\varkappa e
\end{array}$$

C'eſt l'équation de la courbe pour la figure 30, qui fait voir qu'elle eſt une ſection conique.

On trouve pour la figure 31, en ſe ſervant des triangles ſemblables marqués par les mêmes lettres, $DE(x) = \frac{-a^3u + aacz - a^3c}{-acu + ccz - ddz - acc + add} = \frac{b^3u - bbez + b^3e}{ben - eez + ffz + bee - bff}$, où ſuppoſant $-ee + ff = +\varepsilon\varepsilon$, & $cc - dd = \varkappa\varkappa$, l'on a $\frac{-a^3u + aacz - a^3c}{-acu + \varkappa\varkappa z - a\varkappa\varkappa} = \frac{b^3u - bbez + b^3e}{beu + \varepsilon\varepsilon z - b\varepsilon\varepsilon}$, qui ſe réduit à . . . . . .

$$\begin{array}{llll}
-a^3beuu & +aabcezu & +a^3b\varepsilon\varepsilon u & +aac\varepsilon\varepsilon zz = 0\,; \\
+ab^3cuu & -a^3\varepsilon\varepsilon zu & -a^3bceu & +bb\varkappa\varkappa ezz \\
 & -abbcezu & +ab^3\varkappa\varkappa u & -aabc\varepsilon\varepsilon z \\
 & -b^3\varkappa\varkappa zu & +ab^3ceu & -a^3c\varepsilon\varepsilon z \\
 & & & -abb\varkappa\varkappa ez \\
 & & & -b^3\varkappa\varkappa ez \\
 & & & +a^3bc\varepsilon\varepsilon \\
 & & & +ab^3\varkappa\varkappa e
\end{array}$$

C'eſt l'équation de la courbe pour la figure 31, qui ne differe de la précedente que par quelques ſignes.

### *Pour connoître ſi la courbe paſſe par les poles* A & B.

EN ſuppoſant que $ID(u) = 0$, l'on aura le ſeul dernier terme de chacune des équations précedentes. Celui de la premiere étant diviſé par $-aac\varepsilon\varepsilon + bb\varkappa\varkappa e$, donne l'équation déterminée $zz \begin{array}{l} +az \\ -bz \end{array} - ab = 0$, dont la racine poſitive $z = b = BD$ (fig. 30), & la négative $z = -a = AD$; ainſi la courbe paſſe par les poles $A$ & $B$. Le dernier terme de la ſeconde étant diviſé par $aac\varepsilon\varepsilon + bb\varkappa\varkappa\varepsilon$, donne l'équation déterminée $zz \begin{array}{l} -az \\ -bz \end{array} + ab = 0$, dont les deux racines ſont poſitives, parcequ'elles ſont du même côté de l'origine $D$ (fig. 31). La premiere eſt $z = a = DA$; la ſeconde

$z = b = DB$; d'où l'on conclut que la courbe paſſe par $A$ & $B$.

### *Pour connoître ſi le point* C *du triangle déterminé* ABC *eſt dans la courbe.*

FIG. XXX. EN menant par $C$ la ligne $C\beta$ parallele à la ligne des coupées $EDI$ & $C\delta$ parallele aux ordonnées $IF$, $DB$; ſuppoſant $C\beta = D\delta = u$, & $C\delta = D\beta = z$, & nommant les autres lignes comme ci-deſſus, les triangles ſemblables $BDR$, $B\beta C$, donneront $DR(e) . \beta C(u) :: DB(b) . B\beta = \frac{bu}{e}$; d'où l'on déduit $D\beta(z) = DB - B\beta = \frac{be-bu}{e}$. Les triangles ſemblables $ADN$, $A\beta C$, donneront auſſi $DN(c) . C\beta(u) :: AD(a) . A\beta = \frac{au}{c}$; d'où l'on déduit $D\beta(z) = A\beta - AD = \frac{au-ac}{c} = \frac{be-bu}{e}$, d'où l'on tire $D\delta(u) = \frac{ace+bce}{ae+bc}$, & $\delta C(z) = \frac{abe-abc}{ae+bc}$. Or l'on trouve préciſément les mêmes valeurs de $u$ & de $z$ en ſuppoſant $FG\left(\frac{-au+cz+ac}{d}\right)$, & $FH\left(\frac{-bu-ez+be}{f}\right)$, chacune égale à zero, ce qui doit arriver dans la formation de la courbe quand le point $F$ qui la décrit ſe trouve au point $C$; ainſi la courbe paſſe au point $C$.

Si on vouloit ſçavoir les points où la courbe rencontre la ligne $EDR$, il n'y auroit qu'à ſuppoſer dans les équations précedentes $z = 0$, & les deux valeurs de $u$ que l'on trouveroit par cette ſuppoſition, marqueroient ces points; ſi l'on trouvoit les valeurs de $u$ imaginaires, ce ſeroit une marque que la courbe ne rencontreroit point $EDR$. Si on trouvoit deux valeurs égales poſitives ou négatives de $u$, cela feroit voir que $ED$ toucheroit la courbe au point auquel $u$ auroit ces deux valeurs égales.

### *Pour connoître les cas où la courbe eſt une parabole, ou une ellipſe, ou une hyperbole, & pour en trouver le parametre & le diametre.*

IL faut faire en ſorte que le quarré de l'une des deux inconnues, comme $z$, n'ait pas d'autre coëficient que l'unité, & l'équation ſera pour la figure 31$^e$:

$$zz\,\frac{\left.\begin{array}{l}+aabce\\-a^3\varepsilon\varepsilon\\-abbce\\-b^3xx\end{array}\right\}uz\left.\begin{array}{l}-aabc\varepsilon\varepsilon\\-a^3c\varepsilon\varepsilon\\-abbxxe\\-b^3xx\varepsilon\end{array}\right\}z\left.\begin{array}{l}-a^3be\\+ab^3c\end{array}\right\}uu\left.\begin{array}{l}+a^3b\varepsilon\varepsilon\\-a^3bce\\+ab^3xx\\+ab^3ce\end{array}\right\}u\left.\begin{array}{l}+a^3bc\varepsilon\varepsilon\\+ab^3xxe\end{array}\right\}}{aac\varepsilon\varepsilon+bbxxe}=0.$$

Et comme l'on peut exprimer les coëficiens qui ſont connus par d'autres grandeurs connues plus ſimples,* on exprimera le coëficient du terme $uz$ par $\frac{2m}{n}$; celui du terme $z$ par $2q$; celui du terme $uu$ par $\frac{rr}{nn}$; celui du terme $u$ par $s$, & enfin le dernier terme par $tt$, & l'on aura l'équation abregée $zz - \frac{2m}{n}uz - 2qz \pm \frac{rr}{nn}uu \pm su \pm tt = 0$, qui contient toutes les équations aux ſections coniques par raport à une autre ligne qu'au diametre, n'y ayant que la diverſité des ſignes, les differens raports des coëficiens, & quelques termes qui peuvent quelquefois ſe trouver nuls ou égaux à zero, qui la rendent propre à l'une des ſections coniques plutôt qu'à l'autre. * 279.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt poſitive & égale au quarré $\frac{mm}{nn}$ de la moitié de $\frac{2m}{n}$, la ſection conique eſt une parabole.* * 440.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt poſitive & ſurpaſſe $\frac{mm}{nn}$, c'eſt une ellipſe.* * 440.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt négative, c'eſt une hyperbole par raport à l'un de ſes diametres,* & non pas par raport aux aſymptotes. * 440.

Si on vouloit trouver le parametre, quand c'eſt une parabole; le parametre & le diametre, quand c'eſt une hyperbole ou une ellipſe, il n'y auroit qu'à ſuppoſer chaque terme de l'équation abregée (excepté le premier) égal au terme qui lui répond dans l'équation correſpondante du ſeptiéme Problême*, & déterminer par ces équations les valeurs des indéterminées $f, g, i, l, d, p$, & la valeur de $p$ ſeroit le parametre, celle de $d$ ſeroit le diametre. Mais comme l'on n'a beſoin de ces choſes que pour décrire la ſection conique par la méthode des art. 360, 361, & que la pratique du Problême que l'on traite ici, donne la deſcription facile de la ſection conique; il eſt inutile de les expliquer ici plus au long. * 426.

### *La maniere de trouver les axes avec leurs parametres des ſections coniques décrites par la méthode précedente.*

444. IL faut remarquer pendant que l'on fait la deſcription de la courbe, la ſituation où les ſeconds côtés $Af$, $Bf$ ſont paralleles entr'eux, & en même temps le point $M$ où ſe croiſent les deux premiers côtés, lorſque les ſeconds ſont paralleles; & les laiſſant dans cette ſituation, faire décrire une circonference $AMBNA$ au point $M$; ou, ce qui revient au même, FIGURE XXXII.

& ce qui eſt plus facile, il faut tracer la circonference *AMBNA* ſur la corde *AB*, de maniere que l'arc *AMB* (du côté de la ligne donnée *DE* où ſe coupoient les deux premiers côtés, pendant que le point de concours des ſeconds côtés décrivoit la courbe) ſoit capable d'un angle *AMB*, qui faſſe avec les deux angles donnés *EAF*, *EBF*, quatre angles droits. Il faut enſuite tirer par le centre *O* de ce cercle la ligne *NOMD* perpendiculaire à la ligne donnée *DE*; & ayant mené par le point *M* où elle rencontre la circonference, les droites *MA*, *MB*, il faut faire l'angle *MAf* égal à l'angle donné *EAF*, & $MBf = EBF$; & les deux lignes *Af*, *Bf* ſeront paralleles: car l'angle *AMB* faiſant deux droits avec *MAB*, *MBA*, il faut que les deux qui reſtent *BAf*, *ABf* faſſent auſſi deux angles droits, puiſque *AMB* fait quatre angles droits avec *MAf*, *MBf*; par conſequent *Af*, *Bf* ſont paralleles. Or l'on va démontrer par l'Analyſe que l'axe ou l'un des axes de la courbe décrite par le point *F*, eſt parallele aux lignes paralleles *Af*, *Bf*, d'où il ſera facile de trouver l'axe dans la courbe décrite par le point *F*.

La corde *AB* qui joint les deux poles eſt donnée, & les angles *AMB*, *MAf*, *MBf* ſont auſſi donnés, puiſque les angles *EAF*, *EBF*, auſquels les deux derniers ſont égaux, ſont donnés; & de plus la ligne *DE* eſt donnée de poſition; c'eſt pourquoi la circonference *AMBNA* eſt donnée, ſon diametre *MN* eſt donné, les lignes *ND*, *MD* ſont données, comme auſſi *AM*, *MC*, *BM*, *ML*; & menant *AN*, *BN*, ces lignes ſont auſſi données; enfin tirant *AK* perpendiculaire ſur *fB* prolongée en *K*, *AK* & *BK* ſont données. Il faut encore tirer *FH* perpendiculaire ſur *BH* qui rencontre *Af* en *G*; & enfin tirer du point *E* ſur *AMC* prolongée la perpendiculaire *EI*; ces choſes ſuppoſées,

On nommera les données *DM* $(m)$, *DN* $(n)$, *AK* $(a)$, *KB* $(b)$, *MC* $(c)$, *CD* $(d)$, *DL* $(e)$ *ML* $(f)$; & les inconnues *DE* $(x)$, *AG* $(u)$, *FG* $(z)$. Les triangles rectangles ſemblables *DMC*, *CEI*, donnent $MC\,(c) . CD\,(d) :: CE\,(x-d) . CI = \frac{dx-dd}{c}$; & $MC\,(c) . DM\,(m) :: CE\,(x-d) . EI = \frac{mx-dm}{c}$. Les triangles rectangles *MDC*, *MAN* étant ſemblables à cauſe des angles égaux oppoſés au ſommet *DMC*, *AMN*, l'on a $MC\,(c) . MD\,(m) :: MN\,(n-m) . AM$

$= \frac{mn - mm}{c}$; d'où l'on déduit $AI = AM + MC + CI = \frac{mn - mm + cc + dx - dd}{c} = \frac{mn + dx}{c}$; parceque $+ \overline{MC}^2 (+ cc) = + \overline{DM}^2 (+ mm) + \overline{CD}^2 (+ dd)$. Or les triangles rectangles *EAI*, *FAG*, ſont ſemblables; car ôtant l'angle *EAG* des angles égaux *IAG*, *EAF*, les angles reſtans *EAI*, *FAG* ſont égaux; c'eſt pourquoi $AI (\frac{mn + dx}{c}) . EI (\frac{mx - dm}{c}) :: AG (u) . FG (z)$; ce qui donne $DE (x) = \frac{mnz + dmu}{mu - dz}$. Il faut à preſent trouver une ſeconde valeur de $DE (x)$.

Les triangles rectangles *LDM*, *LEP*, ſont ſemblables; ayant l'angle *L* commun; c'eſt pourquoi $ML (f) . MD (m) :: LE (e + x) . EP = \frac{em + mx}{f}$; & $ML (f) . LD (e) :: LE (e + x) . LP = \frac{ee + ex}{f}$. Mais les triangles rectangles ſemblables *MLD*, *MNB*, donnent $ML (f) . MD (m) :: MN (n - m) . BM = \frac{mn - mm}{f}$; d'où l'on déduit $BP = BM + ML - LP = \frac{mn - mm + ff - ee - ex}{f} = \frac{mn - ex}{f}$, à cauſe de $\overline{ML}^2 (+ ff) = \overline{MD}^2 (mm) + \overline{LD}^2 (+ ee)$. Enfin les triangles rectangles *BEP*, *BFH*, ſont ſemblables, puiſqu'en ôtant des angles égaux *EBF*, *MBf*, l'angle commun *MBF*, les angles reſtans *EBP*, *FBH*, ſont égaux; c'eſt pourquoi $BP (\frac{mn - ex}{f}) . EP (\frac{em + mx}{f}) :: BH = AG (u) - BK (b) . FH = FG (z) + GH = AK (a)$; d'où l'on tire $x = \frac{mnz - emu + amn + bem}{n + ez - bm + ae} = \frac{mnz + dmn}{mu - dz}$, qui donne

$$\begin{array}{llll} zz + & az + \frac{m}{n} uu - & \frac{bm}{n} & u = 0. \\ & - \frac{bm}{d + e} z & - \frac{am}{d + e} & u \\ & + \frac{bde}{dn + en} z & + \frac{ade}{dn + en} & u \end{array}$$

C'eſt l'équation de la courbe que décrit le point *F*, (fig. 32), laquelle équation appartient à l'ellipſe, puiſque $zz$ & $\frac{m}{n} uu$ ont le même ſigne $+$*; & le produit $uz$ ne s'y trouvant point, *440.
1°. la ligne des coupées $AG (u)$ eſt parallele au diametre*, *438.
lequel diametre eſt l'axe, puiſque l'ordonnée $FG (z)$ eſt perpendiculaire à la ligne des coupées $AG (u)$. 2°. $\frac{DM}{DN} (\frac{m}{n})$ coëficient de $uu$, marque le raport du parametre au diametre*, *439.
& par conſequent auſſi le raport du quarré du ſecond diametre au quarré du premier diametre.

Quand la ligne droite *DE* que décrit le concours des deux premiers côtés *EA*, *EB*, eſt coupée par la circonference *AMBNA*; quand elle eſt par exemple *de*, l'équation devient

$$\begin{array}{llll} zz & + \; az & - \frac{m}{n} uu & + \frac{bm}{n} u = 0 \\ & - \frac{bm}{d+e} z & & - \frac{am}{d+e} u \\ & - \frac{bde.}{dn+en} z & & + \frac{ade}{dn+en} u \end{array}$$

, qui appartient

*440. à l'hyperbole par raport au diametre, parceque* $-\frac{m}{n}uu$ a le
*438. ſigne —; *AG* eſt parallele à l'axe*; puiſque $uz$ ne s'y trouve pas, & que *FG* ($z$) eſt perpendiculaire ſur *AG* ($u$), & $\frac{DM}{DN}$ ($\frac{m}{n}$)
*339. exprime le raport du parametre au diametre*, comme auſſi le raport du quarré du ſecond diametre au quarré du premier diametre.

Quand la droite *DE* touche la circonference *AMBNA* & devient $\delta\varepsilon$, alors les triangles *MDC, CEI, MDL* s'évanouiſſent, & il ne reſte que les triangles *AEI, FAG, MAN, MBN, BEP, BFH*; & ſi l'on fait une figure pour ce cas, on trouvera en ſe ſervant de ces triangles une équation à la parabole dans laquelle $uz$ & $uu$ ne ſe trouvent point; ce qui
*438. fait voir que *AG* eſt parallele au diametre * qui doit être l'axe, puiſque *FG* ($z$) eſt perpendiculaire ſur *AG* ($u$).

## REMARQUES.

445. QUAND une ſection conique eſt décrite, & qu'on a une ligne droite donnée de poſition *AG* parallele à l'axe; pour trouver l'axe, il n'y a qu'à mener deux perpendiculaires à *AG* qui ſe terminent de côté & d'autre à la courbe, & mener une droite par les points du milieu de chacune, ce ſera l'axe.

## COROLLAIRE I.

446. ON peut aiſément mener une tangente de la courbe par
FIGURE XXXII. l'un des deux poles, comme *B*, ſans même qu'elle ſoit tracée. Il faut mener par le pole *A* une droite *AQ* juſqu'à la donnée *DE* (on peut facilement l'imaginer, & les lignes dont on va parler, qu'on n'a pas tracées dans la figure 32, pour éviter la confuſion) qui faſſe avec *AB* l'angle *QAB* = *EAF*; puis mener *QB*, & tirer par *B* la ligne *Bf*, qui faſſe avec *QB* l'angle *QBf* = *EBF*, & cette ligne *Bf* ſera tangente au point *B*: car en imaginant la ſituation des deux premiers côtés *AE*, *BE* dans le temps que le ſecond côté *AF* eſt couché ſur *AB*, & décrit la portion de courbe infiniment petite au point *B*; il eſt clair que dans cette ſituation l'angle

l'angle $BAQ$ eſt égal à $EAF$, & $QBF = EBF$, & qu'à ce moment la petite portion de courbe qui eſt au point $B$, ſe trouve dans la ligne $Bf$; & $Bf$ eſt par conſequent tangente au point $B$.

## COROLLAIRE II.

*Où l'on enſeigne à décrire telle ſection conique qu'on voudra dont cinq points ſont donnés.*

47. COMME l'on décrit une ligne droite dont on a deux points, un cercle dont on a trois points, on peut de même décrire par la méthode précedente une ſection conique déterminée telle qu'on voudra; lorſqu'on en a cinq points $A$, $B$, $C$, $G$, $F$, il faut en joindre trois, $A$, $B$, $C$, par les lignes $AB$, $AC$, $BC$, & prendre deux de ces points $A$ & $B$ pour poles; mener par les autres points $F$, $G$, les lignes $FA$, $FB$, $GA$, $GB$; faire les angles $FAE$, $GAK$, égaux chacun à l'angle $CAD$ complement à deux droits de l'angle $CAB$; & faire l'angle $FBE$ égal à l'angle $ABg$ complement à deux droits de l'angle $ABC$, & $GBK = ABC$; mener la ligne droite $EDK$ par les points $E$ & $K$, où les lignes $AE$, $BE$ & $AK$, $BK$ ſe rencontrent. Si l'on fait avec des regles des angles égaux à $EAF$, $EBF$, & ſi faiſant tourner ces angles ſur les poles $A$ & $B$, on fait toujours en ſorte que les premiers côtés $AE$, $BE$ ſe coupent ſur la droite $EDK$, il eſt clair que le point $F$ qui eſt le concours des deux ſeconds côtés $AF$, $BF$ décrira la ſection conique qui paſſera par les cinq points donnés. FIGURE XXXIII.

Si l'un des cinq points ou une partie des cinq points étoit dans l'une des hyperboles, & les quatre autres ou l'autre partie dans l'hyperbole oppoſée; il faudroit faire les angles $FAE$, $GAK$ égaux chacun à l'angle $CAB$, & non pas à ſon complement à deux droits $CAD$; & de même les angles $FBE$, $GBK$ égaux chacun à l'angle $CBA$, & la ligne $EDK$ paſſeroit entre les poles $A$ & $B$, comme dans la figure 30.

## AVERTISSEMENT.

148. SI au lieu d'une ligne droite $DE$ l'on faiſoit parcourir au point de concours $E$ des deux premiers côtés $AE$, $BE$ des angles mobiles $EAF$, $EBF$, une des ſections coniques, laquelle on voudra, qui paſſât par l'un des poles, par exemple par $A$, le point de concours $F$ des deux ſeconds côtés $AF$, FIGURE XXX. & XXXI.

*BF*, décriroit une courbe du ſecond genre, c'eſt à-dire, dont on trouveroit l'équation, comme on a fait celle des ſections coniques, dans laquelle les inconnues auroient trois dimenſions; & ſi l'on faiſoit décrire au point de concours *E* la courbe du ſecond genre qu'on viendroit de tracer, le point de concours *F* décriroit une courbe d'un genre plus élevé, & ainſi à l'infini.

### *Avertiſſement.*

On ne porte pas ici cette matiere plus loin, parcequ'il faudroit faire un traité entier de ces lignes courbes, & on s'eſt propoſé ſeulement de faire voir ici quelques uſages de l'Analyſe par raport aux courbes geometriques, & ſurtout aux ſections coniques, & ce que l'on en a dit ſuffit pour entendre ce que l'on dira dans la ſuite qui y aura raport, ſans avoir beſoin d'autres ouvrages.

## DES COURBES QUI NE SONT PAS GEOMETRIQUES.

449. OUTRE les courbes *geometriques* dont les coordonnées ſont de ſimples lignes droites par le moyen deſquelles on exprime un raport commun à tous les points de chacune de ces courbes par une équation algebrique, où les inconnues ont un nombre déterminé de dimenſions; il y a une infinité d'autres courbes dans chacune deſquelles il y a, comme dans les courbes algebriques, un raport commun à tous leurs points que l'Analyſe exprime par une équation; mais ce ne peut pas être en y employant de ſimples lignes droites pour coordonnées qui ayent entr'elles un commun raport, qui puiſſe être exprimé par une équation algebrique, ce ſeroient des courbes geometriques, mais dans quelques-unes on ſe ſert pour l'une ou l'autre des coordonnées, & quelquefois pour toutes les deux, de lignes courbes, comme d'arcs de cercle, ou d'arcs d'autres courbes; ou bien l'on ſe ſert de lignes droites pour coordonnées, mais que l'on ſuppoſe égales à des arcs de cercles ou d'autres courbes; dans quelques-unes les abciſſes partent d'un même point, & les ordonnées ſont des arcs de courbes; dans quelques autres les coordonnées quoiqu'elles ſoient des lignes droites ou des arcs de courbes, elles ſuppoſent encore la quadrature de quelques courbes, c'eſt-à-dire l'expreſſion des coordonnées dans l'équation de ces courbes, contient l'expreſſion de la quadra-

ture de quelque courbe diviſée par quelque ligne. Il y en a dont on ne connoît le raport commun de tous les points, ou de toutes les lignes infiniment petites dont leur contour eſt compoſé, que par des lignes infiniment petites qui font des triangles infiniment petits qui donnent chacun une même équation, qui devient par le moyen des grandeurs changeantes $x$, $y$, &c. l'équation de la courbe.

Quelques-uns appellent ces lignes *mechaniques*; d'autres pour prévenir le préjugé que donneroit ce nom de *mechanique* aux Lecteurs, en les portant à croire que ces courbes n'ont pas des proprietés & des uſages qu'on puiſſe démontrer auſſi exactement que celles des courbes geometriques, aiment mieux les appeller *tranſcendentes*. Il n'importe quel nom leur donner, & on peut les appeller *mechaniques*; mais il eſt certain que depuis l'heureuſe découverte du calcul *differentiel* & *integral*, on en démontre les proprietés auſſi exactement que celle des courbes geometriques, & qu'on en fait preſque autant d'uſage dans la Geometrie & dans les ſciences phyſico-mathematiques, & que la plupart des plus belles découvertes & des plus beaux Problêmes reſolus par les Sçavans de notre temps, regardent les proprietés & les uſages de ces courbes.

Quoiqu'on puiſſe exprimer les principales proprietés de pluſieurs courbes mechaniques par des équations où il ne faut que le calcul ordinaire de l'Algebre; on ne peut gueres cependant découvrir les propietés & les uſages des courbes mechaniques, qu'en employant dans leurs équations les expreſſions du calcul differentiel & integral, & en ſe ſervant de ce calcul; c'eſt pourquoi on ſe contentera ici de donner ſeulement l'idée de quelques courbes mechaniques.

## DES LIGNES SPIRALES.

50. SI l'on imagine que le rayon $CA$ prolongé à l'infini, du cercle $AED$, ſe meut en tournant autour du centre $C$, en commençant au point $A$, & allant de $A$ vers $E$, $D$, $A$, & qu'en même tems un point $C$ parte de $C$, & ſe meuve ſur le rayon $CA$ de maniere qu'il arrive au point $A$ en même temps que $CA$; la ligne $CBA$ que décrit le point $C$ par ce mouvement, s'appelle *ſpirale*. Sa proprieté principale ſe déduit de ſa formation, qui eſt que la circonference $AEDA$ eſt un arc quelcon- FIGURE XXXIV.

que $AED$ pris depuis l'origine $A$ juſqu'au point $D$ où ſe trouve le rayon $CD$ quand le point mobile $C$ ſe trouve en même temps au point $B$ de la ſpirale, comme le rayon $CD$ que parcourt le point mobile $C$ pendant que le rayon $CD$ ou $CA$ parcourt la circonference entiere, eſt à la partie $CB$ du même rayon que parcourt le même point $C$ pendant que le rayon $CA$ ou $CD$ parcourt l'arc $AED$.

Ainſi nommant le rayon $r$; ſa partie $CB$ priſe pour abſciſſe, $x$; la circonférence $AEDA$, $c$; & chacun des arcs $AED$ pris pour ordonnées, $y$; la proportion précedente s'exprimera ainſi, $c.y::r.x$; ce qui donne l'équation à la ſpirale $cx=ry$, ou $x=\frac{ry}{c}$.

## REMARQUES.

### I.

451. ON remarquera que quand le point mobile $C$ eſt arrivé en $A$, il peut continuer de ſe mouvoir ; & dans une ſeconde révolution, il décrira une ſeconde partie de la ſpirale, dans une troiſiéme revolution, une troiſiéme partie de la ſpirale, & ainſi à l'infini ; ce qui eſt cauſe que le rayon prolongé $CA$ rencontre la ſpirale en une infinité de points ; & que l'abſciſſe $x$ peut avoir une infinité de valeur par raport à tous ces points.

### II.

452. On peut encore concevoir que le point mobile $C$ peut ſe mouvoir de $C$ juſqu'à $A$, de maniere que le raport de la circonference $AEA$ $(c)$ à l'arc $AED$ $(y)$, ſoit le même que celui d'une puiſſance quelconque $m$ ($m$ repreſente un nombre quelconque entier ou rompu) du rayon $CA$ $(r^m)$ à une ſemblable puiſſance de l'abſciſſe $CB$ $(x^m)$; & l'on aura pour l'equation de ces ſpirales à l'infini $cx^m=r^my$, ou $x^m=\frac{r^m}{c}y$.

### III.

453. Outre ces ſpirales, l'on en peut encore imaginer d'autres d'une infinité de ſortes, parmi leſquelles on fera ſeulement ici remarquer la ſpirale logarithmique, dont la proprieté eſt que la tangente $BT$ à un point quelconque $B$, fait toujours le même angle au point $B$ avec le rayon $BC$. Mais l'équation neceſſaire pour exprimer cette ſpirale, employe le calcul differentiel dont on ne parlera que dans la partie qui ſuit.

On remarquera ſeulement que cette ſpirale ne commence pas au centre $C$ d'où partent les rayons $CA$, $CD$, comme les précedentes.

## DES CYCLOÏDES.

FIGURE XXXV.

54. SI l'on imagine que le cercle $AFE$ roule ſur la droite $ED$; & ſi l'on conçoit que le point $A$ décrit en même temps une courbe $AfD$ ſur le même plan où eſt la ligne $ED$ & le cercle $AFE$ qu'on appelle *generateur*, cette courbe ſe nomme *cycloïde*. Si l'on tire par tous les points $F$ de la demi-circonference $AFE$, une droite $Ff$ parallele à la baſe $ED$, juſqu'à la cycloïde en $f$, la droite $Ff$ eſt toujours égale à la longueur de l'arc $AF$, & la baſe $ED$ eſt égale à la demi-circonference $AFE$. Car il eſt évident que quand le point $A$ eſt arrivé au point $D$, tous les points de la demi-circonference $AFE$, à commencer du point $E$, ont été appliqués ſucceſſivement ſur les points de la baſe $ED$, & qu'ainſi toute la demi-circonference $EFA$ a été, pour ainſi dire, meſurée par la baſe $ED$, qui lui eſt par conſequent égale; & que quand le point $A$ eſt arrivé au point $f$ de la cycloïde, ſi l'on trace le demi-cercle generateur $afe$ par ce point $f$, en faiſant $ae$ perpendiculaire ſur $ED$, $Ee$ eſt la meſure de l'arc qui en roulant s'eſt, pour ainſi dire, meſuré ſur $Ee$, lequel arc eſt viſiblement égal à l'arc $AF$, ou $af$ qui eſt celui qu'a décrit pendant ce mouvement le point $A$ depuis $A$ juſqu'en $F$, ou depuis $a$ juſqu'en $f$, en tournant ſur ſon centre, pendant qu'en avançant le cercle generateur roulant toujours, le même point $A$ a décrit la partie de cycloïde $Af$. Or $Bb$ étant égal à $Ee$, & $BF$ à $bf$, il eſt évident que $Ff = Ee =$ à l'arc $AF$ ou $af$.

Ainſi prenant la demi-circonference $AFE$ pour la ligne des coupées, & les droites $Ff$ pour les ordonnées, & nommant la demi-circonference $AFE$ ($c$), la baſe $ED$ ($b$), chaque coupée $AF$ ($z$), l'ordonnée $Ff$ ($y$), l'on aura $c . b :: z . y$, ce qui donnera l'équation à la cycloïde $y = \frac{bz}{c}$; ou bien, parceque $c = b$, l'équation ſera $y = z$.

455. Si l'on prolonge $fF$ juſqu'à $B$, & qu'on nomme $Bf$ ($y$), $AE$ ($a$), $AB$ ($x$), $AF$ ($z$), il eſt évident que l'ordonnée $Bf$ eſt égale à l'arc $AF$ ($z$), & de plus à la perpendiculaire $BF$, qui eſt égale * à $\sqrt{AB \times BE} = \sqrt{ax - xx}$; ainſi l'on aura encore $y = z + \sqrt{ax - xx}$ pour l'équation à la cycloïde.

* 287.

456. C'eſt encore une proprieté de la cycloïde, qu'on démontrera dans la ſeconde partie, que chacun des arcs de la cycloïde, comme *Af*, eſt double de la corde *AF* de l'arc correſpondant *AF*; ainſi nommant toujours *AE* ($a$), *AB* ($x$); * 288. l'arc *Af* ($s$); la corde *AF* ſera égale * à $\sqrt{ax}$, & l'on aura pour une troiſiéme équation de la cycloïde $s = 2\sqrt{ax}$.

## REMARQUES.

### I.

457. LA cycloïde a beaucoup de proprietés & d'uſages qui ont été découverts de notre temps; & de plus l'on a diſtingué trois ſortes de cycloïdes à qui convient l'équation $y = \frac{bz}{c}$; 1^re^. quand $b = c$, c'eſt la cycloïde ordinaire, 2^e^. quand $b$ ſurpaſſe $c$, c'eſt la cycloïde *allongée*; 3^e^. quand $b$ eſt moindre que $c$, c'eſt la cycloïde *racourcie*.

### I I.

458. Il y a même une infinité d'autres ſortes de cycloïdes, qui ont pour baſe *ED* une courbe; elles ſe forment en concevant que le cercle generateur roulant ſur une circonference ou ſur une autre courbe, un point pris dans la circonference du cercle generateur, ou dans un des rayons au dehors ou au dedans du cercle, décrit ſur le plan où eſt ce cercle une eſpece de cycloïde, qu'on appelle *epicycloïde*. On doit bientôt voir un ſçavant traité de toutes ces cycloïdes composé par M. *Nicole*.

### I I I.

459. On peut concevoir que le cercle generateur fait une infinité de tours ſur ſa baſe prolongée à l'infini; ainſi chaque cycloïde peut s'étendre à l'infini, excepté une eſpece d'epicycloïde autour de la circonference pour baſe, qui revenant aux mêmes points, eſt bornée à n'avoir qu'un nombre déterminé de parties toutes ſemblables, & elle eſt geometrique.

## DE LA COURBE LOGARITHMIQUE.

460. SOIT une droite *AL* prolongée de côté & d'autre à l'infini, & conçue partagée en parties égales les plus petites
FIGURE XXXVI. qu'on puiſſe imaginer, *AC*, *CE*, *EG*, &c. & qu'il y ait ſur les diviſions les droites paralleles *AB*, *CD*, *EF*, &c. qui faſſent

une progreſſion geometrique ; la courbe *BDFH*, &c. qui paſſe par toutes les extrêmités de ces droites proportionelles, s'appelle la *logarithmique*, dont les coupées ſont ſur la droite *AL*, & les ordonnées ſont *AB*, *CD*, &c. Cette courbe a pluſieurs proprietés de grand uſage ; mais comme l'on ne peut guéres les exprimer que par le calcul differentiel, on fera ſeulement remarquer ici que comme les parties de la ligne des coupées font une progreſſion arithmetique, & les ordonnées correſpondantes une progreſſion geometrique ; & que quand tous les termes d'une progreſſion arithmetique ſont correſpondans pris de ſuite aux termes d'une progreſſion geometrique auſſi pris de ſuite, les termes de la progreſſion arithmetique s'appellent les *logarithmes* des termes de la progreſſion geometrique ; la courbe logarithmique contient les uns & les autres, & c'eſt delà qu'elle tire ſon nom. Ainſi prenant *AB* pour l'unité, & *A* pour le point où commencent les logarithmes, la partie *ABML* contient les nombres qui ſurpaſſent l'unité & leurs logarithmes correſpondans ; & l'autre partie *AghB* contient les nombres moindres que l'unité & leurs logarithmes correſpondans, & le logarithme de l'unité eſt zero.

### *Avertiſſement.*

Ce que l'on vient de dire des courbes mechaniques ſuffit pour en donner ici une idée aux Lecteurs ; & pour n'oublier aucune des courbes qu'on a imaginées juſqu'à preſent : on va expliquer en peu de mots les courbes qu'on appelle *exponentielles* & *parcourantes*.

## DES COURBES QU'ON APPELLE *exponentielles* ET *parcourantes*.

61. LES grandeurs comme $a^x$, $x^x$, $x^y$, $x^z$, &c. qui ſont des conſtantes comme $a$, ou des changeantes comme $x$, $y$, &c. élevées à des puiſſances, dont l'expoſant $x$, $y$, $z$ eſt une grandeur changeante, s'appellent *exponentielles* ou *parcourantes*. Les équations qui contiennent de ces ſortes de grandeurs, ont le même nom ; comme auſſi les courbes dont le raport commun à tous les points de leur contour s'exprime par ces ſortes d'équations.

Par exemple, en nommant $x$ les abſciſſes *AC*, *AE*, &c. FIGURE XXXVI.

depuis l'origine $A$, & $y$ les ordonees $CD$, $EF$, &c. & une grandeur conſtante $a$; ſuppoſé que la courbe $BDFH$, &c. s'exprime par cette équation $a^x = y$, quelques-uns la nomment *exponentielle*, d'autres *parcourante*; de même $x^x = y$, ou $x^y = y$, $x^z = y$, ſont des équations de cour besparcourantes.

Pour ſe former une idée diſtincte de ces courbes, ſi $a^x = y$ eſt l'équation de la courbe $BDF$, il faut concevoir que la premiere ordonnée $CD (y)$ eſt égale à la conſtante $a$ élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt l'abſciſſe correſpondante $AC (x)$ La ſeconde $EF (y)$ eſt égale à la conſtante $a$ élevée à la puiſſance de la ſeconde abſciſſe $AE (x)$; & ainſi des ordonnées ſuivantes.

Si $x^x = y$ eſt l'équation de la courbe, il faut concevoir que $CD (y) = AC (x)$ élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt $AC (x)$, que $EF (y) = AE (x)$ élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt $AE (x)$, & ainſi des autres. D'où l'on conçoit aiſément la courbe dont $x^y = y$ ſeroit l'équation: Mais quand l'équation eſt, par exemple, $x^z = y$, dans laquelle l'expoſant $z$ eſt une changeante differente de $x$ & de $y$, l'on conçoit une autre courbe $A\delta\varphi\varepsilon$, dont l'une des coordonnées $ACE$, &c. eſt commune avec celle de la courbe parcourante, & dont on ſçait le raport de chacune des ordonnées $C\delta$, $E\varphi$, &c. qui ſont les $z$, avec les abſciſſes correſpondantes communes $AC$, $AE$, &c. qui ſont les $x$.

Les équations exponentielles peuvent avoir pluſieurs termes, comme $x^x + x^a = y^y + y$.

Les expoſans changeans $x$, $y$, &c. des grandeurs exponentielles peuvent eux-mêmes être élevés à des puiſſances dont les expoſans ſoient auſſi changeans, ce qui fait diſtinguer ces grandeurs exponentielles & leurs courbes en pluſieurs genres, dont celles qui précedent ſont le premier: Le ſecond eſt, par exemple, $x^{x^x} = y^{y^y}$, & ainſi à l'infini.

# SECTION IV.

## *De l'uſage que fait l'Analyſe des courbes pour réſoudre les équations déterminées, & les Problêmes des ſciences Phyſico-Mathematiques.*

### Uſage que l'Analyſe fait des courbes geometriques, pour réſoudre les équations déterminées.

### *Principe d'où l'Analyſe déduit cet uſage.*

62. EN ſuppoſant que les équations à la ligne droite & à toutes les courbes geometriques de tous les genres ont leurs coupées repreſentées par la même inconnue, par exemple $x$ ou $u$, &c. & leurs ordonnées auſſi exprimées par la même inconnue, comme $y$ ou $z$, &c. ſi en ſe ſervant de deux de ces équations quelconques, on fait évanouir l'inconnue de la coupée, de maniere que la troiſiéme équation que l'on formera de ces deux autres, n'ait que la ſeule inconnue $y$ de l'ordonnée; les deux lignes dont on a pris les équations pour faire évanouir $x$, ſe peuvent couper en autant de points que l'inconnue $y$ a de dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation dont $y$ eſt la ſeule inconnue.

Par exemple, ſi l'on prend la valeur de $x$ dans l'équation à la ligne droite $x = \frac{a}{b}y$, & qu'on la ſubſtitue dans une équation de laquelle on voudra des ſections coniques, comme dans $px = yy$, qui eſt l'équation à la parabole; on aura la troiſiéme équation $yy - \frac{av}{b}y = 0$, dans laquelle $y$ étant au ſecond degré, marque qu'une ligne droite peut couper une parabole en deux points; & comme il y a une valeur de $y = 0$, cela marque que les coupées de l'équation à la ligne droite commençant au même point où commencent les coupées de l'équation à la parabole, auquel point $y = 0$; le premier point où la ligne droite coupe la parabole eſt au ſommet, c'eſt-à-dire à l'origine des $x$ & des $y$, puiſque $y$ s'y trouve égal à zero. Mais ſi l'origine des coupées de l'équation de la ligne droite étoit à un autre point qu'à l'origine des $x$ & des $y$, $y$ auroit deux valeurs réelles dans la troiſiéme équation qu'on trouveroit en faiſant évanouir $x$ par les deux autres.

De même prenant la valeur de $x$ dans l'équation de la parabole $px = yy$, qui eſt $x = \frac{yy}{p}$; & la ſubſtituant dans l'équation par exemple du cercle, qui eſt $yy = dx - xx$, on trouve la troiſiéme équation $\frac{y^4}{pp} - \frac{d}{p}yy + yy = 0$, dans laquelle $y^4$ a quatre dimenſions; ce qui fait voir que le cercle peut couper la parabole en quatre points, dont il y en a deux de confondus au ſommet de la parabole où eſt l'origine des $x$ & des $y$, parceque $y$ a deux valeurs égales à zero dans la troiſiéme équation précedente : mais quand l'origine des coupées eſt différente dans la parabole & le cercle, $y$ a quatre valeurs réelles dans la troiſiéme équation que l'on trouve par le moyen des deux équations à la parabole & au cercle.

On trouvera de même qu'en prenant deux équations de deux ſections coniques quelconques, $y$ aura quatre dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation qui naîtra de l'évanouiſſement de $x$ par leur moyen; ainſi deux ſections coniques peuvent ſe couper en quatre points; que $y$ aura ſix dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation qui naîtra de l'évanouiſſement de $x$ par le moyen de deux équations, l'une d'une ſection conique quelconque, & l'autre d'une courbe du ſecond genre; & qu'ainſi une courbe du premier genre en peut couper une du ſecond en ſix points.

On peut de la même maniere trouver en combien de points une courbe geometrique quelconque peut être coupée par une ligne droite, par une courbe du premier genre, par une courbe du troiſiéme, &c.

### EXEMPLE.

FIG. XIX. LA parabole $ACc$ dont l'axe eſt $ABb$, le parametre $AP = p$, les $x = AB$, $Ab$; les $y = BC$, $bc$, a pour équation $yy - px = 0$. La ligne droite $SCc$, en ſuppoſant $SA = a$; $AT$ parallele à $BC$ menée par $A$ égale à $b$; & prenant les $x$ ſur $AB$ du même point $A$ d'où l'on prend les $x$ de la parabole, aura pour abſciſſe $SB = a + x$, & pour ordonnée $BC = y$, & pour équation $\frac{ab+bx}{a} = y$; d'où l'on tire $x = \frac{ay-ab}{b}$; ſi l'on met cette valeur de $x$ dans l'équation de la parabole, on aura la troiſiéme équation $yy - \frac{apy+abp}{b} = 0$, dans laquelle

$y$ a deux valeurs poſitives, * qui ſont celles des deux ordonnées $BC$ ($y$), $bc$ ($y$), menées des deux points $C$, $c$ où la droite $SCc$, dont l'équation eſt $x = \frac{ay-ab}{b}$, coupe la parabole $ACc$, dont l'équation eſt $yy - px = 0$; leſquelles deux ordonnées communes à la droite & à la parabole, ſont devenues déterminées par la commune interſection de la droite & de la parabole.

* 39 8<sup></sup>

Cet exemple ſuffit pour faire clairement concevoir le principe, & pour faire voir en même tems quelle en eſt la raiſon; avec quelle juſteſſe l'Analyſe s'accorde avec la Geometrie, & comment elle fait découvrir avec le ſeul calcul les proprietés des figures les plus compoſées jointes les unes avec les autres, & comment réciproquement la Géometrie exprime par ſes figures les reſolutions des Problêmes découvertes par l'Analyſe; c'eſt ce qu'on verra mieux par l'uſage que l'Analyſe fait de ce principe.

---

### *Uſage que l'Analyſe fait du principe précedent, pour former la methode de trouver exactement, par les figures de la Geometrie, les lignes qui ſont les valeurs des racines des équations déterminées qui donnent la réſolution des Problêmes déterminées de quelque degré que puiſſent être ces équations. C'eſt cette methode qu'on nomme la conſtruction des équations.*

463. IL ſuit du principe précedent, que pour trouver les lignes qui ſont les valeurs des racines d'une équation déterminée quelconque, c'eſt-à-dire de quelque degré qu'elle puiſſe être, dont l'inconnue eſt par exemple $z$; 1°. Il faut trouver deux équations dans chacune deſquelles l'une des inconnues, par exemple celle qui marque les ordonnées, ſoit $z$; & l'autre qui exprime les coupées, ſoit une autre inconnue comme $u$ auſſi commune à ces deux équations; & que ces équations comprennent auſſi, non chacune, mais les deux enſemble, toutes les grandeurs connues de l'équation qu'on veut reſoudre, & enfin qu'elles ſoient telles qu'en faiſant évanouir l'inconnue $u$ par leur moyen, la troiſiéme équation qui en viendra ſoit preciſément l'équation propoſée à reſoudre.

464. Par exemple ſi on veut reſoudre l'équation du quatriéme degré $z^4 - nz^3 + pzz - qz + r = 0$, il faut trouver deux équations comme $zu - \sqrt{r} = 0$, qui eſt une équation à l'hyperbole par raport aux aſymptotes, & $zz - nz + p - \frac{qu}{\sqrt{r}} + uu = 0$, qui eſt une équation au cercle, qui ſont telles qu'en mettant dans la ſeconde les valeurs de $u$, $uu$, qui ſont $u = \frac{\sqrt{r}}{z}$, $uu = \frac{r}{zz}$, l'on a pour troiſiéme équation la propoſée.

2°. Il faut tracer les courbes des deux équations qu'on a trouvées en commançant par laquelle on voudra, par exemple on tracera d'abord l'hyperbole équilatere de l'équation $zu - \sqrt{r} = 0$; ou bien (en ſuppoſant, pour ne pas ſe ſervir d'incommenſurables, $\sqrt{r} = aa$) de l'équation $zu - aa = 0$, en tirant les deux droites perpendiculaires $OR$, $OH$; & FIGURE XXXVII. prenant $OR$ & la perpendiculaire $Rr$ à $OR$, chacune $= a$, & traçant par $r$ l'hyperbole dont $OR$, $OH$ ſeront les aſymptotes, après quoi nommant $OC\ (u)$, & $BC\ (z)$, l'on aura $BC \times OC\ (zu) = OR \times Rr\ (aa = \sqrt{r})$

L'hyperbole étant ainſi tracée, il faut enſuite décrire le cercle dont l'équation eſt $zz - nz + uu - \frac{q}{\sqrt{r} = aa} u + p = 0$; & il le faut faire de telle maniere, que les ordonnées $z$ du cercle ſoient ſur les ordonnées $BC\ (z)$ de l'hyperbole, ou bien qu'elles leur ſoient paralleles, & qu'elles ayent la même origine; & qu'il en ſoit de même des coupées du cercle & de * 436. l'hyperbole. Mais les termes $nz \frac{q}{\sqrt{r}} u$, marquant * que l'équation eſt à une ligne parallele au diametre, il faut comparer FIGURE XXIX. cette équation du cercle avec l'équation indéterminée du * 436. cercle * $zz - 2lz + uu - 2iu + ll + ii - \frac{1}{4}dd = 0$, & ſuppoſer que ces deux équations ſont la même équation, c'eſt-à-dire, que leurs termes correſpondans ſont égaux; (s'il y avoit eû le terme $uz$ dans l'équation du cercle, il auroit falu la comparer avec l'équation indéterminée du cercle où ſe trouve * 436. $uz$ *) cette ſuppoſition donnera les équations particulieres propres à déterminer les valeurs de $l$, $i$, $d$, par raport à l'équation $zz - nz + uu - \frac{q}{aa = \sqrt{r}} u + p = 0$; & l'on trouvera $l = \frac{1}{2} n$, $i = \frac{q}{2\sqrt{r} = 2aa}$, $\frac{1}{2} d = \sqrt{ll + ii - p} = \sqrt{\frac{1}{4} nn + \frac{qq}{4r} - p}$.

FIGURE XXXVII. Pour décrire à préſent le cercle de cette équation de la maniere propre à donner les racines de la propoſée, il faut de l'origine $O$ prendre ſur la ligne $OH$ des ordonnées $z$ de l'hyperbole, qu'on ſuppoſe auſſi être la ligne des ordonnées $z$ du cercle, la ligne $OH = l = \frac{1}{2}n$; ſi la valeur de $l = \frac{1}{2}n$ eût été négative, il auroit falu prendre $OH = \frac{1}{2}n$ ſur $HO$ prolongée de l'autre côté de l'origine $O$; ce qu'il faut remarquer pour la ſuite. Après cela il faut élever par le point $H$ la perpendiculaire $HK = i = \frac{q}{2\sqrt{r=2aa}}$; le point $K$ ſera le centre du cercle qu'il faut décrire. C'eſt pourquoi du centre $K$ avec le rayon $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, il faut décrire la circonference $BBBA$, & mener des quatre points $B$, $B$, &c. où elle coupe l'hyperbole, les quatre lignes $BC$ perpendiculaires ſur la ligne $OH$ des $z$, & ces quatre lignes $BC$ détermineront les quatre lignes $OC$, $OC$, &c. qui ſeront les quatre valeurs exactes de $z$ dans l'équation propoſée $z^4$, &c. ou, ſi l'on veut, leurs quatre paralleles & égales $Bc$, $Bc$, &c. car le cercle $BBBAB$ a pour équation par la conſtruction, $zz - nz + uu - \frac{q}{\sqrt{r}}u + p = 0$; & on peut encore le démontrer ainſi, $FB = OC - OH = z - \frac{1}{2}n$, $KF = KH - FH = \frac{q}{2\sqrt{r}} - u$; & le rayon du cercle $KB = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$. Or à cauſe du triangle rectangle $KFB$, (on imagine facilement la ligne $KB$, qui n'eſt pas marquée dans la figure 37) $\overline{KB}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FB}^2$; ce qui donne en mettant les valeurs de ces quarrés, l'équation précedente du cercle. L'équation de l'hyperbole eſt auſſi $zu - \sqrt{r} = 0$ par la conſtruction; d'où prenant la valeur de $u = \frac{\sqrt{r}}{z}$, & la ſubſtituant dans l'équation précedente du cercle, on trouve preciſément l'équation propoſée $z^4$, &c.

.65. On remarquera ſur cette conſtruction, 1°. qu'on peut trouver ſur la figure même le rayon $KB = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, ſans en faire d'autre à part; car il n'y a qu'à imaginer l'hypothenuſe $OK$ du triangle rectangle $OHK$ qui ſera égale à $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$; faire enſuite le demi-cercle dont elle ſera le diametre, & y inſcrire la corde $OA = \sqrt{p}$, & l'autre corde $KA$, étant le côté du triangle rectangle dont l'hypothenuſe eſt $OK = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$, & le côté $OA = \sqrt{p}$; l'autre côté $KA$ ſera égal à $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, & ſera par conſequent le rayon du cercle de l'équation précedente.

.66. 2°. Si le cercle coupoit les hyperboles oppoſées, les valeurs de $z$ que donneroient les interſections de l'hyperbole $BB$, ſeroient les racines poſitives, & celles que donneroient les interſections de l'hyperbole oppoſée, ſeroient les négatives.

467. 3°. Si le cercle touchoit ſeulement l'hyperbole ſans la couper, ce ſeroit une marque que deux interſections ou même les quatre ſeroient réunies en une; ce qui feroit connoître que les valeurs de $z$, ou du moins deux ſeroient égales.

468. 4°. Si la corde $OA = \sqrt{p}$, étoit trop grande pour être inſcrite à la demi circonference décrite ſur le diametre $OK = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$, ce ſeroit une marque que les racines ſeroient imaginaires, comme auſſi ſi le cercle, dont le rayon eſt $KA = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, étoit trop petit, & ne coupoit ni ne touchoit l'hyperbole $BB$, &c. Ces remarques font voir la conformité de la Geometrie & de l'Analyſe, & elles ſervent, ſur-tout les trois dernieres, dans toutes les conſtructions des équations.

## COROLLAIRE.

469. IL eſt évident par le principe & par l'application qu'on en vient de faire, qu'on peut reſoudre ou conſtruire une équation déterminée quelconque, par le moyen d'une équation à la ligne droite, & d'une équation à une courbe du même degré que ſera l'équation propoſée : Qu'une équation du troiſiéme ou du quatriéme degré peut ſe conſtruire par le moyen de deux équations dont chacune eſt celle d'une ſection conique, (on y comprend le cercle & de même dans la ſuite); que les équations du cinquiéme & ſixiéme degré peuvent ſe conſtruire par une équation d'une ſection conique & par l'équation d'une courbe du ſecond genre : Que les équations du ſeptiéme & du huitiéme degré peuvent ſe conſtruire par une équation d'une ſection conique & une autre d'une courbe du troiſiéme genre. Les équations du 5$^e$, 6$^e$, 7$^e$, 8$^e$ & 9$^e$ degré peuvent auſſi ſe conſtruire par deux équations chacune d'une courbe du ſecond genre. L'on peut déduire aiſément du principe & de l'application qu'on en a faite, de quel genre doivent être les courbes dont on pourra prendre les équations pour conſtruire les équations déterminées des degrés plus élevés.

Mais il faut remarquer que les conſtructions des équations déterminées par les équations des courbes les plus ſimples, doivent être preferées aux conſtructions par les équations des courbes plus compoſées ; ainſi (ſans parler de la conſtruction des équations déterminées du ſecond degré où le cercle & les lignes droites ſuffiſent) l'on conſtruit les équations du troiſiéme & du quatriéme degré par les équations de deux ſections coniques, dont l'une eſt ordinairement celle du cercle, comme étant très-facile à décrire ; celles du cinquiéme & ſixiéme degré par une équation d'une ſection conique & une d'une courbe du ſecond genre ; les équations du ſeptiéme, huitiéme & neuviéme degré, par deux équations de deux courbes du ſecond genre, &c.

Il ne reſte plus pour faire concevoir clairement comment l'Analyſe ſe ſert des courbes pour trouver les racines des équations déterminées, qu'à expliquer la méthode dont il faut ſe ſervir pour trouver quand on a une équation déterminée, les deux équations aux deux courbes qui ſervent à la conſtruire.

## *Méthode pour trouver les équations des courbes qui ſervent à conſtruire les équations déterminées.*

### I.

### *Pour les équations déterminées du 3^e & du 4^e degré.*

70. TOUTES les équations du troiſiéme degré peuvent être repréſentées par cette formule $z^3 + nzz + aqz + aar = 0$ ; on peut toujours donner une ſemblable préparation aux grandeurs connues d'une équation * ; on ſuppoſe que les ſignes + repréſentent ceux des équations particulieres ; ainſi quand il y a quelques termes de ces équations qui ont —, les ſignes + des termes correſpondans de la formule repréſentent ces ſignes. Quand le ſecond terme manque, $n$ eſt égale à zero. Pour ne faire qu'un cas des équations du troiſiéme & du quatriéme dégré, il faut multiplier les équations du troiſiéme degré par l'inconnue $z$, & la formule ſera $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz = 0$ ; & alors l'une des racines ſera égale à zero. On n'employe pas la lettre $p$, parcequ'on s'en eſt ſervi dans les équations des ſections coniques, par raport à leurs diametres & aux lignes differentes de leur diametre, pour marquer le parametre. Les équations du quatriéme

*279.

degré peuvent de même être repréſentées par cette formule $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + a^3s = 0$. L'on peut reſoudre ces équations par deux équations; la premiere à une ſection conique quelconque ſans qu'elle ſoit déterminée, c'eſt-à-dire, par une parabole quelconque, par une ellipſe quelconque, & par une hyperbole quelconque; la ſeconde par un cercle auſſi quelconque. L'on peut auſſi les reſoudre par deux équations à deux ſections coniques, dont l'une ſoit déterminée, c'eſt-à-dire une telle parabole déterminée, une telle ellipſe, ou une telle hyperbole déterminée, ou un tel cercle déterminé, & dont l'autre ne ſoit pas déterminée.

### PREMIER CAS.

*Quand aucune des deux ſections coniques n'eſt déterminée.*

471. 1°. IL faut ſuppoſer cette équation à la parabole 1re. $au = zz + \frac{1}{2}nz$; en quarrant chaque membre, on aura $aauu = z^4 + nz^3 + \frac{1}{4}nnzz$.

2°. Il faut mettre dans chacune des formules précedentes $aauu - \frac{1}{4}nnzz = z^4 + nz^3$ à la place de $z^4 + nz^3$, & $au - \frac{1}{2}nz = zz$ à la place de $zz$; & la premiere formule donnera $aauu$

$$\begin{array}{l} - \frac{1}{4}annu + \frac{1}{8}n^3z = 0; \\ + aaqu - \frac{1}{2}anqz \\ \qquad\quad + aarz \end{array}$$

qui devient en diviſant par $aa$,

$$\begin{array}{l} 2^e.\ uu - \frac{nn}{4a}u + \frac{n^3}{8aa}z = 0, \\ \qquad\quad + qu - \frac{nq}{2a}z \\ \qquad\qquad\qquad + rz \end{array}$$

qui eſt une ſeconde équation à la parabole quand l'équation propoſée eſt du troiſiéme degré. La ſeconde formule donnera,

$$\begin{array}{l} 2^e.\ uu - \frac{nn}{4a}u + \frac{n^3}{8aa}z + as = 0, \\ \qquad\quad + qu - \frac{nq}{2a}z \\ \qquad\qquad\qquad + rz \end{array}$$

qui eſt une ſeconde équation à la parabole quand la propoſée eſt du quatriéme degré.

3°. Il faut ajouter enſemble la 1re. & la 2e. équation, & l'on aura,

$$\begin{array}{l} 3^e.\ uu - \frac{nn}{4a}u + zz + \frac{n^3}{8aa}z = 0. \\ \qquad + qu \qquad\quad - \frac{nq}{2a}z \\ \qquad - au \qquad\quad + rz \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{1}{2}nz \end{array}$$

C'eſt l'équation au cercle pour la formule du troiſiéme degré.

On

On ajoutera de même la premiere & la 2$^e$ équation, & l'on aura, 3$^e$,

$$\begin{array}{llllll} uu & -\frac{nn}{4a}u & +zz & +\frac{n3}{8aa}z & +as & =0. \\ & +qu & & -\frac{nq}{2a}z & & \\ & -au & & +rz & & \\ & & & +\frac{1}{2}nz & & \end{array}$$

C'eſt l'équation au cercle pour la forme du quatriéme degré.

2. On peut trouver les racines de toute équation du troiſiéme degré repréſentée par la formule, en conſtruiſant la parabole de la premiere équation, & lui joignant le cercle de la 3$^e$ équation qui la coupera en quatre points, dont un ſera au ſommet de la parabole, auquel point $z=0$; & menant des trois autres points de ces interſections trois ordonnées à la ligne des abſciſſes $u$ de la parabole, elles ſeront les trois valeurs des racines de l'équation du troiſiéme degré. Si le cercle ne coupoit la parabole qu'en un point outre celui du ſommet, il y auroit deux racines imaginaires; & s'il la coupoit en un point & la touchoit en un autre, il y auroit deux racines qui ſeroient égales à cauſe de l'union de deux interſections dans le point touchant.

3. On peut de même trouver les racines de toute équation du quatriéme degré repréſentée par la formule, en traçant la parabole de la premiere équation, & lui joignant le cercle de la 3$^e$ équation. Mais pour ne pas groſſir ce Traité inutilement, on n'en donnera un exemple que dans le ſecond cas.

4. Si l'on vouloit ſe ſervir, pour trouver les racines des équations du troiſiéme & du quatriéme degré repréſentées par les formules précedentes, du cercle de la 3$^e$ ou III$^e$ équation, & d'une ellipſe ou d'une hyperbole; voici la maniere de trouver les équations.

4°. Il faut retrancher la premiere équation de la 2$^e$, & l'on aura

$$\begin{array}{lllll} uu & -\frac{nn}{4a}u & -zz & +\frac{n3}{8aa}z & =0. \\ & +qu & & -\frac{nq}{2a}z & \\ & +au & & +rz & \\ & & & -\frac{1}{2}nz & \end{array}$$

C'eſt une équation à l'hyperbole équilatere par raport au diametre pour la formule du troiſiéme degré.

On retranchera de même la premiere équation de la $2^e$, & l'on aura

$$\begin{array}{llllll} uu & -\frac{nn}{4a}u & -zz & +\frac{n3}{8aa}z & +as & =0. \\ & +qu & & -\frac{nq}{2a}z & & \\ & +au & & +rz & & \\ & & & -\frac{1}{2}nz & & \end{array}$$

C'eſt une équation à l'hyperbole équilatere par raport au diametre pour la formule du quatriéme degré.

475. 5°. Pour trouver des équations à l'ellipſe & à l'hyperbole qui n'eſt pas équilatere, il faut multiplier la $1^{re}$ équation par la fraction arbitraire mais connue $\frac{b}{c}$, & l'on aura $\frac{b}{c}zz + \frac{bn}{2c}z - \frac{ab}{c}u = 0$. Il faut enſuite ajouter cette équation à la $2^e$, & la ſomme ſera une équation à l'ellipſe pour la formule du troiſiéme degré ; & enſuite la retrancher de la $2^e$, & la difference ſera une équation à l'hyperbole non équilatere par raport au diametre, pour la formule du troiſiéme degré.

On ajoutera de même cette équation à la $2^e$, & enſuite on l'en retranchera, & la ſomme ſera une équation à l'ellipſe pour la formule du quatriéme degré, & la difference ſera une équation à l'hyperbole pour la formule du quatriéme degré.

476. L'on peut trouver de differentes façons les lignes qui ſont les racines de la formule du troiſiéme & du quatriéme degré, en joignant deux à deux les équations précedentes qui répondent à la formule du troiſiéme degré, quand la propoſée eſt du troiſiéme degré, & celles qui répondent à la formule du quatriéme degré, quand la propoſée eſt du quatriéme degré, puis traçant les courbes de ces deux équations de maniere que les $u$ de l'une ſoient ſur les $u$ de l'autre, ou leur ſoient paralleles & ayent la même origine, & que ce ſoit la même choſe des $z$ ; mais il vaut mieux dans la pratique ſe ſervir de l'une des équations aux ſections coniques avec l'équation du cercle, parceque le cercle eſt plus facile à décrire ; & dans ce cas il faut ſe ſervir des axes des ſections coniques, parceque les ordonnées du cercle ſont toujours perpendiculaires aux coupées.

477. 6°. Si l'on veut une équation à l'hyperbole par raport aux aſymptotes, pour ne faire qu'un même cas des équations du troiſiéme & du quatriéme degré, on multipliera la formule du troiſiéme degré $z^3 + nzz + aqz + aar = 0$, par $z + a = 0$, quand le dernier terme aura +, & par

$z - a = 0$, quand le dernier terme aura $-$; & l'on aura l'équation du 4$^e$ degré

$$\begin{array}{l} z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + a^3r = 0\,; \\ \qquad\qquad + az^3 + anzz + aaqz \end{array}$$

on comprendra enſuite cette formule, c'eſt-à-dire toutes les équations du 3$^e$ degré ainſi élevées au 4$^e$ avec toutes les équations du 4$^e$ ſous cette formule commune du 4$^e$ degré $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + aass = 0$; l'on ſuppoſe que dans toutes les équations du 4$^e$ degré de cette formule, le dernier terme a $+$; il n'importe pas quel ſigne ayent les termes moyens entre le premier & le dernier. On ſuppoſera cette équation à l'hyperbole entre les aſymptotes I. $uz - as = 0$; en la quarrant on aura $uuzz = aass$; on mettra dans le dernier terme de la formule la valeur de $aass$; & l'on aura en diviſant par $zz$, $zz + nz + aq + \frac{aar}{z} + uu = 0$; & mettant dans le terme $\frac{aar}{z}$ la valeur de $z = \frac{as}{u}$ priſe de la I$^{re}$ équation, l'on aura II. $zz + nz + uu + \frac{ar}{s}u + aq = 0$, qui eſt une équation au cercle, que l'on trouveroit encore en mettant ſimplement au lieu de $as$, ſa valeur $uz$ dans le dernier terme de la formule, car l'on auroit en diviſant par $z$, $z^3 + nzz + aqz + aar + asu = 0$; & multipliant par $u$, & mettant enſuite pour $uz$ ſa valeur $as$, puis diviſant par $as$, l'on auroit $zz + nz + uu + \frac{ar}{s}u + aq = 0$. Si l'on décrit l'hyperbole de la premiere équation, & qu'on décrive enſuite le cercle de la 2$^e$ équation, de maniere que l'origine des $u$ & celle des $z$ ſoient communes, & que les $u$ du cercle ſoient paralleles aux $u$ de l'hyperbole, & que ce ſoit la même choſe des $z$, les interſections du cercle & de l'hyperbole ou des hyperboles oppoſées, quand il y a des racines poſitives & négatives, donneront les points de l'hyperbole, d'où menant les ordonnées $z$ de l'hyperbole, l'on aura les racines de la propoſée qui ſeront ces ordonnées $z$. Si le dernier terme de la formule étoit négatif, il eſt évident que le terme $uu$ de l'équation au cercle auroit le ſigne $-$; ainſi elle ſeroit l'équation d'une hyperbole équilatere, & non pas d'un cercle.

78. Si le dernier terme de la formule étoit négatif, il faudroit transformer l'équation du quatriéme degré de maniere que le dernier terme fût poſitif dans la transformée, ce qui eſt toujours poſſible : car le dernier terme n'étant négatif dans le quatriéme degré que parcequ'il y a quelque racine néga-

* 45. tive, en les rendant toutes poſitives *, le dernier terme deviendra poſitif.

### REMARQUE.

479. QUAND l'équation donnée n'a pas de ſecond terme, il n'y a qu'à ſuppoſer toutes les grandeurs des équations précedentes où eſt $n$ égales à zero, & elles ſerviront pour réſoudre cette équation.

### SECOND CAS.

*Quand l'une des ſections coniques eſt donnée.*

480. IL faut, quand l'on veut employer une ſection conique donnée pour réſoudre une équation du troiſiéme ou du quatriéme degré, introduire dans les équations qui y doivent ſervir des grandeurs indéterminées, de maniere que par le moyen de ces indéterminées, l'on puiſſe déterminer l'équation de la parabole ou de l'ellipſe, ou du cercle, ou de l'hyperbole qu'on aura trouvée par la méthode être l'une des deux équations qui doit réſoudre l'équation propoſée, l'on puiſſe, dis je, la déterminer à être l'équation de cette ſection conique donnée. Comme l'on a déja employé dans les équations aux ſections coniques qui expriment leur raport à d'autres lignes que leur diametre les lettres $d$, $p$; $f$, $g$, $h$, $i$, $l$, on ſe ſervira ici de deux autres indéterminées $k$ & $m$. On ne fera, pour abreger, qu'un cas des équations du troiſiéme & du quatriéme degré, comme dans l'article 6 * du premier cas. * 477.

### METHODE.

481. SOIT la formule de toutes les équations du troiſiéme degré élevées au quatriéme, & de toutes les équations du 4$^e$ degré, $y^4 + ny^3 + aqyy + aary + aass = 0$.

1°. Il faut la transformer en ſuppoſant $y = \frac{az}{k}$, $k$ eſt une indéterminée; & ſubſtituant cette valeur de $y$, on aura la transformée $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 + \frac{kkq}{a} zz + \frac{k^3r}{a} z + \frac{k^4ss}{aa} = 0$; on regardera cette transformée comme l'équation propoſée à réſoudre; & quand on aura determiné $k$, & trouvé les racines, on aura les valeurs de $y$ en mettant dans $y = \frac{az}{k}$ les valeurs de $z$ & de $k$.

482. 2°. Il faut ſuppoſer cette équation à quelle parabole on voudra, & même à une parabole donnée à cauſe de l'indéterminée $k$, I. $zz + \frac{nk}{2a} z = ku$, ou $zz + \frac{nk}{2a} z - ku = 0$,

qui donnera $z^4 + \frac{nk}{n} z^3 + \frac{nnkk}{4aa} zz = kkuu$; ainſi l'on aura $zz = ku - \frac{nk}{2a} z$, & $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 = kkuu - \frac{nnkk}{4aa} zz$. On mettra dans la propoſée les valeurs de $z^4 + \frac{nk}{a} z^3$, & de $zz$; & l'on aura II.

$$\begin{array}{llll} uu + \frac{qk}{a} u & - \frac{r.qk}{2aa} z & + \frac{kkss}{aa} = 0, \\ - \frac{nnk}{4aa} u & + \frac{n^3k}{8a^3} z & \\ & + \frac{rk}{a} z & \end{array}$$

qui eſt une ſeconde équation à la parabole.

On ajoutera la I$^{re}$ & la II$^{e}$ équation, & l'on aura

$$\text{III.}\ \begin{array}{llll} zz & + \frac{rk}{a} z + uu & + \frac{qk}{a} u & + \frac{kkss}{aa} = 0, \\ & - \frac{nqk}{2aa} z & - \frac{nnk}{4aa} u & \\ & + \frac{n^3k}{8a^3} z & - ku & \\ & + \frac{nk}{2a} z & & \end{array}$$

qui eſt une équation à quel cercle on voudra à cauſe de l'indéterminée $k$, & même à un cercle donné, à cauſe de la même indéterminée.

83. 3°. Si l'on veut des équations à une ellipſe donnée, & à une hyperbole donnée par raport au diametre, il faut introduire une nouvelle indéterminée $m$, ce qui ſe fera en multipliant la I$^{re}$ équation par $\frac{m}{a}$, & l'on aura IV. $\frac{m}{a} zz + \frac{kmn}{2aa} z - \frac{km}{a} u = 0$.

On ajoutera cette IV$^{e}$ équation à la II$^{e}$, & l'on aura

$$\text{V.}\ \begin{array}{lll} uu + \frac{qk}{a} u + \frac{m}{a} zz & + \frac{kmn}{2aa} z & + \frac{kkss}{aa} = 0. \\ - \frac{nnk}{4aa} u & - \frac{nqk}{2aa} z & \\ - \frac{km}{a} u & + \frac{n^3k}{8a^3} z & \\ & + \frac{rk}{a} z & \end{array}$$

qui eſt une équation à une ellipſe qui peut être donnée à cauſe des deux indéterminées $k$ & $m$, dont $k$ ſervira à déterminer le diametre de cette équation à être le diametre donné de l'ellipſe donnée, & $m$ à déterminer le parametre de cette équation à être le parametre donné de l'ellipſe donnée.

On retranchera la IV$^{e}$ équation de la II$^{e}$, & l'on aura

$$\text{VI.}\ \begin{array}{lll} uu + \frac{qk}{a} u - \frac{m}{a} zz & - \frac{kmn}{2aa} z & + \frac{kkss}{aa} = 0, \\ - \frac{nnk}{4aa} u & - \frac{nqk}{2aa} z & \\ + \frac{km}{a} u & + \frac{n^3k}{8a^3} z & \\ & + \frac{rk}{a} z & \end{array}$$

qui eſt une équation à une hyperbole par raport au diametre, qui peut être donnée à cauſe de deux indéterminées $k$ & $m$.

Comme il n'y a point de terme $uz$ dans la V^e^ & la VI^e^ équation, $\frac{m}{a}$ eſt le raport du parametre au diametre*; par conſequent nommant $d$ le diametre de l'ellipſe & de l'hyperbole donnée, & $p$ le parametre, l'on aura toujours $m = \frac{ap}{d}$; ce qui détermine $m$ par raport à l'ellipſe donnée ou à l'hyperbole donnée. *439.

484. On peut trouver les racines de la propoſée par la V^e^ équation, après l'avoir déterminée à être l'équation de l'ellipſe donnée, & par la III^e^ qui eſt l'équation du cercle; mais alors le cercle ne peut plus être donné, parcequ'il ne reſte plus d'indéterminées pour déterminer l'équation III^e^ à être l'équation d'un tel cercle donné. On peut auſſi trouver ces mêmes racines par la VI^e^ équation après l'avoir déterminée à être l'équation de l'hyperbole donnée, & par la III^e^ équation qui eſt celle du cercle, mais qui ne peut plus être donné par la raiſon qu'on vient de dire. Il y a pourtant des cas quand le diametre de l'hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, dans leſquels, lorſqu'on veut déterminer $k$, on ne trouve que des valeurs imaginaires de $k$; ainſi dans ces cas de quelques équations particulieres qu'on peut trouver à réſoudre, on ne le peut pas par une telle hyperbole donnée avec le cercle; mais on le peut toujours avec une hyperbole donnée par raport aux aſymptotes, comme on le va expliquer, en faiſant remarquer auparavant que l'angle des ordonnées du cercle étant toujours droit, il faut auſſi toujours ſe ſervir de l'axe ou de l'un des axes dans la ſection conique à laquelle on joint le cercle pour réſoudre l'équation, & quand l'hyperbole entre les aſymptotes eſt arbitraire, & qu'on veut l'employer avec le cercle, il faut prendre l'équilatere à cauſe de l'angle droit que font les aſymptotes.

485. 4°. Si l'on veut réſoudre la propoſée par une hyperbole donnée entre les aſymptotes & par un cercle, il faut ſuppoſer la racine quarrée $\frac{kks}{a}$ du dernier terme de la transformée égale à $uz$, & l'on aura VII. $uz = \frac{kks}{a}$, ou $uz - \frac{kks}{a} = 0$, qui eſt une équation à l'hyperbole entre les aſymptotes, qui peut être donnée à cauſe de l'indéterminée $k$; car ſuppoſé

que l'équation de l'hyperbole donnée ſoit $uz = bb$, l'on aura $\frac{kks}{a} = bb$; par conſéquent $k = b\sqrt{\frac{a}{s}}$; ce qui détermine la valeur de *k* de maniere que l'équation indéterminée $uz - \frac{kks}{a} = 0$, devient l'équation particuliere de l'hyperbole donnée.

Pour trouver l'équation au cercle qui doit être joint à l'hyperbole donnée pour trouver les racines de la propoſée, il faut diſtinguer deux cas; le premier, quand l'hyperbole donnée eſt équilatere; le ſecond quand elle ne l'eſt pas; alors l'angle des aſymptotes eſt aigu ou obtus.

## PREMIER CAS.

### *Quand l'hyperbole donnée eſt équilatere.*

IL faut quarrer chaque membre de la VII^e^ équation, mettre dans la transformée au lieu du dernier terme $\frac{k^4ss}{aa}$ ſa valeur $uuzz$, diviſer enſuite l'équation par $zz$, & mettre dans le terme $\frac{k^3r}{az}$, la valeur de $z$ priſe de la VII^e^ équation $z = \frac{kks}{au}$; & l'on aura VIII. $zz + \frac{nk}{a}z + \frac{kkq}{a} + \frac{kr}{s}u + uu = 0$, qui eſt l'équation du cercle, qu'il faut joindre à l'hyperbole donnée pour trouver par ſes interſections avec l'hyperbole les racines de la transformée.

## SECOND CAS.

### *Quand l'angle des aſymptotes eſt aigu ou obtus.*

IL faut introduire une nouvelle indéterminée *m*, par le moyen de laquelle on pourra faire en ſorte que quoique l'équation exprime le raport du cercle comme dans la figure 29, à une droite *ON* qui ne fait pas un angle droit avec les ordonnées du cercle, cependant on puiſſe avoir une autre ligne *OM* parallele au diametre *Aa* du cercle à laquelle les ordonnées du cercle ſoient perpendiculaires. Pour introduire cette indeterminée *m* il faut multiplier la VII^e^ équation par $\frac{m}{a}$, & l'on aura IX. $\frac{m}{a}uz - \frac{mkks}{aa} = 0$. Il faut l'ajouter à la VIII^e^ quand l'angle des aſymptotes eſt aigu, & l'on aura X. $zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{kr}{s}u + \begin{array}{l}\frac{kkq}{a}\\ -\frac{mkks}{aa}\end{array} = 0$, qui eſt l'équation du cercle dont on a beſoin. Il faut retrancher la IX^e^ équation de la VIII^e^ quand l'angle des aſymptotes eſt obtus, &

l'on aura XI. $zz - \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{kr}{a}u + \frac{kkq}{a} + \frac{mkks}{aa} = 0$, qui eſt l'équation au cercle dont on a beſoin.

486. On remarquera que le dernier terme de la propoſée doit avoir + quand on ſe ſert de l'équation de l'hyperbole aux aſymptotes, afin que $uu$ ait + dans l'équation du cercle qu'il faut joindre à l'hyperbole pour la réſolution de l'équation ; on rèmarquera auſſi que quand le ſecond terme des équations à réſoudre eſt évanoui, il n'y a qu'à ſuppoſer dans toutes les équations les grandeurs où eſt $n$ égales à zero, & les mêmes équations ſerviront pour le cas où le ſecond terme eſt évanoui.

### *Avertiſſement.*

Pour faire clairement concevoir la conſtruction des équations à ceux qui commencent, on en mettra ici deux exemples.

## EXEMPLE I.

*La conſtruction des équations du troiſiéme & du quatriéme degré par le moyen d'une parabole donnée & d'un cercle, en ſe ſervant de la I<sup>re</sup> & de la III<sup>e</sup> équation du ſecond cas**. * 482.

487. POUR ne faire qu'un cas des équations du troiſiéme & du
quatriéme degré par la méthode de l'art. 477, on ſuppoſera
que $y^4 + ny^3 + aqyy + aary + aass = 0$, repréſente toute
équation qu'on veut réſoudre du troiſiéme ou du quatriéme
* 481. degré, & qu'en ſuppoſant $y = \frac{az}{k}$, $z^4 + \frac{nk}{a}z^3 + {}^*$ &c. en eſt
la transformée, & qu'elle eſt l'équation dont on fait la conſtruction, après laquelle conſtruction on aura les valeurs de $y$, en mettant celles de $z$ & de $k$ dans $y = \frac{az}{k}$.

FIGURE XXXVIII. Soit la parabole donnée $OAC$, dont l'axe eſt $AB$, le para-
metre $AP = a$, & l'équation $yy - ax = 0$ ; pour faire en
*482. ſorte que l'équation indéterminée à la parabole* $zz + \frac{nk}{2a}z$
$- ku = 0$, convienne à la parabole donnée, il faut s'ima-
FIGURE XXVII. giner que la parabole $AC$ ( fig. 27 ) eſt la donnée, que les $x$ ſe
prennent ſur $AB$, que $BC$, $BC$ ſont les ordonnées $y$, & $AP$ ($p$)
eſt le parametre $a$: Le terme $\frac{nk}{2a}z$ marque que l'équation $zz$
$+ \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, exprime le raport des points de la parabole donnée à une autre ligne que l'axe ; & comme $uz$ ne
s'y trouve pas, cela marque que cette ligne eſt parallele à
*438. l'axe* ; ainſi il faut s'imaginer que c'eſt $OM$ qui eſt $= u$, &
que

que $MN$ (g) eſt zero, & $ON$ (f) la même que $OM$ (h), que $MC = z$; & l'équation * $zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u - \frac{hp}{f}u + ll + ip = 0$, à cauſe de $g = 0$, & $h = f$ eſt $zz - 2lz - pu + ll + ip = 0$. Il faut ſuppoſer que c'eſt la même équation que $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, & que les termes correſpondans ſont égaux, ce qui donne $AL (l) = -\frac{nk}{4a}$. $p$ ou $a = k$, ce qui détermine $k$; le dernier terme $+ ll + ip = 0$, puiſque le terme connu eſt zero dans $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$; ainſi mettant la valeur de $ll$, l'on a $\frac{nnkk}{16aa} + ip = 0$; & mettant au lieu de $k$ ſa valeur $p$ ou $a$ ($p$ étant ici nommée $a$), l'on trouve $LO$ ou $Ai (i) = -\frac{nn}{16a}$, & $AL (l) = -\frac{n}{4}$; ainſi l'équation $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, devient l'équation de la parabole donnée ($A$) $zz + \frac{n}{2}z - au = 0$, en mettant au lieu de $k$ ſa valeur $a$; mais elle exprime le raport des points de la parabole à une ligne parallele à l'axe $AB$ qu'on trouve ainſi. Soit menée $AL$ perpendiculaire à l'axe $AB$, & égale à $\frac{n}{4}$, il faut la mener vers la gauche de l'axe, parcequ'elle eſt négative, & que l'on prend ici la droite de l'axe pour les ordonnées poſitives; ſi le ſecond terme de la transformée avoit été négatif, $\frac{n}{4}$ auroit été poſitive, & il auroit falu mener $AL$ vers la droite de l'axe. Il faut tracer par $L$, $LO$ parallele à l'axe qui rencontre la parabole en $O$; cette ligne ſera la ligne des coupées ($u$), & $LO$ ſera $= \frac{nn}{16a} = i$; car menant l'ordonnée $Ob$, le quarré de $Ob$ ou de $AL$ qui eſt $\frac{nn}{16}$ eſt égal au produit de la coupée $Ab$ ou $OL$ qui eſt $\frac{nn}{16a}$ par le parametre $a$. L'équation de la parabole donnée devient donc par raport à la ligne des coupées $OL$, $zz + \frac{n}{2}z - au = 0$. Les ordonnées $z$ ſont les perpendiculaires ſur $OL$ prolongées juſqu'à la parabole.

* 427.

FIGURE XXXVIII.

Il faut à preſent joindre à cette parabole le cercle de la III^e^ équation, laquelle eſt (en mettant au lieu de $k$ ſa valeur $a$) $zz + rz + uu + qu + ss = 0$.

$$\begin{array}{llll} & & & \\ B. & -\frac{nq}{2a}z & & -\frac{nn}{4a}u \\ & +\frac{n^3}{8aa}z & & -au \\ & +\frac{n}{2}z & & \end{array}$$

Il faut s'imaginer que le cercle de la figure 29 * eſt celui de cette équation, excepté que le terme $uz$ manquant, la ligne $MN$ (g) eſt zero, & $ON$ (f) ne fait qu'une même ligne

* 436.

*436. avec $OM$ ($b$) ; ainſi l'équation * $zz - 2lz + uu - 2iu + ll + ii - \frac{1}{4}dd = 0$, eſt la même que la précedente, & ſuppoſant leurs termes correſpondans égaux, on trouvera $OL$ ($l$) $= -\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}$. $LK$ ou $OH$ ($i$) $= -\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}$, & le demi diametre $Ka$ ($\frac{1}{2}d$) $= \sqrt{\overline{-\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}}^2 \; \overline{-\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}}^2 - ss}$.

FIGURE XXXVIII. Les coupées $u$ de la parabole donnée ayant leur origine au point $L$, & ſe prenant ſur $LO$, & les ordonnées commençant à la ligne $LO$ des abſciſſes, à laquelle elles ſont perpendiculaires comme $Obc$, il faut prendre ſur $LO$ la ligne $OD = -\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}$, laquelle $OD$ répond à $OH$ ($i$) de la fig. 29 quand cette quantité eſt poſitive, mais quand elle ſe trouve négative, il faut prendre $Od$ égale à cette quantité ſur $OL$ prolongée de l'autre côté. Il faut enſuite élever au point $D$ la perpendiculaire $DK = -\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}$, laquelle $DK$ répond à $HK$ ($l$) de la figure 29 ; mais quand elle eſt négative, il faut prendre $Dk$ égale à cette quantité de l'autre côté. Le point $K$ ou $k$ eſt le centre du cercle, qu'il faut décrire avec le rayon, qu'on nommera $\frac{1}{2}d$, égal à cette quantité $\sqrt{\overline{-\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}}^2 \; \overline{-\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}}^2 - ss}$, & tirer des points $C$, $C$, où il coupera la parabole des perpendiculaires ſur la ligne $LOD$ ; ces perpendiculaires ſeront les valeurs des racines de la transformée : car prenant la valeur de $u$ dans l'équation $A$ de la parabole donnée, & la ſubſtituant dans l'équation $B$ du cercle, on trouvera l'équation transformée propoſée à réſoudre.

## REMARQUES.

### I.

488. QUAND le ſecond terme manque dans la propoſée, la même conſtruction ſert en ſuppoſant $n = 0$ dans toutes les grandeurs où elle ſe trouve, & la conſtruction eſt bien plus facile, la parabole donnée n'ayant nul beſoin de préparation ; il faut ſeulement y joindre le cercle, mais on a voulu rendre la conſtruction generale.

## II.

489. Quand l'équation propoſée n'eſt que du troiſiéme degré, mais élevée au quatriéme degré, l'une des valeurs de $z$ ou l'une des $GC$ eſt toujours égale à la grandeur $a$ de l'équation $x \pm a = 0$, par laquelle on a multiplié la propoſée pour l'elever au quatriéme degré, & les autres valeurs de $z$ ſont les racines de la propoſée.

## III.

490. Quand on a tiré les lignes $OD$, $DK$ pour conſtruire le cercle, la ligne qui eſt la valeur du rayon ſe trouve comme à l'art. 465.

## IV.

491. Comme l'on a averti que les ſignes + des termes de la formule des équations du troiſiéme & du quatriéme degré repréſentoient les ſignes + ou — des équations particulieres qu'on aura à réſoudre, le Lecteur y doit faire attention, & il trouvera aiſément les ſignes convenables aux cas particuliers.

## EXEMPLE II.

*La conſtruction des équations du troiſiéme & du quatriéme degré par le moyen d'une hyperbole donnée entre les aſymptotes qui ne font pas un angle droit, & d'un cercle en ſe ſervant de la VII^e & de la X^e équation.*

492. L'EQUATION à réſoudre eſt la transformée $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 + \frac{kkq}{a} zz + \frac{k^3 r}{a} z + \frac{k^4 rs}{aa} = 0$, l'équation à l'hyperbole donnée eſt $uz = \frac{kks}{a}$; on ſuppoſe que les hyperboles oppoſées $CC$, $cc$ ſont données, c'eſt-à-dire, décrites ſur un plan avec leurs aſymptotes $AD$, $AB$, qui font un angle aigu; & que leur équation eſt $uz = bb$: Pour rendre l'équation $uz = \frac{kks}{a}$ propre à cette hyperbole, il faut ſuppoſer $\frac{kks}{a} = bb$, ce qui détermine la valeur de l'indéterminée $k$, qui devient $k = b\sqrt{\frac{a}{s}}$: Mais pour abreger le calcul on laiſſera $k$ par tout au lieu de ſa valeur qu'il ſera facile de ſubſtituer à ſa place. Il faut joindre à cette hyperbole tracée le cercle dont l'équation eſt $zz + \frac{m}{a} uz + \frac{nk}{a} z + uu + \frac{kr}{s} u + \frac{kkq}{a} - \frac{mkks}{aa} = 0$; enſuite menant des points où il coupera les hyperboles des paralleles à celle des aſymptotes ſur laquelle ſe prennent les $z$ de l'hyperbole, elles ſeront les valeurs de la propoſée.

FIGURE XXXIX.

Il faut pour décrire ce cercle s'imaginer que c'eſt celui de la figure 29, & que l'équation précedente eſt la même que

* 436. l'équation * $$\begin{array}{l} zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0\,; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{2hi}{f}u + ii \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}dd \end{array}$$

& ſuppoſer les termes correſpondans égaux; ainſi, 1°. $-\frac{2g}{f} = +\frac{m}{a}$. On ſuppoſera pour profiter de l'indéterminée $m$, qu'elle eſt égale à $g$ ($GF$ fig. 29); ainſi l'on aura $OF\ (f) = -2a$, & $FG\ (g) = m$; d'où il ſuit que $OG\ (h) = \sqrt{4aa - mm}$; on ſuppoſera pour abreger $h = \sqrt{4aa - mm} = c$; & comme ici $OF\ (f)$ ou $2a$ ſe trouve négative, & $FG\ (m)$ poſitive, $OG\ (-h$ ou $-c)$ ſera négative. 2°. $OL\ (l) = -\frac{nk}{a}$. 3°. Mettant dans $\frac{2gl - 2hi}{f} = \frac{kr}{s}$ les valeurs de $f, g, h, l$, on trouvera $OH$ ou $KL\ (i) = \frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}$. 4°. L'équation des derniers termes fera trouver le demi diametre $Ka\ (\frac{1}{2}d) = \sqrt{\frac{nnkk}{4aa} + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^{2} - \frac{akkq + mkks}{aa}}$.

FIGURE XXIX.

Il faut joindre à preſent le cercle à l'hyperbole donnée dans laquelle on ſuppoſe que les coupées $u$ ſe prennent ſur l'aſymptote $AB$, & que les ordonnées $z$ ſont paralleles à l'aſymptote $AD$: Pour le joindre, il faut que les coupées $u$ du cercle ſe prennent auſſi ſur la même $AB$, & que les ordonnées $z$ du cercle ſoient paralleles à $AD$; c'eſt pourquoi on prendra $AF = -2a$; on menera $FG$ parallele à $AD$, & du point $A$ on tirera $AG$ perpendiculaire à $AD$ & à $FG$; on nommera $FG\ (m)$; & c'eſt l'avantage qu'on tire de l'indéterminée $m$ qu'on a introduite, de ce qu'étant indéterminée, il eſt libre de la déterminer à la ligne $FG$ qui faſſe un angle droit avec $AG$, ce qui eſt neceſſaire pour le cercle où les ordonnées doivent être perpendiculaires à cette ligne $AG$ & paralleles à $FG$; on nommera $GA\ (c = \sqrt{4aa - mm})$; on prolongera $GA$ vers $N$. Le triangle rectangle $AFG$ répond au triangle $OFG$ de la figure 29, mais il eſt de l'autre côté à cauſe des quantités négatives. Pour trouver le centre du cercle, il faut prendre du point $A$ ſur l'aſymptote $AD$ parallele aux ordonnées $z$, $AL = -\frac{nk}{2a}$ du côté oppoſé à $AD$, parceque cette quantité eſt négative; cette ligne répond à $OL$ de la figure 29. Il faut enſuite mener par $L$ une parallele $LM$ à la ligne $GAN$; cette parallele $LM$ répond à la ligne

FIGURE XXXIX.

$LKB$a de la figure 29, & c'eſt la ligne du diametre du cercle laquelle paſſe par ſon centre : Pour avoir ce centre, il faut prendre ſur $LM$ la ligne $LK = + \frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}$ vers la droite de l'aſymptote $DAL$ où ſont les coupées $u$ poſitives quand $LK$ eſt poſitive du côté oppoſé quand elle eſt négative : cette ligne $LK$ répond à la ligne $LK$ de la figure 29, & le point $K$ eſt le centre du cercle. Enfin de ce centre $K$ avec le rayon $\sqrt{\frac{nnkk}{4aa} + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 - \frac{akkq + mkks}{aa}}$, dont on trouvera la longueur comme ci-deſſus*; on tracera un cercle qui coupera les hyperboles données en des points, deſquels menant les ordonnées $BC$ ($z$) à l'aſymptote $AB$, elles ſeront les racines de la transformée propoſée à réſoudre; les ordonnées de l'hyperbole $CC$ ſeront les racines poſitives, & les ordonnées de l'oppoſée ſeront les négatives : voici comme on le démontre. * 465.

En concevant le rayon $KC$, l'on aura par la proprieté du cercle, ou à cauſe du triangle rectangle $KMC$, $\overline{MC}^2 + \overline{KM}^2 = \overline{KC}^2$. Mais $MC = BC\,(z) + BN\,(+\frac{m}{2a}u) + NM\,(+\frac{nk}{2a})$; & $KM = + LK\,(+\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}) - LM\,(-\frac{cu}{2a})$; par conſequent $\overline{MC}^2 + \overline{KM}^2 = zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + \frac{mm}{4aa}uu + \frac{mnk}{2aa}u + \frac{nnkk}{4aa} + (\frac{ccuu}{4aa} = + \frac{4aa - mm}{4aa} \times uu =)\, uu - \frac{mm}{4aa}uu - \frac{mnk}{2aa}u + \frac{kr}{s}u + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 = \frac{nnkk}{4aa} + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 - \frac{akkq + mkks}{aa}$, qui ſe réduit à $zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{kr}{s}u + \frac{kkq}{a} - \frac{mkks}{aa} = 0$, qui eſt l'équation X du cercle qu'on a conſtruite. Mettant dans cette équation la valeur de $u$ priſe de l'équation VII de l'hyperbole, qui eſt $u = \frac{kks}{az}$, & celle de $uu = \frac{k^4ss}{aazz}$, l'on trouve exactement la transformée $z^4 + \frac{nk}{a}z^3$, &c.

3. La conſtruction eſt à peu près ſemblable, quand l'angle des aſymptotes eſt obtus. La plus facile de toutes eſt quand cet angle eſt droit comme ci-deſſus art. 464. On fera ſur cette conſtruction des remarques ſemblables à celles qu'on a faites ſur la précedente.

Il eſt à propos de remarquer auſſi que quand on réſout en particulier un Problême de Geometrie, dont l'équation déterminée monte au troiſiéme ou au quatriéme degré ; on trouve ordinairement avant d'arriver à cette équation déterminée deux équations particulieres du ſecond degré qui ont les deux inconnues $u$ & $z$, & qui de plus contiennent toutes les connues du Problême, & c'eſt en ſe ſervant de ces deux équations particulieres pour faire évanouir l'une des inconnues $u$, qu'on arrive à l'équation déterminée, alors on peut conſtruire le Problême par le moyen de ces deux équations particulieres, c'eſt-à-dire, qu'en conſtruiſant les deux ſections coniques de ces deux équations, & les uniſſant enſemble, les points d'interſection donneront les lignes qui ſatisfont au Problême. Mais quand l'une de ces deux équations particulieres n'eſt pas celle du cercle qui eſt plus facile à decrire que les autres ſections coniques ; on peut préferer la méthode qu'on a donnée où le cercle eſt employé.

## II.

## *La méthode pour trouver les équations des courbes qui ſervent à conſtruire les équations déterminées qui ſurpaſſent le 4^e^ degré.*

494. LA méthode eſt ſemblable à celle que l'on a donnée pour les équations déterminées du troiſiéme & du quatriéme degré ; il faut ſeulement faire évanouir le ſecond terme des équations à réſoudre. On peut ſe ſervir de la premiere parabole cubique $y^3 = aax$ pour les équations du $5^e$, $6^e$, $7^e$, $8^e$ & $9^e$ degré, comme on s'eſt ſervi de la parabole du premier genre pour le $3^e$ & $4^e$ degré, & elle fera trouver une ou pluſieurs équations des courbes du ſecond genre, dont l'une étant jointe avec la parabole cubique, la coupera en des points, d'où menant les ordonnées $y$ de la parabole cubique, elles ſeront les racines de l'équation propoſée. Comme l'on n'entrera pas ici dans le détail comme l'on a fait pour les équations du $3^e$ & du $4^e$ degré, & qu'on ſera obligé d'employer pluſieurs lettres qui repréſentent les coëficiens connus, on ſe ſervira pour cela des lettres $i, k, l, m, n, p, q, r, s, t$; & l'on employera $a$ pour tenir lieu d'unité, & pour rendre tous les termes homogenes.

La propoſée eſt par exemple $y^9 + aly^7 + a^2my^6 + a^3ny^5 + a^4py^4 + \begin{array}{l} a^5qy^3 \\ + a^5ky^3 \end{array} + a^6ryy + a^7sy + a^8t = 0$. On ſuppoſera l'équation $y^3 = aax$ ; on mettra au lieu de $y$ ſa valeur, excepté dans l'une des grandeurs du terme $y^3$, & l'on aura $x^3 + \frac{l}{a}yxx + mxx + \frac{n}{a}yyx + pyx + \frac{q}{a}y^3 + akx + ryy + asy + aat = 0$, qui eſt une équation à une courbe du ſecond genre, qu'on peut décrire par points, en ſuppoſant pour trouver chaque point l'une des deux inconnues égales à l'unité, à deux, trois, quatre, &c.

Si l'on mettoit au lieu de $y^3$ ſa valeur $aax$ dans le terme $\frac{q}{a}y^3$, on auroit une autre courbe du ſecond genre très-facile à décrire par points, puiſque l'inconnue $y$ ne monteroit qu'au ſecond degré.

Si la propoſée eſt du douziéme degré comme $y^{12} * + aiy^{10} + aaky^9 +$ &c. en ſuppoſant l'équation $y^3 = aax$, on trouvera, en mettant partout $aax$ au lieu de $y^3$, une équation d'une courbe du troiſiéme genre, qui étant jointe avec la parabole cubique, fera trouver les racines de la propoſée.

On pourra dans les équations des degrés plus élevés, employer les équations à la parabole d'un genre auſſi plus élevé, comme $y^4 = a^3x$, $y^5 = a^4x$, &c.

On pourroit au lieu de l'équation à la parabole, employer l'équation à une eſpece d'hyperbole du ſecond genre, du troiſiéme genre, &c. comme $yyx = a^3$, $y^3x = a^4$, &c.

Enfin l'on pourroit même employer pour premiere équation celle d'une ſection conique; mais en ſubſtituant la valeur de $y$ en $x$ priſe de cette équation, on trouveroit celle d'une courbe d'un genre plus élevé, laquelle étant jointe à la ſection conique, feroit trouver les racines de l'équation propoſée.

---

## *Uſage des courbes pour la réſolution des Problêmes des ſciences Phyſico-mathematiques.*

### USAGE DE LA PARABOLE.

95. LA courbe que décrit une bombe lorſqu'elle ſort du mortier, quelque inclinaiſon que l'on donne au mortier, eſt une parabole. Car ſi l'on imagine dans la figure 8$^e$, que la verticale $HA$ prolongée au-deſſous de $A$ eſt le diametre; que les points $N, Q, K$ dans les lignes $MO$, $PR$, $SK$ ſont ceux par où paſſe la bombe, & par conſequent ceux de la courbe qu'elle décrit; que les lignes menées de chacun de ces points au prolongement de $HA$, qui ſoient paralleles à la direction du jet $ACMPS$, ſont les ordonnées: il ſuit de ce qu'on a démontré art. 329, ſecond cas, & 330, ſecond cas, que le FIG. VIII.

quarré de *AM* égale à l'ordonnée du point *N*, eſt au quarré de *AP* égale à l'ordonnée du point *Q*, comme *MN* égale à la partie du diametre ou à la coupée qui répond à l'ordonnee du point *N*, eſt à *PQ* égale à la partie du diametre qui répond au point *Q*; & comme il eſt évident par les art. 329 & 330, ſecond cas, que cette proprieté convient à tous les points de la courbe que décrit la bombe, & que c'eſt la pro-
* 368. prieté de la parabole,* cette courbe eſt une parabole : ainſi nommant *MN* ($x$), *PQ* ($u$), *AM* ($y$), *AP* ($z$), on a cette proportion de la parabole $yy . zz :: x . u$.

*Avertiſſement.*

On déduit ordinairement la réſolution des Problêmes de l'art de jetter les bombes des proprietés de la parabole; mais comme l'on a donné cette réſolution ſans l'employer, il eſt inutile de s'y arrêter ici : on mettra au lieu de cela les deux Problêmes ſuivans.

## PROBLÊME I.

496. *TROUVER l'équation de la courbe qui paſſe par les ſommets*
Fig. VIII. *des axes de toutes les paraboles décrites par une bombe jettée par une même force de poudre, en donnant au mortier toutes les inclinaiſons poſſibles des cordes* AC, AE, AG, &c.

IL faut s'imaginer que l'horizontale *AOK* & la verticale *HA* ſont les lignes des coordonnées de cette courbe que l'on cherche; on prendra les coupées ſur *AH*, ainſi les *AB*, *AD*, *AF*, & leurs paralleles comme *ON*, &c. ſeront les $x$; & les ordonnées ſur *AOK*, ainſi *AO* & les paralleles à *AO* ſeront les $y$; la force du jet *HA* eſt donnée, & on ſuppoſe $HA = d$. Il eſt évident que le point le plus élevé de chaque
* 324. jet, comme le point *N** du jet par *AC*, eſt le ſommet de la parabole de ce jet. Or par l'art. 324 l'on a $y = 2\sqrt{dx - xx}$, ce qui donne $yy - 4dx + 4xx = 0$, qui eſt l'équation qui convient à tous les points des ſommets des paraboles d'une même force de poudre, c'eſt-à-dire à tous les points les plus élevés de ces paraboles, puiſque la changeante $y$ marque l'éloignement *AO* où eſt chacun de l'axe *HA*, & la changeante $x$ exprime la hauteur *AB*, *AD*, &c. ſur l'axe *AH* de chacun de ces points. Mais $yy - 4dx + 4xx = 0$ eſt l'équation

l'équation d'une ellipſe *; ainſi la courbe qui paſſe par tous ces ſommets eſt une ellipſe. *Ce qu'il falloit trouver.* *377.

## PROBLÊME II.

97. *TROUVER l'équation de la courbe qui touche toutes les paraboles d'une même force de poudre.*

POUR réſoudre ce Problême, il ſuffit de conſiderer deux de ces paraboles $AMC$, $AmC$, dont les axes $OM$, $om$ ont leurs ſommets $M$, $m$ par le Problême précedent dans la même ellipſe $AMmH$; ces deux paraboles ſe coupent toujours en un point $C$, lequel point $C$ eſt toujours au-dedans de la courbe touchante, excepté ce ſeul cas, qui eſt que ce point d'interſection $C$ eſt dans la touchante, lorſque les deux paraboles $AMC$, $AmC$ deviennent une ſeule & même parabole, c'eſt-à-dire, quand les deux axes $OM$, $om$, deviennent un même axe $OM$, & par conſequent les deux ordonnées $AO$, $Ao$ deviennent une même ordonnée. Ces choſes ſuppoſées: Fig. XL.

Soit la connue $AH = d$, l'ordonnée $AO$, $Ao = y$, la coupée ou la partie de l'axe $OM$, $om$, depuis le ſommet, $= x$ A. $yy - 4dx + 4xx = 0$ eſt l'équation commune aux ſommets de toutes les paraboles par le Problême précedent, ſuppoſant à preſent que le point d'interſection $C$ eſt dans la courbe touchante; $AB$, qu'on nommera $u$, ſera une ordonnée de la courbe touchante, & $BC$, qu'on nommera $z$, en ſera la coordonnée; & l'on aura par la proprieté de la parabole $AMC$ cette proportion *, le quarré de $AO$ ($yy$) eſt à la partie de l'axe $OM$ ($x$), comme le quarré de $CN$ ou $OB$ ($u - y$), qui eſt $uu - 2uy + yy$, eſt à la partie correſpondante de l'axe $MN = MO - CB = x - z$; ce qui donne l'équation $xyy - zyy = uux - 2uyx + xyy$, qui ſe réduit à B. $zyy - 2uxy + uux = 0$. Cette équation convient au point d'interſection $C$ de deux paraboles quelconques, comme $AMC$, $AmC$, dont les axes & les ordonnées aux axes ſont ſimplement paralleles; faiſant évanouir l'une des deux coordonnées $x$ ou $y$ des deux paraboles par le moyen des deux équations A & B, par exemple prenant la valeur de $x = \frac{zyy}{2uy - uu}$ dans l'équation B, & la ſubſtituant dans l'équa- *368.

tion A, on trouve l'équation D. $yy - \frac{u^3y - 2dzuy + dzuu + \frac{1}{4}u^4}{uu + zz} = 0$, laquelle équation détermine le point d'interſection *C*, (qui par l'équation B étoit le point d'interſection de deux paraboles quelconques, dont les axes & les ordonnées aux axes étoient ſimplement paralleles) à être le point d'interſection *C* de deux paraboles quelconques d'un même jet, c'eſt-à-dire de deux paraboles quelconques parmi celles dont les ſommets des axes ſont tous dans la même ellipſe *AMmH*.

Pour déterminer à preſent l'équation D à exprimer le point d'interſection *C* de deux de ces paraboles d'un même jet, qui ont leur point d'interſection *C* dans la courbe touchante qu'on cherche, il ne faut plus que ſuppoſer que ces deux paraboles *AMC*, *AmC* deviennent une même parabole; ce qui ſe fera en ſuppoſant que *AO* ($y$) a deux valeurs égales ou deux fois la même valeur dans l'équation D. Et *75. alors multipliant * l'équation D par la progreſſion arithmetique 2, 1, 0, on trouvera $y = + \frac{\frac{1}{2}u^3 + dzu}{uu + zz}$. Mettant cette valeur de $y$ & ſon quarré à la place de $y$ & de $yy$ dans l'équation D, elle deviendra l'équation E. $uu + 4dz - 4dd = 0$, qui eſt l'équation de tous les points d'interſection *C* de toutes les paraboles d'une même force de poudre priſes deux à deux, qui ſe coupant dans un point *C* de la courbe touchante qu'on cherche, deviennent deux à deux une même parabole, & font par là que l'équation E exprime le raport de chaque point *C* de cette courbe touchante par le moyen des deux coordonnées changeantes *AB* ($u$) & *BC* ($z$). Et comme l'équation E eſt celle d'une parabole, on voit que la courbe touchante eſt une parabole, dont les Lecteurs trouveront aiſément le parametre. *Ce qu'il falloit trouver.*

## *Uſage de l'Ellipſe & de l'Hyperbole.*

## PROBLÊME.

FIG. XXV. & XXVI. 498. *TROUVER la nature de la courbe* AC, *dont l'axe eſt la ligne* AB, *qui ſoit telle que ſi l'on donne à la ſurface d'un morceau de verre la courbe* AC, *il raſſemble en un ſeul point* f ou φ *tous les rayons de lumiere comme* EC, *qui ſeront paralleles à l'axe* AB.

## SUPPOSITION.

ON ſuppoſe, 1°. qu'un rayon de lumiere comme $EC$ paſſant d'un milieu dans un autre different comme de l'air dans le verre, s'il eſt perpendiculaire à la ſurface des deux milieux, il continue dans le ſecond ſon chemin dans la même ligne droite; mais que s'il eſt oblique à la ſurface des deux milieux, il ne continue pas ſon chemin dans la même ligne droite, mais qu'il ſe rompt à l'entrée du ſecond milieu, & qu'il continue enſuite ſon chemin dans une autre ligne droite $Cf$ ou $C\varphi$. 2°. Que ſi l'on tire une perpendiculaire $pCP$ à la ſurface $CS$ qui ſepare les deux milieux, (quand la ſurface eſt courbe, la perpendiculaire à la tangente de la courbe au point $C$ où paſſe le rayon de lumiere, eſt la perpendiculaire à la ſurface des deux milieux en ce point $C$ qui eſt le point touchant,) l'angle $ECp$ que forme le rayon $EC$ avec la partie $Cp$ de la perpendiculaire qui eſt dans le premier milieu, s'appelle l'*angle d'incidence*, & l'angle $fCP$ ou $\varphi CP$ que forme le rayon rompu $Cf$ ou $C\varphi$ dans le ſecond milieu avec la perpendiculaire $CP$, s'appelle l'*angle de refraction*. 3°. Que quand pluſieurs rayons de lumiere paſſent ainſi obliquement d'un milieu dans un autre, c'eſt une loi prouvée par l'experience, & dont on donne la raiſon dans la Dioptrique & dans la Phyſique, que le raport du ſinus de l'angle d'incidence & du ſinus de l'angle de refraction eſt le même par raport à tous les rayons, quelque difference qu'il y ait entre les angles d'incidence; c'eſt ce raport conſtant qu'on appelle *le raport de la refraction*. Quand les rayons paſſent de l'air dans le verre, ce raport eſt $\frac{3}{2}$; & quand ils paſſent du verre dans l'air, ce raport eſt $\frac{2}{3}$. 4°. Que dans les courbes $AC$ le rayon incident eſt $EC$; la tangente au point $C$ eſt $CS$; la perpendiculaire à ce point eſt $pCP$ qui rencontre l'axe $AB$ en $P$ ou $p$; le rayon rompu eſt $Cf$ ou $C\varphi$; par conſequent l'angle d'incidence eſt $ECp =$ (à cauſe des paralleles $EC$, $AB$) à l'angle $CPA$ ou $CpA$, qui (ou ſon complement) dans le triangle $CPf$ ou $Cp\varphi$, a pour côté oppoſé le rayon rompu $Cf$ ou $C\varphi$; & l'angle de refraction eſt $PCf$ ou $pC\varphi$, qui dans le même triangle $CPf$ ou $Cp\varphi$ a pour côté oppoſé la ligne $Pf$ ou $p\varphi$; ainſi le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle de refraction, comme le rayon rompu $Cf$ ou $C\varphi$ eſt à la diſtance $fP$ ou $\varphi p$,

FIG. XXV. & XXVI.

où eſt le point $f$ ou $\varphi$, auquel ſe raſſemblent les rayons, de la perpendiculaire $PCp$ ou $pCP$; ainſi quand les rayons $CE$ paralleles à l'axe $AB$, paſſent de l'air dans le verre, comme on le ſuppoſe dans la figure 25, $Cf . fP :: 3 . 2$; quand ils paſſent du verre dans l'air, comme on le ſuppoſe (fig. 26), $p\varphi . C\varphi :: 2 . 3$. Ces choſes ſuppoſées, voici l'état de la queſtion.

Il s'agit de trouver la courbe $AC$ (fig. 25 & 26), qui ſoit telle que menant des lignes droites $Cf$, $C\varphi$ de tous les points $C$ de la courbe à un point fixe $f$ ou $\varphi$ de l'axe $AB$, & menant auſſi par tous les points $C$ de la courbe des perpendiculaires $pCP$, à la tangente de ces points $C$, juſqu'à l'axe en $P$ ou $p$, le raport de chaque $Cf$ ou $C\varphi$ à la diſtance correſpondante $fP$ ou $\varphi p$ ſoit toujours le même raport, & qu'on puiſſe le rendre égal au raport $\frac{3}{2}$ fig. 25, $\frac{2}{3}$ fig. 26.

## RESOLUTION.

LEs figures 25 & 26 font voir d'une maniere ſi claire & ſi courte que la courbe $AC$ doit être une ellipſe quand les rayons paſſent de l'air dans le verre, & une hyperbole quand ils paſſent du verre dans l'air, qu'il eſt inutile de chercher ces courbes par l'Analyſe. Car $MF$ & $CP$ ou $Cp$ étant ſup-
Fig. XXV. poſées perpendiculaires à la tangente $CS$, & par conſequent
& XXVI. étant paralleles, l'axe $Aa$ ou $A\alpha$, ou la ligne égale à l'axe
*421. & 422. * $Mf$ ou $M\varphi$ eſt à la diſtance des foyers $Ff$ ou $F\varphi$, comme chaque rayon rompu $Cf$ ou $C\varphi$ eſt à $Pf$ ou $p\varphi$ diſtance où eſt le foyer $f$ ou $\varphi$ de la perpendiculaire $CP$ ou $Cp$; d'où l'on voit qu'en faiſant une ellipſe dont l'axe $Aa$ ſoit à la diſtance des foyers $Ff$ comme 3 à 2, & une hyperbole dont l'axe $A\alpha$ ſoit à la diſtance des foyers $F\varphi$ comme 2 à 3, ces deux courbes ſeront celles que l'on cherche.

Fig. XXV. C'eſt pourquoi ſi après avoir tracé une ellipſe $AC$ dont l'axe $Aa$ ſoit à la diſtance des foyers $Ff$ comme 3 à 2, on décrit un arc de cercle du centre $f$ avec quel rayon on voudra $fC$ moindre que $fA$, qui rencontre l'ellipſe aux deux points $C$, $c$, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'axe, & que l'on faſſe tourner la figure compriſe entre l'arc de l'ellipſe & l'arc du cercle autour de l'axe $AB$, elle décrira la figure convexe d'un côté & concave de l'autre qu'il faut donner à un verre, afin que les rayons paralleles à l'axe $AB$ comme $EC$, tombant de l'air ſur la ſurface convexe *CA*, ils aillent tous ſe raſſembler au foyer *f*.

Après avoir de même tracé une hyperbole *AC* (fig. 26), dont la diſtance des foyers *F*$\varphi$ ſoit à l'axe *A*$\alpha$ comme 3 à 2, ſi l'on tire une perpendiculaire *CB* à l'axe *AB*, & qu'on faſſe tourner la figure *ACB* autour de l'axe *AB*, elle décrira la figure qu'il faut donner à un morceau de verre, afin que les rayons *EC* paralleles à l'axe qui entreront dans le verre au travers de la ligne droite *BC* ſans y ſouffrir de refraction lui étant perpendiculaires, ſoient détournés par la refraction qu'ils ſouffriront au ſortir du verre par la ſurface hyperbolique du verre aux points *C*, *c*, de maniere qu'ils aillent tous ſe raſſembler au foyer $\varphi$. *Ce qu'il falloit trouver.*

---

## *Uſage de la Cycloïde pour donner de la regularité aux Horloges.*

9. *TROUVER quelle eſt la nature de la courbe* DPGA *que le centre de peſanteur* P *d'un pendule ſimple* SP, *ou le centre d'oſcillation* P *d'un pendule* SP *qu'on ſuppoſe compoſé, doit décrire par ſa peſanteur, afin que chacune de ſes vibrations ou chacune des deſcentes de ce centre depuis quel point on voudra de la courbe, comme du point* D, *ou du point* P, *ou du point* G, *ou de tout autre point juſqu'au point le plus bas* A, *ſe faſſe toujours dans un temps égal.* FIG. XLI.

### SUPPOSITIONS.

### I.

ON ſuppoſe que quand un corps peſant deſcend par le mouvement de ſa ſeule peſanteur, ſoit par une ligne verticale *FA*, ſoit par un plan incliné comme *GA* terminé par les mêmes horizontales *FG*, *AL*, la viteſſe qu'il aura acquiſe par la deſcente inclinée *GA*, ſera égale à la viteſſe qu'il auroit acquiſe par la deſcente *FA* terminée par les mêmes horizontales *FG*, *AL*. Ainſi la viteſſe acquiſe par *FA* étant $= \sqrt{FA}$*, la viteſſe acquiſe par *GA* eſt auſſi égale à $\sqrt{FA}$. Mais le temps eſt different; car le temps *T* par $FA = \frac{2FA}{\sqrt{FA}}$*, & le temps *t* par $GA = \frac{2GA}{\sqrt{FA}}$*; ainſi *T* . *t* :: *FA* . *GA*. D'où FIG. VIII. * 308. * 309. & 310.

l'on déduit aiſément que ſi differens corps peſans deſcendoient par pluſieurs plans differemment inclinés qui fuſſent compris entre les mêmes horizontales, les temps employés à deſcendre par ces plans differens ſeroient proportionels aux longueurs de ces plans.

D'où il ſuit que les temps des deſcentes d'un corps peſant tombant librement par les cordes *GA*, *EA*, *CA*, &c. d'un cercle dont le diametre *AH* eſt vertical, ſont tous égaux entr'eux, & égaux chacun au temps de la deſcente par le diametre *HA*. Car nommant la conſtante *HA* ($d$), chacune des changeantes *AF*, *AD*, *AB*, &c. ($x$), l'on aura chacune
* 288. des cordes *GA*, *EA*, *CA*, &c. $= \sqrt{dx}$*; les temps des deſ-
* 301. & centes par ces cordes ſeront égaux chacun * à $\frac{2\sqrt{dx}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{d}$
310. $= \frac{2d}{\sqrt{d}}$, qui eſt le temps de la deſcente par le diametre *HA*.

### I I.

FIG. XLI. Si un même corps peſant deſcendoit de ſuite par pluſieurs plans inclinés contigus qui fiſſent les uns avec les autres des angles qui ne differaſſent de la ligne droite ou de 180 degrés que par des angles infiniment petits, comme ſont les côtés infiniment petits dont on conçoit que ſont formées les lignes courbes, la viteſſe acquiſe par la deſcente de ces plans comme par *DPG* (fig. 41), eſt auſſi égale à la viteſſe acquiſe par la deſcente de la verticale *EM* compriſe entre les mêmes horizontales *ED*, *MG*; ainſi la viteſſe par $DPG = \sqrt{EM}$; la viteſſe acquiſe par $DPGA = \sqrt{EA}$; & le temps $T$ de la
* 301. & deſcente par *DPG* eſt $\frac{2 \times DPG}{\sqrt{EM}}$*; le temps $t$ de la deſcente par
310. *DPA* eſt $\frac{2 \times DPA}{\sqrt{EA}}$. Ces choſes ſuppoſées, voici la réſolution.

## RESOLUTION.

CONCEVANT l'origine de la courbe au point *A*, on marquera chacun des arcs *AG*, *AP*, *AD*, &c. qui doivent être parcourus dans un même temps par la changeante $s$; & ce temps égal & conſtant de la deſcente par chaque $s$ ſera nommé $T$; & chacune des verticales *AM*, *AB*, *AE*, &c. correſpondante à chaque $s$, s'exprimera par la changeante $x$. Or la viteſſe acquiſe par la deſcente de chaque $s$ eſt égale
* 308. à $\sqrt{x}$*, ainſi le temps $T$ de la deſcente par chaque $s$ ſera $\frac{2s}{\sqrt{x}}$; ou bien, parceque cette expreſſion convient au temps de

chacun des arcs, on peut la diviſer par 2, & la marquer ainſi $\frac{s}{\sqrt{x}}$; cette expreſſion du temps devant être la même pour chacun des arcs, puiſque les temps pendant leſquels ils doivent être parcourus ſont égaux, eſt égale à une grandeur conſtante; on peut donc la ſuppoſer égale à la grandeur conſtante $2\sqrt{a}$; par conſequent l'on aura $\frac{s}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{a}$, qui ſe réduit à $s = 2\sqrt{ax}$, qui eſt l'équation de la courbe que l'on cherche. Or c'eſt l'équation de la cycloïde*. Ainſi ſi l'on *456. fait décrire au centre de peſanteur ou d'oſcillation des arcs de cycloïde, les durées des vibrations du pendule ſeront toujours égales, ſoit que le poids de l'horloge agiſſant plus fort, faſſe décrire de plus grands arcs de cycloïde, ſoit que le poids de l'horloge agiſſant moins fort, en faſſe décrire de plus petits.

D'où l'on voit que pour donner une entiere juſteſſe aux horloges, il ne reſte plus qu'à trouver le moyen de faire décrire au centre de peſanteur ou d'oſcillation du pendule, des arcs de cycloïde; ce que l'on enſeignera dans la ſeconde Partie.

### *Avertiſſement.*

Les courbes ont une infinité d'autres beaux uſages, mais ce que l'on en a dit ſuffit pour faire voir aux Lecteurs comment l'Analyſe les fait découvrir par le calcul ordinaire de l'Algebre, quand cela eſt poſſible.

* * *

# SECONDE PARTIE.

## *Uſage de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de la Geometrie & des ſciences Phyſico-mathematiques, en employant le calcul differentiel.*

## PREMIERE SECTION.

### *Où l'on explique le calcul differentiel & les principes dont il dépend.*

### PRINCIPE DU CALCUL DIFFERENTIEL PRIS DES ANCIENS GEOMETRES.

500. C'EST une choſe ordinaire aux anciens Geometres de regarder deux quantités comme étant égales quand elles different moins entr'elles qu'aucune grandeur finie & déterminée, tant petite qu'elle puiſſe être, en demeurant finie ou bornée.

C'eſt ſur ce principe qu'en concevant des polygones inſcrits & circonſcrits au cercle, dont les côtés allant en diminuant de plus en plus à l'infini, font que le perimetre & l'aire de ceux de ces polygones qui ont les côtés les plus petits, approchent le plus du perimetre & de l'aire du cercle ; ils ſuppoſoient qu'on pouvoit concevoir un polygone inſcrit & un autre circonſcrit de tant de côtés, & par conſequent de côtés ſi petits, que la difference entre ces deux polygones, & à plus forte raiſon la difference de l'un & de l'autre d'avec le cercle, fût moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée; & ils regardoient le dernier, pour ainſi dire, de ces polygones inſcrits & le dernier de ces circonſcrits comme égaux entr'eux & au cercle ; ce qu'ils n'auroient pû faire qu'en concevant les côtés de chacun de ces polygones comme infiniment petits, & comme y en ayant une infinité ; puiſque pendant qu'ils demeureroient finis & déterminés, la difference du polygone inſcrit & du circonſcrit ſeroit finie, & de même leur difference d'avec le cercle ſeroit auſſi finie, & l'on ne pourroit pas ſuppoſer ces trois figures égales, comme il leur étoit neceſſaire de le faire, afin que leurs preuves fuſſent démonſtratives. C'eſt par ce principe que ſont démontrées la plûpart des propoſitions du 12e *Livre d'Euclide*.

On s'eſt heureuſement aviſé de notre temps de donner des expreſſions propres à ces differences infiniment petites, leſquelles differences pendant qu'elles ſont réelles ont des raports entr'elles très-réels, & qui ſont égaux aux raports des grandeurs finies, par le moyen deſquelles ces raports des differences peuvent être exprimés. La méthode de trouver les expreſſions des differences & de leurs raports, eſt ce qu'on appelle *le calcul des differences*, ou *le calcul differentiel*; par le moyen duquel on trouve d'une maniere courte & facile une infinité de raports entre les lignes droites & courbes geometriques & méchaniques qu'on auroit bien de la peine à trouver par d'autres voyes; & comme les grandeurs entieres que l'on peut comparer ont des differences qui ont des expreſſions qui les leur rendent propres, on peut retourner de ces differences aux grandeurs entieres qu'on appelle *ſommes* ou *integrales*, & les trouver par le moyen de leurs differences: Ce retour des differences aux grandeurs integrales dont elles ſont les differences, eſt ce qu'on nomme *le calcul integral*. Par le calcul differentiel on trouve les expreſſions des differences des grandeurs integrales, & l'on fait ſur ces expreſſions les operations que fait l'Algebre ſur les grandeurs algebriques; par le calcul integral on trouve les expreſſions des grandeurs integrales dont on a l'expreſſion des differences.

## UTILITÉS DE CES CALCULS.

DEPUIS qu'on a employé ces calculs dans l'uſage de l'Analyſe, on a non ſeulement réſolu d'une maniere plus courte & plus aiſée la plûpart des plus difficiles Problêmes qu'on avoit réſolus par le calcul ordinaire; mais on a fait des découvertes ſurprenantes dans la Geometrie compoſée & dans les ſciences phyſico-mathematiques, comme on le peut voir dans *les Memoires de l'Academie*, dans *les Actes de Leipſic*, dans *l'Analyſe des Infiniment Petits*, dans *les Ouvrages de M. Newton*, & dans tous les autres où l'on employe ces calculs.

On applique ces calculs aux courbes méchaniques, comme aux courbes geometriques, & l'on découvre par leur moyen les proprietés des unes & des autres avec la même facilité.

Il n'eſt point neceſſaire dans ces calculs d'ôter les ſignes radicaux, ce qui ôte l'un des plus grands embarras du calcul ordinaire, outre que ces calculs ſont ordinairement plus courts d'eux-mêmes que ne ſont les ordinaires.

Ces calculs ſuivent la nature dans la réſolution des Problêmes phyſico-mathematiques, laquelle n'agiſſant que par le mouvement & les figures, commence & agit ordinairement par des degrés infiniment petits à chaque inſtant du temps, chacun de ces inſtans étant auſſi infiniment petit.

Enfin on réduit par ces calculs la Geometrie compoſée ou la Geometrie de toutes les courbes à la Geometrie ſimple des figures rectilignes, ce qui la réduit à toute la ſimplicité poſſible, & ce qui met les Geometres en état de la porter à toute la perfection poſſible.

### *Le principe du calcul differentiel ſert à démontrer ſans calcul pluſieurs propoſitions de la Geometrie compoſée.*

CE principe que dans la comparaiſon des grandeurs finies on peut regarder des differences qu'elles ont entr'elles, plus petites qu'aucune grandeur déterminée, ou infiniment petites (on n'entend que la même choſe par ces deux expreſſions); ce principe, dis-je, ſuffit pour démontrer ſans calcul & d'une maniere très-ſimple pluſieurs propoſitions de la Geometrie compoſée, que l'on ne démontre que par de longs circuits. En voici quelques exemples ſur la cycloïde.

503. FIGURE XXXV. Si l'on mene par un point quelconque $f$ de la cycloïde l'ordonnée $fFB$ parallele à la baſe $DE$ qui rencontre le cercle generateur en $F$, qu'on tire la corde $FA$, & qu'on mene par $f$ la droite $fa$ parallele à la corde $FA$, $fa$ ſera la tangente au point $f$; Car en mettant le cercle generateur dans la ſituation $eaf$, où ſon point $f$ décrit la partie $f$ infiniment petite de la cycloïde, il eſt évident qu'en menant la corde $fe$, on peut concevoir que cette corde $fe$ tournant à cet inſtant ſur le point $e$, comme ſur un centre, décrit par ſon extrêmité $f$ un arc $f$ infiniment petit, qui fait la petite partie $f$ de la cycloïde : or $ef$ étant le rayon de ce petit arc, eſt perpendiculaire à la tangente de ce petit arc $f$; $fa$ perpendiculaire

à *ef*, & parallele à *FA*, eſt donc la tangente de ce petit arc *f* ou de ce point *f* de la cycloïde ; d'où il ſuit auſſi que *fe* eſt parallele à *FE*.

04. Pour entendre les propoſitions ſuivantes, il faut remarquer que ſi l'on envelope la courbe *SKD* d'un fil également tendu par tout, qui ſoit comme colé ſur cette courbe, & qui lui ſoit égal en longueur, qu'on develope enſuite la courbe en commençant au point *D*, & que l'extrêmité *D* du fil pendant le developement inſenſible que l'on fait de la courbe *DKS*, décrive la ſeconde courbe *DPA* ; la premiere courbe *DKS* s'appelle *la developée* de la ſeconde courbe *DPA* ; chacune des parties du fil comme *PK* détachées les unes après les autres de deſſus la developée *DKS*, s'appellent *les rayons de la developée* ; & la courbe *DPA* eſt la courbe formée par le developement du fil de la developée. Ces choſes ſuppoſées : FIG. XLI.

05. Il eſt évident que chaque rayon *KP* de la developée eſt égal à la partie developée *DK* de la courbe *DKS*, ſi ce n'eſt quand le fil qui envelope la developée eſt plus long ou plus court que la courbe qu'il envelope ; car dans le premier cas le rayon de la developée eſt égal à la partie de cette courbe qui eſt developée, & de plus à la ligne droite dont on ſuppoſe que le fil ſurpaſſe la courbe qu'il envelope ; & dans le ſecond cas il n'eſt égal qu'à la partie de la courbe qu'on ſuppoſe qu'il envelopoit.

06. Que chaque rayon *KP* de la developée eſt une tangente de la developée ; car le reſte *SK* du rayon *KP* demeurant comme colé à la developée, le point *K* eſt la particule de la developée du point *K*, & le rayon *KP* ne fait qu'une ligne droite avec cette particule & en eſt le prolongement ; ainſi le rayon *KP* eſt la tangente de la developée en ce point *K*.

07. Que chaque rayon *KP* de la developée eſt perpendiculaire au point *P* à la courbe *DPA*. Car on peut concevoir que le rayon *KP* à l'inſtant qu'il forme la particule *P* de la courbe *DPA*, ſe meut ſur le centre *K*, & qu'il forme un arc infiniment petit *P* qui eſt la particule *P* de la courbe *DPA*. Or le rayon *KP* eſt perpendiculaire au petit arc *P* ou à la petite partie de la tangente au point *P*, laquelle petite partie eſt en même temps le petit arc formé par le rayon *KP*, la particule *P* de la courbe *DPA*, & la petite partie de la tangente.

Suppoſons à preſent que $DPA$ eſt une cycloïde dont le cercle generateur eſt $AFE$, la baſe $DE$ égale à la demi-circonference $AFE$, & qu'il faille trouver la longueur $PK$ du rayon de la developée au point $P$, & enſuite qu'elle eſt la nature de la courbe $DKS$ qui eſt la developee de la cycloïde $DPA$.

508. Pour trouver la longueur du rayon $PK$, il faut concevoir que $PG$ eſt une partie infiniment petite de la cycloïde, que $PK$ eſt la perpendiculaire de la cycloïde au point $P$, & que $GK$ l'eſt au point $G$; à cauſe qu'on ſuppoſe $GP$ infiniment petite, les deux perpendiculaires $PK, GK$ peuvent être conſiderées comme partant du même point $K$ de la developée qui eſt comme le centre autour duquel le fil ou le rayon $PK$ eſt conçû tourner lorſqu'il forme la particule $PG$; qu'on mene les ordonnées $PFB, GHM$, qui rencontrent le cercle generateur aux points $F$ & $H$ par où il faut mener les cordes $EF$, $FA$, $EH$, $HA$; enfin qu'on conçoive décrits des centres $K$ & $E$ les petits arcs $fl$, $FL$, les petits triangles rectangles $FLH$, $flh$ ſeront ſemblables & égaux; car 1°. les hypothenuſes $HF$, $hf$ ſont égales, puiſque par la formation de la cycloïde* $Ef = FP$ (à cauſe des paralleles $fP$, $FE$), & que $FP$ eſt égale à l'arc $AHF$, & par la même raiſon $Eh = HG =$ à l'arc $AH$; ainſi $Ef - Eh = hf =$ à l'arc $AF$ — l'arc $AH =$ l'arc $FH$. 2°. $hl = Gh - Pf =$ à la corde $EH$ — la corde $EF = HL$; par conſequent le petit côté ou le petit arc $fl$ eſt égal au petit côté ou au petit arc $FL$, mais $fKl = FEL$, à cauſe des paralleles $KP$, $EF$, & $KG$, $EH$. D'où il ſuit que les rayons de ces petits arcs qui ſont $Kf$ & $EF$ ſont égaux : mais $fP$ par la formation de la cycloïde eſt égale à la corde $EF$; par conſequent le rayon $KP$ eſt double de la corde $EF$. Et comme la même démonſtration convient à tout autre rayon repréſenté par $KP$, il eſt évident que chaque rayon $PK$ de la dévelopée de la cycloïde eſt toujours double de la corde correſpondante $EF$ du cercle generateur, & que par conſequent $SA$ eſt double du diametre $AE$.

* 454.

509. Pour trouver la nature de la developée $DKS$ de la cycloïde, il faut mener $De$ perpendiculaire à la baſe $DE$ de la cycloïde & égale à $EA$ ou à ſon égale $ES$, décrire ſur le diametre $De$ le demi-cercle $DIe$; tirer la corde $DI$ parallele à $Pf$ & à $FE$, qui fera par conſequent l'angle $fDI$ égal à ſon alterne $DEF$, ce qui ſera cauſe (les cercles $DIe$, $AFE$ étant égaux), que

ces cordes $DI$, $EF$ ſeront égales, & leurs arcs égaux, & que $DI$ ſera auſſi égale à $fK$ qui eſt égale à $EF$; & menant $IK$, elle ſera égale & parallele à $Df$. Ces choſes ſuppoſées:

La baſe $ED$ étant égale à la demi-circonference $AFE$, & $FP$ ou ſon égale $Ef$ étant égale à l'arc $AHF$*, le reſte $fD$ de la baſe eſt égal à l'arc $EF$ & à l'arc $DI$ qui eſt égal à $EF$; l'ordonnée $KI$ de la developée $DKS$ menée d'un point quelconque $K$ au cercle $DIe$, étant égale à $Df$, eſt par conſequent égale à l'arc $DI$; & comme il eſt évident que la démonſtration peut s'appliquer à tout autre point de la developée, la proprieté de cette developée eſt que chaque ordonnée $KI$ eſt égale à l'arc correſpondant $DI$ du cercle $DIe$. Et comme c'eſt la proprieté de la cycloïde * dont $DIe$ eſt le cercle generateur, la developée $DKS$ de la cycloïde $DPA$, eſt elle-même une cycloïde égale à la premiere $DPA$, puiſque le cercle generateur de l'une eſt égal à celui de l'autre: Elle eſt ſeulement dans une autre ſituation; le point $D$ de la developée répond au point $A$ de la cycloïde $DPA$, & le point $S$ de la premiere au point $D$ de la ſeconde. *454. *454.

0. Comme l'on a démontré que chaque partie $KP$ du fil developé eſt double de la corde correſpondante $DI$, & comme la partie $KP$ du fil developé eſt égale à la partie developée $DK$ de la cycloïde $DKS$; il s'enſuit que chacun des arcs $DK$ d'une cycloïde eſt double de la corde correſpondante $DI$ du cercle generateur, & que la cycloïde $DKS$ eſt double du diametre $De$ du cercle generateur.

## REMARQUES.

### I.

### *Où l'on explique ce qui reſtoit à faire pour donner la regularité aux Horloges.*

1. IL eſt à preſent évident que ſi l'on donne à deux lames de cuivre $SK$, $Sk$ la courbure $SK$ d'une cycloïde $SKD$, dont le cercle generateur $DIe$ ait pour diametre $De$ la moitié de la longueur du pendule $SP$ ou de ſon égale $SA$, qu'on ſuppoſe être la longueur du pendule dont les vibrations ſont préciſément d'une ſeconde; & que l'on ſuſpende le pendule $SA$ ou $SP$ au point $S$ entre ces deux lames de cuivre par une ſoye déliée, de façon que quelque mouvement que le poids

de l'horloge imprime au pendule *SP*, ce pendule ſoit toujours la tangente de la cycloïde *SK* ou *Sk*; il eſt, dis-je, évident que le centre de peſanteur ou d'oſcillation *P*, décrira dans toutes ſes vibrations des arcs de cycloïde *AP*, leſquelles par conſequent * ſeront toutes d'une égale durée. Ce qui reſtoit à démontrer de ce qu'il faut faire pour donner toute la juſteſſe poſſible aux horloges; & c'eſt pour cela qu'on a choiſi ici ces Exemples de la cycloïde. * 499.

## I I.

512. Comme l'on peut regarder des grandeurs infiniment petites par raport aux grandeurs finies dont elles ſont les differences, on peut regarder de même des grandeurs comme infiniment grandes par raport à d'autres finies qui deviennent égales à zero par raport à ces grandeurs infiniment plus grandes; on démontre facilement par là pluſieurs propoſitions de Geometrie; par exemple on a déterminé par là la ſituation des aſymptotes de l'hyperbole art. 400. en ſuppoſant qu'elles ſont des tangentes de l'hyperbole à des points infiniment éloignés du centre de l'hyperbole. De même dans les Problêmes où entrent les triangles rectangles dont un côté augmente toujours pendant que l'autre demeure le même, ou bien diminue toujours, en ſuppoſant que ce dernier côté eſt égal à zero par raport à l'autre, ou que celuici devient infini; alors le côté infini & l'hypotenuſe deviennent paralleles. De même quand un angle aigu va toujours en diminuant, en le ſuppoſant égal à zero, ou infiniment petit, & ſes côtés infiniment grands; on a le cas où les deux côtés deviennent paralleles.

C'eſt ainſi qu'en ſuppoſant qu'un des foyers de l'ellipſe demeurant immobile, l'autre s'éloigne à l'infini, l'ellipſe devient une parabole, & qu'on trouve par le même calcul pluſieurs proprietés communes à ces deux figures.

Ces ſuppoſitions, dont l'eſprit apperçoit la verité, abregent en pluſieurs cas les réſolutions du Problême, & les rendent generales.

## *Explication du calcul differentiel.*

### PREMIERE SUPPOSITION OU DEMANDE.

3. TOUTES les lignes droites & courbes, & toutes les figures des ſurfaces & des ſolides, peuvent être regardées comme formées ou décrites par le mouvement; les lignes droites par le mouvement d'un point qui n'eſt point détourné dans ſa direction; les courbes par le mouvement d'un point qui étant détourné à chaque inſtant de ſa direction, ne décrit aucune ligne droite finie, mais une infinité de petites lignes droites chacune infiniment petite, & qui font enſemble deux à deux des angles qui ne different de la ligne droite, ou de l'angle de 180 degrés, que d'un angle infiniment petit. Les angles ſont formés par le mouvement d'une ligne droite mobile autour du ſommet, & de même les triangles; les figures des ſurfaces par le mouvement d'une ligne droite ou courbe qui ſe meut le long d'une autre droite, de façon que pendant tout le mouvement de la ligne droite ou courbe qui ſe meut, demeure toujours parallele à elle-même; par exemple, un rectangle peut être regardé comme formé par le mouvement de la ligne qui en fait la hauteur le long de la baſe; la ſurface d'un cylindre par le mouvement d'une circonference qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant la direction de l'axe du cylindre; les figures ſolides par le mouvement d'une figure plane qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant une ligne droite, les priſmes & les cylindres ſont ainſi formés par le mouvement de leur baſe. Une infinité de ſurfaces courbes & les ſolides qu'elles comprennent, peuvent auſſi être regardés comme formés par le mouvement d'une figure plane autour d'une ligne doite, comme la ſphére par le mouvement d'un demi-cercle autour de ſon diametre, & la ſurface de la ſphére par le mouvement de la demi-circonference; de même les cylindres par le mouvement d'un rectangle autour de ſa baſe regardée comme axe; les ſolides paraboloïdes, ellipſoïdes, &c. par le mouvement d'une demi-parabole & d'une demi-ellipſe autour de ſon axe. C'eſt ainſi que les anciens Geometres ont conſideré les formations des lignes & des figures.

### PREMIERE DE'FINITION.

CHACUNE des quantités (il ſuffit de conſiderer ici les lignes droites & courbes) qui augmente inſenſiblement ou qui diminue inſenſiblement dans la formation des lignes & des figures s'appelle *variable* ou *changeante*; & les lignes qui n'augmentent ou ne diminuent point, & demeurent égales pendant que les autres changent, s'appellent *conſtantes*.

### SECONDE SUPPOSITION OU DEMANDE.

514. CHAQUE partie de temps finie, quelque petite qu'elle ſoit, eſt diviſible à l'infini comme l'étendue, & ces parties de temps infiniment petites, dont il en faut une infinité pour faire une partie finie de temps, s'appellent *des inſtans*. Il en eſt de même de la viteſſe, du mouvement, & de toute grandeur.

### SECONDE DE'FINITION.

515. L'AUGMENTATION ou la diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque inſtant par une viteſſe quelconque, dans la formation d'une ligne ou d'une figure, eſt ce qu'on appelle *une difference*. Les lignes changeantes droites & courbes ſont marquées par les lettres des inconnues $x$, $y$, $z$, $u$, &c. les lignes conſtantes par les lettres des connues $a$, $b$, $c$, &c. & l'on ſe ſervira de la lettre $d$ pour marquer les differences; ainſi $dx$ ſera la difference de la ligne changeante $x$; $dy$ ſera la difference de la ligne changeante $y$; & ainſi des autres.

516. Par exemple, que l'on conçoive la ligne droite $BC$ à l'origine $A$ de la droite $ABbH$, & que cette ligne $BC$ ſe meut toujours parallelement à elle-même ſuivant $ABbH$, & qu'en même temps un point $C$ qui part de $A$ ſur la droite $BC$ ſe meut auſſi le long de $BC$ en allant de $B$ vers $C$, de maniere qu'il ſe trouve toujours dans une courbe quelconque $ACc$ qu'il décrit par ſon mouvement; qu'on ſuppoſe auſſi la partie finie $AC$ de la courbe déja décrite par le point $C$, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe quelconque la partie infiniment petite $Cc$ de la courbe, & en même temps que la droite $BC$ parcourt la partie infiniment petite $Bb =$ (en menant $Cd$ parallele à $Bb$) $Cd$. Qu'on nomme la coupée changeante

FIG. XLII.

geante $AB$ ($x$); l'ordonnée changeante $BC$ ($y$); l'arc de courbe changeante $AC$ ($u$); l'on marquera ainſi les differences, $Bb = Cd$ ($dx$), $dc$ ($dy$), $Cc$ ($du$); & comme le petit arc $Cc$ ($du$) eſt conçu comme une droite infiniment petite qui eſt en cet endroit une partie de la courbe, & qui etant prolongée en $T$, eſt la tangente aux points $C$ & $c$, qu'on ſuppoſe infiniment proches l'un de l'autre, les raports des trois petites differences $Cc$ ($du$), $Cd$ ($dx$), $dc$ ($dy$) dans le petit triangle $Ccd$, ſont égaux aux raports des trois côtés correſpondans $CT$ ($t$), $BT$ ($s$), $BC$ ($y$) du triangle ſemblable $TCB$ formé par la tangente $CT$ ($t$), la ſoutangente $BT$ ($s$), & l'ordonnée $BC$ ($y$).

7. On peut auſſi conſiderer la courbe $AC$ comme formée par le point $C$ qu'on ſuppoſe partir du point $A$ pris comme un centre ou pole dans un point de la courbe, ou en quel endroit on voudra du plan de la courbe, lequel point $C$ ſe meut de telle maniere le long de la droite $AC$ pendant que cette droite tourne autour du pole fixe $A$, qu'il ſe trouve toujours dans la courbe $AC$ qu'il décrit par ſon mouvement. Suppoſé que la partie finie $AC$ de la courbe ſoit déja décrite par le point $C$, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe quelconque l'arc infiniment petit $Cc$, & qu'on tire $Ac$ & du centre $A$ le petit arc de cercle $Cr$, qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe peut être regardé comme une petite droite, & qu'on nomme le rayon $AC$ ($z$) & l'arc $AC$ ($u$), & le petit arc de cercle $Cr$ ($dx$), $Cc$ ſera $du$, $rc$ ſera $dz$; & en concevant la petite partie $cC$ prolongée qui ſera la tangente de la courbe au point $C$, & par le pole $A$ une perpendiculaire $At$ au rayon $Ac$ mené de $A$ à $c$ qui rencontre la tangente en $t$; le petit triangle $Ccr$ formé par les trois differentielles $Cc$ ($du$), $Cr$ ($dx$), $cr$ ($dz$), ſera ſemblable au triangle fini $cAt$, & les trois differences auront entr'elles les mêmes raports que les trois côtés de ce triangle $cAt$.

## COROLLAIRE I.

18. ON voit par ces formations des courbes, qu'on peut regarder une courbe comme un polygone, ou quand elle ne rentre pas en elle-même, comme une partie de polygone qui a une infinité de côtés dont chacun eſt infiniment petit, & chacun de ces petits côtés fait en même temps une partie

de la courbe, une partie de la tangente de la courbe en ce point là, & pour ainſi dire le côté infiniment petit d'un polygone d'une infinité de côtés inſcrit à la courbe.

## COROLLAIRE II.

519. ON peut conſiderer chaque partie infiniment petite d'une courbe, par exemple *Cc*, comme formée par le mouvement d'un point *C* qui eſt pouſſé par deux forces, l'une ſuivant la direction *Cd*, & l'autre ſuivant *dc* dans la premiere formation, * de façon que la viteſſe de la premiere ſoit à celle de la
*516.
ſeconde, comme *Cd* à *cd*; & ſuppoſé qu'on achevât le parallelograme dont *Cd* & *cd* ſont les côtés angulaires, il doit décrire *Cc* qui eſt la diagonale de ce parallelograme *, &
*316.
chaque viteſſe par les côtes eſt à la viteſſe par la diagonale, comme chacun de ces côtés eſt à la diagonale décrite dans le même temps; ainſi la viteſſe (u) par *Cd* (*dx*) eſt à la viteſſe (*u*) par *Cc* (*du*), comme *dx* à *du*; & de même la viteſſe (v) par *cd* (*dy*) eſt à la viteſſe (*u*) par *Cc* (*du*), comme *dy* à *du*; & les viteſſes par les côtés ſont entr'elles comme ces côtés *Cd* (*dx*), *cd* (*dy*).
*304. Et, à cauſe de l'égalité du temps, $T = {}^{*} \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$. Ce qu'on peut facilement appliquer à la ſeconde formation.

## REMARQUE.

520. ON pourroit auſſi nommer par une lettre toute autre quan-
FIG. XLII. tité variable, comme une partie des figures des ſurfaces ou des ſolides qui vont en augmentant ou en diminuant inſenſiblement, comme le ſegment *CAC*, l'eſpace *ABC*, le ſolide formé par cet eſpace en tournant autour de l'axe *AB*, &c. par exemple nommant *z* une partie de figure variable, ſa difference qui ſeroit une partie infiniment petite comme *CAe* du ſegment *CAC*, comme *CBbc* de l'eſpace *ABC*, ſeroit *dz*. Mais comme les figures s'expriment en Algebre par le produit de pluſieurs lettres, comme un rectangle par le produit *ab* de ſes deux côtés; un priſme par le produit *abc* de ſa baſe par ſa hauteur; il eſt plus utile dans les Problêmes ſur ces figures, de marquer leurs differences par des produits, par exemple $BC \times Bb = ydx$ marquera le petit eſpace *CBbc* qui eſt la difference de l'eſpace changeante *ABC*.

## PROBLÊME,

### QUI CONTIENT LE CALCUL DIFFERENTIEL.

*TROUVER la difference d'une quantité quelconque qui contient des grandeurs changeantes.*

### PREMIER CAS.

1. QUAND les changeantes ſont ſimplement lineaires, & ne ſont point multipliées les unes par les autres, (il n'importe pas qu'elles ſoient multipliées par des conſtantes, puiſque les conſtantes n'ont point de differences), & qu'elles ſont ſimplement jointes les unes aux autres par les ſignes + & —; il ne faut que prendre les differences de toutes les changeantes, & les joindre enſemble par les mêmes ſignes, & l'on aura la difference que l'on cherchoit.

Ainſi la difference de $x - y + z = a$, eſt $dx - dy + dz = 0$; la difference de $ax - by + cz = ab$, eſt $adx - bdy + cdz = 0$; la difference de $\frac{aa}{b} x - \frac{bc}{a} y + \frac{cc}{e} z = ab$, eſt $\frac{aa}{b} dx - \frac{bc}{a} dy + \frac{cc}{e} dz = 0$; la difference de $x\sqrt{a} - y\sqrt{b} + z\sqrt{c} = ab$, eſt $dx\sqrt{a} - dy\sqrt{b} + dz\sqrt{c} = 0$. La raiſon de cette pratique eſt évidente quand les lignes vont en augmentant, car la ſeconde $y$ eſt la premiere $y$ plus la difference $dy$ dont la ſeconde ſurpaſſe la premiere; il en eſt de même des autres: Mais comme l'on ne veut que l'expreſſion de la ſeule difference, il faut ſimplement marquer $dy$.

### REMARQUE.

2. D'OÙ l'on voit que quand une changeante $y$ va en décroiſſant, c'eſt la premiere $y$ qui ſurpaſſe la ſeconde $y$ de la difference $dy$, ainſi la ſeconde $y$ eſt $y - dy$; & dans ce cas il faut changer le ſigne de la difference de la ſeconde $y$; par exemple ſi $x$ augmente, & que $y$ diminue, la difference de $x + y$ ſera $dx - dy$, & la difference de $x - y$ ſera $dx + dy$. Neanmoins en ſuivant la regle du premier cas dans la réſolution d'un Problême, on retrouve ordinairement les grandeurs négatives qui avoient des differences négatives, ce qui les doit faire prendre du côté oppoſé*. Cependant il eſt plus à propos de ſuivre la remarque.

* 281. & 282.

### SECOND CAS.

523. QUAND pluſieurs changeantes ſont multipliées les unes par les autres, &, ſi l'on veut, qu'il y ait auſſi des conſtantes dans leurs produits; il faut multiplier la difference de chacune ſeparément par le produit des autres, & la ſomme des produits ſera la difference que l'on cherchoit.

Pour trouver la difference de $xy = ab$, il faut multiplier la difference $dx$ de $x$ par $y$, & la difference $dy$ de $y$ par $x$; & la ſomme $ydx + xdy = 0$, ſera la difference de $xy = ab$, ou ſimplement $ydx + xdy$ ſera la difference de $xy$.

De même ſi l'on a le produit $xyz = abc$, la difference ſera $yzdx + xzdy + xydz = 0$; ou $yzdx + xzdy + xydz$ ſera la difference de $xyz$; la difference de $axy$ ſera $aydx + axdy$; & ainſi des autres.

La raiſon de cette regle eſt que pour multiplier les differences de $x$ & de $y$ l'une par l'autre, il faut concevoir que $x$ eſt devenue $x + dx$, & $y$ eſt devenue $y + dy$; & le produit de ces deux quantités eſt $xy + ydx + xdy + dxdy$; & comme l'on ne veut que les differences, il faut ôter la grandeur finie $xy$, & il reſte pour la difference du produit $xy$, la ſomme $ydx + xdy + dxdy$; mais $dxdy$ eſt une grandeur infiniment petite par raport à $ydx + xdy$, c'eſt pourquoi il la faut auſſi négliger, & il ne reſte que $ydx + xdy$ pour la difference de $xy$ que l'on cherchoit.

En voici une autre démonſtration. On peut concevoir chaque difference $dx$ & $dy$ de $x$ & de $y$ partagée par la moitié, & concevoir, 1°. que $x$ eſt diminuée de la moitié de ſa difference, & qu'elle eſt devenue $x - \frac{1}{2}dx$; & de même que $y$ eſt devenue $y - \frac{1}{2}dy$, & leur produit ſera $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. On peut auſſi concevoir 2°. que $x$ & $y$ ſont augmentées chacune de la moitié de leur difference, que $x$ eſt devenue $x + \frac{1}{2}dx$, & que $y$ eſt devenue $y + \frac{1}{2}dy$; & leur produit ſera $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Or il eſt clair qu'en retranchant la premiere ſomme des produits de la ſeconde, on aura pour reſte exact $ydx + xdy$, & que ce reſte eſt égal à la difference du produit $xy$. Pour le repréſenter à l'imagination, il n'y a qu'à faire un rectangle qui aille en augmentant, dont $x$ ſoit la baſe & $y$ la hauteur, & prendre d'abord $x - \frac{1}{2}dx$ & $y - \frac{1}{2}dy$, & y diſtinguer les rectangles que donne leur produit, & prendre enſuite $x + \frac{1}{2} dx$ & $y + \frac{1}{2} dy$, & marquer les rectangles que donne leur produit, & l'on verra que les deux petits rectangles $ydx + xdy$ ſont la difference du rectangle entier $xy$.

Cette démonſtration ſuppoſée, il eſt évident que la difference de $xyz$, ou du produit de tant de changeantes qu'on voudra, eſt la ſomme des produits de la difference de chacune de ces changeantes par le produit des autres changeantes; car il n'y a qu'à prendre le produit des deux $xy$ comme une ſeule grandeur $u$, & la difference de $xyz$ ſera égale à la difference de $uz$. Or la difference de $uz$ eſt $zdu + udz$; & mettant la valeur de $du$ & de $u$ à leur place, on aura la difference de $xyz$ égale à $xzdy + yzdx + xydz$; & ainſi des autres.

## COROLLAIRE I.

4. IL ſuit de là que la difference d'une puiſſance quelconque d'une changeante $x$, eſt le produit de la difference $dx$ de cette changeante par la puiſſance de la même changeante dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui de la premiere, multiplié par l'expoſant de la premiere; ainſi la difference de $xx$ eſt $2xdx$; la difference de $x^3$ eſt $3xxdx$; celle de $x^4$ eſt $4x^3dx$; & en general celle de $x^n$ eſt $nx^{n-1}dx$.

Car $ydx + xdy$ étant par le ſecond cas la difference du produit de $xy$, il eſt évident qu'en ſuppoſant $y = x$, ce qui donne $dy = dx$, & en mettant $dx$ au lieu de $dy$, & $x$ au lieu de $y$, dans $ydx + xdy$, on aura $xdx + xdx = 2xdx$. Ce qu'il eſt facile d'appliquer aux puiſſances plus élevées.

5. Quand il y a des conſtantes pour les coëficiens des puiſſances des changeantes, elles demeurent dans les differences de ces puiſſances; ainſi la difference de $ax^3$ eſt $3axxdx$; la difference de $ax^n$ eſt $nax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{1}{2}xx$ eſt $\frac{1}{2} \times 2xdx = xdx$; la difference de $\frac{a}{n} x^n$ eſt $ax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{x^n}{a}$ eſt $\frac{n}{a} x^{n-1}dx$; la difference de $x^ny^m$ eſt $nx^{n-1}y^mdx + mx^ny^{m-1}dy$; & ainſi des autres.

## COROLLAIRE II.

6. QUAND une fraction a au dénominateur une ou pluſieurs changeantes ou leurs puiſſances, on ſçait qu'on les peut mettre au numerateur en mettant le ſigne — devant leur expo-

ſant ; ainſi $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, $\frac{ax^n}{by^m} = \frac{a}{b}x^n y^{-m}$, $\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$ ; & ainſi des autres. D'où l'on voit que la difference de ces fractions qui ont des changeantes au dénominateur, ſe trouve comme celle des produits ; ainſi la difference de $\frac{1}{x} = x^{-1}$, eſt $- 1x^{-1-1}dx = - x^{-2}dx$ ; la difference de $xy^{-1}$ eſt $y^{-1}dx - 1xy^{-2}dy$ ; la difference de $\frac{x^3y^{-4}}{a}$ eſt $\frac{3}{a}xxy^{-4}dx - \frac{4}{a}x^3y^{-5}dy$ ; la difference de $\frac{a}{b}x^n y^{-m}$ eſt $\frac{an}{b}x^{n-1}y^{-m}dx - \frac{am}{b}x^n y^{-m-1}dy$.

## COROLLAIRE III.

527. LES racines des puiſſances des changeantes pouvant être regardées comme des puiſſances elles-mêmes, dont les expoſans ſont des fractions, on en trouve les differences comme celles des puiſſances (premier Corollaire) ; ainſi la difference de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ; la difference de $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, eſt $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}-1}dx = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{2}dx\sqrt{ax}$ ; en general la difference de $ax^{\frac{1}{n}}$ eſt $\frac{a}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$ ; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}$ eſt $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{an}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx$ ; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}}$ eſt $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}y^{\frac{p}{q}}dx + \frac{ap}{q}x^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}-1}dy$ ; la difference de $\sqrt{x^2-y^2} = \overline{x^2-y^2}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\overline{\frac{1}{2} \times 2xdx - \frac{1}{2} \times 2ydy} \times \overline{x^2-y^2}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$ ; la difference de $\sqrt{ax-xx} = \overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\overline{\frac{1}{2} \times adx - \frac{1}{2} \times 2xdx} \times \overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$ ; la difference de $\frac{ay}{p}^{m+n} - x^m \times \overline{a \mp x}^n = 0$, eſt $\frac{am+an}{p}y^{m+n-1} - mx^{m-1}dx \times \overline{a \mp x}^n \mp ndx \times - x^m \times \overline{a \mp x}^{n-1} = 0$.

## REMARQUES.

### I.

528. QUAND il arrive que quelques-unes des grandeurs changeantes vont en diminuant, pendant que les autres augmentent, les differences de celles qui diminuent étant négatives*, il faut changer le ſigne de chaque produit particulier

* 522.

où ſe trouvent ces differences négatives. Par exemple ſi les $y$ diminuent pendant que les $x$ augmentent, la difference de $xy$ doit être $ydx - xdy$; c'eſt-à dire, il faut changer le ſigne du produit particulier $xdy$ où ſe trouve la difference negative $-dy$.

## II.

9. Quand on a une fois l'expreſſion des differences des grandeurs changeantes, on fait enſuite ſur ces expreſſions les operations ordinaires de l'Algebre; ainſi le produit de $dx$ par $dy$ eſt $dxdy$; le quarré de $dx$ eſt $dx^2$; ſa troiſiéme puiſſance eſt $dx^3$; & ainſi des autres operations.

## III.

### *Où l'on explique quelques principes du calcul integral.*

0. Les quantités dont on a enſeigné à trouver les differences, ſont les integrales de ces differences; ainſi $x$ eſt l'integrale de $dx$; $xy$ eſt l'integrale de $ydx \pm xdy$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ eſt l'integrale de $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ eſt l'integrale de $\frac{3}{2} dx\sqrt{ax}$; & en general $ax^n$ eſt l'integrale de $nax^{n-1}dx$; & ainſi des autres.

## AVERTISSEMENT.

1. LA méthode de retrouver les integrales dont on a les differentielles, eſt ce qu'on nomme *le calcul integral*, dont on parlera dans la troiſiéme Partie. Quand on réſout des Problêmes de Geometrie & des ſciences Phyſico-mathematiques, qui ſont ſoumis à ce calcul, on trouve d'abord des équations qui contiennent des differences; & remontant enſuite de ces differences à leurs integrales, on a les réſolutions de ces Problêmes. Ceux qui veulent faire uſage du calcul integral, doivent ſe rendre très-familieres les méthodes qu'on vient de donner, pour trouver les differences des quantités quelconques qui contiennent des changeantes, en faire eux-mêmes beaucoup d'exemples, & bien remarquer les integrales d'où ils ont tiré ces differences; ils acquieront par là une très grande facilité de retrouver tout d'un coup, ſans avoir beſoin des regles, les integrales de beaucoup de differences qui ſe preſenteront dans la réſolution des

Problêmes, & qui leur donneront tout d'un coup les réſolutions qu'ils cherchoient.

532. Ce ſeul exemple $ax^n$ eſt l'integrale de la difference $nax^{n-1}dx$, peut ſervir de formule pour trouver la plûpart des integrales de chaque difference particuliere qui n'aura qu'une ſeule changeante $x$, en comparant la difference particuliere dont il faudra trouver l'integrale à la difference $nax^{n-1}dx$, & ſuppoſant qu'elle repréſente cette difference particuliere, & que l'integrale $ax^n$ repréſente l'integrale que l'on cherche. Car il eſt viſible que pour retourner de la difference $nax^{n-1}dx$ à l'integrale $ax^n$, il faut 1°. élever $x$ à la puiſſance dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité l'expoſant $n - 1$, & l'on aura $x^{n-1+1} = x^n$, & mettre dans la difference cette quantité à la place de $x^{n-1}$, & elle deviendra $nax^n dx$. 2°. Il faut diviſer cette quantité par la difference $dx$ de $x$ lineaire, multipliée par $n - 1 + 1 = n$; c'eſt-à-dire, il faut diviſer $nax^n dx$ par $ndx$, & le quotient ſera l'integrale $ax^n$.

Ainſi pour trouver l'integrale repréſentée par $ax^n$ de la difference $\frac{adz - 2zdz}{2\sqrt{az - zz}} = \overline{\frac{adz - 2zdz}{2}} \times \overline{az - zz}^{-\frac{1}{2}}$; on ſuppoſera $az - zz = x$, $1 = a$, $-\frac{1}{2} = n - 1$; par conſequent $-\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2} = n - 1 + 1 = n$, $dx = adz - 2zdz$, & $\overline{az - zz}^{\frac{1}{2}} = x^n$. Pour avoir la grandeur à diviſer, il faut mettre dans la difference propoſée cette valeur de $x^n$, & la grandeur à diviſer ſera $nax^n dx = \overline{\frac{adz - 2zdz}{2}} \times \overline{az - zz}^{\frac{1}{2}}$; le diviſeur ſera $ndx = \frac{1}{2} \times \overline{adz - 2zdz}$; & faiſant la diviſion on trouvera l'integrale $ax^n = \overline{az - zz}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{az - zz}$.

533. Il eſt neceſſaire de remarquer que les conſtantes n'ayant point de difference, une integrale jointe par le ſigne + ou — avec une conſtante, a la même difference qu'auroit cette integrale ſeule; c'eſt pourquoi quand on retrouve l'integrale d'une difference, il faut quelquefois lui ajouter ou en retrancher une conſtante, afin d'avoir l'integrale exacte de cette difference. On donnera dans la troiſiéme Partie la Regle qui ſert à trouver cette grandeur conſtante.

On n'a mis ici la remarque précedente & l'avertiſſement, que pour donner à ceux qui commencent une idée du calcul integral.

IV. REMARQUE.

## IV. REMARQUE.

4. Les grandeurs conſtantes n'ayant pas de difference, quand des grandeurs changeantes ſont égales à une conſtante, leurs differences ſont égales à zero; ſi $x + y = a$, $dx \pm dy = 0$, ce qui donne $dx = \mp dy$; ſi $axy = abb$, $aydx \pm axdy = 0$, ce qui donne $ydx = \mp xdy$, & $\frac{dx}{ay} = \frac{\mp x}{y}$; ſi $xy^{-1} = a^2$, $y^{-1}dx - xy^{-2}dy = 0$; ainſi $dx = xy^{-1}dy$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$. Cette remarque ſert dans la reſolution de pluſieurs Problêmes.

## V.

5. Quand on compare une integrale, c'eſt-à-dire une grandeur changeante finie qui a ſa difference comme $y + dy$, avec une autre grandeur finie; il faut en ôter la difference, qui étant infiniment petite, ne peut point être comptée avec ſon integrale; ainſi $\frac{y+dy}{z}$ doit être ainſi marquée $\frac{y}{z}$: Car il faut une infinité de differences ou de grandeurs infiniment petites pour faire une grandeur finie.

## COROLLAIRE IV.

*Où l'on explique la maniere de trouver la difference des ſuites, ce qui ſervira dans la 3^e Partie à en trouver les integrales, & à en faire des formules generales.*

### PREMIER CAS.

6. POUR trouver la difference d'une ſuite qui n'a qu'une même grandeur changeante, ordonnée comme on la voit ici (A) $x^{m} \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n} + ex^{3n}}^{p}$ &c. 1°. Il faut ſuppoſer (B) $K = a + bx^{n} + cx^{2n} + ex^{3n} +$ &c. & l'expreſſion précedente ſera changée en celle-ci (C) $x^{m}K^{p}$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura (D) $mx^{m-1}K^{p}dx + px^{m}K^{p-1}dK$, qu'il faut changer en cette équivalente (E) $mx^{m-1}K \times K^{p-1}dx + px \times x^{m-1}K^{p-1}dK$, & lui donner cette forme (F) $\overline{mKdx + pxdK} \times x^{m-1}K^{p-1}$. 3°. Il faut dans cette derniere F mettre les valeurs de $K$ & de $dK$ priſes de l'équation B, qui ſont $K = a + bx^{n} + cx^{2n} + ex^{3n} +$ &c. & $Kd = \overline{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1} + 3nex^{3n-1} + \text{\&c.}} \times dx$, à la place de $Kdx$ & de $dK$; & l'on aura $\left.\begin{matrix} ma + mbx^{n} + mcx^{2n} + mex^{3n} + \text{\&c.} \\ + pnbx^{n} + 2pncx^{2n} + 3pnex^{3n} + \text{\&c.} \end{matrix}\right\} dx \times x^{m-1}K^{p-1}$.

Il eſt évident que c'eſt la difference de la ſuite ou de l'integrale A que l'on cherchoit.

## SECOND CAS.

537. POUR trouver la difference d'un produit de pluſieurs ſuites, comme de A. $x^{m} \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}+ex^{3n}}^{\,p}+\&c. \times \overline{f+gx^{n}+hx^{2n}}^{\,q}+\&c.$ 1°. Il faut ſuppoſer B. $K=a+bx^{n}+cx^{2n}+ex^{3n}+\&c.$ & C. $l=f+gx^{n}+hx^{2n}+\&c.$ & l'expreſſion A ſera changée en celle-ci D. $x^{m} \times K^{p}\, l^{q}$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura E. $mx^{m-1}K^{p}\,l^{q}\,dx+px^{m}K^{p-1}\,l^{q}\,dK+qx^{m}K^{p}\,l^{q-1}\,dl$, qu'il faut changer en cette équivalente E. $mx^{m-1}K \times K^{p-1}\,l \times l^{q-1}\,dx+px \times x^{m-1}K^{p-1}\,l \times l^{q-1}\,dK+qx \times x^{m-1}K \times K^{p-1}\,l^{q-1}\,dl$, & lui donner cette forme F. $\overline{mKldx+pxldK+qxKdl} \times x^{m-1}K^{p-1}\,l^{q-1}$. 3°. Il faut prendre les valeurs de $Kldx$, de $xldK$, & de $xKdl$ dans B & C; (c'eſt-à-dire, multiplier la valeur de $K$ priſe dans B, par la valeur de $l$ priſe dans C, & multiplier leur produit par $dx$; prendre la valeur de $dK$ dans B, & la multiplier par $xl$, & prendre la valeur de $dl$ dans C, & la multiplier par $xK$), & ſubſtituer ces valeurs dans les termes $mKldx+pxldK+qxKdl$ de F, & l'on aura.

$$\left.\begin{array}{r} maf+magx^{n}+mahx^{2n} \\ +mbfx^{n}+mcfx^{2n} \\ +mbgx^{2n} \\ +pbfnx^{n}+2pcfnx^{2n} \\ +pbgnx^{2n} \\ +qagnx^{n}+2qahnx^{2n} \\ +qbgnx^{2n} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1}K^{p-1}\,l^{q-1}.$$

C'eſt la difference de la ſuite A que l'on cherchoit.

## TROISIÉME CAS.

538. POUR trouver la difference de A. $x^{m}K^{p} \times \overline{f+gx^{n}+hx^{2n}}\,\&c.$ où l'on ſuppoſe B. $K=a+bx^{n}+cx^{2n}+ex^{3n}+\&c.$ & que l'expoſant de la ſuite $f+gx^{n}+hx^{2n}+\&c.$ eſt l'unité, il ne faut pas ſuppoſer cette derniere ſuite égale à une ſeule lettre, mais il faut changer l'expreſſion A en cette équiva-

lente C. $fx^{m} K^{p} + gx^{m+n} K^{p} + hx^{m+2n} K^{p} +$ &c. & enſuite, 1°, on prendra la difference de C. qui eſt D. $mfx^{m-1} K^{p} dx + pfx^{m} K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^{m+n-1} K^{p} dx + pgx^{m+n} K^{p-1} dK + m+2n \times hx^{m+2n-1} K^{p} dx + phx^{m+2n} K^{p-1} dK +$ &c. qu'on changera en ſon équivalente E. $mfx^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pfx \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^{n} \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pgx^{n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + phx^{2n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK +$ &c. à laquelle on donnera cette forme F. $\overline{mfKdx + pfxdK + \overline{m+n}\, gx^{n} Kdx + pgx^{n+1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} Kdx + phx^{2n+1} dK} + \text{\&c.} \times x^{m-1} K^{p-1}$. 2°. Il faut prendre dans B la valeur de $K$ & la difference de $K$, c'eſt-à-dire la valeur de $dK$ ; & après avoir multiplié la valeur de $K$ par $dx$, mettre le produit dans le premier terme de F à la place de $Kdx$ ; multiplier de même $x$ par la valeur de $dK$, & mettre le produit dans le ſecond terme de F à la place de $xdK$ ; ſubſtituer de même à la place de $x^{n}Kdx$ dans le troiſiéme terme de F le produit de la valeur de $K$ par $x^{n}dx$, & celui de la valeur de $dK$ par $x^{n+1}$ dans le quatriéme terme de F à la place de $x^{n+1}\, dK$ ; celui de la valeur de $K$ par $x^{2n}dx$ dans le cinquiéme terme à la place de $x^{2n}Kdx$ ; & celui de la valeur de $dK$ par $x^{2n+1}$ dans le ſixiéme terme à la place de $x^{2n+1}dK$ &c. & l'on aura.

G.
$$\left.\begin{array}{llr}
maf + mabx^{n} & + macx^{2n} & + \text{\&c.} \\
+ pbfnx^{n} & + 2pcfnx^{2n} & + \text{\&c.} \\
+ \overline{m+n} \times agx^{n} & + \overline{m+n} \times cgx^{2n} & + \text{\&c.} \\
 & + pbgnx^{2n} & + \text{\&c.} \\
 & + \overline{m+2n} \times ahx^{2n} & + \text{\&c.} \\
 & & + pbhnx^{3n} + \text{\&c.}
\end{array}\right\} dx \times x^{m-1} K^{p-1}$$

C'eſt la difference de A que l'on cherchoit.

## REMARQUES.

### I.

9. IL faut dans ces ſuites qu'il n'y ait qu'une même inconnue $x$, & que les expoſans des termes de chacune ſoient la même progreſſion arithmetique $o, n, 2n, 3n,$ &c. & que ſi les expoſans ſont poſitifs dans l'une, quand il y en a pluſieurs mul-

tipliées les unes par les autres, comme dans le ſecond & le troiſiéme cas, ils ſoient auſſi poſitifs dans les autres; & s'ils ſont négatifs dans l'une, ils le ſoient auſſi dans les autres.

## II.

540. Il faut ſe rendre les trois cas précedens très-familiers, & ſurtout le 3ᵉ, où ſuppoſant $K^{p-1} = \overline{a + bx^n + cx^{2n} + \&c.}^{p-1}$, il y a deux ſuites multipliées l'une par l'autre; & bien remarquer que dans la difference G. chaque terme eſt multiplié par $x^{m-1} K^{p-1}$; que le premier terme $mafdx \times x^{m-1} K^{p-1}$, ne contient qu'une conſtante $maf$ multipliée par $dx \times x^{m-1} K^{p-1}$; que le ſecond terme outre cela eſt multiplié par $x^n$, le troiſiéme par $x^{2n}$, & ainſi de ſuite; que l'integrale A du 3ᵉ cas dont la difference G eſt telle qu'on vient de le marquer, a tous ſes termes multipliés par $x^m K^p$, ſçavoir, le premier n'eſt qu'une conſtante $f$ multipliée par $x^m K^p$, mais dans le ſecond terme ſon coéficient conſtant eſt multiplié de plus par $x^n$, & eſt $gx^{m+n} K^p$; dans le troiſiéme terme le coéficient conſtant eſt de plus multiplié par $x^{2n}$, & eſt $hx^{m+2n} K^p$, & ainſi de ſuite.

## III.

541. D'où l'on voit que quelque nombre de ſuites qu'il y ait de multipliées les unes par les autres dans une difference comme H. $x^{m-1} K^{p-1} l^{q-1} dx \times \overline{\alpha + \beta x^n + x x^{2n}} + \&c.$ où l'on ſuppoſe $K = a + bx^n + cx^{2n} + \&c.$ $l = f + gx^n + hx^{2n} + \&c.$ on connoît toujours les expoſans de $x$, $K$, $l$ dans chacun des termes de la ſuite qui eſt l'integrale de cette difference H. car le premier terme doit être une conſtante multipliée par $x^m K^p l^q$; au ſecond terme il doit y avoir $x^{m+n} K^p l^q$; au troiſiéme terme, $x^{m+2n} K^p l^q$; & ainſi de ſuite. Ce qu'il faut bien remarquer pour la troiſiéme Partie.

## IV.

### *Sur l'exactitude des démonſtrations du calcul differentiel & integral, c'eſt-à-dire ſur la certitude des réſolutions que l'on trouve par ces calculs.*

542. Quand les anciens Geometres démontroient des raports de pluſieurs figures, comme que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres; que les pyramides

de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes, &c. ils ſe ſervoient pour faire la démonſtration de figures inſcrites ou circonſcrites, dont les côtés diminuant toujours à l'infini, faiſoient qu'on en pouvoit concevoir d'inſcrites dont les côtés étoient infiniment petits, & leſquelles à cauſe de cela differoient moins des grandeurs où elles étoient inſcrites qu'aucune grandeur donnée, mais la diſtinction de ces differences infiniment petites ne duroit que pendant la démonſtration, & parcequ'elle leur étoit neceſſaire pour faire la démonſtration; & ils ſuppoſoient que ces differences s'anéantiſſoient à la fin de la démonſtration, & que la figure inſcrite devenoit exactement la figure même dans laquelle elle étoit inſcrite; car il eſt évident que ſans l'évanouiſſement de cette difference infiniment petite, le raport qu'ils vouloient démontrer n'auroit pas été démontré dans l'exactitude geometrique.

De même dans la methode generale des tangentes des courbes geometriques de l'article 371, on fait la diſtinction de la partie *Cc* de la ſecante de la parabole (fig. 19) pendant tout le calcul, & on ne pourroit pas faire le calcul pour trouver la tangente par cette methode ſans cette diſtinction de la partie *Cc*, ou, ce qui en eſt une ſuite neceſſaire, des parties *Cc*, *ec*; mais pour avoir la tangente, on ſuppoſe que cette partie *Cc* de la ſecante s'évanouit, & devient nulle.

De la même maniere quand on employe le calcul differentiel & integral dans la réſolution d'un Problême, on regarde les differences infiniment petites comme prêtes à s'évanouir, & on ne les regarde ſubſiſtantes que pour le calcul & pour découvrir ce qu'on cherche pendant qu'on le cherche; & au moment que le calcul fait trouver la réſolution qu'on cherche, on regarde ces differences comme s'évanouiſſant & comme devenant nulles; & par là la réſolution que l'on cherchoit eſt dans la même exactitude geometrique que le ſont les concluſions des anciens Geometres, & la découverte exacte que l'on fait des ſoutangentes par la methode de l'article 371.

### *Des differences ſecondes, troiſiémes, &c.*

43. ON ne voit rien dans l'ancienne Geometrie qui ait raport aux differences ſecondes, troiſiémes, &c. mais auſſi les anciens

Geometres ſe ſont bornés à des Problêmes qui n'en avoient pas beſoin : On s'eſt ouvert de notre temps une voye pour la réſolution des Problêmes qui penetre à l'infini, & qui s'étend à toutes les courbes qu'on peut imaginer, geometriques, méchaniques & parcourantes ; l'on a eu beſoin, pour n'être arrêté nulle-part, de diſtinguer dans pluſieurs Problêmes, outre les premieres differences, des ſecondes differences, des troiſiémes, & ainſi à l'infini.

On en a vû la poſſibilité en ce que la grandeur étant diviſible à l'infini, 1°, l'on peut concevoir une progreſſion geometrique $\div\div$ $a$, $b$, $c$, $e$, $f$, $g$, &c. dont le premier terme $a$ ſoit une grandeur fini, le ſecond $b$ ſoit une difference premiere infiniment petite par raport à $a$, $c$ une difference ſeconde par raport à la difference premiere $b$, de maniere que $c$ ſoit infiniment petite par raport à $b$, & de même $e$ par raport à $c$ ; & ainſi de ſuite ; de façon que le raport infini des deux premiers termes $a$ & $b$, regne dans toute la progreſſion. C'eſt de cette ſorte qu'on aura une progreſſion de differences premieres, ſecondes, &c. en élevant $\overline{x+dx}^{n}$ à la puiſſance dont $n$ eſt l'expoſant ; car on trouvera la ſuite $x^{n} + n x^{n-1} dx + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} x^{n-2} dx^{2} + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} x^{n-3} dx^{3} +$ &c. dont le premier terme contient une grandeur finie, le ſecond une premiere difference $dx$, le troiſiéme une ſeconde difference $dx \times dx$ ou $dx^{2}$ ; & ainſi de ſuite : Et l'on peut voir une ſemblable progreſſion geometrique dans la Geometrie ordinaire, Fig. II. car ſi l'on ſuppoſe dans la ſeconde figure l'ordonnée du cercle $ED$ ſi petite, qu'elle ſoit une difference premiere prête à s'évanouir, & tout proche de l'extrémité $B$ du diametre $AB$ ; il eſt évident que la grandeur finie $AD$ ſera à une difference premiere $ED$, comme cette difference premiere $ED$ eſt au reſte $DB$ du diametre, lequel reſte $DB$ eſt par conſequent infiniment petit par rapport à la difference premiere $ED$ ; & par conſequent ce reſte eſt une difference ſeconde ; & l'on pourroit concevoir aiſément une difference troiſiéme, en ſuppoſant que la difference $ED$ eſt le diametre d'un cercle, & continuer cela à l'infini.

2°. On a auſſi vû la poſſibilité de ces differences ſecondes, troiſiémes, &c. en faiſant attention à la formation des lignes Fig. XLII. & des figures par le mouvement ; par exemple ſi le point $C$

après avoir décrit la partie finie *AC* de la courbe, étant mû enſuite le long de *BC*, qui elle-même ſe meut parallelement ſur *AB*, décrit en un premier inſtant la partie infiniment petite *Cc* (*du*) de la courbe, pendant que *BC* parcourt dans le même inſtant *Bb* ou ſon egale *Cd* (*dx*), & que le point *C* s'avance ſur *bc* depuis *d* juſqu'à *c*, & parcourt *dc* (*dy*) ſur la droite *bc* : En concevant des mouvemens ſemblables dans le ſecond inſtant ſuivant, & que *bc* a parcouru $bH = ce$, & que le point *C* a décrit une ſeconde partie *ef* infiniment petite de la courbe, & qu'il a avancé ſur la droite *bc* venue en *Hf* de la longueur infiniment petite *ef*; on trouvera des differences ſecondes. Car ſi l'on ſuppoſe le mouvement de la droite *BC* ſur *ABbH* uniforme, & qu'ainſi $bH = ce = Bb = Cd$ (*dx*), mais que la viteſſe du point *C* ſur cette droite *Hf* en s'éloignant de l'axe *AB*, eſt continuellement avancée ou retardée, en prenant cette derniere ſuppoſition, le ſecond accroiſſement *ef* (*dy*) ſera moindre que le premier accroiſſement *dc* (*dy*) & $dc - ef$ qui ſera leur difference, ſera une difference ſeconde; & de même $Cc - cf$ ſera une difference ſeconde; puiſque chacune de ces differences ſecondes doit être infiniment petite par raport à ſa difference premiere, comme cette difference premiere eſt infiniment petite par raport à la grandeur finie dont elle eſt la difference premiere. Si l'on fait attention au mouvement du 3^e^ inſtant, on y trouvera de même des differences troiſiémes, & ainſi à l'infini.

On trouve de même des differences ſecondes & troiſiémes, &c. dans les eſpaces; car le petit eſpace *Crc* eſt infiniment petit par raport à la difference premiere *CAc* du ſegment *AC*, & par conſequent *Crc* eſt une difference ſeconde de ce ſegment. De même l'eſpace *Cdc* eſt infiniment petit par raport à la difference premiere *CBbc* de la figure *CAB*. Il eſt facile de trouver ainſi des differences ſecondes & troiſiémes dans les figures ſolides.

Enfin on a vû l'utilité de cette diſtinction des differences ſecondes & troiſiémes, &c. dans la réſolution de pluſieurs beaux Problêmes, c'eſt pourquoi on les a auſſi réduites au calcul que voici.

### *Suppoſitions ou demandes, & définitions.*

### I.

44. L'ON marque ainſi les differences ſecondes, troiſiémes, &c.

des differences premieres ; la difference de $dx$ eſt $ddx$ ou $d^2x$ ; la difference de $d^2x$ eſt $dddx$ ou $d^3x$, & ainſi à l'infini ; de même $ddu$, $d^3u$, $d^4u$, &c. ſont les differences ſecondes, troiſiemes, quatriémes de $u$ ; & ainſi des autres. On nomme auſſi les differences premieres, les differences du premier genre ; les ſecondes, les differences du ſecond genre, &c. Les puiſſances d'une difference premiere ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. ainſi $dxdx$ ou $dx^2$ ; $dxdxdx$ ou $dx^3$ ; $dx^4$, &c. ſont des differences du ſecond genre, du troiſiéme, du quatriéme, &c. & il faut remarquer que $d^3x$ eſt $dddx$ ; mais $dx^3$ eſt $dxdxdx$, &c. Les produits des differences de differentes changeantes ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. comme $dxdy$, $dxdy^2$, $dx^2dy^2$, &c.

### I I.

545. Comme les grandeurs finies changeantes ſont les integrales des differences premieres, de même les integrales des differences ſecondes ſont des differences premieres ; les integrales des differences troiſiémes ſont des differences ſecondes ; & ainſi des autres. Et comme un nombre fini de differences premieres ne fait qu'une difference premiere, & qu'il faut une infinité de differences premieres pour faire une grandeur finie ; il en eſt de même des differences ſecondes à l'égard des premieres ; des troiſiémes à l'égard des ſecondes, &c.

### I I I.

546. Comme une grandeur finie conſtante n'a point de difference, de même quand une difference premiere eſt ſuppoſée conſtante, elle n'a point de ſeconde difference, c'eſt-à-dire ſa ſeconde difference, & par conſequent les ſuivantes ſont zero. D'où l'on voit que comme une integrale changeante + ou — une conſtante a la même difference que s'il n'y avoit point de conſtante, ce qui eſt cauſe que pour retourner à l'integrale, il faut quelquefois, après avoir trouvé l'integrale de la difference, ajouter à cette integrale une conſtante finie, ou l'en retrancher ; il faut quelquefois de même en retournant des differences ſecondes aux premieres qui en ſont les integrales, ajouter ou retrancher une difference premiere conſtante pour avoir l'integrale complete.

### I V.

547. Lorſque pluſieurs changeantes comme $x$, $y$, $z$, &c. augmentent ou diminuent enſemble, on en conſidere ordinairement

ment une, laquelle on veut, comme recevant à chaque inſtant des accroiſſemens égaux, ou des diminutions égales, & par conſequent la difference de cette changeante eſt conſiderée comme conſtante qui n'a pas de ſeconde difference pendant que les autres en ont, parcequ'elles reçoivent des accroiſſemens inégaux, ou des diminutions inégales. Pour le repréſenter à l'imagination, ſuppoſé que $Cc$, $cf$ ſoient deux parties infiniment petites de la courbe, & que $Cc$ qui eſt auſſi une partie de la tangente en $C$, ſoit prolongée en $g$; que du centre $c$ avec le rayon $cf$ on tire l'arc $fi$; qu'on prolonge $ef$ en $g$; qu'on mene par $f$, $fl$ parallele à $ce$, & par $l$ & $i$, $lm$, $in$ paralleles à $Hf$; en ſuppoſant 1°. l'accroiſſement $Cd\,(dx)$ conſtant, c'eſt-à-dire $Cd = ce\,(dx)$, il eſt évident que les triangles rectangles $Cdc$, $ceg$ ſont ſemblables & égaux; par conſequent $eg = dc = dy$; d'où l'on voit que $dc\,(dy)$ va en diminuant, puiſque le ſecond $dy$ qui eſt $ef$ eſt moindre que le premier qui eſt $dc$; leur difference eſt $eg - ef = fg$; ainſi $fg$ eſt la difference ſeconde $ddy$; & quand les $dy$ vont ainſi en diminuant, la difference ſeconde $fg\,(-ddy)$ eſt négative; ce qu'il faut bien remarquer. Par la même raiſon $ig$ eſt $ddu$, étant la difference de $cg = Cc = du$, & de $cf = ci$; & les $Cc$, $cf\,(du)$ allant en diminuant, $-ddu$ eſt négative. 2°. Si l'on ſuppoſe $dc\,(dy) = ef = lm$, c'eſt-à-dire $dy$ conſtant, les triangles rectangles $Cdc$, $cml$ ſeront ſemblables & égaux; & l'on verra que $me$ ſera $ddx$ & $li$ ſera $ddu$. 3°. Si l'on ſuppoſe $Cc\,(du)$ conſtant, c'eſt à-dire $Cc\,(du) = cf = ci$, les triangles rectangles $Cdc$, $cni$ ſeront ſemblables & égaux, & $ne$ ſera $ddx$, & $iK$ ſera $ddy$. Il faut remarquer que quand on ſuppoſe une difference conſtante comme $dx$, ſon integrale $x$ n'eſt pas pour cela conſtante, puiſque ſa difference eſt $dx$; mais elle n'a point de differences ſecondes, troiſiémes, &c. Fig. LXII.

## PROBLÊME II.

48. *TROUVER les differences des expreſſions qui contiennent des differences.*

ON les trouvera de la même maniere qu'on trouve les differences premieres par le premier Problême; & il ſuffira ici, pour le faire concevoir, d'en mettre quelques exemples.

Pour trouver la difference de $xdx$, on regardera ce produit comme compoſé des deux grandes changeantes $x$ & $dx$,

& on prendra la difference de chacune multipliée par l'autre, & on trouvera $dx^2 + xddx$ pour la difference que l'on cherchoit ; d'où il ſuit que la difference de $dx^2$ eſt $2dxddx$. La démonſtration eſt ſemblable à celle qu'on a donnée pour trouver la difference des produits $xy, xx$, &c. D'où il ſuit que la difference de $\frac{1}{dx} = dx^{-1}$ eſt $dx^{-1-1} - ddx = -\frac{ddx}{dx^2}$ ; la difference de $\frac{ydy}{dx} = ydydx^{-1}$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, eſt $dy^2dx^{-1} + yddydx^{-1} = \frac{dy^2}{dx} + \frac{yddy}{dx}$ ; mais en ſuppoſant $dy$ conſtante, la difference de $ydydx^{-1}$ ſera $dy^2dx^{-1} - ydydx^{-2}ddx = \frac{dy^2}{dx} - \frac{ydyddx}{dx^2}$ ; la difference de $du^2 = dx^2 + dy^2$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, ſera $duddu = dyddy$ ; en ſuppoſant $dy$ conſtante, elle ſera $duddu = dxddx$ ; en ſuppoſant $du$ conſtante, elle ſera $dxddx = -dyddy$ ; & en ne ſuppoſant aucune de ces differences conſtante, elle ſera $duddu = dxddx + dyddy$ ; La difference de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, eſt $ddu = dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; en ſuppoſant $dy$ conſtante, elle eſt $ddu = \frac{dxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; & en ſuppoſant $du$ conſtante, elle eſt $0 = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, qui ſe réduit à $dxddx = -dyddy$. La difference de $my^{m-1}dy = dx$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, eſt $\overline{mm - 1m} \times y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$. De même la difference de $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, eſt $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$. La difference de $\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-1}$, en ſuppoſant $dx$ conſtante (on ne peut pas ſuppoſer $dy$ conſtante, parcequ'il y a $ddy$ qui ſeroit zero ſi $dy$ étoit conſtante,) eſt $3dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-1} - dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-2}$, qu'on peut réduire, ſi l'on veut, à cette expreſſion équivalente $-\frac{3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$. Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la maniere de trouver les differences de toute quantité qui contient des differences quelconques.

# SECTION II.

## *L'uſage de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de Geometrie compoſée, en ſe ſervant du calcul differentiel.*

### AVERTISSEMENT.

49. LORSQU'ON veut réſoudre un Problême de Geometrie ou des ſciences Phyſico-mathematiques par le calcul differentiel & integral, on commence toujours la réſolution par le calcul differentiel, & l'on trouve d'abord l'équation du Problême, laquelle contient des differences, dont il ne faut plus que chercher les integrales, pour avoir la réſolution du Problême.

Quand il arrive qu'on peut ôter les differences de l'équation du Problême qui en contient, ſans avoir recours aux integrales, (par exemple ſi $dx$, ou $dx^2$, ou $ddx$, &c. ſe trouve dans l'équation du Problême, & qu'on puiſſe faire en ſorte qu'elle ſe diviſe exactement par les mêmes differences, cela ne laiſſera dans l'équation que des grandeurs finies ſans difference,) alors le Problême ſe réſout par le ſeul calcul differentiel. C'eſt de cette ſorte que ſont réſolus par le ſeul calcul des differences les Problêmes de l'excellent Livre de *l'Analyſe des infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital*, où l'on voit un uſage perpetuel de l'Analyſe dans les réſolutions des Problêmes par le moyen du calcul differentiel: Mais dans la plûpart des Problêmes la réſolution s'acheve par le calcul integral. On fera remarquer ici que dans l'application de l'Analyſe à la Geometrie compoſée, en ſe ſervant du calcul differentiel & integral, l'on trouve ordinairement des formules generales qui donnent la réſolution de tous les Problêmes ſemblables, en ſubſtituant ſimplement dans ces formules les valeurs qui conviennent aux Problêmes particuliers. On mettra ici celles de ces formules qui ſont le plus d'uſage, & qui ont le plus d'étendue, afin que dans la brieveté qu'on eſt obligé de donner à ce huitiéme Livre, les Lecteurs qui commencent, ne laiſſent pas d'y trouver la méthode de réſoudre les Problêmes les plus utiles de la Geometrie compoſée, & ce qui leur eſt neceſſaire pour entendre les nouvelles découvertes, & pour en faire eux-mêmes.

### *Les formules des tangentes & des autres lignes qui ont raport aux tangentes.*

550. SI l'on imagine que $ACc$ eſt une courbe quelconque dont Fig. XIX. $Cc$ eſt une partie infiniment petite, & qui eſt par conſequent une petite partie de la tangente au point $C$; qu'on mene des points $C$, $c$ les ordonnées $CB$, $cb$ ſur le diametre $AB$; qu'on prolonge la tangente $cC$ en $S$ où elle rencontre le diametre prolongé $BA$, & qu'elle rencontre auſſi au point $T$ la tangente $AT$ du ſommet $A$; qu'on tire auſſi $Ce$ parallele au diametre $AB$ qui rencontre $cb$ en $e$ & $AT$ en $t$; enfin qu'on mene $CD$ perpendiculaire à la tangente au point $C$ qui rencontre le diametre au point $D$.

Quelque angle $CBA$ que faſſent les ordonnées $BC$ avec le diametre $AB$, le petit triangle $Cec$ ſera toujours ſemblable à chacun des triangles $CBS$, $ATS$, $CTt$. Suppoſant $AB = x$, $BC = y$, l'on aura $Ce = Bb = dx$, $ec = dy$, & à cauſe des triangles ſemblables $Cec$, $CBS$, on aura $ec\,(dy) . Ce\,(dx) :: BC\,(y) . BS = \frac{ydx}{dy}$, qu'on ſuppoſera, pour abreger, $= S$.

*Formule de la ſoutangente.* $BS\,(S) = \frac{ydx}{dy}$; *d'où l'on déduit* $AS = BS - AB = \frac{ydx - xdy}{dy}$, qu'on ſuppoſera $= s$.

LEs triangles ſemblables $Cec$, $SAT$, donnent auſſi $Ce\,(dx) . ec\,(dy) :: AS\,(\frac{ydx - xdy}{dy} . AT = \frac{ydx - xdy}{ax}$, qu'on ſuppoſera $= \theta$; d'où l'on aura $Tt = At$ ou $CB - AT = \frac{xdy}{dx}$, qu'on ſuppoſera $= \tau$.

Ces quatre formules pour trouver les lignes $BS\,(S)$, $AS\,(s)$, $AT\,(\theta)$, $Tt\,(\tau)$, ſont toujours les mêmes, quelque ſoit l'angle des ordonnées avec le diametre. On ſuppoſe pour les ſuivantes que cet angle eſt droit, ce qu'il faut bien remarquer.

Nommant l'arc $AC$ de la courbe $ACc$, $u$; la partie $Cc$ infiniment petite de cette courbe ſera $= du$; & comme elle eſt l'hypothenuſe du petit triangle rectangle $Cec$, l'on aura $\overline{Cc}^2\,(du^2) = \overline{Ce}^2 + \overline{ec}^2\,(dx^2 + dy^2)$; ainſi $Cc\,(du) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Les triangles rectangles ſemblables $Cec$, $CBS$ donnent $ec\,(dy) . Cc\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: BC\,(y) . CS = \frac{y}{ay}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= T$; ainſi $CS\,(T) = \frac{y}{ay}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, eſt la formule de la tangente. Les mêmes triangles donnent auſſi $Ce(dx) . Cc(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: AS(\frac{ydx-xdy}{dy}) . ST = \frac{ydx-xdy}{dxdy} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera = t ; d'où l'on déduira $CT = CS - ST = \frac{x}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= t$.

Les triangles rectangles ſemblables $Cec$, $BCD$, (car ils ont chacun un angle droit $Cec$, $CBD$, & de plus ôtant de chacun des angles droits $BCe$ & $DCc$ l'angle commun $DCe$, les angles $eCc$, $BCD$ ſont égaux,) donnent $Ce(dx) . Cc(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: CB(y) . CD = \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= P$. C'eſt la formule de la perpendiculaire $CD$. Les mêmes triangles donnent encore $Ce(dx) . ec(dy) :: CB(y) . BD = \frac{ydy}{dx}$, qu'on ſuppoſera = p. C'eſt la formule de la ſoûperpendiculaire $BD$; d'où l'on déduit $AD = AB + BD = \frac{xdx+ydy}{dx}$, qu'on ſuppoſera $= p$ ; & $SD = SB + BD = \frac{ydx^2+ydy^2}{dxdy}$, qu'on ſuppoſera $= \pi$.

On a mis toutes ces formules pour faire concevoir dans la ſuite ce que l'on entend par la *methode inverſe des tangentes.*

## *Vſage de ces formules.*

### EXEMPLE I.

QUAND on veut trouver quelqu'une de ces lignes par raport à une courbe particuliere, par exemple la ſoutangente $S$, il faut par le moyen de l'équation de cette courbe particuliere, prendre la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ; par exemple ſi l'on veut la ſoutangente de la parabole dont l'équation eſt $yy - px = 0$, il faut prendre les differences, & l'on aura $2ydy = pdx$, ce qui donnera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$ ; il faut enſuite ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{2yy}{p}$ ; & mettant pour $2yy$ ſa valeur $2px$, l'on aura $S = 2x$ : ce qui fait voir que dans la parabole la ſoutangente $S$ eſt égale au double de la coupée $x$. Et quand on veut la ſoutangente pour un point déterminé, il n'y a qu'à mettre la valeur déterminée de $x$ qui convient à ce point là dans $S = 2x$, & la ſoutangente ſera determinée pour ce point là. Il faut faire la même choſe pour les autres courbes Il faut de même pour les autres formules, trouver par les équations des courbes particulieres, les valeurs des differences $dy$, $dx$, $\sqrt{dx^2+dy^2}$, en grandeurs finies qui ne contiennent plus de differences, & les ſubſtituer dans les formules, & après la ſubſtitution, l'on aura les valeurs que repreſentent ces formules.

## EXEMPLE II.

552. TOUTES les courbes geometriques peuvent être repreſentées par l'équation generale $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$ dans laquelle $x$ marque les coupées $AB$, $y$ les ordonnées $BC$; car dans les équations de toutes les courbes geometriques, ne pouvant y avoir que quatre ſortes de quantités qui en compoſent les termes; les premieres qui ne contiennent de changeante que $x$ ſans $y$; les ſecondes qui ne contiennent que $y$; les troiſiémes des $x$ & des $y$ mêlés enſemble, & les quatriémes un terme tout connu ou conſtant; le premier terme de l'équation generale repreſente les premieres; le ſecond, les ſecondes; le troiſiéme, les troiſiémes; & le quatriéme repreſente le terme conſtant de celles qui en ont un; $f$, $g$, $h$, repreſentent les coëficiens; & $m$, $n$, $r$, $s$, repreſentent les expoſans des changeantes $x$ & $y$. Cela ſuppoſé, il faut trouver par cette équation generale, la ſoutangente de toutes les courbes geometriques.

Fig. XIX.

1°. Il faut prendre les differences des termes de l'équation generale, & l'on aura $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1}y^s dx + shx^r y^{s-1}dy = 0$; d'où l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$.

2°. Il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule de la ſoutangeante $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{-ngy^n - shx^r y^s}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente de toutes les courbes geometriques, ou plutôt une formule pour les trouver, en ſubſtituant dans cette expreſſion generale de la ſoutangente, les valeurs des indéterminées $f$, $g$, $h$, $m$, $n$, $r$, $s$, priſes des équations de chaque courbe geometrique dont on voudra avoir la ſoutangente.

### *Avertiſſement.*

On n'a mis ce ſecond Exemple, que pour faire voir aux Lecteurs la beauté de l'Analyſe, & l'avantage particulier qu'elle a de faire appercevoir à l'eſprit le nombre infini de toutes les courbes geometriques, ſous une expreſſion auſſi ſimple qu'eſt l'équation generale qui précede, & de lui faire découvrir par un même calcul, en ſe ſervant de cette équation, des propriétés qu'il voit clairement leur convenir à toutes.

### REMARQUES.

### I.

553. QUAND la quantite que l'on trouve par le moyen de l'équation d'une courbe particuliere pour la valeur de $\frac{dx}{dy}$, eſt une fraction, & qu'en voulant, par exemple, une ſoutangente déterminée pour un point particulier de la courbe, la ſubſtitution des valeurs déterminées de $x$ & de $y$ pour ce point-là, rend le numerateur & le dénominateur chacun égal à zero; il faut continuer de prendre la difference du numerateur, & enſuite celle du dénominateur, & les diviſer l'une par l'autre, & ſuppoſer la nouvelle fraction égale à $\frac{dx}{dy}$; & après avoir ſubſtitué dans cette nouvelle fraction les valeurs déterminées de $x$ & de $y$, prendre dans cette équation la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & la ſubſtituer dans la formule $s = \frac{ydx}{dy}$; & l'on aura la valeur de la ſoutangente, qui convient à ce point-là. Si la ſubſtitution des valeurs déterminées de $x$ & de $y$ rendoit encore le numerateur & le dénominateur de la nouvelle fraction égaux chacun à zero, il faudroit continuer de prendre les differences du numerateur & du dénominateur de la nouvelle fraction, & continuer l'operation comme on vient de le dire.

### I I.

554. La conſideration des tangentes d'une courbe a de grands uſages; on en mettra ſeulement ici quelques-uns. 1°. Chaque partie infiniment petite de la courbe, étant une partie infiniment petite de la tangente à ce point de la courbe, les angles que font entr'elles les tangentes des points infiniment proches de la courbe, ſont ceux des petites parties de la courbe.

2°. Si l'on trace ſoi-même les tangentes d'une courbe qui rentre en elle-même comme d'une ellipſe, en commençant au ſommet, on verra que les ſoutangentes $BS$, $BS$, &c. priſes ſur un diametre $AB$, augmentent à meſure que l'on prend des points qui vont du ſommet $A$ vers le point $D$, où ſe termine le diametre conjugué, & qu'elles s'augmentent en allant du côté $S$ vers l'origine; qu'au point $D$ du FIGURE XLIII.

diametre conjugué, la ſoutangente *KS* devient infinie, la tangente *DE* ſe detachant là de la ſoutangente à laquelle elle devient parallele en ce point *D*; & qu'enſuite les ſoutangentes *bs* des points *c*, *c* pris depuis le diametre conjugué *D* vers la ſeconde extremité (a) du diametre, paſſent de l'autre côté, & ſe trouvent au côté opposé à l'origine, & vont toujours en diminuant; de maniere que ſi l'on fait les premieres poſitives, les ſecondes ſeront négatives; & au point *D* du paſſage des poſitives aux negatives, la ſoutangente devient infinie.

Si l'on commence à mener les tangentes du ſommet *D* du ſecond diametre par tous les points *C*, *C* de la courbe, juſqu'aux points *S*, *S* du premier diametre a*A*, prolongé vers *S*, on verra que les ſoutangentes *BS*, *BS* vont en diminuant juſqu'au ſommet *A* du premier diametre, où la ſoutangente devient zero, & continuant enſuite de mener les tangentes c*S*, c*S* par les points c, c, juſqu'à la ſeconde extremité *d* du ſecond diametre, on verra que les ſoutangentes *BS* vont enſuite en augmentant juſqu'au point *d*, où la ſoutangente devient encore infinie, étant parallele à la ſoutangente.

Si l'on mene hors de l'ellipſe une droite *aα*s s parallele au diametre, les ſoutangentes *a*s, *a*s des points *C*, *C*, pris depuis le ſommet *A*, juſqu'au diametre conjugué *D*, priſes ſur cette parallele depuis le point *a* qui répond à l'origine *A*, ſeront du côté des négatives, & depuis le diametre conjugué *D*, elles ſeront du côté des poſitives, & les premieres iront en augmentant, & les ſecondes en diminuant; & au point *D*, qui eſt le paſſage des négatives aux poſitives, la ſoutangente ſera infinie, parce que la tangente *De* ſe détache en ce point-là de la ſoutangente, & lui devient parallele; & ſi l'on mene les tangentes en commençant au point *D* par tous les points *D*, *C*, *C*, *A*, c, c, *d*, les ſoutangentes *α*s négatives ſur *aα*s, iront en diminuant juſqu'à celle du point *A*, où la ſoutangente ſera zero, après quoi elles deviendront poſitives vers la gauche, & iront en augmentant juſqu'à la ſoutangente du point *d*, qui ſera infinie.

Après s'être rendu cette remarque bien familiere, on aura, 1°, une marque pour connoître quand on a une équation d'une courbe par raport à une droite donnée, ſi elle tourne ſa concavité ou ſa connexité vers cette droite; car en trouvant les ſoutangentes de deux ou trois points proches de l'origine, il n'y aura qu'à voir ſi elles augmentent poſitivement ou négativement; dans le premier cas elle eſt concave vers la droite donnee; dans le ſecond, elle eſt convexe.

On verra clairement. 2°. que quand une ſuite de grandeurs, comme de ſoutangentes ou autres, eſt d'abord poſitive, & devient enſuite négative, l'expreſſion indéterminee commune à chaque grandeur de cette ſuite, devient au point du paſſage égale à zero ou à l'infini; elle eſt égale à zero quand les poſitives ou negatives vont d'abord en diminuant & enſuite en augmentant; elle eſt égale à l'infini, quand elles commencent par augmenter; & qu'après le paſſage elles vont en diminuant; ce qu'il faut bien remarquer; & en ſuppoſant l'expreſſion indéterminée de chaque grandeur de cette ſuite égale à zero ou à l'infini, cela ſert à déterminer la valeur de l'inconnue de cette expreſſion, par exemple de l'ordonnée $y$, ou de la coupée $x$ aux points des paſſages des grandeurs poſitives aux negatives, ou des négatives aux poſitives.

3°. On vient de remarquer que les tangentes aux ſommets du diametre ſont paralleles aux ordonnées; par conſéquent ſi l'on conſidere le petit triangle dont $du$ petite partie de la courbe eſt l'hypothenuſe, $dx$ petite partie du diametre eſt un côté, $dy$ petite partie de l'ordonnée eſt le ſecond côté, aux ſommets du diametre, on verra que l'hypothenuſe $du$ ſe détache du petit côté $dy$ & lui devient parallele; & par conſéquent le petit côté $dx$ entre ces paralleles devient zero par raport à chacune des paralleles qui devient indéterminée ou infinie. De même les tangentes aux ſommets des ſeconds diametres conjugués aux premiers, ſont paralleles aux premiers diametres, c'eſt-à dire, elles ſont paralleles aux coupées $x$; & à ces ſommets l'hypothenuſe $du$ ſe détache du petit côté $dx$ & lui devient parallele, & par conſéquent le petit côté $dy$ devient en cet endroit là zero par raport au côté $dx$ & à l'hypothenuſe $du$, qui ſont devenus paralleles & indéterminés ou infinis.

4°. Cette derniere remarque donne lieu à cette autre, que les ordonnées $y$ du côté concave de la courbe vont en augmentant depuis le ſommet juſqu'au diametre conjugué où eſt la *plus grande* $y$, & enſuite elles vont en diminuant juſqu'à l'autre extrêmité du diametre; & au contraire du côté où la courbe tourne ſa convexité, les $y$ vont en diminuant depuis l'origine juſqu'au point où ſe termine le diametre conjugué où eſt *la moindre* $y$, & enſuite les $y$ vont en augmentant; ainſi au point de la plus *grande ordonnée* $y$ du côté concave, & de la *moindre* du côté convexe, dans le petit triangle fait des $du$, $dx$, $dy$; $dy$ eſt zero. En prenant auſſi toutes les paralleles aux coupées $x$, terminées au diametre conjugué, pour les $x$; on verra que depuis un des ſommets $D$ ou $d$ du diametre conjugué, les $x$ vont en augmentant du côté concave juſqu'au ſommet $A$ du premier diametre, où ſe trouve *la plus grande* $x$, après quoi les $x$ vont en diminuant juſqu'à la ſeconde extrêmité $d$ du diametre conjugué; & au contraire du côté convexe en concevant une ligne hors de l'ellipſe parallele au diametre conjugué, les $x$ priſes ſur cette parallele vont en diminuant depuis celle qui ſe termine au ſommet $D$ du diametre conjugué juſqu'à la moindre de toutes les $x$ qui ſe termine au ſommet $A$ du premier diametre, après quoi elles vont en augmentant; par conſequent au point de *la plus grande* $x$ du côté concave, & de *la moindre* $x$ du côté convexe dans le petit triangle, le côté $dx$ devient zero. D'où l'on voit que $dx$ & $dy$ ne peuvent pas être dans ces cas-là chacune égales à zero, ni avoir un raport fini.

5°. Les remarques qu'on a faites par raport à l'ellipſe, pour fixer l'imagination, doivent s'appliquer à toutes les courbes où les appliquées vont en augmentant, & enſuite en diminuant du côté concave, & le contraire du côté convexe, & de même les coupées; & elles ſuffiſent pour en faire faire de ſemblables ſur toutes ſortes de courbes.

## II.

## *Des quantités qu'on appelle les plus grandes & les moindres, & les formules pour les trouver.*

### DE'FINITION.

555. LORSQU'ON a l'équation d'une courbe où les $x$ ſont les coupées, & les $y$ les ordonnées, & qu'on veut ſçavoir le point où ſe trouve la plus grande ou la moindre ordonnée $y$, comme auſſi celui de la plus grande ou de la moindre coupée $x$, c'eſt-à-dire la valeur déterminée de $x$ qui convient à ce point de la plus grande ou de la moindre ordonnée, &, ſi l'on veut, celle de cette plus grande ou moindre $y$; & de même la valeur de $y$ ou de $x$ au point de la plus grande ou moindre $x$;

cela s'appelle une queſtion ou un problême *des plus grandes & des moindres.*

Comme auſſi ſi l'on a une quantité changeante compoſée de ſeules $x$ ou de ſeules $y$, & que cette quantité aille en augmentant, & enſuite en diminuant; ou en diminuant, & enſuite en augmentant, & qu'on veuille ſçavoir de toutes ces quantités changeantes qui ont une même expreſſion, celle qui eſt la plus grande ou la moindre, il faut concevoir cette quantité comme étant l'ordonnée d'une courbe, & la ſuppoſer, ſi elle ne contient que des $x$, égale à $y$; ou, ſi elle ne contient que des $y$, égale à $x$; & concevoir que les $x$ ſont les coupées, & $y$ l'ordonnée égale à la quantité propoſée, & il s'agira de trouver la plus grande ou la moindre $y$ comme dans les courbes; & ce ſera auſſi *un Problême des plus grandes & des moindres.*

### *Formules pour trouver les plus grandes & les moindres.*

556. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$ eſt la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* $y$; & $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$ ſera la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* $x$; ou ſimplement $dy = 0$, & $dy =$ à l'infini, qu'on marque ainſi $dy = \infty$, ſont les formules pour trouver les *plus grandes* & les *moindres*.

### USAGE DES FORMULES.

QUAND on a l'équation d'une courbe où il faut trouver les plus grandes & les moindres, ou une expreſſion d'une quantité changeante réduite à l'équation d'une courbe, en la ſuppoſant égale à une changeante $y$; il faut prendre les differences de cette équation, & réduire au premier membre $\frac{dy}{dx}$, & le reſte de l'équation differentielle où il n'y a plus de $dy$ ni de $dx$ au ſecond membre; & quand on cherche la plus grande ou la moindre $y$, prendre pour formule $\frac{0}{dx}$; c'eſt-à-dire, ſuppoſer que le numerateur eſt zero, & tirer de l'équation qui en réſulte, en y employant auſſi l'équation même de la courbe propoſée, la valeur ou les valeurs de $x$; & l'on aura la valeur déterminée de $x$ au point de la plus grande ou de la moindre $y$; & l'on peut auſſi déterminer la valeur de cette plus grande ou moindre $y$, puiſque $x$ eſt déterminée. Si l'on cherche la plus grande ou la moindre $x$, il faut ſe ſervir de la formule $\frac{dy}{0}$, c'eſt-à-dire, ſuppoſer le dénominateur égal à zero, & par cette équation déterminer les valeurs de $x$ & de $y$. Si l'on ne peut pas trouver de valeurs, ni zero, pour la plus grande ou moindre $x$ & $y$, & qu'on n'en trouve que d'imaginaires, c'eſt une marque que la courbe n'en a pas. On diſtinguera quand la quantité que l'on trouve par la méthode eſt une plus grande ou une moindre, *par la ſeconde Remarque, nom.* 2.

Pour trouver, par exemple, les *plus grandes* & les *moindres* de la courbe dont l'équation eſt * $\frac{a}{p}yy = \frac{1}{4}aa - xx$; 1°. on prendra les differences de l'équation, & l'on aura $\frac{a}{p}ydy = -xdx$; ce qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{ay}$; & en mettant au lieu de $y$ ſa valeur $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-px}{a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}}$. * 379.

2°. On ſuppoſera, ſuivant la formule $\frac{0}{ax}$, le numerateur $= 0$; ce qui donnera $-px = 0$; & diviſant par $-p$, on aura $x = 0$ : c'eſt la valeur de $x$ au point de la plus grande $y$. En ſubſtituant cette valeur de $x = 0$ dans la propoſée, au lieu de $x$, on trouvera la plus grande $y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Pour trouver la plus grande $x$, on ſuppoſera, ſuivant la formule $\frac{dy}{0}$, le dénominateur $a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx} = 0$; ce qui donnera $x = \frac{1}{2}a$, qui eſt la valeur de la plus grande $x$; & la ſubſtituant dans la propoſée, au lieu de $x$, on trouvera que la valeur de $y$ au point de la plus grande $x$, eſt $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{1}{4}ap} = 0$; c'eſt-à-dire, $y$ eſt zero à ce point là.

## REMARQUES.

### I.

557. ON remarquera que quand on trouve pluſieurs valeurs de $x$ pour la plus grande ou la moindre $y$, ordinairement la courbe a pluſieurs $y$ plus grandes ou moindres, ou les unes moindres, & les autres plus grandes; ce qu'il faut auſſi remarquer quand on cherche les plus grandes ou les moindres $x$. On pourra les connoître par la troiſiéme remarque ſuivante.

### II.

558. On remarquera auſſi que $\frac{0}{dx}$ eſt la même choſe que $dy$ infiniment petite par raport à $dx$, ou $dy = 0$; & $\frac{dy}{0}$ eſt la même choſe que $dy$ infinie par raport à $dx$, ou $dy$ égale à l'infini.

### III.

559. Enfin ſi l'on fait attention aux points de la plus grande &

de la moindre $y$, auſquels la tangente eſt parallele aux $x$ ; on verra que $y$ n'y reçoit aucun accroiſſement ni diminution, & qu'ainſi $dy$ eſt zero à ces points : & qu'il en eſt de même de $dx$, qui devient zero aux points de la plus grande & de la moindre $x$, auſquels la tangente eſt parallele aux $y$, $x$ ne recevant à ces points là ni accroiſſement ni diminution, & où par conſequent $dy$ eſt infinie par raport à $dx$, n'étant plus bornée par la petite baſe $du$, & en etant détachée en ce point là : Mais que ſi $dx$ & $dy$ devenoient chacune zero, ou avoient un raport fini, il n'y auroit ni *plus grande* ni *moindre*.

### III.

### *Des points d'inflexion & de rebrouſſement des courbes, & des formules pour les trouver.*

FIG. XLIV. & XLV.

560. IL y a des courbes qui tournent d'abord leur concavité d'un côté, & qui tournent enſuite leur convexité du même côté comme $ACcf$, $Ccf\varkappa\varphi$. Le point ou la partie infiniment petite $Cc$ (fig. 44), & $f\chi$ (fig. 45), qui ſépare la partie concave de la convexe, & qui eſt commune à l'une & à l'autre, s'appelle *le point d'inflexion* quand la courbe va toujours du même côté ; & *le point de rebrouſſement* quand la courbe retourne ou rebrouſſe ſon chemin comme $Ccm$ (fig. 44).

FIG. XLIII.

Pour trouver ces points des courbes qui en ont, il faut remarquer qu'en prenant les $dx$ conſtantes, c'eſt-à-dire égales, les $dy$ vont en diminuant dans la partie concave, & en augmentant dans la partie convexe, ou bien au contraire : car $dc$ ($dy$) ſurpaſſe $ef$ qui eſt le $dy$ ſuivant, puiſqu'en ſuppoſant $cd = ce$, c'eſt-à-dire les $dx$ conſtantes, $dc$ eſt égale à $eg$ ; ainſi $dc$ ſurpaſſe $ef$. Dans la partie convexe ſuppoſant auſſi les $dx$ conſtantes, $cd = ce$ ; les $dy$ vont en augmentant, car $dc (dy) = eg$ moindre que $ef$ ; ou bien ſi l'on prenoit la partie concave en revenant vers l'origine, on verroit que les $dy$ vont en augmentant, & que dans la partie convexe en revenant auſſi vers l'origine, les $dy$ vont en diminuant. Ainſi quand une courbe a une partie concave & l'autre convexe, dans l'une les $dy$ vont en augmentant, & dans l'autre en diminuant.

FIG. XLIV.

D'où il ſuit que ſi l'on imagine que les $dy$, ou plutôt des lignes finies qui ayent entr'elles les mêmes raports que les $dy$, ſont des ordonnées miſes de ſuite ſur la ligne des coupées $ABH$, leurs extrêmités formeront une nouvelle courbe,

FIG. XLIV.

dans laquelle il y aura *une plus grande* ou *une moindre* au point de la nouvelle courbe, par lequel paſſe l'ordonnée qui va au point d'inflexion ou de rebrouſſement de la premiere courbe ; ces ordonnées de la nouvelle & de la premiere courbe étant l'une ſur l'autre : Il y a pluſieurs plus grandes ou moindres, s'il ſe trouve dans la premiere courbe pluſieurs points d'inflexion ou de rebrouſſement.

Il ſuit de là que pour trouver le point d'inflexion ou de
rebrouſſement, il faut ſuppoſer la difference des *dy*, qui eſt
* 556. *ddy*, égale à zero, & enſuite à l'infini,* pour avoir la formule
qui ſert à trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement.

*Formules pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement* $ddy = 0$, *&* $ddy$ *égal à l'infini, qu'on marque ainſi* $ddy = \infty$.

## USAGE DE LA FORMULE.

561. POUR trouver le point d'inflexion ou celui de rebrouſſement d'une courbe dont on a l'équation, il faut d'abord prendre les differences des termes de l'équation propoſée, & mettre dans un membre *dy* ſeule, & les autres quantités dans le ſecond membre, & ce ſera la ſeconde équation. Il faut enſuite prendre la difference du ſecond membre de la ſeconde équation, en prenant *dx* conſtante, & la ſuppoſer égale à zero, puiſque la ſeconde difference du premier membre qui devroit être *ddy*, eſt zero ; ce qui donnera une troiſiéme équation, laquelle on réduira à n'avoir que la ſeule changeante finie *x*, par le moyen de la ſeconde équation, & ſe ſervant auſſi de l'équation de la courbe ; & l'on trouvera la valeur de *x* dans cette derniere équation, qui ſera la valeur de la coupée *x* au point d'inflexion ou de rebrouſſement ; & l'on trouvera la valeur de *y* au même point, en ſubſtituant la valeur trouvée de *x* dans l'équation de la courbe.

Par exemple pour trouver le point d'inflexion ou de rebrouſſement de la courbe dont l'équation eſt $axx = xxy + aay$ ; 1°. on prendra les differences de l'équation propoſée, & mettant *dy* au premier membre, on aura la ſeconde équation $dy = \frac{2axdx - 2xydx}{xx + aa} = \overline{2axdx - 2xydx} \times \overline{xx + aa}^{-1}$. 2°. On prendra la difference du ſecond membre de cette ſeconde équation, en ſuppoſant *dx* conſtante ; on la ſuppoſera égale à zero, & l'on aura la 3^e^ équation $\overline{2adx^2 - 2ydx^2 - 2xdxdy} \times \overline{xx + aa}^{-1} - 2xdx \times \overline{2axdx - 2xydx} \times \overline{xx + aa}^{-2} = 0$.

3°. On ſubſtituera dans cette troiſiéme équation la valeur de $dy$ priſe de la ſeconde, & la valeur de $y$ priſe de l'équation de la courbe, & l'on trouvera $2a^5 - 6a^3xx = 0$; d'où l'on tire $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; mettant cette valeur dans l'équation de la courbe à la place de $x$, on trouve $y = \frac{1}{4}a$; ainſi ſuppoſant la droite des $x$, & prenant ſur cette droite une longueur $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & élevant une perpendiculaire $y = \frac{1}{4}a$, ſon extrêmité ſe trouvera au point d'inflexion de la courbe.

On auroit abregé le calcul en diſpoſant ainſi l'équation de la courbe, $y = \frac{axx}{xx+aa}$, ou $y = axx \times \overline{xx + aa}^{-1}$. On ne l'a pas fait, pour faire connoître aux Lecteurs qui commencent, la maniere d'operer ſans ſéparer ainſi d'abord les $y$.

## REMARQUE.

SI l'on n'avoit pas trouvé de valeur de $x$ en ſuppoſant la valeur de $ddy = 0$, on auroit ſuppoſé $ddy = \infty$; c'eſt-à-dire, on auroit ſuppoſé = à zero le dénominateur de la fraction $= ddy$, au lieu qu'on en a ſuppoſé le numerateur égal à zero, en ſe ſervant de la formule $ddy = 0$.

### *La maniere de trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même point.*

62. SI l'on prend dans la partie concave $Ccf$, les petites parties égales $Cc$, $cf$, qui ſont les $du$, & dans la convexe $\chi\kappa$, $\kappa\varphi$, égales aux premieres, & après avoir prolongé la petite partie $Cc$ en $i$, & $\chi\kappa$ en $\iota$, on tire des centres $c$, $\kappa$, avec les rayons $cf$, $\kappa\varphi$, les petits arcs $fi$, $\varphi\iota$; & du centre $B$, les petits arcs $Cd$, $ce$; $\chi\delta$, $\kappa\varepsilon$; les petits arcs $fi$ dans la partie concave qui meſurent les petits angles $icf$, ſont au delà de la courbe par raport au point $B$; & les petits arcs $\varphi\iota$ dans la partie convexe, ſont en deçà dans la partie convexe; ainſi les prenant poſitifs dans l'une des parties concave ou convexe, ils ſont négatifs dans l'autre; par conſequent ces petits arcs doivent devenir zero ou infinis * au point d'inflexion ou de rebrouſſement; où ils deviennent de poſitifs, négatifs; ou de négatifs, poſitifs. C'eſt pourquoi en ſuppoſant la valeur changeante de ce petit arc $fi$ égale à zero ou à

Fig. XLV.

* 554.

l'infini, on aura dans l'équation que fera trouver cette ſuppoſition la valeur déterminée de la changeante $BC$, $Bc$, qui eſt l'ordonnée changeante de la courbe propoſee; & après l'avoir trouvée, en traçant du centre $B$ avec la longueur trouvee de la changeante $BC$, un arc, il coupera la courbe au point d'inflexion ou de rebrouſſement.

Fig. XLV. Pour trouver la formule qui convient à ce cas, on menera la ligne $cl$, $\varkappa\lambda$, qui faſſe avec la tangente $ci$, $\varkappa\iota$, qui eſt la petite partie $Cc$, $\chi\varkappa$ prolongée, l'angle $icl$, $\iota\varkappa\lambda$, le premier égal à l'angle $cBf$, le ſecond à l'angle $\varkappa B\varphi$; & par le point $n$, $\nu$, où $cl$, $\varkappa\lambda$ rencontre le petit arc $fi$, $\varphi\iota$, on tirera $np$, $\nu\pi$; la premiere parallele à $fe$, la ſeconde à $\varphi\varepsilon$; & $nm$, $\nu\mu$; la premiere parallele à $ce$, la ſeconde à $\varkappa\varepsilon$. Après cela on aura l'angle $lce$ égal à l'angle $Ccd$; & l'angle $\lambda\varkappa\varepsilon = \chi\varkappa\delta$. Car les angles $cle$, $Ccd$, étant les exterieurs, le premier des angles $cgl$, $lcg$; le ſecond des angles $Bgc$ qui eſt le même que $cgl$, & $cBf$ égal par la conſtruction à $lcg$, ſont égaux; par conſequent les triangles $Cdc$, $cel$, rectangles en $d$ & en $e$, ſont ſemblables. Et comme le triangle $cnp$ eſt ſemblable au triangle $cle$, il eſt auſſi ſemblable au triangle $Cdc$, & il lui eſt égal, puiſque les hypotenuſes $cn$, $Cc$ ſont égales par la ſuppoſition des $du$ conſtantes. De plus le petit triangle $mnf$, rectangle en $m$, eſt auſſi ſemblable au triangle $cnp$; car ôtant des angles droits $pnm$, $cnf$, l'angle commun $pnf$, les deux angles aigus $fnm$, $cnp$ qui reſteront ſeront égaux. On prouvera de même dans la partie convexe, que les triangles $\chi\varkappa\delta$, $\varkappa\nu\pi$, $\mu\nu\varphi$, ſont ſemblables, & que les deux premiers ſont de plus égaux. Ces choſes ſuppoſees, on trouvera ainſi l'arc $fi$, $\varphi\iota$.

Nommant la changeante $BC(y)$, $Cd$, $ce$, $\chi\delta$, $\varkappa\varepsilon(dx)$, qui vont en augmentant dans la partie concave, & en diminuant dans la convexe; $Cc$, $cf$, $\chi\varkappa$, $\varkappa\varphi(du)$, on les ſuppoſe conſtantes, c'eſt à-dire égales; $dc$, $ef$, $\delta\varkappa$, $\varepsilon\varphi$ ſeront les $dy$, qui vont en diminuant dans la partie concave, & en augmentant dans la convexe dans la ſuppoſition des $du$ conſtantes; $pe = nm$, $\pi\varepsilon = \nu\mu$ ſeront les $ddx$ poſitifs dans la partie concave, & négatifs dans la convexe; $fm$, $\varphi\mu$ ſeront les $ddy$ négatifs dans la partie concave, & poſitifs dans la convexe. Les triangles ſemblables $Cdc$, $cpn$, $fmn$, donnent $Cd$ ou $cp\ (dx) . Cc$ ou $cn\ (du) :: fm\ (-ddy) . fn = \frac{-duddy}{dx}$; ou bien encore

encore $dc$ ou $pn(dy)$. $cn(du) :: nm(+ddx)$. $fn = \frac{duddx}{dy}$; on trouvera de même le petit arc $\varphi\nu = \frac{duddy}{dx}$, & encore $\varphi\nu = \frac{-duddx}{dy}$. Les petits ſecteurs ſemblables $Bce$, $nci$, donneront auſſi $Bc(y)$. $ce(dx) :: cn(du)$. $ni = \frac{dxdu}{y} = \nu\iota$; par conſequent le petit arc $fi = ni + nf = \frac{dudx^2 - yduddy}{ydx}$, ou bien encore $fi = \frac{dudxdy + yduddx}{ydy}$; & $\varphi\iota = \varphi\nu - \nu\iota = \frac{yduddy - dudx^2}{ydx}$; ou bien encore $\varphi\iota = \frac{-dudxdy - yduddx}{ydy}$.

### *Formules pour trouver le point d'inflexion ou de rebrouſſement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même centre ou pole.*

563. IL faut ſuppoſer l'expreſſion du petit arc changeant $fi$ égale à zero ou à l'infini, & l'on aura pour la formule, après avoir multiplié par $ydx$ & diviſé par $du$, $dx^2 - yddy = 0$, & $dx^2 - yddy = \infty$; ou bien encore $dxdy + yddx = 0$ ou $= \infty$. On pourroit auſſi prendre la valeur de $\varphi\iota$ pour en faire la formule.

### USAGE DES FORMULES.

IL faut trouver pour chaque courbe dont on voudra chercher le point d'inflexion, par le moyen de ſon équation, la valeur de $dx$ & celle de $dx^2$, & après avoir trouvé la valeur de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, il faut en prendre la difference qui ſera égale à $ddu$, & la ſuppoſer égale à zero, à cauſe qu'on a ſuppoſé $du$ conſtante, & par conſequent $ddu = 0$; on trouvera par l'équation que donnera cette ſuppoſition, la valeur de $ddy$; il faudra la multiplier par $-y$; & après avoir ſubſtitué les valeurs de $dx^2$ & de $-yddy$ dans la formule $dx^2 - yddy = 0$ ou $= \infty$, il faudra ſuppoſer la quantité qu'on trouvera par cette ſubſtitution, égale à zero, & enſuite à l'infini, & l'on aura l'équation qui contiendra la valeur déterminée de la changeante $BC(y)$ qui convient au point d'inflexion ou de rebrouſſement de la courbe propoſée. On peut de même ſe ſervir de la ſeconde formule.

Par exemple $\varphi hH$ eſt un arc de circonference dont le rayon $B\varphi$, $BH = a$; on nommera l'arc $\varphi hH(z)$; $\varphi\kappa\chi fcC$ eſt une courbe telle que nommant $B\chi$, $B\kappa(y)$, & par conſequent $\chi H(a-y)$, & une droite donnée, $b$, l'équation de cette courbe ſoit $bz = yy - 2ay + aa$. Pour trouver le point d'inflexion, qu'on ſuppoſe être en $\chi$, on menera le FIG. XLV.

rayon $B\varkappa h$ infiniment proche du rayon $B\chi H$, & on tirera du centre $B$ le petit arc $\chi\delta$, qu'on nommera $dx$; $\delta\varkappa$ ſera $dy$, & $Hh$ ſera $dz$. Pour trouver la valeur de $\chi\delta$ $(dx)$, on aura par le moyen des deux ſecteurs ou triangles ſemblables $HBh$, $\chi B\delta$; $BH(a) . B\chi(y) :: Hb(dz) . \chi\delta(dx) = \frac{ydz}{a}$. En prenant la difference de l'équation de la courbe, on aura $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b}$; par conſequent $dx = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$; & $dx^2 = \frac{4y^4 - 8ay^3 + 4aayy}{aabb} dy^2$, & $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{ab} \sqrt{4y^4 - 8ay^3 + 4aayy + aabb}$; on en prendra la difference $ddu = 0 = \frac{ddy}{ab} \sqrt{4y^4 - 8ay^3 + 4aayy + aabb} + \frac{8y^3 - 12ayy + 4aay}{\sqrt{4y^4 - 8ay^3 + 4aayy + aabb}} \times \frac{dy^2}{ab}$ Après avoir réduit les deux termes au même dénominateur, on la ſuppoſera égale à zero, & l'on prendra la valeur de $ddy$, qu'on multipliera par $-y$ pour avoir la valeur de $-yddy$. On ſubſtituera enſuite les valeurs de $dx^2$ & de $-yddy$ qu'on a trouvées, dans la formule $dx^2 - yddy = 0$; & après les avoir réduites au même dénominateur, on les ſuppoſera égales à zero; ce qui donnera une équation qui n'aura plus de differences, & qui étant diviſée par $y - a$, donnera $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0$, qui eſt l'équation qui contient la valeur de $BC$ ou $B\chi$ $(y)$ au point d'inflexion de la courbe propoſée.

## REMARQUES.

### I.

564. POUR trouver les formules du point d'inflexion ou de rebrouſſement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même point, par le moyen des angles infiniment petits qu'on conçoit formés à chaque point de la courbe par les tangentes des points pris deux à deux infiniment proches, ou par deux parties voiſines infiniment petites, leſquels angles étant pris pour poſitifs dans l'une des deux parties concave ou convexe de la courbe, ils ſont négatifs dans l'autre; on a pris les petites parties de la courbe; c'eſt-à-dire les *du*, égales ou conſtantes, afin que les petits arcs qui ſont les meſures de ces angles infiniment petits, euſſent les mêmes rayons, & que l'on vît plus clairement leurs raports.

### I I.

565. Les Problêmes que l'on réſout par les formules qu'on a

données depuis le commencement de cette ſection, ſervent quand on a l'équation d'une courbe, à ſe former une idée de la courbe, & à la tracer à peu près telle qu'elle doit être; car on trouve par les formules des tangentes de quel côté elle eſt concave ou convexe; par celles des plus grandes & des moindres, on trouve ſi elle s'eloigne de ſon axe ou de ſon diametre, ou ſi elle s'en approche, & en quels endroits cela arrive; & par les formules des points d'inflexion & de rebrouſſement, on trouve ſi de concave elle ne devient point convexe, ou au contraire; comme auſſi ſi elle ne rebrouſſe point ſon chemin vers le côté de ſon origine.

### I I I.

566. Il faut bien remarquer ici que quand on a fait l'une des trois quantités $du$, $dx$, $dy$ conſtante, pour trouver la formule de quelque Problême; il faut en appliquant la formule aux équations particulieres, prendre pour conſtante la valeur de la difference qu'on a fait conſtante tirée de l'équation particuliere, & non pas une autre; autrement on ne trouveroit pas la réſolution que l'on cherche, qui eſt fondée ſur cette ſuppoſition.

### I V.

567. On peut déduire des formules de ce ſecond cas, les formules du premier cas dans lequel les ordonnées ſont paralleles; car en ſuppoſant le rayon changeant $BC$ ($y$) infini, alors les ordonnées $BC$, $Bc$ deviennent paralleles; or en ſuppoſant $y$ infini, le terme $dx^2$ de la formule $dx^2 - yddy = 0$, devient zero par raport à l'autre terme $-yddy$; & en diviſant par $-y$, on aura $ddy = 0$, ou $= \infty$, pour la formule du premier cas, qui eſt auſſi celle qu'on a trouvée.

### V.

Comme les formules des dévelopées ſe déduiſent aiſément de ce que l'on a démontré pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement, & qu'elles ſont très-utiles à la réſolution de pluſieurs Problêmes, on va auſſi les démontrer.

### V I.

### *Des formules pour trouver les dévelopées des courbes.*

568. On a déja vû que les rayons de la dévelopée d'une courbe ſont tous perpendiculaires à la courbe * dont elle eſt la dévelopée, & qu'ils ſont les tangentes de la dévelopée; de maniere

* 507.

que chaque rayon de la dévelopée eſt exactement la partie de la tangente depuis le point touchant de la dévelopée qui convient à ce rayon, juſqu'au point de la courbe à laquelle ce rayon eſt perpendiculaire. D'où il ſuit que quand on a une courbe pour trouver tous les points de la courbe qui eſt ſa dévelopée, il ne faut que trouver l'expreſſion changeante du rayon de la dévelopée. Or l'on a trouvé des formules generales pour découvrir cette expreſſion du rayon de la dévelopée de toute courbe donnée; on va expliquer la maniere dont on peut trouver ces formules.

569. FIG. XLV. $Ccf$ eſt une courbe quelconque dont les ordonnées $BC$, qu'on nommera ($y$), partent d'un même point, & qui repréſentera auſſi toutes les courbes dont les ordonnées ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires à leurs coupées, en ſuppoſant $BC$ ($y$) infinie. Qu'on prenne une partie $cf$ infiniment petite de cette courbe, qu'on nommera $du$; qu'on conçoive auſſi $ce$ ($dx$), $ef$ ($dy$), & toutes les autres lignes comme on les a expliquées ci deſſus; * & de plus qu'on conçoive $cD$, $fD$ qui ſoient toutes deux perpendiculaires à la courbe aux extrêmités $c$, $f$ de la petite partie $cf$; ces deux perpendiculaires iront ſe couper à un point $D$, qui ſera un des points de la dévelopée; il faut chercher une formule pour exprimer la longueur $cD$ du rayon de la dévelopée, qu'on nommera $z$. Pour la trouver, on remarquera que le ſecteur ou triangle $cDf$, rectangle en $f$ par la ſuppoſition, eſt ſemblable au petit ſecteur ou triangle $fci$ rectangle en $i$; car l'angle $Dcf$ faiſant un angle droit tant avec l'angle $cDf$, qu'avec l'angle $fci$, ces deux derniers ſont égaux. On aura donc cette proportion le petit arc $fi$ (* $\frac{dudx^2 - ydudd y}{ydx}$). $ci$ ($du$) :: $cf$ ($du$). $cD$ ($z$) $= \frac{ydudx}{dx^2 - yddy}$; & mettant au lieu de $du$ ſa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on aura pour la formule du rayon de la dévelopée qui ſuppoſe $du$ conſtante, 1. $z = \frac{ydx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}$. En ſe ſervant de la ſeconde valeur de l'arc $fi$, qui ſuppoſe de même $du$ conſtante, on aura encore $fi$ (* $\frac{dudxdy + yduddx}{ydy}$). $ci$ ($du$) :: $cf$ ($du$). $cD$ ($z$) $= \frac{ydudy}{dxdy + yddx}$, qui devient en mettant pour $du$ ſa valeur, 2. $z = \frac{ydy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy + yddx}$.

* 562.

* 562, vers la fin.

* 562, vers la fin.

570. En ſuppoſant $y$ infinie, l'on aura pour les formules du rayon de la dévelopée dans la ſuppoſition des $du$ conſtantes dans

les courbes dont les ordonnées $y$ ſont paralleles entr'elles & perpendiculaires aux coupées $x$, 1. $z = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{-ddy}$; 2. $z = \frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddx}$.

571. Si l'on ſuppoſe $dx$ conſtante, c'eſt-à-dire $Cd$, $ce$ égales, on trouvera d'autres formules de cette maniere. On a déja prouvé * que le petit angle $gcl$ étant ſuppoſé égal à l'angle $cBf$, * 562. le triangle $lce$ eſt ſemblable au triangle $Ccd$, & égal, à cauſe de $Cd = ce$; ainſi $fl$ eſt $-ddy$, & $nl$ eſt $-ddu$, parceque les $dx$ étant conſtantes, les $dy$ & les $du$ vont en diminuant; le petit triangle $lfn$ rectangle en $n$, eſt ſemblable au triangle $lce$ rectangle en $e$, ayant l'angle $nlf$ commun; on aura donc $cl\,(du) . ce\,(dx) :: fl\,(-ddy) . fn = \frac{-dxddy}{du}$; on aura encore $el\,(dy) . ce\,(dx) :: nl\,(-ddu) . fn = \frac{-dxddu}{dy}$. Les deux ſecteurs ou triangles ſemblables par la ſuppoſition $cBf$, $icn$, donneront auſſi $Bc\,(y) . ce\,(dx) :: ci\,(du) . in = \frac{dudx}{y}$; par conſequent $fi = in + fn = \frac{du^2dx - ydxddy}{ydu}$, & encore $fi = in + fn = \frac{dudxdy - ydxddu}{ydy}$. Les ſecteurs ou triangles ſemblables $icf$, $cDf$, donneront $fi\,(\frac{du^2dx - ydxddy}{ydu}) . ci\,(du) :: cf\,(du) . cD\,(z) = \frac{ydu^3}{du^2dx - ydxddy}$; & en mettant pour $du^3$ ſa valeur, on aura la premiere formule, 1. $z = \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2} \times \sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$. Les mêmes triangles donneront encore $fi\,(\frac{dudxdy - ydxddu}{ydy}) . ci\,(du) :: cf\,(du) . cD\,(z) = \frac{ydu^2dy}{dudxdy - ydxddu}$, où mettant les valeurs de $du$, $du^2$, l'on aura pour la ſeconde formule, 2. $z = \frac{ydx^2dy + ydy^3}{dxdy\sqrt{dx^2+dy^2} - ydxddu}$.

572. En ſuppoſant $y$ infinie, on aura les formules pour le rayon de la dévelopée des courbes, dont les ordonnées $y$ ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires aux coupées $x$, dans la ſuppoſition des $dx$ conſtantes; la 1re $z = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$; la 2e $z = \frac{dx^2dy + dy^3}{-dxddu}$.

573. Enfin ſi l'on ſuppoſe $dy$ conſtante, il faut tirer $fs$ parallele à $ce$, qui rencontre $cl$ en $s$, & mener $sr$ parallele à $fc$, & les triangles $cCd$ rectangle en $d$, $csr$ rectangle en $r$, ſeront ſemblables & égaux par la ſuppoſition de $dc\,(dy) = rs = ef\,(dy)$; par conſequent $re = sf = ddx$, & $sn = ddu$, l'une & l'autre poſitives, les $dx$ & $du$ augmentant dans la ſuppoſition des $dy$ conſtantes; & de plus les triangles $csr$, $cle$, & $nsf$ rectangles en $r$, en $e$, & en $n$, ſont ſemblables à cauſe des paralleles.

On aura donc $cl\,(du)\,.\,el\,(dy) :: sf\,(ddx)\,.\,fn = \frac{dyddx}{du}$; on aura encore $ce\,(dx)\,.\,el\,(dy) :: sn\,(ddu)\,.\,fn = \frac{dyddu}{dx}$ On ſçait par les cas précedens que $in = \frac{dudx}{y}$; par conſequent $fi = in + nf = \frac{du^2dx + ydyddx}{ydu}$; & encore $fi = in + nf = \frac{dudx^2 + ydyddu}{ydx}$. A preſent les triangles ſemblables $icf$, $cDf$, donnent $fi$ $(\frac{du^2dx + ydyddx}{ydu})\; ci\,(du) :: cf\,(du)\,.\,cD\,(z) = \frac{ydu^3}{du^2dx + ydyddx}$, où mettant les valeurs de $du^2$, $du^3$, on aura la premiere formule, 1^re^ $z = \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx}$. Les mêmes triangles ſemblables donnent encore $fi\,(\frac{dudx^2 + ydyddu}{ydx})\,.\; ci\,(du) :: cf\,(du)\,.\,cD\,(z) = \frac{ydu^2dx}{dudx^2 + ydyddu}$, où mettant les valeurs de $du$, $du^2$, l'on aura la ſeconde formule, 2^e^ $z = \frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2} + ydyddu}$.

574. En ſuppoſant $y$ infinie, on aura les formules pour le rayon de la dévelopée des courbes dont les $y$ ſont paralleles entre elles, & perpendiculaires aux coupées $x$, dans la ſuppoſition des $dy$ conſtantes, qui ſont la 1^re^ $z = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dyddx}$; la 2^e^ $z = \frac{dx^3 + dxdy^2}{dyddu}$.

## *Uſage de ces formules.*

575. IL faut prendre dans l'équation de chaque courbe dont on voudra trouver le rayon de la dévelopée, les valeurs des differences premieres & ſecondes marquées dans celle des formules dont on aura fait le choix, en ſuppoſant pour avoir les ſecondes differences, celle des trois differences premieres $du$, $dx$, $dy$, pour conſtante, qui a été ſuppoſée conſtante dans la formule qu'on aura choiſie; & l'on trouvera en ſubſtituant ces valeurs dans cette formule, une quantité délivrée de toutes les differences qui fera connoître le rayon $cD\,(z)$ de la dévelopée.

FIGURE XLII.

576. Pour trouver, par exemple, le rayon $cD\,(z)$ de la dévelopée de la courbe $ACcf$, qu'on ſuppoſe être une parabole dont l'axe eſt $AB$, chaque coupée $Ab = x$, chaque ordonnée $bc = y$, le parametre $= p$, & dont l'équation eſt $px = yy$; il faut choiſir laquelle on voudra des ſix formules qu'on a données pour les courbes dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux coupées, par exemple $\frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, où $dx$ eſt ſuppoſée conſtante, & trouver enſuite par le moyen de

l'équation à la parabole $px = yy$, les valeurs en $y$ de $dx$, $dx^2$, $dy^2$, & $-ddy$, en ſuppoſant $dx$ conſtante, & les ſubſtituer dans la formule. On trouvera, en prenant les differences de l'équation de la parabole, $dx = \frac{2ydy}{p}$; & en ſuppoſant $dx$ conſtante, $0 = \frac{2dy^2 + 2yddy}{p}$, d'où l'on déduira $- ddy = \frac{dy^2}{y}$; & en quarrant $dx = \frac{2ydy}{p}$, on aura $dx^2 = \frac{4yy}{pp} dy^2$; par conſequent $dx^2 + dy^2 = \frac{4yy + pp}{pp} dy^2$, & $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{p} \sqrt{4yy + pp}$. On mettra dans la formule les valeurs de $dx$, $dx^2$, $-ddy$, & l'on aura $cD = z = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy} = \frac{\overline{4yy + pp} \times \frac{dy^3}{p^3} \times \sqrt{4yy + pp}}{\frac{2dy^3}{p}}$ $= \frac{\overline{4yy + pp}}{2pp} \times \sqrt{4yy + pp}$ C'eſt la valeur indéterminée du rayon de la dévelopée, qui convient à chaque point de la parabole. Et ſi l'on veut trouver pour chaque point particulier de la parabole, le point de la dévelopée qui y répond, $y$ étant déterminée pour chacun des points de la parabole, il faudra mettre cette valeur de $y$ dans le rayon qu'on vient de trouver, & il ne contiendra que des connues; mener par ce point de la parabole la perpendiculaire à ce point-là, c'eſt-à-dire à la tangente de la parabole en ce point-là, & lui donner la longueur déterminée du rayon, & ſon extrêmité ſera le point correſpondant de la dévelopée.

77. Si l'on veut trouver la longueur du rayon de la dévelopée pour le ſommet $A$ où $y = 0$; il n'y a qu'à ſuppoſer $y = 0$ dans la valeur indéterminée du rayon qui convient à chaque point de la parabole, & elle deviendra $\frac{1}{2}p$ pour le rayon du point $A$ qui eſt le ſommet; & comme l'axe $AB$ eſt perpendiculaire au ſommet $A$ de la parabole, en prenant ſur $AB$ une longueur $= \frac{1}{2}p$, l'on aura ſur l'axe le point de la dévelopée qui correſpond au ſommet $A$.

78. Si l'on veut trouver l'équation de la dévelopée, on menera du point $D$ la perpendiculaire $DV$ à l'axe $AB$, & la prenant pour une des ordonnées de la dévelopée qui paſſe par tous les points $D$, on ſuppoſera $DV = t$; on prendra $AV$, qu'on nommera $u$, pour la ligne des coupées; & il faudra trouver une équation dont les changeantes ſoient $u$ & $t$ de cette maniere $AP = {}^* \frac{xdx + ydy}{dx}$, où ſubſtituant les valeurs de $x$, $dx$, $dy$, on trouvera $AP = \frac{yy}{p} + \frac{1}{2}p$. $bP = {}^* \frac{ydy}{dx}$; * 550.

* 550.

& en ſubſtituant les valeurs de $dx$, $dy$, on trouvera $bP = \frac{1}{2}p$. * 550. $cP = {}^{*}\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & en ſubſtituant les valeurs de $dx$, $dx^2$, $dy^2$, on trouvera $cP = \frac{1}{2}\sqrt{4yy + pp}$; par conſequent $PD = cD - cP = \frac{2yy}{pp}\sqrt{4yy + pp}$. L'on aura enſuite, à cauſe des triangles ſemblables, $Pcb$, $PDV$, $cP\left(\frac{1}{2}\sqrt{4yy + pp}\right) . cb\ (y) :: PD\left(\frac{2yy}{pp}\sqrt{4yy + pp}\right) .$ à $DV(t) = \frac{4y^3}{pp}$. On aura auſſi $cb(y) . bP\left(\frac{1}{2}p\right) :: DV\left(t = \frac{4y^3}{pp}\right) . PV = \frac{2yy}{p}$. Par conſequent $AV(u) = AP + PV = \frac{3yy}{p} + \frac{1}{2}p$. Ayant les valeurs de $u$ & de $t$ en $y$, il eſt facile de trouver l'équation de la dévelopée qui ne contienne pas d'autres changeantes que $u$ & $t$; & le calcul étant plus court en mettant au lieu de $y$ ſa valeur $y = \sqrt{px}$, on aura $u = 3x + \frac{1}{2}p$, & $u - \frac{1}{2}p = 3x$, (qu'on ſuppoſera pour abreger) $= s$; ainſi $x = \frac{1}{3}s$. Mettant dans $t = \frac{4y^3}{pp}$, la valeur de $y$ en $x$, on aura $t = \frac{4x}{p}\sqrt{px}$; où ſubſtituant la valeur de $x$ en $s$, on aura $t = \frac{4s}{3p}\sqrt{\frac{1}{3}ps}$, qui ſe réduit à $\frac{27ptt}{16} = s^3$, qui eſt l'équation de la dévelopée de la parabole, d'où l'on voit que cette dévelopée eſt la ſeconde parabole cubique, dont le parametre $\frac{27}{16}p$ eſt $\frac{27}{16}$ du parametre $p$ de la parabole donnée; l'axe $s = u - \frac{1}{2}p$ ſe prend ſur l'axe $AB$, & le ſommet eſt éloigné du ſommet $A$ de $\frac{1}{2}p$.

On trouvera de la même maniere les équations des developées des courbes données.

## REMARQUES.

### I.

579. QUAND une courbe eſt la dévelopée d'une courbe geometrique, il eſt évident qu'on peut trouver une ligne droite connue égale au rayon de la dévelopée pour chacun des points de la dévelopée; & comme le rayon d'un point de la dévelopée eſt égal à la partie de la courbe dévelopée, qui eſt depuis le point de cette courbe où commence le dévelopement, juſqu'au point du rayon, en y ajoutant dans quelques dévelopées une droite connue, (ce que l'on peut connoître, comme on l'a vû ci-deſſus, par l'équation de la dévelopée, & même par l'expreſſion du rayon de cette dévelopée); il eſt clair que l'on peut trouver la longueur de la dévelopée, ce que l'on appelle *la rectification* de la courbe; c'eſt-à-dire, on peut trouver une droite égale à la longueur de

de la dévelopée & de chacune de ſes parties; d'où l'on voit par l'exemple précedent, que la ſeconde parabole cubique peut être *rectifiée.*

## II.

80. On a déduit les ſix formules du rayon de la dévelopée des courbes dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux coupées, des formules des courbes dont les ordonnées partent d'un même point, pour être court; mais on en a mis ſix pour chacun de ces cas, ſelon les trois ſuppoſitions qu'on peut faire de l'une des trois differences $du$, $dx$, $dy$, conſtante; parcequ'il y a des cas où le calcul eſt plus facile dans l'une de ces ſuppoſitions que dans les autres; ce que l'on diſtinguera facilement dans la pratique.

## III.

81. On auroit pû faire des formules pour les courbes qui tournent leur convexité vers l'axe ou vers le pole des ordonnées; mais comme l'on trouve le même rayon avec les formules que l'on a données pour le côté de la concavité, avec cette ſeule difference qu'il eſt négatif, il auroit été inutile de les mettre ici: on remarquera ſeulement que dans les courbes qui ont un point d'inflexion ou de rebrouſſement, c'eſt-à-dire, dont une partie eſt concave vers l'axe ou vers le pole des ordonnées, & l'autre convexe, les rayons de la dévelopée ſont poſitifs dans la partie concave, & négatifs dans l'autre, (ce qui eſt viſible même par les figures 42, 44, 45; où deux rayons infiniment proches vont ſe rencontrer au point de la dévelopée $D$, qui eſt d'un côté dans la partie concave, & du côté oppoſé dans la convexe), & le point d'inflexion ou de rebrouſſement eſt celui où ſe fait le changement de poſitifs en négatifs; c'eſt pourquoi * il faut que le rayon de la dévelopée ſoit infini ou zero au point d'inflexion ou de rebrouſſement. *554.

## IV.

Tous les Problêmes qui ſe reſolvent par les formules qu'on a données depuis le commencement de cette ſection, n'ont beſoin que du ſeul calcul differentiel. La réſolution des ſuivans ſe commence par le calcul differentiel, qui donne l'équation du Problême, & elle s'acheve ordinairement par le calcul integral.

# SECTION III.

## *Où l'on fait découvrir les formules des principaux Problêmes dont la réſolution commence par le calcul differentiel, & s'achève par le calcul integral.*

### I. *La formule pour la rectification des courbes.*

582. EN nommant $u$ la courbe ou l'arc de la courbe dont on cherche la longueur, $du$ marquera chaque partie infiniment petite de la courbe; & ſuppoſant dans les courbes dont les ordonnées, qu'on nommera $y$, ſont paralleles, qu'elles ſont auſſi perpendiculaires aux coupées $x$; & dans les courbes dont les ordonnées $y$ partent d'un même point qu'en prenant les ordonnées infiniment proches de chaque petite partie $du$ de la courbe, on tire du centre commun avec le rayon $y$ un petit arc de cercle, qu'on nommera $dx$, juſqu'à l'ordonnée infiniment proche; il eſt évident que chaque petit triangle dont $du$ eſt l'hypotenuſe, $dx$ & $dy$ les côtés, eſt toujours rectangle. Par conſequent *la formule generale de la rectification* des courbes eſt $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Fig. XLII. XLIV. XLV.

### USAGE DE LA FORMULE.

583. POUR trouver la longueur d'une courbe ou d'une partie de cette courbe, il faut trouver par l'équation de la courbe la valeur de $dy^2$ en $x, dx, dx^2$; ou la valeur de $dx^2$ en $y, dy, dy^2$; & ſubſtituer l'une ou l'autre de ces valeurs dans la formule, & alors $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſera changée en une quantité qui n'aura qu'une ſeule inconnue avec ſes differences qui ſera égale à $du$. Ce ſera l'équation que l'on cherchoit par la formule pour la rectification de la courbe; il ne reſtera plus qu'à en trouver l'integrale; ce que l'on enſeignera dans la Partie ſuivante.

584. Pour trouver, par exemple, la longueur de la 2^e^ parabole cubique, dont l'équation eſt $x^3 = pyy$; on prendra d'abord les differences de l'équation, & l'on aura $3xxdx = 2pydy$, ce qui donne $dy = \frac{3xx}{2py} dx$, & $dy^2 = \frac{9x^4}{4ppyy} dx^2$; où ſubſtituant au lieu de $pyy$ ſa valeur $x^3$, on aura $dy^2 = \frac{9x}{4p} dx^2$. On ſubſti-

tuera cette valeur de $dy^2$ dans la formule generale, & l'on aura $du = \frac{dx}{2} \times \frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$. C'eſt l'équation que l'on cherchoit; il ne faut plus que trouver les integrales de chaque membre, qu'on verra dans la troiſiéme Partie être $u = \frac{1}{27\sqrt{p}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8p}{27}$. C'eſt là longueur de telle partie de la $2^e$ parabole cubique qu'on voudra, en déterminant la valeur de la coupée $x$ de cette partie, & la ſubſtituant au lieu de $x$ dans cette équation.

## DEFINITION.

585. L'EXPRESSION $\frac{dx}{2} \times \frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$ de chaque partie infiniment petite d'une courbe particuliere dans cet exemple, de la $2^e$ parabole cubique, tirée de l'équation de cette courbe, & qui ne contient qu'une ſeule des changeantes de cette courbe avec les differences de cette même changeante, s'appelle *l'élement* de cette courbe; la ſomme des élemens de la courbe, qui eſt l'integrale de l'element, fait la courbe entiere: Pour marquer cette ſomme ou cette integrale par l'expreſſion de l'élement, on met au-devant la lettre S. ainſi S. $\frac{dx}{2\sqrt{p}} \times \sqrt{4p+9x}$, marque l'integrale de cet element.

Il faudra entendre la même choſe dans les formules ſuivantes de l'aire des courbes, des ſurfaces courbes, & de la ſolidité des corps formés par la révolution des courbes autour d'une ligne droite.

### *Element de l'ellipſe.*

586. SUPPOSANT que le grand axe $A$a ſoit $= 2a$; ſon parametre $= p$; que les coupées $KB$, $K$b, $Kb$, &c. ſont $= x$, les ordonnées $BC$, b$c$, $b\varkappa$, &c. $= y$, & que l'équation de l'ellipſe eſt $\frac{2a}{p} yy = aa - xx$; ce qui donne $2ayy = aap - pxx$; en prenant les differences on trouvera $\frac{2a}{p} ydy = - xdx$; d'où l'on aura $Ce$, $\varkappa e$ $(dy) = - \frac{pxdx}{2ay}$, & $dy^2 = \frac{ppxx}{4aayy} dx^2 =$ (en mettant la valeur de $2ayy$) $\frac{pxx}{2a^3 - 2axx} \times dx^2$. Subſtituant cette valeur de $dy^2$ dans la formule generale $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouvera $Cc$, $\chi\varkappa$ $(du) = dx \sqrt{\frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2axx}}$. C'eſt l'élement de l'ellipſe; quand $p = 2a$, $du = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$. FIGURE XLVI.

### *Element de l'hyperbole.*

587. FIGURE XLVII. EN ſuppoſant les mêmes dénominations pour l'hyperbole par raport à ſon premier axe, $2KA = 2a$, & que l'équation eſt $\frac{2a}{p} yy = xx - aa$; on trouvera de la même maniere que $Cc (du) = dx \sqrt{\frac{pxx + 2axx - 2a^3}{2axx - 2a^3}}$; quand $p = 2a$, $du = dx \sqrt{\frac{2xx - aa}{xx - aa}}$. Mais par raport à ſon ſecond axe $DKd$, qu'on nommera $2b$; ſon parametre $\pi$, la coupée $Kb$ priſe ſur le ſecond axe $(x)$; l'ordonnée $bC (y)$ parallele au premier axe $KA$, l'équation ſera $\frac{2b}{\pi} yy = xx + bb$; & l'on trouvera de la même maniere $Cc (du) = dx \sqrt{\frac{\pi xx + 2bxx + 2b^3}{2bxx + 2b^3}}$; quand $\pi = 2b = 2a$ dans ce cas, $du = dx \sqrt{\frac{2xx + aa}{xx + aa}}$.

## *Manieres particulieres de trouver l'élement des courbes.*

### 1°. *L'élement d'un arc de cercle.*

588. FIGURE XXXV. * 289. EN nommant le rayon $CA (r)$ du cercle $AFE$, la coupée $AB (x)$, l'ordonnée $BF (y = \sqrt{2rx - xx}$ *), menant l'ordonnée $Gg$ infiniment proche de la premiere, & $Fi$ parallele à $AC$, le triangle $CBF$ rectangle en $B$ ſera ſemblable au triangle $iFg$ rectangle en $i$; car ôtant les deux angles droits $BFi$, $CFg$, l'angle commun $CFi$, les angles aigus reſtans $BFC$, $iFg$ ſont égaux. On aura donc $BF (y = \sqrt{2rx - xx}) . CF (r) :: Fi (dx) . Fg (du) = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. C'eſt l'élement d'une demi-circonference $AFE$, ou de tel arc $AF$ qu'on voudra de la demi-circonference dont $AB (x)$ eſt le ſinus verſe: ainſi $u = \text{S}. \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}} =$ à l'arc $AF$.

589. * 289. Si l'on nomme la coupée $CB (x)$ en prenant l'origine au centre $C$, alors $BF = \sqrt{rr - xx}$ *, & les mêmes triangles ſemblables donneront $BF (\sqrt{rr - xx}) . CF (r) :: Fi (dx) . Fg (du) = \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$. C'eſt l'élement du quart de circonference, ou de tel arc $MF$ qu'on voudra moindre que le quart de la circonference dont la ligne $CB (x)$ eſt le ſinus droit: ainſi $u = \text{S}. \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}} =$ à l'arc $MF$.

FIG. XLI. Si l'on imagine que $FH$ eſt une partie infiniment petite de la demi-circonference $AHFE$, & qu'on tire les cordes $AH$, $AF$, $EF$, $EH$, on aura le petit triangle $FLH$, qu'on peut regarder pendant le calcul comme rectangle en $L$, puiſque l'angle exterieur $ELA = FLH$ ne differe du droit interieur $LHA$ que de l'angle interieur $FAH$ qui eſt ſuppoſé infiniment petit, & n'avoir aucun raport fini avec aucun angle d'une grandeur finie & donnée quelque petit qu'il puiſſe être. Or le petit triangle $FLH$ eſt ſemblable au triangle $AHE$ rectangle en $H$, car les angles aigus $LHF$, $EAH$ ont pour meſure, le premier, la moitié de l'arc $EF$, le ſecond, la moitie de l'arc $EFH$, qui ne differe du premier que de l'arc infiniment petit $FH$; ainſi nommant le diametre $AE$ $(2r)$, la corde $AH\,(x)$, $LF$ ſera $dx$, $EH$ ſera $\sqrt{4rr - xx}$; & l'on aura $EH\,(\sqrt{4rr - xx}) . AE\,(2r) :: LF\,(dx) . HF = \frac{2rdx}{\sqrt{4rr - xr}}$. C'eſt encore l'élement de la demi-circonference $AHE$, & de tel arc $AH$ qu'on voudra, dont $AH\,(x)$ ſera la corde; ainſi l'arc $AH\,(u) = \text{S.}\,\frac{2rdx}{\sqrt{4rr - xx}}$.

90. Enfin ſi l'on prend l'arc $Rr$ infiniment petit, & que du centre $O$ on mene les deux ſecantes $ORN$, $Orn$ à la tangente $enN$, & qu'on tire du centre $O$ avec le rayon $On$ l'arc $nq$, en nommant le rayon $Oe\,(r)$, la tangente $cN\,(x)$, $Nn$ ſera $dx$; la ſecante $ON$ ſera $= \sqrt{rr + xx}$, ſa difference $qN$ ſera $= \frac{xdx}{\sqrt{rr + xx}}$, & les triangles ſemblables $OeN$, $Nqn$, rectangles en $e$ & en $q$, donneront $ON\,(\sqrt{rr + xx}) . Oe\,(r) :: Nn\,(dx) . qn = \frac{rdx}{\sqrt{rr + xx}}$; & les ſecteurs ſemblables $ORr$, $onq$ donneront $On\,(\sqrt{rr + xx}) . Or\,(r) :: qn\left(\frac{rdx}{\sqrt{rr + xx}}\right) . Rr\,(du) = \frac{rrdx}{rr + xx}$. C'eſt encore l'élement du quart de circonference, ou de tel arc $eR$ qu'on voudra moindre que le quart de la circonference dont $eN\,(x)$ ſera la tangente; ainſi $u = \text{S.}\,\frac{rrdx}{rr + xx}$ = à l'arc $eR$. Fig. XLI.

### 2°. *L'élement de la parabole.*

91. SUPPOSANT que $ACc$ eſt une parabole dont l'axe eſt $AB\,(x)$, l'ordonnée $BC\,(y)$ le parametre $(p)$, l'équation $yy = px$, la ſoutangente $BT =$ * $2x$, & par conſequent la tangente $CT = \sqrt{yy + 4xx}$ = (en mettant pour $yy$ ſa valeur $px$) $\sqrt{px + 4xx}$. Les triangles ſemblables $Cdc$, $CBT$ donneront $BT\,(2x) . CT\,(\sqrt{px + 4xx}) :: Cd\,(dx) . Cc\,(du) = \frac{dx}{2x}\sqrt{px + 4xx}$ = (en multipliant le numerateur & le dénominateur par Fig. XLII. * 551.

$\sqrt{px + 4xx}$, & diviſant par $x$) $= \frac{pdx + 4xdx}{2\sqrt{px + 4xx}}$. L'une & l'autre expreſſion eſt l'élement d'un arc de parabole dont la coupée eſt $x$.

### 3°. *L'élement des paraboles de tous les degrés, & des hyperboles de tous les degrés par raport aux aſymptotes.*

592. L'EQUATION $x^m = 1y$ repreſente les paraboles de tous les degrés quand l'expoſant $m$ eſt un nombre poſitif entier ou rompu, & les hyperboles de tous les degres par raport aux aſymptotes quand l'expoſant $m$ eſt négatif. On prend l'unité pour le parametre, afin d'abreger le calcul. On trouvera* que la ſoutangente eſt $= \frac{1}{m} x$, & que la tangente $= \sqrt{\frac{1}{mm} xx + yy}$ $=$ (en mettant $x^{2m}$ au lieu de $yy$) $\frac{x}{m} \sqrt{1 + mmx^{2m-2}}$. L'on aura donc (à cauſe des triangles ſemblables $TBC$, $Cdc$, $BT$ ($\frac{1}{m} x$) . $CT$ ($\frac{1}{m} x\sqrt{1 + m^2 x^{2m-2}}$) :: $Cd$ ($dx$) . $Cc$ ($du$) $= dx\sqrt{1 + m^2 x^{2\;-2}}$. C'eſt l'élement de toutes les paraboles & hyperboles ; il n'y aura qu'à ſubſtituer au lieu de $m$ l'expoſant particulier de chacune de ces courbes ; par exemple pour la ſeconde parabole cubique, $m = \frac{3}{2}$ ; l'équation $x^m = 1y$ ſera $x^3 = 1yy$, & $du = \frac{1}{2} dx \sqrt{4 + 9x}$. On peut changer par la multiplication l'expreſſion generale $du = dx\sqrt{1 + m^2 x^{2m-2}}$ en ces deux autres équivalentes $du = \frac{dx}{x} \sqrt{1xx + m^2 x^{2m}}$ ; $du = \frac{1xxdx + m^2 x^{2m} dx}{x\sqrt{1xx + m^2 x^{2m}}}$.

* 550.

## REMARQUE.

593. QUAND on peut trouver l'integrale de l'élement d'une courbe, cette courbe peut être rectifiée ; mais on ne connoît pas encore la rectification de celles qui ont des élemens dont on n'a pas pu trouver les integrales ; la circonference & les arcs de circonference, la parabole du premier genre, l'ellipſe & l'hyperbole ſont de la derniere ſorte, auſſi-bien qu'un très-grand nombre de courbes plus compoſées geometriques & méchaniques. Quand on ne peut pas trouver la rectification des courbes plus compoſées que les ſections coniques, on tâche de réduire leur rectification à celle des ſections coniques, de maniere que la rectification de ces dernieres étant ſuppoſée, on a la rectification de ces autres plus compoſées qu'on peut y réduire. C'eſt pour cela qu'on a mis ici les élemens de la rectification des ſections coniques ; on en verra l'uſage dans la *troiſiéme Partie*.

## II. *Les formules generales pour trouver l'élement de l'aire des courbes.*

94. L'AIRE d'une courbe compriſe par la ſeule courbe entiere quand elle rentre en elle-même comme le cercle, l'ellipſe & les autres ſemblables; comme auſſi l'aire compriſe par les courbes qui ne rentrent pas en elles-mêmes comme les paraboles, les hyperboles & les autres ſemblables, & par des lignes droites comme ſont leurs coupées & leurs ordonnées; enfin une partie finie de l'aire d'une courbe comme un ſegment, un ſecteur, &c. chacune de ces aires ou de ces plans curvilignes ou mixtes, c'eſt-à-dire, en partie curviligne, en partie rectiligne, peut être conçue partagée en une infinité de figures rectilignes, dont l'aire ou l'eſpace eſt infiniment petit, par raport à l'eſpace entier. Ces petites figures rectilignes qui rempliſſent l'eſpace entier, peuvent être, ſelon les differentes courbes, de petits rectangles, ou de petits triangles, ou de petits parallelogrammes, ou de petits trapezes, &c. chacune eſt la difference ou *l'élement* de l'aire entiere; & leur ſomme, qui eſt l'integrale de l'élement, eſt l'aire entiere de la figure. On appelle la meſure de l'aire d'une figure curviligne ou mixte, *la quadrature* de la courbe qui fait le circuit, ou une partie du circuit de la figure. On rapportera à deux cas la connoiſſance de l'aire des courbes, ou la quadrature des courbes. Le premier comprendra les courbes qui ont des ordonnées paralleles, & on les ſuppoſera perpendiculaires aux coupées, afin que les élemens de l'aire ſoient de petits rectangles. Le ſecond comprendra les courbes dont les ordonnées partent d'un même point, & leurs élemens ſeront de petits triangles dont chacun ſera compris entre deux ordonnées infiniment proches, & aura pour baſe une partie infiniment petite de la courbe. Il y a des courbes qui peuvent appartenir aux deux cas, comme le cercle, l'ellipſe & autres ſemblables. Car en concevant dans un demi-cercle & dans une demi-ellipſe les ordonnées infiniment proches perpendiculaires à l'axe, les élemens ſeront des rectangles; & en concevant du centre dans le cercle & dans l'ellipſe des rayons infiniment proches terminés à la courbe, & encore dans l'ellipſe concevant des lignes tirées d'un des foyers à l'ellipſe, les élemens ſeront de petits triangles. Les ſegmens FIG. XLII.

d'une courbe comme $ACA$ (fig. 42,) peuvent ſe rapporter au ſecond cas.

### PREMIER CAS.

*Formule generale pour trouver l'élement de l'aire des courbes dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux coupées.*

595. EN nommant les coupées $AB\ (x)$, les ordonnées $BC\ (y)$, FIG. XLII. la difference $Bb\ (dx)$ de la coupée ſera la largeur de l'élement $CBbc$ de l'aire; l'ordonnée $BC\ (y)$ ſera la baſe de ce petit rectangle; & ce petit rectangle $CBbc$ ſera $ydx$; ainſi nommant l'aire entiere $ACB$, ou cet eſpace entier $(e)$, l'on aura $de = ydx$. *C'eſt la formule pour trouver la quadrature des courbes.*

### USAGE DE LA FORMULE.

596. IL faut, pour trouver l'aire des courbes, prendre par le moyen de l'équation de chacune, la valeur de $y$ en $x$, & quand il y a dans l'équation $dy$, la valeur de $dy$ en $dx$; & ſubſtituer ces valeurs dans la formule, qui n'aura, après la ſubſtitution, qu'une ſeule inconnue $x$ & ſa difference $dx$, ce ſera l'élement de l'aire; il ne reſtera plus qu'à prendre l'integrale de cet élement pour avoir la quadrature de la courbe, ou de telle partie qu'on voudra déterminer dont la coupée ſera $x$. On pourroit auſſi trouver l'élement de chaque courbe en $y$ & $dy$ au lieu de $x$ & de $dx$.

*L'élement de l'aire de la parabole & ſa quadrature.*

597. POUR trouver, par exemple, l'aire de la parabole dont l'équation eſt $yy = px$, on prendra la valeur de $y$ en $x$, & l'on aura $y = \sqrt{px}$; on ſubſtituera cette valeur dans la formule, & l'on aura $de = dx\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ pour l'élement de l'aire de la parabole. Si l'on veut trouver ici l'integrale de * 532. cette difference, on la ſuppoſera repreſentée * par $nax^{n-1}dx$, & ſon integrale qu'on cherche par $ax^n$; ainſi l'expoſant $n = \frac{1}{2}$, $x = x$, $dx = dx$, $p^{\frac{1}{2}} = a$. 1°. Il faut mettre dans l'élement, $x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$ à la place de $x^{\frac{1}{2}}$, ce qui donnera $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$. 2°. Il faut multiplier $dx$ par $\frac{3}{2}$, & l'on aura le diviſeur $\frac{3}{2}dx$. 3°. Il faut diviſer $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ par ce diviſeur, & l'on

aura

aura le quotient $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{px} = e$ pour l'integrale que l'on cherche. Subſtituant dans cette integrale $y = \sqrt{px}$ à la place de $\sqrt{px}$, l'integrale ſera $\frac{2}{3}xy = e$. Cette integrale marque qu'en déterminant la coupée $x$ d'un eſpace de parabole, en ſuppoſant, par exemple, $x = b$, & ſon ordonnée $y = c$, cet eſpace $e = \frac{2}{3}bc$; ainſi un eſpace parabolique eſt toujours les deux tiers du rectangle de la coupée de cet eſpace par ſon ordonnée.

### *L'élement de l'aire de toutes les paraboles & de toutes les hyperboles par raport aux aſymptotes & leur quadrature.*

8. L'EQUATION à toutes les paraboles eſt $x^m = y$, quand l'expoſant $m$ eſt un nombre poſitif entier ou rompu; c'eſt auſſi l'équation à toutes les hyperboles quand l'expoſant $m$ eſt négatif. En ſubſtituant la valeur de $y$ dans la formule $de = y\,dx$, on trouve $de = x^m dx$. C'eſt l'élement de l'aire de toutes les paraboles & hyperboles. On trouvera par la méthode de l'article * que l'integrale eſt $e = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$; & en * 532.
mettant dans cette integrale $y = x^m$ à la place de $x^m$, l'integrale eſt $\frac{1}{m+1}xy$. Ce qui fait voir que l'eſpace parabolique de telle parabole qu'on voudra déterminer, en ſuppoſant $m$ égale au nombre qu'on voudra, & ſes coordonnées $x$ & $y$ égales à telles grandeurs qu'on voudra, eſt au rectangle des coordonnées de cet eſpace qu'on aura déterminé, comme l'unité eſt au nombre repréſenté par $m+1$. Il en eſt de même de l'eſpace hyperbolique entre les aſymptotes dont on voudra déterminer les coordonnées & l'expoſant. Mais on trouvera des genres d'hyperbole où l'integrale eſt infinie, & d'autres où elle eſt finie; par exemple dans l'hyperbole du 1^er^ genre $1 = xy$, où $m = -1$, l'integrale eſt $e = \frac{1}{-1+1}x^0 = \frac{1}{0}$, c'eſt-à-dire infinie. Mais en ſuppoſant que $m = -\frac{1}{2}$, l'équation ſera $xyy = 1$, & l'integrale ſera $e = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}xy = 2xy$. D'où l'on voit qu'on ne peut pas quarrer l'eſpace contenu entre l'hyperbole ordinaire $xy = 1$, & ſon aſymptote; mais on peut le quarrer dans l'hyperbole $xyy = 1$, &c.

### *L'élement de l'air de l'ellipſe.*

599. Fig. XLVI. L'EQUATION de l'ellipſe étant $\frac{2a}{p}yy = aa - xx$, qui donne $y = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}}$, il faut ſubſtituer dans la formule $de = ydx$, cette valeur de $y$, & l'on aura l'élement de l'aire de l'ellipſe $de = dx\sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}} = BCcb$, & l'eſpace $KBCD\,(e) = S.\,dx\sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}}$. Quand l'origine eſt au ſommet de l'axe, & non pas au centre, l'équation eſt $\frac{2a}{p}yy = 2ax - xx$, d'où l'on tire $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans la formule, l'on trouve $de = dx\sqrt{\frac{2apx - prx}{2a}} = BCcb$ pour l'élement de l'aire de l'ellipſe; & l'eſpace $ABCA\,(e) = S.\,dx\sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$.

### *L'élement de l'aire de l'hyperbole.*

600. Figure XLVII. L'EQUATION par raport au premier axe étant $\frac{2a}{p}yy = xx - aa$, d'où l'on déduit $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$, il faut mettre cette valeur de $y$ dans la formule, & l'on aura $de = dx\sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}} = BCcb$ pour l'élement de l'aire de l'hyperbole; & l'eſpace $ABCA\,(e) = S.\,dx\sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$. Quand l'hyperbole eſt équilatere, c'eſt-à-dire, quand $p = 2a$, l'élement eſt $de = dx\sqrt{xx - aa}$; & l'eſpace $ABCA\,(e) = S.\,dx\sqrt{xx - aa}$.

L'équation de l'hyperbole en nommant ſon ſecond axe $dD\,(2b)$; la coupée $Kb$ priſe ſur le ſecond axe $(x)$; l'ordonnée $bC$ parallele au premier axe $(y)$; & le parametre du ſecond axe $\pi$; l'équation ſera $\frac{2b}{\pi}yy = xx + bb$, & $y = \sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}}$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans la formule, l'élement de l'aire de l'hyperbole ſera $de = dx\sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}} = bCc\beta$; & l'eſpace $KbCA\,(e) = S.\,dx\sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}}$. Dans l'hyperbole équilatere l'on aura $de = dx\sqrt{xx + aa} = bCc\beta$, & l'eſpace $KbCA\,(e) = S.\,dx\sqrt{xx + aa}$.

### *L'élement de l'eſpace hyperbolique* HMCA *d'une hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes.*

601. Figure XLVII. $KM$, $KG$, faiſant l'angle droit $MKG$, ſont les aſymptotes de l'hyperbole équilatere $ACc$. $KA$ eſt le demi axe; $A$ eſt le ſommet; $AH$, $CM$ ſont perpendiculaires ſur $KM$; l'an-

gle $AKH$ étant demi droit, $AH = KH$, qu'on ſuppoſera $= a, = 1$, en prenant $KH$ ($a$) pour l'unité. Soit la coupée $HM = x$; chaque ordonnée $MC = y$; l'équation eſt $ay + xy = aa$; ou bien $xy + 1y = 1$; d'où l'on tire $y = \frac{1}{1+x}$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans la formule generale $de = ydx$, on aura $MCcN$ ($de$) $= \frac{1dx}{1+x}$. C'eſt l'élement de l'eſpace hyperbolique $HMCA$ ($e$) $=$ S. $\frac{1dx}{1+x}$.

### *L'élement de l'aire du cercle.*

602. NOMMANT le rayon $CA$ ($r$), $CB$ ($x$), $BF$ ($y$), l'équation eſt $yy = rr - xx$; ainſi $y = \sqrt{rr - xx}$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans la formule $de = ydx$, on trouvera $GBFg$ ($de$) $= dx\sqrt{rr - xx}$; ainſi l'eſpace $CBFM$ ($e$) $=$ S. $dx\sqrt{rr - xx}$. Si l'on prend l'origine des coupées $x$ au ſommet $A$, c'eſt-à-dire, ſuppoſant $AB = x$, l'on aura $\overline{BF}^2$ ($yy$) $= 2rx - xx$. Par conſequent $y = \sqrt{2rx - xx}$, & $GBFg$ ($de$) $= ydx = dx\sqrt{2rx - xx}$; & l'eſpace $AFB$ ($e$) $=$ S. $dx\sqrt{2rx - xx}$. FIGURE XXXV.

## SECOND CAS.

### *Formule generale pour trouver l'élement de l'aire des courbes dont les ordonnées partent d'un point.*

603. SUPPOSANT que toutes les ordonnées $BC$, $Bc$, qu'on nommera $y$, partent d'un même point $B$, & que les deux $BC$, $Bc$ ſont infiniment proches, & forment le petit triangle $CBc$ qui eſt l'élement de l'aire de la courbe; ſi du centre $B$ avec le rayon $BC$ on tire le petit arc $Cd$, qu'on nommera $dx$, & qu'on pourra prendre pour une petite droite perpendiculaire du ſommet $C$ ſur la baſe $Bc$ ($y$) du triangle $CBc$; il eſt évident que $Cd \times \frac{1}{2} Bc = \frac{1}{2} ydx = de$, ſera l'expreſſion du petit triangle $CBc$; & par conſequent *la formule* pour trouver l'élement de l'aire des courbes du ſecond cas. FIG. XLV.

## USAGE DE LA FORMULE.

604. IL faut par le moyen de l'équation d'une courbe du ſecond cas prendre la valeur de $y$ & celle de $x$, de maniere que ces deux valeurs n'ayent qu'une ſeule & même inconnue avec ſa difference, & ſubſtituer ces valeurs dans la formule $de = \frac{1}{2} ydx$, & l'on aura l'élement de l'aire de la courbe particuliere, dont l'integrale ſera l'aire de la courbe.

### *L'élement de l'aire du cercle.*

605. SI l'on imagine deux rayons infiniment proches, qu'on nommera ($r$), terminés à un arc infiniment petit de la circonference, lequel on nommera $du$, & la circonference $u$, l'on aura un petit triangle formé par ces deux rayons & par le petit arc, qui ſera l'élement de l'aire du cercle, & l'on peut concevoir qu'un des rayons $r$ en eſt la baſe, & le petit arc $du$ la hauteur; par conſequent ce petit triangle $de = \frac{1r}{2} du$, dont l'integrale eſt $e = \frac{1}{2} ru$; c'eſt-à-dire, l'aire du cercle eſt égale au produit du rayon $r$ par la demi-circonference $\frac{1}{2} u$. Si $u$ n'exprime qu'une partie de circonference, $\frac{1}{2} rdu$ ſera l'élement de l'aire d'un ſecteur dont l'aire $= \frac{1}{2} ru$.

### *L'élement de l'aire d'un ſegment de cercle.*

606. SOIENT menées les deux cordes $AH$, $AF$, qu'on nom-
FIG. XLI. mera ($y$), de l'extrêmité $A$ du diametre $AE$, qu'on nommera ($2r$), aux deux extrêmités de l'arc infiniment petit
$HF$ ($du$) & tiré du centre $A$ avec le rayon $AH$ l'arc infiniment petit $HL$, qu'on nommera $dx$, & qui peut être regardé comme la hauteur du petit triangle $AHF$, dont la
* 589. baſe eſt $AF$ ($y$), & $LF = dy$. Or l'on a trouvé* $FH = \frac{2rdy}{\sqrt{4rr - yy}}$
* 589. (on nomme ici $AF$ ($y$) qu'on avoit nommé* $x$); ainſi $\overline{FH}^2 =$
$\frac{4rr}{4rr - yy} dy^2$; par conſequent $\overline{HL}^2 = \overline{HF}^2 - \overline{FL}^2 = \frac{yydy^2}{4rr - yy}$,
d'où l'on déduit $HL = \frac{ydy}{\sqrt{4rr - yy}}$; par conſequent le petit
triangle $AHF = \frac{1}{2} AF \times HL = \frac{yydy}{2\sqrt{4rr - yy}}$. C'eſt l'élement
du ſegment $AHF = S. \frac{yydy}{2\sqrt{4rr - yy}}$.

### *Differentes expreſſions de l'élement* FCH *d'un ſecteur de cercle.*

607. NOMMANT le rayon $CA$ ($r$), $AB$ ($x$), $BF$ ($y = \sqrt{2rx - xx}$),
FIG. XLI. l'arc $AF$ ($u$); on a $FH = du$, & l'élement $HCF$ du ſecteur
eſt égal à $FH \times \frac{1}{2} CH = \frac{1}{2} rdu =$ (en mettant la valeur de
* 588. $du =^* \frac{rdx}{\sqrt{2r - x}}$) $\frac{rrdx}{2\sqrt{2rx - xx}}$; ainſi le ſecteur $ACF = S. \frac{rrdx}{2\sqrt{2rx - xx}}$.
* FIGURE Mais ſi l'on prend l'origine des $x$ au centre* $C$ en ſuppoſant
XXXV. $CB = x$; comme $du =^* \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$, l'élement $\frac{1}{2} rdu = FCg$
* 589. $= \frac{rrdx}{2\sqrt{rr - xx}}$; ainſi le ſecteur $MCF = S. \frac{rrdx}{2\sqrt{rr - xx}}$.

### *L'élement de l'aire d'un ſecteur d'ellipſe.*

608. SOIT le grand axe $Aa = 2a$, ſon parametre $= p$, le ſecond axe $2KD = 2b$, ſon parametre $= \pi$, chaque coupée $Kb = x$, l'ordonnée $b\varkappa = y$, & l'équation de l'ellipſe $\frac{2a}{p}yy = aa - xx$; d'où l'on tire $yy = \frac{aap - pxx}{2a}$, & $b\varkappa\ (y) = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}} = \frac{1}{2a} \times \sqrt{2a^3p - 2apxx}$. Pour avoir l'élement du ſecteur $aK\varkappa$ dont le ſommet eſt au centre $K$; c'eſt-à-dire, pour avoir l'aire du ſecteur infiniment petit $\varkappa K\chi$, il faut tirer du centre $K$ avec le rayon $K\varkappa$ le petit arc $\varkappa\varphi$; & il eſt évident que l'élement ou le petit ſecteur $\varkappa K\chi = \varkappa\varphi \times \frac{1}{2}K\chi$. Or $K\chi = \sqrt{\overline{Kb}^2 + \overline{b\varkappa}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2ax^2 - pxx + aap}{2a}} = \frac{1}{2a} \times \sqrt{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}$. La difference de $K\varkappa = \chi\varphi = \frac{2axdx - pxdx}{\sqrt{4aax^2 - 2apx^2 + 2a^3p}}$; ſon quarré eſt $\overline{\chi\varphi}^2 = \frac{4aaxx - 4apxx + ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} \times dx^2$. On a auſſi trouvé* $\overline{\chi\varkappa}^2 = du^2 = dx^2 \times \frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2axx} = dx^2 \times \frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx}$. Par conſequent $\overline{\varkappa\varphi}^2 = \overline{\chi\varkappa}^2 - \overline{\chi\varphi}^2 = \frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx} \times dx^2 - \frac{4aaxx + 4apxx - ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} \times dx^2$. Cette quantité ſe réduit à $\overline{\varkappa\varphi}^2 = \frac{4a^6pp\,x^2}{\overline{2a^3p - 2apxx} \times \overline{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}}$; d'où l'on déduit $\varkappa\varphi = \frac{2a^3pdx}{\sqrt{\overline{2a^3p - 2\,pxx} \times \overline{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}}}$. Par conſequent l'élement $\varkappa\varphi \times \frac{1}{2}K\chi = \frac{aapdx}{2\sqrt{2a^3p - 2apxx}}$. C'eſt la quantité où ſe réduit le produit que l'on trouve de la valeur de $\varkappa\varphi$ par la valeur de $\frac{1}{2}K\chi$. C'eſt auſſi le petit ſecteur $\chi K\varkappa$, qui eſt l'élement du ſecteur $aK\varkappa$ au centre de l'ellipſe.

FIG. XLVI.

* 586.

### *L'élement de l'aire d'un ſecteur ou triangle hyperbolique* KAC *par raport au premier axe* KA.

609. POUR trouver le petit ſecteur $CKc = Cg \times \frac{1}{2}KC$, qui eſt l'élement du ſecteur ou triangle hyperbolique $AKC$, ſoit la moitié du premier axe $KA = a$, ſon parametre $= p$, la coupée $KB = x$, l'ordonnée $BC = y$; & l'équation de l'hyperbole par raport à ſon premier axe $\frac{2a}{p}yy = xx - aa$, qui donne $yy = \frac{pxx - aap}{2a}$; ainſi $\overline{KC}^2 = \overline{KB}^2\ (xx) + \overline{BC}^2\ (yy) =$

FIGURE XLVII.

$\frac{2axx + pxx - aap}{2a}$; & $KC = \frac{1}{2a}\sqrt{4aaxx + 2apxx - 2a^3p}$; la difference de $KC = cg = \frac{2axdx + pxdx}{\sqrt{4aaxx + 2apxx - 2a^3p}}$. $\overline{cg}^2$
* 587. $= \frac{4aaxx + 4apxx + ppxx}{4aaxx + 2apxx - 2a^3p} dx^2$. Mais $\overline{Cc}^2$* $= \frac{2apxx + ppxx - 2a^3p}{2apxx - 2a^3p} dx^2$. Donc $Cg = \sqrt{\overline{Cc}^2 - \overline{cg}^2} = \frac{2a^3pdx}{\sqrt{\overline{2apxx - 2a^3p} \times \overline{4aaxx + 2apxx - 2a^3p}}}$. Par conſequent $Cg \times \frac{1}{2} KC = \frac{aapdx}{2\sqrt{2apxx - 2a^3p}}$. C'eſt l'élement $CKc$ du triangle hyperbolique $KAC$. Dans l'hyperbole équilatere, où $p = 2a$, $CKc = Cg \times \frac{1}{2} KC = \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$.

### *Le même élement* CKc = Cg × ½ KC *par raport au ſecond axe* DKd.

610. SUPPOSANT la moitié $KD$ du ſecond axe $= b$, ſon parametre $= \pi$, la coupée $Kb = x$, l'ordonnée $bC = y$, & l'équation $\frac{2b}{\pi} yy = xx + bb$, on trouvera $KC = \frac{1}{2b} \sqrt{4bbxx + 2b\pi xx + 2b^3\pi}$; $\overline{cg}^2 = \frac{4bbxx + 4b\pi xx + \pi\pi xx}{4bbxx + 2b\pi xx + 2b^3\pi} dx^2$; $\overline{Cc}^2 = \frac{2b\pi xx + \pi\pi xx + 2b^3\pi}{2b\pi xx + 2b^3\pi} dx^2$; $Cg = \sqrt{\overline{Cc}^2 - \overline{cg}^2} = \frac{2b^3\pi}{\sqrt{\overline{2b\pi xx + 2b^3\pi} \times \overline{4bbxx + 2b\pi xx + 2b^3\pi}}}$; & l'élement $CKc = Cg \times \frac{1}{2} KC = \frac{bb\pi dx}{2\sqrt{2b\pi xx + 2b^3\pi}}$. Dans l'hyperbole équilatere, où $\pi = 2b = 2a$, $CKc = Cg \times \frac{1}{2} KC = \frac{aadx}{2\sqrt{xx + aa}}$.

On peut trouver de la même maniere l'élement d'un ſecteur elliptique & hyperbolique dont le ſommet eſt à l'un des foyers.

On doit faire ici une remarque ſemblable à celle de l'art. 593.

## AVERTISSEMENT.

611. QUE l'on imagine qu'une figure plane $ABC$ terminée par une courbe quelconque $AC$, & par des lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre $AB$, $BC$, tourne autour d'une droite comme $AB$, qu'on nommera *l'axe de révolution*, ou pour abreger, *l'axe*; il eſt évident que le plan $ABC$ décrira dans une révolution entiere un ſolide, & que la courbe $AC$

FIGURE XXVII.

décrira en même temps la ſurface courbe qui entoure ce ſolide. L'axe de révolution peut être la tangente au ſommet *Ab*, ou l'ordonnée *BC*, ou la ligne des coupées *AB*, ou telle autre droite qu'on voudra parallele à la ligne des coupées *AB*, ou aux ordonnées *BC*. Le plan qui tourne peut auſſi être le plan *ABC*, ou le plan *AbC* qui eſt toujours terminé par la courbe *AC*, ſoit du côté concave comme *ABC*, ou du côté convexe de la courbe comme *AbC*. Pour une plus grande clarté on conſiderera le ſolide formé par la révolution du plan *ABC*, tournant autour de l'axe *AB*; les Lecteurs appliqueront ce que l'on en dira aux ſolides formés par la révolution du même plan, ou du plan *AbC*, autour du même axe, ou de tel autre qu'on voudra.

12\. Si l'on conçoit de toutes les parties infiniment petites *Cc* qu'on nommera *du*, de la courbe *AC* qu'on nommera *u*, des perpendiculaires comme *CB*, *cb* qu'on nommera *y*, à l'axe *AB* dont l'origine eſt en *A*, (quand c'eſt un autre axe qui ne paſſe pas par l'origine *A*, l'origine en eſt au point où tombe la perpendiculaire menée du ſommet *A* à cet axe, ) & dont les parties *AB* depuis l'origine ſeront nommées *x*; il eſt évident que chaque petit quadrilatere *BbcC* formé par deux ordonnées infiniment proches *BC*, *bc*, dont l'épaiſſeur eſt *Bb* (*dx*) ou une partie infiniment petite de l'axe, décrira dans la révolution un cercle ou plutôt un petit cylindre, la baſe en ſera le cercle dont l'ordonnée *y* ſera le rayon, & l'épaiſſeur en ſera *dx*. Chacun de ces petits cylindres eſt la difference ou l'élement du ſolide qui en eſt l'integrale, c'eſt-à-dire la ſomme de tous ces petits cylindres, & l'expreſſion generale de ce petit cylindre eſt la *formule* pour trouver l'élement du ſolide. Fig. XLII.

13\. Il eſt de même évident que chaque partie infiniment petite *Cc* (*du*) de la courbe *AC*, décrit dans la révolution une petite zone, dont la baſe eſt une circonference, dont *BC* (*y*) eſt le rayon, & dont la largeur eſt la petite partie de la courbe *Cc* (*du*). Chacune de ces petites zones eſt l'élement de la ſurface courbe qui entoure le ſolide formé par la révolution, laquelle ſurface eſt l'integrale de cet élement; & l'expreſſion generale de cette petite zone eſt la *formule* pour trouver l'élement des ſurfaces courbes ainſi formées.

## III. *Formules pour trouver l'élement des ſurfaces courbes & l'élement des ſolides.*

### 1°. *Pour les ſurfaces courbes.*

614. Fig. XLII. POUR avoir la formule de l'élement des ſurfaces courbes, on ſuppoſera que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonference, ainſi $r . c :: BC (y) . \frac{cy}{r} =$ à la circonference qui eſt la baſe de la petite zone. Multipliant $\frac{cy}{r}$ par $Cc (du)$ largeur de la petite zone, on aura $\frac{cy}{r} du$, *pour la formule qui fera trouver l'élement des ſurfaces courbes* ; & comme l'on ſuppoſe que les lignes $BC (y)$ paralleles entr'elles, ſont perpendiculaires ſur l'axe ou ſur les $x$, on peut mettre la valeur de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ à la place de $du$, & *la formule ſera encore* $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

### 2°. *Pour l'élement des ſolides.*

615. Fig. XLII. POUR trouver la formule de l'élement des ſolides, on ſuppoſera que $\frac{R}{C}$ exprime le raport du quarré du diametre au cercle dont il eſt le diametre, ainſi $R . C :: \overline{2Bc}^2 (2y \times 2y = 4y^2) . \frac{4Cy^2}{R} =$ au cercle qui eſt la baſe du petit cylindre, qui eſt l'élement du ſolide, duquel cercle $y$ eſt le rayon, & $2y$ le diametre. Multipliant cette baſe par la hauteur $Bb (dx)$ de ce petit cylindre, on aura $\frac{4Cyy}{R} dx$, *pour la formule qui fera trouver l'élement des ſolides.*

### REMARQUES.

### I.

616. EN nommant la circonference d'un cercle $c$, & le rayon $r$, $\frac{c}{r}$ eſt l'expreſſion du raport du rayon à la circonférence ; & comme l'aire du cercle $= \frac{cr}{2}$, * il eſt clair que le raport du quarré du diametre $2r$ à l'aire du cercle $\frac{cr}{2}$ eſt $\frac{4rr}{\frac{cr}{2}} = \frac{8r}{c}$ ; ainſi l'expreſſion qu'on a ſuppoſée $\frac{R}{C} = \frac{8r}{c}$, & *la formule* $\frac{4C}{R} yydx$ eſt $\frac{c}{2r} yydx$. *605.

### I I.

617. Fig. XLII. Quand l'axe de révolution n'eſt pas une des droites qui fait une partie du circuit du plan qui tourne autour de cet axe, mais qu'elle le touche ou le coupe ſeulement en un point, comme dans le cas où le plan $Abc$ tourne autour de l'axe $AR$,

ou

ou de l'axe *Rc*; ou bien quand c'eſt le plan *ARc*, qui tourne autour de l'axe *AB*, ou autour de l'axe *bc*, il y a alors deux operations à faire; en prenant ici pour exemple le plan *Abc* qui tourne autour de l'axe *AR*. 1°. Il faut trouver par la Geometrie ordinaire le ſolide qui eſt un cylindre. 2°. Il faut trouver par la formule précedente $\frac{4cyy}{R}dx$, l'élement du ſolide formé par la révolution du plan *ARc* autour de l'axe *AR*; & après en avoir trouvé l'integrale par les méthodes de la troiſiéme Partie, il faudra ôter ce dernier du premier, & le reſte ſera le ſolide formé par la révolution du plan *Abc*, autour de l'axe *AR*. Il y a des cas où il faut ôter le cylindre du ſolide qui eſt l'integrale trouvée par la formule; comme par exemple ſi l'on cherchoit le ſolide formé par la révolution du plan *Abc* autour d'un axe qui ſeroit au-deſſous de *Ab*, & parallele à cette droite *AB*. Ce que les Lecteurs diſtingueront facilement: comme auſſi qu'on doit partager le plan par une ligne droite parallele à l'axe, ou qui lui ſoit perpendiculaire quand il eſt curviligne par tout comme un cercle, une ellipſe, &c. & que l'axe eſt entierement hors de la figure: on pourroit donner ici des formules pour trouver l'élement du ſolide dans ces cas; mais la méthode de cette remarque étant ſuffiſante, il eſt inutile d'en groſſir ce Traité.

## III.

### *Où l'on donne une ſeconde formule pour trouver l'élement des ſolides.*

118. POUR faire concevoir clairement cette ſeconde méthode, on prendra pour exemple le ſolide formé par la révolution du plan *Abc* autour de l'axe *AR*; on prendra ſur *ABb* perpendiculaire à l'axe à l'origine *A*, les *AB*, *Ab* qui ſeront les *y*; & concevant des perpendiculaires *BC*, *bc* infiniment proches, des petites parties *Cc* de la courbe ſur cette perpendiculaire *AB* à l'axe *AR*, on nommera *x* ces paralleles *BC* à l'axe *AR*. Il eſt évident que dans la révolution le petit quadrilatere *BbcC*, dont l'épaiſſeur eſt *Bb* (*dy*), décrit un cylindre creux, ou une ſurface cylindrique qui a pour baſe la circonference dont *AB* (*y*) eſt le rayon, & pour hauteur *BC* (*x*), & ce petit cylindre creux eſt l'élement du ſolide décrit par la révolution du plan *Abc* autour de l'axe *AR*, lequel ſolide eſt l'integrale ou la ſomme de tous ces petits cylindres creux, FIG. XLII.

dont les exterieurs renferment les interieurs. On trouvera la formule pour avoir cet élement, en ſuppoſant que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonference; & faiſant $r . c :: AB (y) . \frac{cy}{r}$, ce 4$^{e}$ terme exprime la circonference qui eſt la baſe de chaque petit cylindre creux; la multipliant par l'épaiſſeur $Bc$ ($dy$), on aura la petite couronne qui eſt la baſe du petit cylindre; & enfin multipliant cette baſe $\frac{cydy}{r}$ par la hauteur $BC$ ($x$) du petit cylindre, on aura $\frac{cxy}{r}dy$ *pour la ſeconde formule qui fera trouver l'élement du ſolide.* Ce que l'on vient de dire de ce ſolide doit être appliqué aux autres par raport à leurs axes.

Quand l'axe touche ou coupe la courbe en un point, comme $AR$, $Rc$, on n'aura beſoin que de la formule pour trouver l'élement du ſolide, & l'integrale de cet élement ſera le ſolide; mais quand l'axe ne touchera pas la courbe, il y aura un vuide entre l'axe & le ſolide, & alors le ſolide & le vuide feront un cylindre, ou le ſeul vuide fera un cylindre, & l'on trouvera le cylindre par la Geometrie ordinaire, & l'autre ſolide par la formule & par l'integrale de l'élement que fera trouver la formule; & ôtant le moindre du plus grand, on aura le ſolide que l'on cherchoit.

### USAGE DES FORMULES.

619. POUR trouver par les formules précedentes l'élement de la ſurface courbe, & l'élement du ſolide formé par la révolution d'un plan borné par des lignes droites & par une courbe ou une partie de courbe, ou par une ſeule courbe comme le cercle, ou l'ellipſe, &c. il faut par le moyen de l'équation de cette courbe, trouver les valeurs des changeantes & des differentielles des formules, de maniere que ces valeurs ne contiennent qu'une même changeante & ſa difference, & ſubſtituer ces valeurs dans les formules, & l'on aura, après la ſubſtitution, l'élement de la ſurface ou du ſolide que l'on cherche. Il ne faudra plus qu'en trouver l'integrale pour avoir la ſurface & le ſolide.

620. Pour trouver, par exemple, la ſurface de la ſphere formée FIGURE XXXV. par la révolution de la demi-circonference $AME$ autour de l'axe $ACE$; on nommera l'axe $AE$ ($2a$) la circonference $EMFA$ ($u$), $AB$ ($x$), $BF$ ($y$); ce qui donnera $BG = Fi = dx$, $Fg = du$; & l'équation du cercle ſera $yy = 2ax - xx$,

& $y = \sqrt{2ax - xx}$; & l'on trouvera * $du = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. On * 588. ſubſtituera les valeurs de $y$ & de $du$ dans la formule $\frac{cy}{r} du$, & l'on aura l'élement de la ſurface de la ſphere $\frac{c}{r}\sqrt{2ax - xx} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{ac}{r} dx$, dont l'integrale eſt $\frac{acx}{r}$. En ſuppoſant $AB (x) = AE (2a)$, que $c$ eſt la circonference $u$, & que $r$ eſt le rayon $AC (a)$, l'integrale $\frac{acx}{r}$ deviendra $\frac{2aau}{a} = 2au$, c'eſt la ſurface de la ſphere qui eſt égale au produit de la circonference entiere $u$ par le diametre $2a$. Si l'on ne vouloit qu'une portion de cette ſurface, il n'y auroit qu'à déterminer la valeur de $x$ & de $y$ pour cette partie.

21. Pour trouver la ſolidité de la ſphere en ſuppoſant les mêmes dénominations, il n'y a qu'à ſubſtituer dans la formule de l'élement des ſolides $\frac{4C}{R} yydx$, la valeur de $yy = 2ax - xx$, & l'on aura $\frac{4C}{R} dx \times \overline{2ax - xx}$ pour l'élement de la ſolidité de la ſphere, dont l'integrale * $\frac{4C}{R} \times \overline{\frac{1}{2} \times 2axx - \frac{1}{3} x^3}$, * 532. fera connoître la ſolidité de la ſphere en ſuppoſant $\frac{c}{R} = \frac{c}{8r}$ *, * 616. que $c$ eſt égale à la circonference $u$ de la ſphere, $r$ égale au demi-axe $a$, & que $AB (x) = AE = 2a$, car cette integrale deviendra $\frac{4u}{8a} \times \frac{1}{2} \times 8a^3 - \frac{4u}{8a} \times \frac{1}{3} \times 8a^3 = \frac{2}{3} aau$, qui fait voir que la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit $2au$ de ſa ſurface par $\frac{1}{3} a$ le tiers du rayon. FIGURE XXXV.

Si l'on veut ſe ſervir de la ſeconde formule $\frac{cxydy}{r}$, on menera par le centre $C$ la perpendiculaire $CM$ à l'axe ſur laquelle ſe prendront les $y$ & $dy$; & l'on imaginera ſur tous les points de $CM$ des perpendiculaires juſqu'à la circonference, qui ſeront les hauteurs des ſurfaces cylindriques, & qu'on nommera $x$; & l'équation du cercle étant $yy = aa - xx$, on aura $y = \sqrt{aa - xx}$, & $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. On ſubſtituera ces valeurs de $y$ & de $dy$ dans la formule $\frac{cxydy}{r}$, & l'on aura l'élement de la demi-ſphere $\frac{-cxxdx}{r}$, dont l'integrale eſt * $\frac{c}{3r} x^3$, * 532. dans laquelle ſuppoſant que $c$ eſt la circonference $AMEA$ $(u)$, $r =$ au rayon $CA (a)$, & $x$ auſſi égale au rayon $CA (a)$, l'integrale deviendra $\frac{1}{3} aac$ qui ſera la demi ſphere; & la multipliant par 2, on aura $\frac{2}{3} aac$ pour la ſolidité de la ſphere. FIGURE XXXV.

### IV. *Les formules pour trouver le centre de peſanteur.*

622. ON ſuppoſe comme une choſe évidente, que le centre de peſanteur d'une ligne, ou, ſi l'on veut, d'un priſme ou d'un cylindre, dont l'épaiſſeur eſt ſi petite qu'on le peut prendre pour une ligne ſenſible, eſt au milieu de la ligne; que le centre de peſanteur d'un rectangle dont la largeur eſt infiniment petite, eſt dans la ligne qui le coupe perpendiculairement par le milieu des deux côtés les plus longs; que le centre de peſanteur d'un cercle qui a une épaiſſeur infiniment petite, eſt dans la perpendiculaire à ſon plan, laquelle l'enfile par le centre, c'eſt-à-dire dans l'axe de ce cylindre d'une hauteur infiniment petite; que le centre d'une circonference qui eſt comme une zone d'une très-petite largeur, eſt auſſi ſon centre de peſanteur: car il eſt clair qu'il y a des peſanteurs égales & des efforts égaux des côtés oppoſés de tous les centres de peſanteur dont on vient de parler.

Il ſuit de là que la ligne qui coupe perpendiculairement toutes les ordonnées d'une courbe chacune par le milieu, paſſe par le centre de peſanteur de la figure plane curviligne que forme cette courbe ſi elle rentre en elle-même, ou de la figure plane mixte formée par la courbe & par la plus grande ordonnée qui ſe termine de part & d'autre à la courbe; qu'elle paſſe auſſi par le centre de peſanteur de tous les points ou de toutes les parties infiniment petites dont le circuit de la courbe eſt composé, c'eſt-à-dire par le centre de peſanteur de la courbe, ſuppoſant que le dedans en eſt vuide; qu'elle paſſe par le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de la figure plane que forme la courbe autour de cette ligne priſe pour l'axe, & par le centre de peſanteur de la ſurface courbe de ce ſolide; enfin qu'elle paſſe par le centre de peſanteur de chacun des élemens de la courbe, de chacun des élemens de la figure plane que forme la courbe, de chacun des élemens du ſolide formé par la révolution de cette figure plane autour de cette ligne priſe pour axe, & de chacun des élemens de la ſurface courbe de ce ſolide.

D'où il ſuit qu'en concevant un plan perpendiculaire à cette ligne qui paſſe par les centres de peſanteur des élemens d'une courbe, d'une figure plane ou ſolide, & d'une ſurface courbe; la partie de cette ligne depuis ce plan perpendiculaire au ſommet ou hors de la figure juſqu'à chaque élement, ſera la diſtance du centre de peſanteur de chaque élement juſqu'à ce plan : Ainſi prenant l'origine de cette ligne des diſtances des centres de peſanteur des élemens, au point où elle eſt coupée par le plan perpendiculaire, qu'on ſuppoſera être ici la même que l'origine des $x$ de la figure, & nommant ces diſtances $x$; prenant auſſi ces élemens pour les petits poids dont la courbe, ou la figure plane, ou le ſolide, ou la ſurface courbe eſt compoſée, la ſomme des produits des $x$, chacune par ſon élement*, eſt égale au produit de la diſtance du centre de peſanteur par la ſomme des élemens. Ainſi *la ſomme des produits des* x *multipliées chacune par ſon élement, étant diviſée par la ſomme des élemens, donnera pour quotient la diſtance du centre de peſanteur* de la ſomme des élemens, c'eſt-à-dire, la diſtance depuis l'origine des $x$. Or la ſomme des élemens d'une courbe, c'eſt la courbe même; & c'eſt la même choſe des figures planes ou ſolides & des ſurfaces courbes. * 338. & 339.

23. Nommant donc $x$ les coupées priſes ſur la perpendiculaire qui diviſe les ordonnées par le milieu, $y$ chacune des ordonnées, $u$ la courbe, $\frac{S.\,xdu}{S.\,du=u}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des courbes.* $\frac{S.\,xydx}{S.\,ydx}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des figures planes.* $\frac{S.\,\frac{c}{r}xydu}{S.\,\frac{c}{r}ydu}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des ſurfaces courbes.* $\frac{S.\,\frac{4c}{R}xyydx}{S.\,\frac{4c}{R}yydx}$; ou bien* $\frac{S.\,\frac{c}{2r}xyydx}{S.\,\frac{c}{2r}yydx}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des ſolides.* *616.

## USAGE DES FORMULES.

24. IL faut prendre dans les équations des courbes dont on cherchera le centre de peſanteur, les valeurs des changeantes & des differentielles des formules, & faire en ſorte que ces valeurs ſoient exprimées par une même changeante & par ſa difference, & les ſubſtituer dans les formules, & il ne reſtera plus qu'à prendre les integrales du numerateur & du dénominateur, qu'on a marquées par S. qui ſignifie *ſomme*, & à les diviſer l'une par l'autre; & l'on aura la diſtance du centre de peſanteur.

Par exemple pour trouver le centre de peſanteur d'une demi-ſphere, l'équation du cercle étant $yy = 2ax - xx$, la formule $\frac{S. \frac{c}{2r} xyydx}{S. \frac{c}{2r} yydx}$ deviendra $\frac{S. \frac{c}{2r} \times \overline{2axx - \frac{c}{2r} x^3} \times dx}{S. \frac{c}{2r} \times \overline{2ax - \frac{c}{2r} xx} \times dx}$;

*532. l'integrale du numerateur eſt* $\frac{c}{3r} ax^3 - \frac{c}{8r} x^4$, l'integrale du dénominateur eſt $\frac{c}{2r} axx - \frac{c}{6r} x^3$, & la diſtance du centre de peſanteur eſt $\frac{\frac{c}{3r} ax^3 - \frac{c}{8r} x^4}{\frac{c}{2r} axx - \frac{c}{6r} x^3} = \frac{\frac{1}{3} ax - \frac{1}{8} xx}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{6} x} = \frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$; & $x$ étant égale au rayon $a$ dans la demi-ſphere, cette diſtance ſera $\frac{5}{8} a$.

---

# IV. SECTION.

## *Où l'on explique la maniere de trouver* les ſuites *qui ſont les integrales des élemens qu'on trouve par les formules de la ſection précedente; & en même temps l'uſage des méthodes des ſuites du ſecond Probléme du ſeptiéme Livre art.* 175, *pour la réſolution des Problêmes de la Geometrie, de l'Aſtronomie, &c. On explique auſſi les logarithmes hyperboliques.*

### AVERTISSEMENT.

625. QUAND on peut trouver par les méthodes qu'on donnera dans la troiſiéme Partie, les integrales des élemens de la longueur des courbes, de leur aire, de la ſolidité des corps qui ſe forment par leur révolution, & des ſurfaces courbes de ces corps; leſquels élemens ſe trouvent par les formules précedentes; on a la rectification des courbes, leur quadrature, la ſolidité des corps qui ſe forment par leur révolution, & l'aire des ſurfaces courbes de ces corps, & l'on a auſſi la diſtance de leur centre de peſanteur par le moyen de la formule pour trouver cette diſtance: mais il y a beaucoup de ces courbes qui ont des élemens dont on n'a pu trouver les integrales, comme l'élement de la longueur de la circonference ou d'un arc de circonference, les élemens des longueurs de la parabole, de l'ellipſe, de l'hyperbole; les élemens de leurs aires, excepté celui de la parabole; les

élemens de leurs ſecteurs, &c. ce qui leur eſt commun avec beaucoup d'autres courbes plus compoſées geometriques, & méchaniques : Alors on peut par le moyen de ces élemens & par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, trouver par le calcul, *des ſuites* qui expriment ces integrales, & qui en approchent autant près qu'on voudra. On peut encore par les mêmes moyens trouver les valeurs des lignes droites inconnues qui entrent dans ces élemens, & de celles qu'on y peut faire entrer : ce qui donne la réſolution d'un très-grand nombre de Problêmes très-utiles, dont on en va mettre ici quelques-uns qui ſerviront aux Lecteurs à réſoudre les autres ſemblables.

## I.

## *Problêmes où l'on ſe ſert des élemens des longueurs des courbes pour trouver ces longueurs, & les lignes inconnues qui entrent ou peuvent entrer dans ces élemens.*

### *TROUVER la longueur d'un arc exprimée par ſa tangente.*

6. EN nommant la tangente $eN$ $(x)$, ou, pour mieux marquer la tangente, la nommant $(t)$, & le rayon $Or$ $(r)$, l'arc $eR$ $(u)$, l'élement de l'arc eſt* $du = \frac{rrdt}{rr+tt}$, qui ſe réduit à $\frac{rrdu+ttdu}{dt} - rr = 0$. Pour trouver $eR$ $(u)$, on ſuppoſera* $u = at + bt^3 + ct^5 + et^7 +$ &c. & l'on trouvera par les méthodes du Problême 175, $u = t - \frac{1}{3rr}t^3 + \frac{1}{5r^4}t^5 - \frac{1}{7r^6}t^7 +$ &c. & ſi l'on ſuppoſe le rayon $OR = 1$, l'on aura $eR$ $(u) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Fig. XLII. *590. *175.

### *La même longueur exprimée par le ſinus droit.*

7. EN nommant le ſinus $BF$ $(x)$ de l'arc $AF$ qu'on nommera $(u)$ & le rayon $AC$ $(1)$, $CB$ ſera $\sqrt{1-xx}$; & les triangles ſemblables $CBF$, $Fgi$ donneront $CB$ $(\sqrt{1-xx})$ . $CF$ $(1)$ :: $gi$ $(dx)$ . $Fg$ $(du) = \frac{1dx}{\sqrt{1-xx}}$, qui ſe réduit à $1 - \frac{du^2}{dx^2} + \frac{xxdu^2}{dx^2} = 0$. On trouvera la longueur de l'arc $AF$ $(u) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 +$ &c. ou bien $u = x + \frac{1}{2\times3}x^3 + \frac{3\times1}{2\times3\times4\times5}x^5 + \frac{3\times3\times5\times5}{3\times3\times4\times5\times7}x^7$, &c. comme dans l'art. 229. où cette équation ſert d'exemple; on y marque par $y$ & $dy^2$ ce qui eſt ici marqué par $x$ & par $dx^2$; & par $dx^2$ ce qui eſt ici marqué par $du^2$. FIGURE XXXV.

Si l'on vouloit que le rayon fût exprimé par une lettre $r$, & non par l'unité, l'on trouveroit l'arc $AF\,(u) = x + \frac{1}{6rr}x^3 + \frac{3}{40r^4}x^5 + \frac{5}{112r^6}x^7 + \frac{35}{1152r^6}x^9 +$ &c. qu'on peut réduire à cette expreſſion équivalente $u = x + \frac{1}{2\times 3rr}x^3 + \frac{3\times 3}{2\times 3\times 4\times 5r^4}x^5 + \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7r^6}x^7 + \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9r^8}x^9 +$ &c.

On peut trouver de même l'expreſſion de l'arc $AF$ par le ſinus de complement $CB$, comme auſſi par le ſinus verſe $AB$.

### *La même longueur exprimée par la corde.*

628. FIG. XLI. * 589. EN nommant le diametre $AE\,(1)$, la corde $AH\,(x)$, l'arc $AH\,(u)$, les triangles ſemblables* $AHE$, $LHF$, donneront $EH\,(\sqrt{1-xx})$. $AE\,(1) :: LF\,(dx) . HF\,(du) = \frac{1dx}{\sqrt{1-xx}}$, qui ſe réduit à $1 - \frac{du^2}{dx^2} + \frac{xxdu^2}{ax^2} = 0$, qui eſt ſemblable à l'équation précedente, & l'on trouvera par conſequent la même ſuite pour la longueur de l'arc $AH\,(u)$.

Si l'on vouloit que le diametre $AE$ fût exprimé par une lettre $D$, on trouveroit l'arc $AH\,(u) = x + \frac{1}{6D^2}x^3 + \frac{3}{40D^4}x^5 + \frac{5}{112D^6}x^7 + \frac{35}{1152D^8}x^9 +$ &c. qu'on peut réduire à cette expreſſion équivalente $AH\,(u) = x + \frac{1}{2\times 3D^2}x^3 + \frac{3\times 3}{2\times 3\times 4\times 5D^4}x^5 + \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7D^6}x^7 + \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9D^8}x^9 +$ &c. & encore à celle-ci $AH\,(u) = x + \frac{1}{2\times 3D^2}Axx + \frac{3\times 3}{4\times 5D^2}Bxx + \frac{5\times 5}{6\times 7D^2}Cxx + \frac{7\times 7}{8\times 9D^2}Exx +$ &c. dans laquelle $A$ ſignifie tout le premier terme $x$, qui multiplie le ſecond; $B$, tout le ſecond terme $\frac{1}{2\times 3D^2}Axx$, par lequel le troiſiéme eſt multiplié; $C$, tout le troiſiéme; & ainſi des lettres capitales ſuivantes; ce qui ſert à abreger les formules, & à faire connoître la maniere facile de les continuer.

629. FIGURE XXXV. & XLI. *TROUVER la longueur de l'une des lignes inconnues de l'élement, comme du ſinus droit* BF (x); *ou de la corde* AH (x) *exprimée par la longueur de l'arc* AF, *ou de l'arc* AH, *qu'on ſuppoſera connus.*

FIGURE XXXV. & XLI. IL faut ſe ſervir de la méthode *du retour des ſuites* 234, & l'on trouvera le ſinus droit $BF\,(x)$, ou la corde $AH\,(x) = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 - \frac{1}{5040}u^7 + \frac{1}{362880}u^9 -$ &c. $u$ eſt l'arc $AF$ ou $AH$. Si l'on veut exprimer le rayon par la lettre $r$, l'on aura $BF\,(x) = u - \frac{1}{6rr}u^3 + \frac{1}{120r^4}u^5 -$ &c. Si l'on

veut

veut exprimer le diametre par $D$, il n'y aura qu'à mettre $D$ au lieu de $r$, & l'on aura la valeur de la corde $AH\,(x)$; l'on pourra encore réduire la formule à cette expreſſion équivalente $BF\,(x) = u - \frac{Auu}{2 \times 3rr} - \frac{Buu}{4 \times 5rr} - \frac{Cuu}{6 \times 7rr} - \frac{Enn}{8 \times 9rr} -$ &c. dans laquelle $A$ ſignifie le premier terme $+ u$; $B$, tout le ſecond terme $\frac{Auu}{2 \times 3rr}$ avec ſon ſigne $-$; $C$, tout le troiſiéme terme $\frac{Buu}{4 \times 5rr}$ avec ſon ſigne $-$; & ainſi des autres lettres capitales ſuivantes.

30. *UN arc, qu'on nommera* a, *étant donné de tel nombre de degrés qu'on voudra, & ſa corde* c *étant connue, mais indéterminée pour marquer la corde connue de tel arc qu'on voudra; le diametre étant* D; *trouver la corde* x *d'un autre arc* u, *qui ait avec le premier arc* a *un raport quelconque exprimé par* $\frac{n}{1}$.

1°. IL faut exprimer l'arc donné $a$ par ſa corde $c$, & l'on aura* $a = c + \frac{1}{2 \times 3D^2} c^3 + \frac{3 \times 3}{2 \times 3 \times 4 \times 5D^4} c^5 + \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7D^6} c^7$ * 627. $+$ &c. Il faut auſſi exprimer l'arc $u$ que l'on cherche par ſa corde $x$, & l'on aura $u = x + \frac{1}{2 \times 3D^2} x^3 + \frac{3 \times 3}{2 \times 3 \times 4 \times 5D^4} x^5 + \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7D^6} x^7 +$ &c.

2°. Il faut faire cette proportion donnée, $a \,.\, u :: 1 \,.\, n$; ce qui donnera, en multipliant les extrêmes & les moyens, & mettant les valeurs de $a$ & de $u$ à leur place, $x + \frac{1}{2 \times 3D^2} x^3 + \frac{3 \times 3}{2 \times 3 \times 4 \times 5D^4} x^5 +$ &c. $= nc + \frac{n}{2 \times 3D^2} c^3 + \frac{3 \times 3n}{2 \times 3 \times 4 \times 5D^4} c^5 + \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5n}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7D^6} c^7 +$ &c.

3°. Il faut chercher par la méthode *du retour des ſuites, art.* 238, la valeur de la corde $x$ qu'on demande, exprimée par une ſuite qui ne contienne que des $c$, $c^3$, &c. & l'on trouvera, en réduiſant à un même dénominateur les grandeurs qui ſont les parties du coëficient du même terme, la corde $x = nc + \frac{n \times \overline{1 - nn}}{2 \times 3D^2} c^3 + \frac{n \times \overline{1 - nn} \times \overline{9 - nn}}{2 \times 3 \times 4 \times 5D^4} c^5 + \frac{n \times \overline{1 - nn} \times \overline{9 - nn} \times \overline{25 - nn}}{2 \times 3 \times 4 + 5 \times 6 \times 7D^6} c^7 + \frac{n \times \overline{1 - nn} \times \overline{9 - nn} \times \overline{25 - nn} \times \overline{49 - nn}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9D^8} c^9 + \frac{n \times \overline{1 - nn} \times \overline{9 - nn} \times \overline{25 - nn} \times \overline{49 - nn} \times \overline{81 - nn}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11D^{10}} c^{11} +$ &c. C'eſt la formule que l'on cherchoit, & qu'il eſt facile de continuer à l'infini, & qu'on peut encore abreger de cette maniere $x = nc + \frac{1 - nn}{2 \times 3D^2} Ac^3 + \frac{9 - nn}{4 \times 5D^2} Bc^5 + \frac{25 - nn}{6 \times 7D^2} Ec^7$

$+ \frac{49-nn}{8 \times 9D^2} Fc^9 + \frac{81-nn}{10 \times 11D^2} Gc^{11}$ + &c. en ſuppoſant que $A$ repréſente le premier terme $nc$; $B$, le ſecond terme $+ \frac{1-nn}{2 \times 3D^2} Ac^3$; & ainſi des lettres capitales ſuivantes.

631. Cette formule ſuffit pour conſtruire les tables des ſinus, car le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde du double de cet arc; ainſi une ſeule corde d'un arc étant connue (plus l'arc dont elle ſera la corde ſera petit, & moins il faudra de termes pour avoir une valeur très approchante des cordes de tout autre arc); on pourra trouver les valeurs des cordes de tous les autres arcs qui auront avec l'arc donné tel raport qu'on voudra; par exemple ſi l'on veut la corde de l'arc qui eſt le tiers du donné, il n'y aura qu'à mettre la corde de l'arc donné dans la formule à la place de $c$, & $\frac{1}{3}$ à la place de $n$, & ſuppoſer que $x$ eſt la corde que l'on cherche, & la formule après les ſubſtitutions donnera ſa valeur. Quand l'expoſant du raport de l'arc dont on cherche la corde, avec l'arc dont la corde eſt donnée, eſt un nombre impair, comme $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, &c. il eſt viſible que la ſuite qui eſt la valeur de $x$ ſera finie. On peut de même trouver une formule pour conſtruire les tables des tangentes, par l'art. 626.

## REMARQUES.

CES Exemples ou Problêmes ſuffiſent pour faire voir clairement aux Lecteurs qu'ils peuvent trouver de la même maniere par le moyen de l'élement de la longueur de la parabole, de l'ellipſe, de l'hyperbole & des autres courbes, en ſe ſervant des méthodes *du ſecond Problême du ſeptiéme Livre art.* 175, *& des méthodes du retour des ſuites art.* 234, *& les ſuivans*, la longueur de tel arc qu'on voudra de ces courbes, & de plus la valeur des lignes inconnues qui entrent dans l'élement de la longueur de chaque courbe, ou qu'on y peut faire entrer.

## II.

### *Problêmes où l'on ſe ſert des élemens de l'aire des courbes pour trouver ces aires, & les lignes inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans ces élemens.*

632. FIGURE XLVII. ON ſuppoſe que $ACc$ eſt une hyperbole équilatere entre les aſymptotes $KL$, $KM$ qui ſont un angle droit en $K$; que

le demi-axe eſt $KA$, le ſommet $A$, la perpendiculaire du ſommet $AG = a = KG$; ( on remarquera que le produit connu $aa$, qui eſt égal au produit de chaque coupée par ſon ordonnée correſpondante, comme $KF \times Ff$, s'appelle *la puiſſance de l'hyperbole*); les coupées ſont ſur l'aſymptote $KL$; les ordonnées $CP$, $fF$, $iI$, $lL$ ſont perpendiculaires aux coupées, & paralleles à l'aſymptote $KM$. Il faut trouver l'eſpace $fF\,Ii$, qu'on nommera $l$, du quadrilatere hyperbolique $fFIi$. Soit $KF = b$, $FI = x$, $Ii = y$, l'on aura* $Ii\,(y) = \frac{KG \times GA}{KI}$ *410. $(\frac{aa}{b+x})$; multipliant par $dx$, on aura $ydx = \frac{aadx}{b+x}$ pour l'élement du quadrilatere $fF\,Ii\,(l)$; ainſi $l =$ S. $\frac{aadx}{b+x}$, & $dl = \frac{aadx}{b+x}$; d'où l'on déduit $\frac{bdl + xdl}{dx} - aa = 0$. On trouvera *par les méthodes du 2^e^ Probl.* 175, $fF\,Ii\,(l) = aa \times \overline{\frac{1}{b}x - \frac{1}{2bb}xx + \frac{1}{3b^3}x^3 - \frac{1}{4b^4}x^4}$ + &c.

## COROLLAIRE.

633. NOMMANT $KP\,(c)$, $PF\,(x)$, $KI\,(e)$, $IL\,(z)$; ſi l'on prend ſur l'aſymptote $KL$ quatre coupées en proportion $KP\,(c)$. $KF\,(c+x) :: KI\,(e)$. $KL\,(e+z,)$ le quadrilatere $CPFf$ ſur $PF\,(x)$, qui eſt la difference des deux premiers termes, ſera égal au quadrilatere $iILl$ ſur $IL\,(z)$, qui eſt la difference des deux derniers termes: car l'on aura $ce + ex = ce + cz$; ce qui donne $ex = cz$, & $\frac{x}{c} = \frac{z}{e}$. Or le quadrilatere $CPFf$ $=$* $aa \times \overline{\frac{1}{c}x - \frac{1}{2cc}xx + \frac{1}{3c^3}x}$ — &c. & le quadrilatere $iILl$ *632. $= aa \times \overline{\frac{1}{e}z - \frac{1}{2ee}zz + \frac{1}{3e^3}z^3}$ — &c. Par conſequent chaque terme de la valeur du premier quadrilatere eſt égal au terme correſpondant du ſecond; ils ſont donc égaux.

### *Avertiſſement.*

L'invention des logarithmes hyperboliques, par le moyen deſquels on forme bien plus facilement les logarithmes des tables que par la méthode ordinaire des tables des logarithmes, dépend du Problême précedent & de ſon Corollaire; on va l'expliquer en peu de mots.

## *Des logarithmes hyperboliques.*

### PREMIERE SUPPOSITION.

634. ON peut concevoir ſur l'aſymptote $KL$ des coupées $KR$, FIGURE XLVII. $KQ$, $KP$, $KG$, $KF$, &c. en progreſſion géometrique à l'infini,

de maniere que le raport qui regne dans la progreſſion ne differe du raport d'égalité que d'une quantité infiniment petite ; le terme *K* où commence la progreſſion eſt zero ; le premier terme *KR* eſt une grandeur infiniment petite au-deſſus de zero ; le ſecond terme *KQ* ſurpaſſe le premier d'une grandeur infiniment petite, & de même le $3^e$, le $4^e$, &c. à l'infini ; la coupée *K G* qui ſe termine à l'ordonnée *A G* du ſommet *A*, & qui lui eſt égale, ſe prendra pour l'unité ; & comme l'on peut concevoir tous les nombres poſſibles dans cette progreſſion, tous les nombres moindres que l'unité ſeront depuis *K* juſqu'à *G* ; tous les nombres qui ſurpaſſent l'unité pris de ſuite iront depuis l'origine *K* juſqu'au delà de *G* à l'infini.

## COROLLAIRE I.

635. ON peut imaginer toutes les ordonnées de ces coupées ; & il eſt clair * que tous les quadrilateres hyperboliques qui ont pour baſes les differences des coupées voiſines, ſeront égaux entr'eux. Par exemple ſi *PG*, *GF* ſont deux differences ou deux reſtes des termes voiſins de la progreſſion géometrique, en ôtant les moindres, de ceux qui ſont immédiatement plus grands ; les quadrilateres *CPGA*, *AGFf* ſeront égaux.

* 633. & 634.

## COROLLAIRE II.

636. IL ſuit de là que les ſommes de tous ces petits quadrilateres priſes de ſuite, font une progreſſion arithmetique, dont la difference eſt l'un de ces petits quadrilateres égaux. Par exemple nommant 1 l'un de ces quadrilateres, la ſomme des deux ſera 2, celle des trois ſera 3, & ainſi de ſuite.

## SECONDE SUPPOSITION.

637. ON exprimera tous les nombres qui ſeront plus grands que l'unité par l'unité plus la quantité dont ils ſurpaſſent l'unité, & ceux qui ſeront moindres que l'unité ſeront exprimés par l'unité moins la quantité dont l'unité les ſurpaſſe ; ainſi 9, 10, &c. ſeront exprimés par $1 + 8$, $1 + 9$, &c. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ ſeront exprimés par $1 - \frac{8}{9}$, $1 - \frac{9}{10}$, &c. & en general tout nombre qui ſurpaſſe l'unité ſera exprimé par $1 + n$ ; & ceux qui ſont moindres par $1 - n$.

On nommera auſſi *reciproques* les termes de la progreſſion géometrique, entre leſquels l'unité eſt moyenne proportionnelle ; ainſi $\frac{1}{3}$ eſt réciproque à 3 , car $\frac{1}{3}$. 1 :: 1 . 3 ; & en general $\frac{1}{1+n}$ eſt réciproque à $1+n$, car $\frac{1}{1+n}$. 1 :: 1 . $1+n$.

### COROLLAIRE I.

38. IL ſuit de là & des Corollaires qui précedent, que ſi l'on prend quatre termes de la progreſſion géometrique qui ſoient en proportion, les quatre ſommes des quadrilateres hyperboliques priſes depuis le point $G$ de l'unité, qui auront ces quatre termes moins $KG$ pour baſes, feront une proportion arithmetique. Par exemple ſi l'on prend $KF.KI::KL.Kn$, les quatre ſommes des quadrilateres hyperboliques priſes depuis $AG$, ſçavoir $AGFf$, $AGIi$, $AGLl$, $AGnm$, feront une proportion arithmetique ; & de même ſi $KR$. $KQ::KQ$. $KP$, les quadrilateres hyperboliques ſur $GR$, $GQ$, $GP$ feront une proportion arithmetique ; car quatre termes de la progreſſion géometrique, comme $KF$, $KI$, $KL$, $Kn$, ne ſçauroient faire une proportion géometrique qu'il n'y ait un égal nombre de petits raports égaux à celui qui régne dans la progreſſion entre le premier $KF$ & le ſecond $KI$, & entre le troiſiéme $KL$ & le quatriéme $Kn$; ainſi il y a le même nombre de ces petits raports égaux entre $F$ & $I$, qu'entre $L$ & $n$ ; il y a donc le même nombre de petits quadrilateres hyperboliques égaux ſur $FI$ & ſur $Ln$ ; par conſéquent l'excès de $AGIi$ ſur $AGFf$ eſt égal à l'excès de $AGnm$ ſur $AGLl$ ; ce qui fait une proportion arithmetique. Il eſt évident que la même démonſtration convient à quatre termes tels qu'on voudra de la progreſſion géometrique, qui feront une proportion géometrique.

### COROLLAIRE II.

639. QUAND deux termes de la progreſſion géometrique ſont réciproques, comme $KR$ (égal par exemple à $\frac{1}{3}$), & $KI$ (égal à 3), les deux quadrilateres hyperboliques ſur $GR$, $GI$, qui ſont ſur les differences $GR$ & $GI$ de l'unité à ces deux termes, ſont égaux : car $KR$. $KG$ :: $KG$ . $KI$ par la ſuppoſition ; donc par le Corollaire précedent le quadrilatere ſur $GR$ eſt égal au quadrilatere ſur $GI$.

### TROISIE'ME SUPPOSITION OU DE'FINITION.

640. SI l'on conçoit écrits de ſuite ſur une même ligne, ou ſi l'on veut dans une même colonne, tous les nombres depuis zero

de la progreſſion géometrique dans laquelle régne le raport qui ne différe du raport d'égalité que d'une grandeur infiniment petite, & qui vont en augmentant, de maniere que l'unité ſe trouve placée entre tous les nombres moindres que l'unité & les nombres plus grands, c'eſt-à-dire que l'unité ſoit précedée de tous les premiers mis de ſuite, & ſuivie des autres auſſi mis de ſuite; & que ſur une ligne au-deſſus, ou dans une colonne à côté, l'on conçoive zero écrit vis-à-vis de l'unité; la valeur d'un des petits quadrilateres hyperboliques écrite à côté du nombre immédiatement plus grand que l'unité avec le ſigne +, & encore vis-à-vis du nombre immédiatement moindre que l'unité avec le ſigne —; la ſomme de deux de ces petits quadrilateres écrite vis-à-vis du ſecond nombre plus grand que l'unité avec le ſigne +, & encore vis-à-vis du ſecond nombre moindre qui la précede avec le ſigne —; la ſomme de trois quadrilateres écrite vis-à-vis du troiſiéme nombre qui ſuit l'unité avec +, & encore vis-à-vis du troiſiéme qui la précede avec —; & ainſi de ſuite; la ſeconde ligne ou la ſeconde colonne contiendra une progreſſion arithmetique, dont chaque terme s'appelle *le logarithme hyperbolique* du terme de la progreſſion géometrique qui eſt vis-à-vis, qu'on appellera ſon terme *correſpondant*; zero ſera le logarithme de l'unité, & ſe trouvera entre les logarithmes négatifs qui le précedent, & qui ſont les logarithmes des nombres moindres que l'unité, & entre les poſitifs qui ſont les logarithmes des nombres plus grands que l'unité.

### *Corollaire où l'on explique l'uſage des logarithmes.*

641. L'USAGE des logarithmes eſt pour diminuer la peine du calcul dans les Mathématiques practiques, comme dans la Géometrie practique, l'Aſtronomie, &c. on change par leur moyen les multiplications & les formations des puiſſances en de ſimples additions, & les diviſions & les extractions des racines en de ſimples ſouſtractions; car le quatriéme terme $b+a$ d'une proportion arithmetique dont zero eſt le premier terme $0, a; b, b+a$ étant la ſomme des deux moyens $a, b$; & le troiſiéme terme $a$ d'une proportion arithmetique dont zero eſt le dernier terme $b+a, b; a, 0$ étant la différence du premier terme $b+a$ & du ſecond $b$, c'eſt-à-dire $b+a-b=a$; quand on a une multiplication à faire, c'eſt-à-dire

qu'il faut trouver le quatriéme terme d'une proportion géometrique dont l'unité eſt le premier terme, & les deux nombres à multiplier le ſecond & le troiſiéme terme; il n'y a qu'à prendre la ſomme des deux logarithmes du ſecond & du troiſiéme terme, & chercher dans la table le logarithme qui eſt égal à cette ſomme; le nombre qui eſt vis-à-vis ſera le produit que l'on cherche: Et de même quand on aura une diviſion à faire, c'eſt-à-dire qu'il faudra trouver le $3^e$ terme d'une proportion géometrique dont le nombre à diviſer eſt le $1^{er}$ terme; le diviſeur le $2^e$ terme; le quotient que l'on cherche le $3^e$ terme, & zero le $4^e$ terme; il n'y aura qu'à ôter le logarithme du $2^e$ terme du logarithme du $1^{er}$ terme, & le logarithme qui ſera égal au reſte, ſera vis-à-vis du $3^e$ terme, qui eſt le quotient que l'on cherche.

642. Les formations des puiſſances n'étant que des multiplications réïterées, & les extractions des racines des diviſions réïterées pour trouver la $2^e$, la $3^e$ puiſſance, &c. d'un nombre; il n'y aura qu'à prendre le double, le triple du logarithme de ce nombre, &c. & le chercher dans la colonne des logarithmes, le nombre qui ſe trouvera vis-à-vis ſera la $2^e$, la $3^e$ puiſſance, &c. du nombre propoſé. De même pour trouver la racine $2^e$, $3^e$, &c. d'un nombre, il n'y aura qu'à prendre la moitié, le tiers, &c. du logarithme de ce nombre, & le chercher dans la colonne des logarithmes, & le nombre qui ſera vis-à-vis ſera la racine $2^e$, $3^e$, &c. que l'on cherche. Ce Corollaire eſt une ſuite de la notion des logarithmes, & de ce que quatre termes de la progreſſion géometrique correſpondante à la progreſſion arithmetique des logarithmes, faiſant une proportion géometrique, leur quatre logarithmes font une proportion arithmetique.

### *Les formules pour trouver les logarithmes hyperboliques.*

643. POUR trouver le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque plus grand que l'unité, qu'on marquera par $1+n$, il faut imaginer que ce nombre eſt une coupée, par exemple $KF$ ſur l'aſymptote $KL$, & l'ordonnée correſpondante eſt $Ff$, que ſa premiere partie 1 eſt $KG$, & ſa ſeconde partie $n = GF$; & la queſtion ſe réduira à trouver le quadrilatere $AGFf$, qu'on nommera $l$, c'eſt-à-dire logarithme. L'équation à l'hyperbole équilatere eſt $\frac{KG\times GA}{KF} = fF = \frac{1}{1+n}$. FIGURE XLVII.

La differentielle de $KF = 1 + n$ eſt $dn$; ainſi l'élement du quadrilatere $l$ eſt $dl = \frac{1dn}{1+n}$, qui ſe réduit à $\frac{dl+ndl}{dn} - 1 = 0$, Or on trouvera comme dans *l'article* 227, où eſt ce même exemple, excepté que ($l$) y eſt nommée $x$; $dl$, $dx$; $n$, $y$; & $dn$, $dy$; le logarithme $l = 1n - \frac{1}{2}nn + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 -$ &c. C'eſt *la formule* pour trouver le logarithme d'un nombre qui ſurpaſſe l'unité.

Quand le nombre propoſé ſera moindre que l'unité, on le nommera $1 - n$; & l'on aura l'equation $\frac{dl-ndl}{dn} - 1 = 0$; & l'on trouvera par la même méthode le logarithme $l = 1n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + n^4 + \frac{1}{5}n^5 +$ &c. C'eſt *la formule* pour trouver le logarithme d'un nombre moindre que l'unité; il faudra ſeulement, quand on l'aura trouvé, mettre le ſigne — audevant de la ſomme qui contiendra tel nombre que l'on voudra des termes *de la ſuite* que fera trouver la formule.

### USAGE DES FORMULES.

644. IL n'y a qu'à ſubſtituer le nombre dont on cherchera le logarithme à la place de $1 + n$ ou de $1 - n$ dans les formules, ou ſimplement la difference de ce nombre d'avec l'unité à la place de $n$; & la ſomme qu'on trouvera ſera le logarithme. Mais comme il faut que les termes de la formule aillent en diminuant, & que les logarithmes d'un nombre moindre que l'unité, & celui de ſon reciproque plus grand que l'unité, ſont égaux; il vaudra mieux ſe ſervir de la ſeconde formule, & mettre le nombre repréſenté par $\frac{1}{1+n}$ à la place de $1 - n$ dans la ſeconde formule; c'eſt-à-dire qu'il y faut mettre $-\frac{n}{1+n}$ à la place $-n$; car $\frac{1}{1+n} = 1 - \frac{n}{1+n}$.

### *La maniere de réduire les logarithmes hyperboliques aux logarithmes ordinaires des tables.*

645. DANS les logarithmes des tables, le logarithme du nombre 10 eſt l'unité précedée d'un grand nombre de zeros; les logarithmes de 100, de 1000, de 10000, &c. ſont 2, 3, 4, &c. précedés du même nombre de zeros. Or en concevant les logarithmes ordinaires des tables écrits dans une 3$^e$ colonne à côté des logarithmes hyperboliques correſpondans, il eſt clair que le logarithme hyperbolique de 10, (qu'on trouvera 2, 302585092994045684017991454 68, ſi l'on veut le

calculer

calculer juſqu'à trente rangs), eſt au logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, par exemple de 30, comme le logarithme des tables qui convient à 10, qui eſt l'unité précedée de tel nombre de zeros qu'on voudra, eſt au logarithme du même nombre 30 qu'il faut mettre dans les tables. Ainſi on réduira par cette proportion les logarithmes hyperboliques à ceux des tables.

### *Quand on a le logarithme* l *d'un nombre, trouver ce nombre.*

46. IL faut ſe ſervir de la méthode du retour des ſuites 234 & 235, où l'on a mis ce même Problême pour exemple; c'eſt-à-dire, il faut par le retour des ſuites, ayant $l = n - \frac{1}{2} nn + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{4} n^4$, &c. ou $l = n + \frac{1}{2} nn + \frac{1}{3} n^3 +$ &c. trouver la valeur de $n$ exprimée par $l$ & par les puiſſances de $l$, & y ajouter l'unité pour avoir la valeur du nombre $1 + n$, ou retrancher la ſuite qu'on trouvera de l'unité pour avoir le nombre $1 - n$; & l'on trouvera $1 + n = 1 + \frac{l}{1} + \frac{1}{2} ll + \frac{1}{2 \times 3} l^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} l^4 +$ &c. & $1 - n = 1 - \frac{l}{1} + \frac{1}{2} ll - \frac{1}{2 \times 3} l^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} l^4 -$ &c. On trouveroit les mêmes formules par les équations $dl = \frac{dn}{1+n}$, & $dl = \frac{dn}{1-n}$, en réduiſant la 1re à $1 + n \frac{-dn}{dl} = 0$, & la 2e à $1 - n \frac{-dn}{dl} = 0$, & y appliquant enſuite la méthode du *ſecond Probl.* 175.

### *Avertiſſement.*

On ne s'arrêtera pas ici à donner pluſieurs moyens de faciliter & d'abreger le calcul de ces logarithmes, étant obligé d'être court; pour dire cependant beaucoup de choſes en peu de mots, on s'attache dans ces uſages de l'Analyſe à faire concevoir clairement aux Lecteurs les méthodes generales qui leur feront réſoudre une infinité de Problêmes.

## REMARQUE.

FIGURE XLVII.

47. LES lignes droites peuvent avoir leurs logarithmes hyperboliques comme les nombres; pour le concevoir clairement il faut mener la droite $KST$, qui faſſe avec l'aſymptote $KG$ tel angle qu'on voudra; prendre ſur cette ligne la partie déterminée $KS$ telle qu'on voudra, & la nommer $a$; & nommant l'indéterminée $ST$ $(x)$, $a + x$ repréſentera telle droite qu'on voudra. Il faut mener $SG$ au point $G$ où ſe termine l'unité $KG$, & par chacune des $ST$ $(x)$, mener $TF$ parallele

à $SG$; & le quadrilatere $AGFf$ ſera le logarithme hyperbolique de la ligne $KT$. Si l'on prenoit $Kt(a-x)$, ſon logarithme ſeroit $AGPC$. Or $KS(a) . KG(1) :: ST(x) . GF = \frac{x}{a}$; ce qui donne $KF = 1 + \frac{x}{a} = \frac{a+x}{a}$, & $Ff = \frac{a}{a+x}$, & la differentielle du logarithme $AGFf(dl) = \frac{adx}{a+x}$, qui ſe réduit à $\frac{adl+xdl}{dx} - a = 0$; d'où il eſt facile par *le Problême art.* 175, de trouver le logarithme $l$ de la ligne $a+x$. Ce qu'on peut aiſément appliquer à la ligne $Kt(a-x)$; mais la differentielle du logarithme négatif $AGPC$ ſera négative & égale à $\frac{-adx}{a-x}$.

### *Trouver l'aire d'un ſecteur elliptique* aKG *exprimé par la tangente* aT *au ſommet* a *du grand axe* Ka.

684 LE ſecteur $GK\mathrm{a}$, en ſuppoſant les deux tangentes $\mathrm{a}T$, $GT$, Fig. XLVI. eſt partagé par la moitié par $KT$; car en concevant les deux ordonnées $GM$, $\mathrm{a}M$ au demi-diametre $K\varkappa$, l'on aura pour *386. l'une & l'autre ordonnée * $KT . K\varkappa :: K\varkappa . KM$; ainſi le point $M$ leur eſt commun, & elles ſont une même droite, & $K\varkappa$ partage cette droite $\mathrm{a}G$ par la moitié en $M$, d'où l'on déduit aiſément que $K\varkappa$ partage le ſecteur entier $\mathrm{a}KG$ en deux moitiés. Pour trouver la premiere moitié $\mathrm{a}K\varkappa$, on ſuppoſera la tangente $AT = t$, la moitié $K\mathrm{a}$ du premier axe égale à $r$, la moitié $KD$ du ſecond axe égale à 1. On tirera $Kt$ infiniment proche de $KT$, & les petits arcs $t\lambda$, $\varkappa\varphi$ du centre $K$ avec les rayons $Kt$, $K\varkappa$; & l'on aura les triangles rectangles ſemblables $K\mathrm{a}T$, $t\lambda T$, qui donneront $KT(\sqrt{\overline{K\mathrm{a}}^2 + \overline{\mathrm{a}T}^2} = \sqrt{rr+tt}) . K\mathrm{a}(r) :: Tt(dt) . t\lambda = \frac{rdt}{\sqrt{rr+tt}}$.

En nommant $\varkappa b(y)$, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables $K\mathrm{a}T$, $Kb\varkappa$; $\overline{\mathrm{a}T}^2(tt) . \overline{\varkappa b}^2(yy) :: \overline{KA}^2(rr) . \overline{Kb}^2 = \frac{rryy}{tt}$.
*380. On aura auſſi par la proprieté de l'ellipſe * $\overline{KD}^2(1) . \overline{\varkappa b}^2(yy) :: \overline{K\mathrm{a}}^2(rr) . \overline{K\mathrm{a}}^2 - \overline{Kb}^2 = rr - \frac{rryy}{tt}$; d'où l'on déduit $rryy = rr - \frac{rryy}{tt}$, & $yy = \frac{ttrr}{ttrr+rr} = \frac{tt}{tt+1}$; ainſi $\overline{K\varkappa}^2 = \overline{Kb}^2 + \overline{\varkappa b}^2 = \frac{rr+tt}{tt+1}$, & $K\varkappa = \sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}}$.

Les petits ſecteurs ſemblables $tK\lambda$, $\varkappa K\varphi$ donneront $Kt(\sqrt{rr+tt}) . t\lambda(\frac{rdt}{\sqrt{rr+tt}}) :: K\varkappa(\sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}}) . \varkappa\varphi = rdt \times \sqrt{\frac{1}{\overline{tt+1} \times \overline{rr+tt}}}$.

Par conſequent le petit ſecteur $\chi K\varkappa$, qui eſt l'élement du ſecteur a$K\varkappa$, eſt $K\chi \times \frac{1}{2}\varkappa\varphi = rdt \times \sqrt{\frac{1}{\overline{tt+1} \times \overline{rr+tt}}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}} = \frac{\frac{1}{2}rdt}{tt+1}$; ainſi nommant $s$ le ſecteur a$K\varkappa$, on aura $ds = \frac{\frac{1}{2}rdt}{tt+1}$, qui ſe réduit à $\frac{ttds + ds}{dt} - \frac{1}{2}r = 0$.

On trouvera par cette équation, en employant la méthode *du Problême, article* 175, le ſecteur a$K\varkappa$ $(s) = \frac{1}{2} r \times \overline{1t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \&c.}$ & le ſecteur a$KG$, double de a$K\varkappa$, $= r \times \overline{1t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \&c.}$

On trouvera par la même méthode préciſément la même ſuite pour un ſecteur ſemblable du cercle, & la même ſuite auſſi, en rendant tous les termes poſitifs, pour un ſecteur ſemblable hyperbolique, dont le ſommet eſt au centre de l'hyperbole, en ſuppoſant l'hyperbole équilatere, ou, ſi elle ne l'eſt pas, en ſuppoſant ſon ſecond axe $= 1$.

*Un ſecteur elliptique* AFC *dont le ſommet* F *eſt à un des foyers* F *de l'ellipſe, ou à un autre point du premier axe* AKa, *étant regardé comme connu, trouver l'ordonnée* CB *du point* C *qui eſt l'extrèmité de l'arc* AC *de l'ellipſe qui fait la baſe du ſecteur.*

49. ON ſuppoſe la moitié $KA$ du premier axe connue $= q$; la moitié $KD$ du ſecond axe, auſſi connue, $= r$; la partie $FA$ du grand axe connue, $= t$; l'ordonnée inconnue $CB = x$; le ſecteur $AFC$ regardé comme connu, mais pourtant indéterminé, afin qu'il puiſſe repréſenter tel ſecteur qu'on voudra, égal à $\frac{1}{2}y$. FIG. XLVI.

380. Par la proprieté de l'ellipſe * $\overline{KD}^2$ $(rr)$. $\overline{KA}^2$ $(qq)$ :: $\overline{KD}^2 - \overline{BC}^2$ $(rr - xx)$. $\overline{KB}^2 = \frac{qq}{rr} \times \overline{rr - xx}$; ainſi $KB = \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$; $KA - KB = BA = q - \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$, & $FA - BA = FB = t - q + \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$. Or la difference $B$b de $BA = q - \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$, eſt $+ \frac{qxdx}{r\sqrt{rr - xx}}$; la multipliant par l'ordonnée $BC$ $(x)$, on aura $\frac{qxxdx}{r\sqrt{rr - xx}} = \frac{2qxxdx}{2r\sqrt{rr - xx}}$ pour l'élement $BC$ cb du demi-ſegment $BCA$. Multipliant auſſi $FB$ par $\frac{1}{2}BC$, on aura le triangle $FBC = \frac{trx - qrx + qx\sqrt{rr - xx}}{2r}$. Sa differentielle ſera donc, étant réduite au même dénomina-

teur, $\frac{\overline{\overline{tr - qr} \times \sqrt{rr - xx} + qrr - 2qxx} \times dx}{2r\sqrt{rr - xx}}$. Mais le triangle *FBC* & le demi-ſegment *BCA* faiſant enſemble le ſecteur *CFA* ($\frac{1}{2}y$), la ſomme de leurs differentielles doit être égale à la differentielle ou à l'élement du ſecteur *CFA* qui eſt $\frac{1}{2}dy$. On aura donc cette équation $\frac{qr + \overline{t - q} \times \sqrt{rr - xx}}{2\sqrt{rr - xx}} dx = \frac{1}{2} dy$, qui ſe réduit à $\frac{dx}{dy} \times \overline{qr + \overline{t - q} \times \sqrt{rr - xx} - \sqrt{rr - xx}} = 0$. C'eſt l'équation par le moyen de laquelle on trouvera, comme dans *l'article* 231, qui contient ce même exemple, la valeur de l'ordonnée *CB* ($x$) $= \frac{y}{t} - \frac{qy^3}{6rrt^4} + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7}y^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}}y^7 + \&c.$ *Ce qu'il falloit trouver.*

On auroit pû trouver l'élement du même ſecteur en cherchant immédiatement le petit ſecteur $CFc = Cg \times \frac{1}{2} Fc$; mais le calcul étant bien plus embarraſſé, on s'eſt déterminé à la voye qu'on a ſuivie, où il eſt bien plus court & plus facile.

## AVERTISSEMENT.

650. LE Problême précedent donne la réſolution directe d'un Problême d'Aſtronomie dont avoit beſoin *Kepler*, & qu'il n'a pû trouver que par des voyes indirectes. Après avoir fait voir *dans le chapitre 59 de ſon Aſtronomie nouvelle touchant les mouvemens de Mars*, que cette planette décrit une ellipſe *AD* FIG. XLVI. dont le Soleil occupe l'un des foyers *F*, que le temps entier de ſon mouvement moyen autour du Soleil, par exemple depuis le point *A* où elle eſt plus éloignée du Soleil, juſqu'à ſon retour à ce point, doit être meſuré par l'aire entiere de l'ellipſe qu'on peut concevoir exprimée par le nombre 360, & chaque partie du même temps par l'aire d'un ſecteur, comme *CFA* de la même ellipſe dont le ſommet eſt au foyer *F*, & qui ſera une des parties de 360, nommant chacun de ces ſecteurs *CFA l'anomalie moyenne*, il falloit trouver l'angle *CFA* de ce ſecteur au foyer *F*, ce qu'il nomme *l'anomalie veritable*. Le Problême précedent fait trouver cet angle *CFA* pour tel ſecteur *CFA* qu'on voudra aſſigner; car nommant le ſecteur $\frac{1}{2}y$, l'on trouve par le Problême précedent la valeur de l'ordonnée *BC* ($x$) qui eſt un côté du trian-

gle rectangle $FBC$, & $BC(x)$ étant connue, on trouve le ſecond côté $FB = t - q + \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$; & l'on aura par conſequent l'angle $CFA$ *qu'il falloit trouver.*

I. En prolongeant $BC$ juſqu'au point $H$ de la circonference $AIa$ qui a pour diametre le grand axe $Aa$, l'on aura *
84. $BC . BH :: KD . KI = KA$; ce qui ſera auſſi trouver $BH$ & l'angle $HFA$, que cherchoit auſſi *Kepler.*

## REMARQUE.

LES exemples qu'on a mis pour trouver l'aire des courbes par l'élement de cette aire, & pour trouver les lignes inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans cet élement, ſuffiſent pour faire voir clairement qu'on trouvera de la même maniere les aires des autres courbes par leurs élemens, & qu'on trouvera auſſi les lignes inconnues qui entrent dans ces élemens; ce qu'on doit auſſi entendre des élemens des ſolides & des ſurfaces courbes.

# TROISIÉME PARTIE,

*Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe pour découvrir les regles du calcul integral, & où l'on explique les uſages de ce calcul.*

## PREMIERE SECTION,

*Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe pour trouver les regles du calcul integral.*

### PREMIERE DÉFINITION.

652. QUAND on a une differentielle quelconque, la maniere de trouver la grandeur entiere ou l'integrale dont elle eſt la differentielle, eſt ce qu'on appelle *le calcul integral.*

### PREMIERE PROPOSITION FONDAMENTALE.

653. QUAND une grandeur differentielle eſt incomplexe, qu'elle ne contient qu'une ſeule changeante $x$ multipliée ou diviſée par une conſtante, &, ſi c'eſt une fraction, que le dénominateur ne contienne que des conſtantes, on en trouve toujours l'integrale, 1°. en augmentant dans la differentielle donnée l'expoſant de la changeante d'une unité, 2°. en diviſant enſuite la differentielle par l'expoſant de la changeante ainſi augmenté de l'unité & multiplié par la differentielle $dx$ de la changeante $x$ lineaire; car le quotient ſera l'integrale.* * 532.

Ainſi $axdx$ a pour integrale $\frac{a}{2}x^2$ : $\frac{a}{b}x^2dx$ a pour integrale $\frac{a}{3b}x^3$ : $\frac{4x^3dx}{\sqrt{aa-bb}}$ a pour integrale $\frac{x^4}{\sqrt{aa-bb}}$ : $\sqrt[3]{\frac{aa}{bb}} \times x^5dx$ a pour integrale $\frac{1}{6}x^6 \times \sqrt[3]{\frac{aa}{bb}}$ : $ax^{-1}dx$ a pour integrale $\frac{a}{0} = \infty$ ; c'eſt-à-dire, la méthode donne une integrale infinie, ou plutôt elle ne fait rien découvrir; il faut avoir recours à d'autres manieres de trouver l'integrale: en general $nax^{n-1}dx$ a pour integrale $ax^n$; & $ax^ndx$ a pour integrale $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$. Cette propoſition eſt une ſuite évidente du calcul differentiel*. Il faut faire ici la même remarque qu'on a faite dans l'art. 533. * 532.

## *Corollaires de la premiere propoſition.*

### I.

4. QUAND on a une grandeur differentielle complexe qui n'eſt élevée à aucune puiſſance, & que tous les termes n'ont chacun qu'une ſeule changeante élevée dans ce terme à quelque puiſſance que ce puiſſe être, on en peut toujours trouver l'integrale : Par exemple l'integrale de $ax^3dx - bbxxdx + c^3ydy - e^4dx$ eſt $\frac{a}{4}x^4 - \frac{bb}{3}x^3 + \frac{c^3}{2}yy - e^4x$ ; car chaque terme ſe peut regarder comme s'il étoit ſeul.

S'il y avoit des fractions, & qu'elles n'euſſent au dénominateur que des conſtantes, on en trouveroit de même les integrales ; ainſi $\frac{a}{b}xdx - \frac{cc}{aa-bb}ydy$ a pour integrale $\frac{a}{2b}x^2 - \frac{cc}{2a^2-2b^2}yy$.

### II.

5. Quand une differentielle $dx$ eſt multipliée par la puiſſance d'une grandeur complexe entiere, ou qui n'a que des conſtantes au dénominateur, & que l'expoſant de la puiſſance eſt un nombre entier poſitif, & qu'il n'y a qu'une même changeante $x$, on en peut toujours trouver l'integrale par la premiere propoſition, en élevant la grandeur complexe à cette puiſſance. Si l'on a $dx \times \overline{a + \frac{b}{c}x}^{2}$, il faut la réduire à $\overline{a^2 + \frac{2abx}{c} + \frac{bbxx}{cc}} \times dx$, & l'on trouvera enſuite que l'integrale eſt $a^2x + \frac{abxx}{c} + \frac{bb}{3cc}x^3$.

### III.

6. Mais quand une differentielle $dx$ eſt multipliée par une grandeur complexe élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif au-deſſus de l'unité, on en trouvera l'integrale ſans l'élever à cette puiſſance, & ſi elle y étoit élevée, il faudroit la réduire à ſa racine, & lui donner l'expoſant négatif de la puiſſance : Par exemple $dx \times \overline{a^2 - bx}^{-2}$ a pour l'integrale $-\frac{1}{b} \times \overline{a^2 - bx}^{-1}$. Mais ſi l'on a $dx \times \overline{aa - 2ax + xx}^{-1}$, il faut la réduire à $dx \times \overline{a - x}^{-2}$, dont on trouvera par la 1<sup>re</sup> propoſition l'integrale $- \overline{a - x}^{-1} = -\frac{1}{a-x}$.

### REMARQUE.

7. ON a dit que l'expoſant entier négatif de la grandeur complexe devoit être au-deſſus de l'unité ; car quand c'eſt l'unité l'on trouve zero ; ainſi il faut avoir recours à une

autre méthode, qu'on donnera dans la ſuite, pour trouver l'integrale dans ce cas ; l'on doit auſſi remarquer que la grandeur complexe élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt négatif, ne doit avoir que deux termes dont l'un n'ait que des conſtantes, & l'autre la changeante $x$ lineaire ; car dans les autres cas on n'en peut pas trouver l'integrale par la ſeule premiere propoſition ; il faut d'autres méthodes qu'on donnera dans la ſuite.

## COROLLAIRE IV.

658. QUAND une differentielle eſt une grandeur incomplexe qui n'a qu'une changeante élevée à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt un nombre rompu poſitif ou négatif, on en trouve toujours l'integrale comme dans la premiere propoſition : Par exemple $dx\sqrt{ax} = \overline{ax}^{\frac{1}{2}} dx$ a pour integrale $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}$ : $\frac{dx}{\sqrt{ax}} = dx \times \overline{ax}^{-\frac{1}{2}}$ a pour integrale $2a^{-\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$ ; & en general $ax^{\frac{1}{n}} dx$ a pour integrale $\frac{a}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} = \frac{na}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}}$.

## SECONDE DE'FINITION.

659. LORSQU'UNE grandeur complexe ou incomplexe eſt élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt une fraction poſitive ou négative, ou bien une grandeur entiere négative & même poſitive, on dira que cette grandeur eſt *ſous le ſigne* ; & quand elle eſt en même temps multipliée par une grandeur entiere, on dira que cette grandeur qui eſt une partie du produit, eſt *hors du ſigne*. Ainſi dans $\frac{1}{2}\overline{a^2dx + 2bx.dx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, $a^2x + bx^2$ eſt ſous le ſigne $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}\overline{a^2dx + 2bxdx}$ eſt hors du ſigne.

## COROLLAIRE V.

660. LORSQU'ON a une grandeur complexe ſous le ſigne multipliée par une differentielle hors du ſigne, qui eſt la differentielle de cette grandeur complexe conſiderée hors du ſigne ; on en peut toujours trouver l'integrale par la premiere propoſition ; comme auſſi quand la differentielle hors du ſigne, telle qu'on l'a dite, eſt multipliée par une grandeur conſtante quelconque ;

quelconque ; ainſi l'integrale de $\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{1}{3}\ \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$ : l'integrale de $2xdx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{2}{3} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$.

## REMARQUES.

### I.

1. POUR connoître facilement les cas qui ſe rapportent au cinquiéme Corollaire, on peut y employer l'Analyſe, en ſuppoſant la grandeur complexe, qui eſt ſous le ſigne, égale à une ſeule lettre changeante $z$, & après avoir trouve la valeur de $dz$, il faudra changer toute l'expreſſion de la grandeur differentielle complexe qui eſt donnée en $z$ & $dz$, & dans les cas qui ſe rapportent au cinquiéme Corollaire, on trouvera une expreſſion plus ſimple de la differentielle dont l'integrale ſe pourra aiſément trouver par la premiere propoſition ; & après l'avoir trouvée, il faudra y ſubſtituer les grandeurs ſuppoſées égales à $z$, & l'on aura l'integrale qu'il falloit trouver : Cette méthode que fournit l'Analyſe par ſes expreſſions indéterminées qui ſert à changer les differentielles données en d'autres équivalentes plus ſimples & plus propres à y pouvoir appliquer la regle de la premiere propoſition fondamentale, eſt de grand uſage pour découvrir les integrales les plus compoſées, comme on le verra dans la ſuite.

Par exemple pour trouver l'integrale de $\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, on ſuppoſera $z = \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ ; d'où l'on déduira $zz = a^2x + bx^2$, & $2zdz = a^2dx + 2bxdx$. On changera l'expreſſion donnée en $z$ & $dz$, en ſubſtituant dans la propoſée $2zdz$ à la place de $a^2dx + 2bxdx$, & $z$ à la place de $\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ ; on la changera, dis je, en cette équivalente $z^2dz$ qui eſt très-ſimple ; on trouvera par la 1re propoſition que ſon integrale eſt $\frac{1}{3}z^3$. On ſubſtituera dans cette expreſſion la valeur de $z^3$, & l'on aura $\frac{1}{3}z^3 = \frac{1}{3} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée.

### I I.

62. Il faut quelquefois préparer les expreſſions differentielles pour les réduire au cas du cinquiéme Corollaire. Cette pré-

paration ſe fait ordinairement en multipliant la partie qui eſt hors du ſigne par la changeante $x$ ou par une de ſes puiſſances, ou par une grandeur qui contient des conſtantes & la changeante $x$, & diviſant en même temps la partie qui eſt ſous le ſigne par cette même grandeur; ou bien au contraire en diviſant la premiere partie par cette grandeur, & multipliant en même temps la ſeconde par la même grandeur; par cette préparation la differentielle conſerve toujours la même valeur. Cette préparation s'exprime ordinairement en diſant qu'il faut mettre ſous le ſigne une grandeur qui eſt hors du ſigne, & ôter de deſſous le ſigne une grandeur qui y eſt, pour la mettre hors du ſigne, ſans changer la valeur de la grandeur propoſée.

Pour faire mieux concevoir la maniere de faire cette préparation, on la fera remarquer ſur un exemple ſimple & general, comme $x^m \times \overline{ax^n}^p$. Suppoſé qu'on veuille multiplier la partie $x^m$ par $x^q$, il faut écrire $x^{m+q}$, & en même temps diviſer la ſeconde partie par $x^q$ pour conſerver la même valeur; mais comme la ſeconde partie eſt ſous le ſigne dont l'expoſant eſt $p$, il ne ſuffit pas pour en faire la diviſion par $x^q$ d'écrire $\overline{a\,x^{n-q}}^p$, mais il faut diviſer l'expoſant $q$ par l'expoſant $p$, & l'on aura $x^{\frac{q}{p}}$; & pour diviſer enſuite la ſeconde partie par $x^{\frac{q}{p}}$, il faut écrire $\overline{a\,x^{n-\frac{q}{p}}}^p$; & la grandeur propoſée $x^m \times \overline{a\,x^n}^p$ ſera changée en $x^{m+q} \times \overline{a\,x^{n-\frac{q}{p}}}^p$ qui lui eſt équivalente. La raiſon de la ſeconde operation eſt que la grandeur qui diviſe la ſeconde partie doit être égale à celle qui a multiplié la premiere partie, & $\overline{x^{\frac{q}{p}}}^p = x^q$.

Si l'on vouloit diviſer la ſeconde partie par $x^n$, c'eſt-à-dire ôter $x^n$ de deſſous le ſigne, & multiplier en même temps la premiere par $x^n$, il faudroit écrire $x^{m+np} \times \overline{ax^{n-n}}^p = x^{m+np} \times a^p = x^m \times \overline{a\,x^n}^p$. La raiſon en eſt que dans la ſeconde partie $x^n$ eſt élevée à la puiſſance $p$; ainſi en diviſant la ſeconde partie par $x^n$, on la diviſe par $x^{np}$; il faut donc pour conſerver la même valeur multiplier la premiere par $x^{np}$.

Quand l'expoſant $p$ du ſigne eſt une fraction, comme dans $x^4 \times \overline{ax^8}^{\frac{1}{2}}$, & qu'on veut multiplier la premiere partie par $x^3$, & diviſer la ſeconde par $x^3$, l'on trouve $x^{4+3} \times \overline{ax^{8-\frac{3}{\frac{1}{2}}}}^{\frac{1}{2}} = x^7 \times \overline{ax^2}^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{q}{p}$ exprime une multiplication au lieu d'une diviſion, puiſque $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 2 \times 3 = 6$.

Quand l'expoſant $p$ du ſigne eſt négatif, comme dans $x^4 \times \overline{ax^3}^{-\frac{1}{2}}$, & qu'on veut multiplier la premiere partie par $x^2$, & diviſer la ſeconde par $x^2$, on trouve $x^{4+2} \times \overline{ax^{3-\frac{2}{\frac{1}{-2}}}}^{-\frac{1}{2}} = x^6 \times \overline{ax^{3+4}}^{-\frac{1}{2}} = x^6 \times \overline{ax^7}^{-\frac{1}{2}} = x^4 \times \overline{ax^3}^{-\frac{1}{2}}$, alors $-\frac{q}{p} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}$ devient $+\frac{q}{p} = +\frac{2}{\frac{1}{2}} = +4$; ce qui marque que dans ce cas la premiere & la ſeconde partie ſont multipliées par la même grandeur, parce que dans ce cas la grandeur propoſée eſt une fraction. Ces choſes ſuppoſées:

Pour réduire, par exemple, la differentielle $dx \times \overline{a^6x^3 + 3a^4bx^4 + 3a^2bbx^5 + b^3x^6}^{\frac{1}{2}}$ au cas du cinquiéme Corollaire, je remarque que cette expreſſion eſt égale à celle-ci $dx \times \overline{\overline{a^2x + bx^2}^2 \times \overline{a^2x + bx^2}^1}^{\frac{1}{2}}$; je multiplie la grandeur qui eſt hors du ſigne par $\overline{a^2x + bx^2}^1$, & je diviſe en même temps celle qui eſt ſous le ſigne par la même grandeur, & je trouve $\overline{a^2xdx + bx^2dx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ qui ſe rapporte au cinquiéme Corollaire.

De même pour réduire la differentielle $dx \times \overline{aax^2 + x^4}^{\frac{1}{2}}$, il faut multiplier $dx$ par $x$, & diviſer par $x$ la grandeur qui eſt ſous le ſigne, & elle ſe changera en $xdx \times \overline{aa + x^2}^{\frac{1}{2}}$ qui ſe raporte au 5^e^ Corollaire. Au contraire pour réduire au 5^e^ Corollaire la differentielle $\overline{3ax^3dx + 4x^4dx} \times \overline{ax + x^2}^{\frac{1}{2}}$, il faut diviſer la partie qui eſt hors du ſigne par $x$, & multiplier celle qui eſt ſous le ſigne par $x$, & elle ſera changée en ſon équivalente $\overline{3ax^2dx + 4x^3dx \times ax^3 + x^4}^{\frac{1}{2}}$, dont on trouvera par le cinquiéme Corollaire l'integrale $\frac{2}{3} \times \overline{ax^3 + x^4}^{\frac{3}{2}}$.

On réduira de même au cinquiéme Corollaire la differentielle $\overline{adx + xdx} \times \overline{3a + 2x}^{-\frac{1}{2}}$, en multipliant la premiere partie & diviſant la ſeconde par $x$, & l'on aura l'équivalente $\overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}$, dont on trouvera l'integrale par le cinquiéme Corollaire ou par la premiere remarque, en ſuppoſant $\overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}} = z$, d'où l'on déduira $z^{-1} = \overline{3axx + 2x^3}^{\frac{1}{2}}$, & $z^{-2} = 3axx + 2x^3$; & $-2z^{-3}dz = 6axdx + 6x^2dx$, & $-\frac{1}{3}z^{-3}dz = axdx + x^2dx$; par conſequent $-\frac{1}{3}z^{-2}dz = \overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}$. Or l'integrale de $-\frac{1}{3}z^{-2}dz$ eſt, par la premiere propoſition ou par le troiſiéme Corollaire, $\frac{1}{3}z^{-1}$; où ſubſtituant la valeur de $z^{-1}$, on trouvera $\frac{1}{3} \times \overline{3axx + 2x^3}^{\frac{1}{2}}$ pour l'integrale que l'on cherchoit.

On réduira au contraire la differentielle $ax^2dx \times \overline{a^2x^2 + x^4}^{-\frac{1}{2}}$ au cinquiéme Corollaire, en diviſant la premiere partie & multipliant la ſeconde par $x$, & l'on trouvera l'équivalente $axdx \times \overline{aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$, dont l'integrale eſt $a \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$.

## III.

*Où l'on explique la marque qui fait diſtinguer les cas où l'integrale qu'on trouve eſt complete ; & la regle pour trouver quand elle ne l'eſt pas, la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou retrancher pour avoir l'integrale complete.*

663. POUR faire voir aux Lecteurs la raiſon de la regle par laquelle on connoît ſi une integrale eſt complete, & la grandeur conſtante qu'il lui faut ajouter ou en retrancher quand elle ne l'eſt pas, afin de la rendre complete, en même temps qu'on expliquera cette regle; on leur fera remarquer qu'une differentielle complexe ou incomplexe, qui n'a qu'une même changeante $x$, peut être regardée comme l'élement de l'aire d'une courbe $VDE$ dont $x$ eſt la coupée, ou la partie changeante de la coupée quand elle contient une conſtante &

FIGURE XLVIII.

une changeante, & dont la quantité multipliée par $dx$ eſt l'ordonnée. Pour avoir l'équation de cette courbe $VDE$, il faut effacer $dx$ de la differentielle propoſée, & ſuppoſer une changeante $y$ ou $z$ égale à la quantité qui reſte après en avoir effacé $dx$.

Par exemple on a trouvé* que l'élement de la longueur de la ſeconde parabole cubique $AcC$, dont l'équation eſt $x^3 = pyy$, étoit $dx \times \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{4p + 9x} = dx \times \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, qui exprime le petit arc $cC$; on peut regarder cette differentielle comme l'élement de la quadrature de l'aire d'une courbe $VDE$, dont $x$ eſt la coupée ou la partie changeante de la coupée $VAB$, & $\frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, l'ordonnée $BE$; & l'équation de cette courbe ſera $y = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$; & rendant cette équation commenſurable, on aura $yy = \frac{4p+9x}{4p}$, qui eſt l'équation d'une parabole ſimple $VDE$, dont la coupée $VAB$ ſe trouvera (en comparant cette équation avec celle de l'art. 427, comme l'on a fait dans l'art. 442) égale à $\frac{4}{9}p + x$, c'eſt-à-dire, la partie conſtante $\frac{4}{9}p$ eſt $VA$, & la partie changeante $x$ eſt $AB$, & commence au point $A$. Le parametre $VP = \frac{9}{4p}$. * 584.

On remarquera ici que l'on dit que la rectification d'une courbe, ou la meſure de la ſolidité du corps formé par la révolution de cette courbe autour d'une ligne droite donnée, ou la meſure de la ſurface courbe de ce corps, dépend de la quadrature de la courbe qui a la même differentielle pour l'élement de ſon aire; ainſi la rectification de la ſeconde parabole cubique dépend de la quadrature de la parabole ſimple.

Il eſt évident que la differentielle propoſée, par exemple $dx \times \frac{1}{2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{1}{2}}$, qui eſt l'élement de la longueur de la parabole cubique, eſt auſſi l'élement de l'aire de la parabole ſimple $y - \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$. L'integrale de cette differentielle, qu'on trouvera par le cinquiéme Corollaire,* ou * 660.

*661. par la premiere remarque* égale à $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}}$, doit exprimer la longueur *AcC* de la parabole cubique; elle doit auſſi exprimer l'aire *VABEDV* de la parabole ſimple.

Pour voir à préſent ſi cette integrale exprime exactement la longueur *AcC* de la parabole cubique, on fera ce raiſonnement; la quantité qu'exprime cette integrale doit être égale à zero à l'origine *A* où commence la parabole cubique *AcC*, c'eſt-à-dire, elle doit être égale à zero à l'origine *A* des $x$, où $x = 0$. Il faut donc ſuppoſer dans l'integrale trouvée $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}}$, que $x = 0$, & ſi l'integrale devient elle-même zero par cette ſuppoſition, elle ſera exacte; ſi au contraire elle contient encore une grandeur conſtante après cette ſuppoſition, comme en effet on trouve en ſuppoſant $x = 0$, la grandeur conſtante $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p}^{\frac{3}{2}} = + \frac{8}{27}p$, il eſt clair que cette conſtante eſt de trop; ainſi il faut la retrancher, c'eſt-à-dire, l'écrire après l'integrale avec le ſigne —, ſi elle avoit le ſigne +; & avec le ſigne +, ſi elle avoit le ſigne —, afin qu'en la joignant avec un ſigne oppoſé à l'integrale trouvée, elle la rende égale à zero à l'origine des $x$, où la valeur de l'integrale trouvée doit être égale à zero. L'integrale exacte qui exprime la longueur de la parabole cubique *AcC* eſt donc $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}p$.

Afin de prévenir une difficulté qui pourroit naître dans l'eſprit des Lecteurs, ſur ce que la même differentielle $dx \times \frac{1}{2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{1}{2}}$ a une integrale qui eſt trop grande de $\frac{8}{27}p$ pour exprimer la longueur de la parabole cubique; & qu'au contraire elle exprime exactement l'aire entiere *VABEDV* de la parabole ſimple, on leur fera remarquer que ſi l'on vouloit examiner ſi l'integrale de cette differentielle eſt exacte par raport à l'aire de la parabole ſimple, il faudroit auſſi ne prendre l'aire qu'exprime l'integrale de cette differentielle qu'à l'origine $A$ des $x$, c'eſt-à-dire, ne prendre que l'aire $ABED$, & ſuppoſer que l'aire exprimée par l'integrale $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}}$ commence à l'origine $A$ des $x$, & qu'elle eſt égale à zero au point $A$ où $x = 0$; & en ſuppoſant pour l'aire de la parabole ſimple comme on a fait pour la longueur de la parabole cubique, que $x = 0$ dans l'integrale trouvée, on verra que l'integrale contient encore la conſtante $+ \frac{8}{27} p$. Ce qui fait voir que l'aire $ABED$ exprimée par cette integrale eſt $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} p$.

En effet l'aire de la parabole ſimple étant égale aux deux tiers du rectangle de la coupée & de l'ordonnée *, l'aire *597.

$$VAD = \tfrac{2}{3} \times VA\left(\tfrac{4}{9} p\right) \times AD\left(\frac{1}{2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p}^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{8}{27} p \text{ ; \&}$$

$$\text{l'aire } VABEDA = \tfrac{2}{3} \times VAB\left(\tfrac{4}{9} p + x\right) \times BE\left(\frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{\overline{4p}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \overline{\frac{1}{27 \times 2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times 8p + \frac{1}{27 \times 2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \frac{2 \times 27}{3} x} \times \overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p+9x} \times \overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}}.$$

D'où l'on voit clairement, 1°. qu'il n'y a que l'eſpace $ABED$ de la parabole ſimple qui commence à l'origine $A$ des $x$ qui ſoit égal à la longueur $AcC$ de la ſeconde parabole cubique; 2°. qu'il faut ſuppoſer $x = 0$ dans l'integrale qu'on trouve d'une differentielle propoſée pour avoir l'integrale complete, tant celle qui exprime la grandeur à qui appartient la differentielle propoſée (comme dans notre exemple, la longueur de la ſeconde parabole cubique,) que celle qui exprime l'aire de la courbe qui a la même differentielle propoſée pour l'element de ſon aire, en ſuppoſant que cette aire commence à l'origine des $x$.

Comme l'on n'a pris cet exemple que pour faire concevoir clairement la regle, & qu'elle peut s'appliquer de même à tous les autres, on la mettra ici comme generale.

### *Regle pour connoître quand une integrale qui n'a qu'une même changeante eſt complete ; & quand elle ne l'eſt pas, pour connoître la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou en retrancher pour la rendre complete.*

664. IL faut ſuppoſer la grandeur changeante $x$ de l'integrale égale à zero ; & ſi l'integrale devient zero, c'eſt une marque qu'elle eſt exacte ; ſi après cette ſuppoſition de $x = 0$, il reſte une conſtante dans l'integrale, il faut la joindre avec un ſigne contraire à l'integrale qu'on a trouvée, & elle ſera l'integrale complete qu'on cherchoit.

On remarquera que dans les integrales des ſecondes differences, ce peut être une difference premiere ſuppoſée conſtante qui ſoit la grandeur qu'il faut ajouter à l'integrale trouvée, ou qu'il en faut ôter.

## IV. REMARQUE.

665. QUAND on trouve une integrale négative, il faut la prendre non depuis l'origine, mais du côté oppoſé ; par exemple

FIGURE XLIX. ſi l'origine des $x$ eſt en $A$ ( fig. 49 ), & que l'équation de la courbe $ECG$ par raport à l'aſymptote $ABF$ ſoit, en nommant $AB\,(x)$, $BC\,(y)$ ; $1 = xxy$ ; l'élement de l'aire ſera $1 \times x^{-2}dx$, dont l'integrale eſt la quantité négative $-1x^{-1} = -\frac{1}{x}$, ce qui marque que l'aire qu'exprime cette integrale n'eſt pas $DABCE$, mais l'aire $CBFG$ qui commence à l'ordonnée $BC\,(y)$, & va vers $BF$ qui eſt le côté oppoſé à l'origine $A$ ; car alors les differentielles $dx$ ſont négatives, ce qui marque que ces $dx$ viennent de $F$ vers $B$, & non pas de $A$ vers $B$ ; & qu'ainſi la ſomme des petits parallelogrames compoſée des $ydx$ dont les $-dx$ ſont les baſes, qui eſt l'integrale, eſt ſur la ligne qui vient de $F$ vers $B$ ; ce qui eſt encore évident en ce que les $x$ augmentant dans l'integrale $-\frac{1}{x}$, l'integrale devient plus petite, ce qui convient à l'aire $CBFG$, & non pas à l'aire $DABCE$, celle-ci devenant plus grande à meſure que les $x$ augmentent.

## COROLLAIRE VI.

666. ON peut encore réduire quelques differentielles qui contiennent une grandeur complexe incommenſurable, à la propoſition fondamentale ou aux Corollaires qu'on en a déduits,

déduits, en rendant commenſurable la grandeur complexe qui ne l'eſt pas, ſans pourtant introduire de nouvelle incommenſurable. Par exemple pour réduire la differentielle $a^3x^{-1}dx \times \overline{ax - x^2}^{-\frac{1}{2}}$ à la premiere propoſition, on ſuppoſera la grandeur qui eſt ſous le ſigne $ax - x^2 = a^2x^2z^{-2}$; ce qui donnera $x = az^2 \times \overline{a^2 + z^2}^{-1}$, $z = a \times x^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - x}^{-\frac{1}{2}}$, $dx = 2a^3zdz \times \overline{a^2 + z^2}^{-2}$; $\overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}} = a^2z \times \overline{a^2 + z^2}^{-1}$; & la differentielle propoſée ſera changée, après avoir fait les ſubſtitutions, en cette équivalente $2a^3z^{-2}dz$, dont on trouvera par le troiſiéme Corollaire, ou par la premiere propoſition, que l'integrale eſt $- 2a^3z^{-1}$; & ſubſtituant dans cette integrale la valeur de $z^{-1}$, on aura l'integrale $- 2aax^{-\frac{1}{2}} \times \overline{a - x}^{\frac{1}{2}} = - 2aa\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ de la differentielle propoſée $a^3x^{-1}dx \times \overline{ax - x^2}^{-\frac{1}{2}}$.

## COROLLAIRE VII.

7. LE cinquiéme Corollaire peut être rendu plus general; quand la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne n'a que deux termes, dont l'un n'eſt qu'une grandeur conſtante. Par exemple $x^{n-} dx \times \overline{a + bx^n}^p$ eſt une expreſſion differentielle, où $x^{n-1}dx$ étant la difference du terme $bx^n$ qui eſt ſous le ſigne, on en trouve l'integrale par la premiere propoſition, 1°. en augmentant l'expoſant $p$ d'une unité, ce qui la fait devenir $x^{n-1}dx \times \overline{a + bx^n}^{p+1}$; 2°. en diviſant cette differentielle par le produit de l'expoſant ainſi augmenté $p + 1$, multiplié par la differentielle $bnx^{n-1}dx$ du terme $bx^n$; car le quotient $\frac{x^{n-1}dx \times \overline{a + bx^n}^{p+1}}{\overline{p + 1} \times bnx^{n-1}dx} = \frac{1}{\overline{p + 1} \times bn} \times \overline{a + bx^n}^{p+1}$ eſt l'integrale de la differentielle propoſée.

On la trouve encore par la 1^re^ remarque, en ſuppoſant $\overline{a + bx^n}^p = z$; ce qui donnera $a + bx^n = z^{\frac{1}{p}}$, $x^n = \frac{z^{\frac{1}{p}} - a}{b}$, $nx^{n-1}dx = \frac{1}{pb} \times z^{\frac{1}{p} - 1}dz$; & la differentielle $x^{n-1}dx \times \overline{a + bx^n}^p$

deviendra égale à $\frac{1}{pbn} \times z^{\frac{1}{p} - 1} \times zdz = \frac{1}{pbn} \times z^{\frac{1}{p}} dz$, dont l'integrale eſt par la premiere propoſition $\frac{1}{\overline{p+1} \times bn} z^{\frac{1}{p}+1}$; & en y ſubſtituant la valeur de $z$ en $x$, on aura l'integrale $\frac{1}{\overline{p+1} \times bn} \times \overline{a+bx^n} \times \overline{a+bx^n}^{p} = \frac{1}{\overline{p+1} \times bn} \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$. Cela ſuppoſé, on peut étendre le cinquiéme Corollaire à tous les cas compris dans cette expreſſion $x^{qn} \times x^{n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = x^{qn+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^{p}$; où l'on voit que $x^{n-1}$ eſt multipliée par $x^{qn}$, dont l'expoſant $qn$ eſt ſuppoſé un multiple de $n$, c'eſt-à-dire $q$ eſt ſuppoſé un nombre entier poſitif quelconque, comme 2, 3, 4, &c. car en ſuppoſant $\overline{a+bx^n}^{p} = z$, on aura $\frac{z^{\frac{1}{p}} - a}{b} = x^n$, $\frac{1}{bnp} z^{\frac{1}{p} - 1} dz = x^{n-1} dx$, $\frac{\overline{z^{\frac{1}{p}} - a}^{q}}{b^q} = x^{qn}$; par conſequent $x^{qn+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = \frac{1}{bnp} \times z^{\frac{1}{p}} dz \times \frac{\overline{z^{\frac{1}{p}} - a}^{q}}{b^q}$. Or $q$ étant un nombre entier, on peut toujours trouver l'integrale de cette differentielle, 1°. en élevant $\overline{z^{\frac{1}{p}} - a}^{q}$ à la puiſſance du nombre entier repreſenté par $q$, & multipliant enſuite chaque terme par $\frac{1}{b^{q+1} np} \times z^{\frac{1}{p}} dz$; 2°. en prenant par la premiere propoſition l'integrale de chaque terme; 3°. en réduiſant enſuite l'integrale trouvée par le moyen de $z$, à l'expreſſion dont la changeante eſt $x$.

Par exemple ſi la differentielle propoſée eſt $cx^{3n-1} dx \times \sqrt{a+bx^n} = cx^{2n+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$; par conſequent $\frac{1}{p} = 2$, $z = \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{b^{q+1} np} \times z^{\frac{1}{p}} dz \times \overline{z^{\frac{1}{p}} - a}^{q} = \frac{2c}{b^3 n} \times z^2 dz \times \overline{z^2 - a}^{2} = \frac{2c}{b^3 n} \times z^6 dz - 2az^4 dz + aaz^2 dz$, dont l'integrale eſt par la premiere propoſition, ou par le ſecond Corollaire, $\frac{2c}{b^3 n} \times \frac{1}{3} aaz^3 - \frac{2}{5} az^5 + \frac{1}{7} z^7 =$

$\frac{1}{b^{3n}} \times \overline{\frac{2}{3}aa - \frac{4}{5}azz + \frac{2}{7}z^4} \times cz^3$, qui ſe réduit, en mettant les valeurs de $zz = a + bx^n$, & de $z^4 = aa + 2abx^n + bb\,x^{2n}$ dans le 2ᵉ & le 3ᵉ terme, à $\frac{1}{b^{3n}} \times \frac{16aa - 24abx^n + 30bbx^{2n}}{105} \times cz^3$; on laiſſe, pour abreger, $z^3$ à la place de $\overline{a + bx^n}^{\frac{3}{2}} = \overline{a + bx^n}^{\frac{1}{2} + 1}$.

## REMARQUES.

### I.

568. L'INTEGRALE de toutes les differentielles repreſentées par $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a + bx^n}^p$, où l'on ſuppoſe que $q$ eſt un nombre entier poſitif, & par conſéquent $q + 1$ l'eſt auſſi, a autant de termes multipliés par $\overline{a + bx^n}^{p+1}$, qu'il y a d'unités dans le nombre entier $q + 1$. Il n'y a qu'à en faire ſoi-même quelques exemples pour en voir clairement la raiſon.

### II.

69. Si l'expreſſion differentielle étoit $cx^{m-1}dx \times \overline{a + bx^n}^p$, & que $\frac{m}{n}$ fut un nombre entier poſitif, cette expreſſion ſeroit la même que $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a + bx^n}^p$; car puiſque $\frac{m}{n}$ eſt un nombre entier, il faut que $m$ ſoit un multiple de $n$, qu'on peut ſuppoſer repreſenté par $\overline{q+1} \times n$; ainſi $m - 1 = qn + n - 1$. De même ſi $\frac{m+1}{n}$ eſt un nombre entier poſitif, l'expreſſion $cx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$ eſt encore la même que $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$; car $\frac{m+1}{n}$ ne peut pas être un nombre entier, que $m + 1$ ne ſoit un multiple de $n$, qu'on peut ſuppoſer repreſenté par $\overline{q + 1} \times n$; ce qui donnera $m = qn + n - 1$.

### III.

70. On peut par le Corollaire précedent, faire une table qui contienne les integrales d'une infinité de differentielles qui ont ſous le ſigne une grandeur complexe de deux termes, ce qu'on appelle un binome; on en mettra ſeulement ici quelques exemples.

1. $cx^{n-1}\,dx \times \sqrt{a + bx^n}$ a pour integrale . $\frac{2c}{3bn} \times \overline{a + b\,x^n}^{\frac{1}{2} + 1}$
2. $cx^{2n-1}dx \times \sqrt{a + bx^n}$ . . $\frac{-4a + 6bx^n}{15nbb} \times c \times \overline{a + bx^n}^{\frac{1}{2} + 1}$
3. $cx^{3n-1}dx \times \sqrt{a + bx^n}$ $\frac{16aa - 24abx^n + 30bbx^{2n}}{105nb^3} \times c \times \overline{a + bx^n}^{\frac{1}{2} + 1}$
4. $cx^{4n-1}dx \times \sqrt{a + bx^n}$ $\frac{-96a^3 + 144aabx^n - 180abbx^{2n} + 210b^3x^{3n}}{945nb^4} \times c \times \overline{a + bx^n}^{\frac{1}{2} + 1}$

On peut continuer ces exemples tant qu'on voudra, comme auſſi ceux qui ſuivent.

1. $cx^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$ a pour integrale . $\frac{2c}{bn} \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$
2. $cx^{2n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$ . . $\frac{-4a+2abx^n}{3nbb} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$
3. $cx^{3n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$ . $\frac{16aa-8abx^n+6bbx^{2n}}{15nb^3} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$

### IV. REMARQUE.

671. ON peut de même faire les formules des differentielles binomes, dont le ſigne radical eſt $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, &c. comme auſſi de celles dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif plus grand que l'unité, en remarquant, par exemple, que $cx^{n-1}dx \times \overline{aa+2abx^n+bbx^{2n}}^{-1}$, doit être réduite à $cx^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-2}$ & ainſi des autres.

### USAGE DES FORMULES PRECEDENTES.

672. CEs formules qui contiennent les integrales des differentielles binomes étant ainſi toutes préparées dans une table, ſervent à ceux qui s'appliquent à la réſolution des Problêmes par le calcul integral, pour trouver tout d'un coup par de ſimples ſubſtitutions les integrales des équations differentielles qu'ils trouvent en cherchant à réſoudre les problêmes, & à découvrir d'abord la réſolution de ceux dont les équations peuvent ſe rapporter à ces formules.

### AVERTISSEMENT.

LEs Lecteurs peuvent s'être formé une idée diſtincte de la maniere de trouver les integrales des differentielles les moins compoſées, & qui ſe peuvent facilement rapporter à la premiere propoſition fondamentale, par le détail où l'on eſt entré dans les Corollaires & les Remarques précedentes. Ils n'auront à préſent nulle peine à entendre la maniere de faire les formules generales des integrales des differentielles compoſées, qu'on va auſſi réduire, pour être court, à des formules generales.

### TROISIE'ME DE'FINITION.

673. LORSQUE dans une grandeur complexe les expoſans des puiſſances de la changeante $x$ qui diſtingue les termes, font

une progreſſion arithmetique, on l'appelle un *binome* quand il n'y a que deux termes; un *trinome* quand il y en a trois, & ainſi de ſuite. Ainſi $ax^{\circ} + bx^{n} + cx^{2n}$ eſt un trinome; mais $a + bx^{n} + cx^{3n}$ eſt un quadrinome; & il faut ſous-entendre le troiſiéme terme $o x^{2n}$ qui eſt zero, comme s'il y avoit $a + bx^{n} + o x^{2n} + cx^{3n}$.

74. On rapportera ici toutes les expreſſions des differentielles des grandeurs complexes à ces formules generales. Les binomes ſe rapporteront à $gx^{m}dx\,\overline{a + bx^{n}}^{p}$, les trinomes à $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p}$; & ainſi de ſuite; & $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n} + cx^{3n}}^{p} +$ &c. repreſentera une grandeur complexe qui a des termes à l'infini. Les grandeurs $g, a, b, c$, &c. repreſenteront les coëficiens des differentielles particulieres; $x$ repreſentera leur changeante; $p$ repreſentera l'expoſant de la puiſſance de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne $p$, & ce ſera une fraction, ou un nombre entier négatif, car quand c'eſt un nombre entier poſitif l'on n'a pas beſoin des méthodes ſuivantes, la premiere propoſition ſuffit, comme l'on a vû dans le ſecond Corollaire.

75. Il peut auſſi y avoir dans une même differentielle pluſieurs grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, comme $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p} \times \overline{c + ex^{n} + fx^{2n}}^{q}$. Quand dans ce cas l'expoſant de l'une de ces grandeurs complexes eſt l'unité poſitive, il eſt inutile de la marquer; par exemple ſi $p = 1$ la differentielle ſera $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}} \times \overline{c + ex^{n} + fx^{2n}}^{q}$. Dans ce même cas ſi les expoſans ſont négatifs dans l'une des grandeurs complexes, ils doivent auſſi être négatifs dans l'autre; & s'ils ſont poſitifs dans l'une, ils doivent auſſi l'être dans l'autre.

76. Les formules précedentes peuvent avoir deux formes ſans changer de valeur; la premiere eſt quand les expoſans $n$ de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, ſont poſitifs; & c'eſt la forme qu'on leur a donnée dans les formules précedentes; la ſeconde eſt quand ces mêmes expoſans $n$ ſont négatifs, & on les rend négatifs en diviſant la grandeur qui eſt ſous le ſigne par la changeante $x$ élevée à la plus haute puiſſance qu'a cette même changeante ſous le ſigne; & multipliant en même temps la changeante $x$ qui eſt hors du ſigne par la

même grandeur ; par exemple $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{\,p}$ peut avoir cette ſeconde forme $gx^{m+np} dx \times \overline{b+ax^{-n}}^{\,p}$. La 2$^e$ forme de $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{\,p}$ eſt $gx^{m+2np} dx \times \overline{c+bx^{-n}+ax^{-2n}}^{\,p}$; $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+\beta x^{2n}}^{\,p} \times \overline{c+ex^n+fx^{2n}+\gamma x^{3n}}^{\,p}$ peut avoir cette ſeconde forme $gx^{m+2n+3np} dx \times \overline{\beta+bx^{-n}+ax^{-2n}} \times \overline{\gamma+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n}}^{\,p}$, ce qui ſe fait 1°. en diviſant la premiere grandeur complexe $a+bx^n+\beta x^{2n}$ par $x^{2n}$, & multipliant en même temps $gx^m dx$ par $x^{2n}$ ; 2°. en diviſant enſuite la ſeconde grandeur complexe par $x^{3n \times p}$, & multipliant en même temps $gx^m$ déja devenue $gx^{m+2n}$ par $x^{3np}$ ; il en eſt de même des autres.

## *Exemples pour faire voir la maniere de réduire les differentielles particulieres aux Formules précedentes.*

### I.

677. ON réduira la differentielle $\frac{h^5}{x^5} dx \times \sqrt{ix+x^2} = h^5 x^{-5} dx \times \overline{ix+x^2}^{\,\frac{1}{2}}$ à la formule $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{\,p}$, en diviſant la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par $x^{1 \times \frac{1}{2}}$, & multipliant en même temps la grandeur qui eſt hors du ſigne par $x^{1 \times \frac{1}{2}}$ ; (car $x^1$ ſous le ſigne eſt égal à $x^{1 \times \frac{1}{2}}$; ainſi il faut multiplier la grandeur qui eſt hors du ſigne par $x^{1 \times \frac{1}{2}}$) & l'on aura $h^5 x^{-\frac{9}{2}} dx \times \overline{i+x}^{\,\frac{1}{2}}$, où l'on voit que $g$ de la formule eſt égale à $h^5$ ; $m = -\frac{9}{2}$ ; $a = i$ ; $b = 1$ ; $n = 1$ ; $p = \frac{1}{2}$.

Pour réduire la même differentielle $h^5 x^{-5} dx \times \overline{ix+x^2}^{\,\frac{1}{2}}$ à la ſeconde formule $gx^{m+np} dx \times \overline{b+ax^{-n}}^{\,p}$, l'on diviſera la grandeur qui eſt ſous le ſigne par $x^{2 \times \frac{1}{2}}$, & on multipliera celle qui eſt hors du ſigne par $x^{2 \times \frac{1}{2}}$, & l'on aura $h^5 x^{-4} dx \times \overline{1+ix^{-1}}^{\,\frac{1}{2}}$; $g$ de la formule $= h^5$ ; $m = -4$ ; $b = 1$ ; $a = i$ ; $n = -1$ ; $p = \frac{1}{2}$.

### I I.

Pour réduire $\frac{3h - ix^2}{x^2 \sqrt{bx - ix^3 + Kx}} dx = x^{-2} dx \times \overline{3h - ix^2} \times \overline{hx - ix^3 + Kx^4}^{\,-\frac{1}{2}}$ à la formule $gx^m dx \times \overline{a+bx}^{\,n} + \beta x^{2n} \times$

$\overline{c+ex^{n}+fx^{2n}+\gamma x^{3n}}^{p}$, il faut diviſer la grandeur qui eſt ſous le ſigne par $x^{1\times-\frac{1}{2}}$, & multiplier en même temps celle qui eſt hors du ſigne par $x^{1\times-\frac{1}{2}}$ & l'on aura $x^{-\frac{5}{2}}dx\times\overline{3h-ix^{2}}\times\overline{h+0x^{1}-ix^{2}+Kx^{3}}^{-\frac{1}{2}}$: $g$ de la formule $=1$; $m=-\frac{5}{2}$; $a=3h$; $b=0$; $\beta=-i$; $c=h$; $e=0$; $f=-i$; $\gamma=K$; $p=-\frac{1}{2}$.

Pour réduire la même differentielle à la ſeconde forme de la même formule qui eſt $gx^{m+2n+3np}dx\times\overline{\beta+bx^{-n}+ax^{-2n}}\times\overline{\gamma+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n}}^{p}$, 1°. il faut diviſer la premiere grandeur complexe $\overline{3h-ix^{2}}$ par $x^{2}$, & multiplier en même temps la grandeur $x^{-2}dx$ par $x^{2}$. 2°. Il faut enſuite diviſer la ſeconde grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par $x^{4}$ élevée à la puiſſance $-\frac{1}{2}$, & multiplier en même temps la grandeur $x^{-2}dx$ par la même grandeur $x^{4\times-\frac{1}{4}}=x^{-2}$, & l'on aura $x^{-2}dx\times\overline{-i+3hx^{-2}}\times\overline{K-ix^{-1}+0x^{-2}+hx^{-3}}^{-\frac{1}{2}}$: $m$ de la formule $=-2$; $\beta=-i$; $b=0$; $a=3h$; $\gamma=K$; $f=-i$; $e=0$; $c=+h$; $n=1$; $p=-\frac{1}{2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire connoître la maniere de réduire les differentielles particulieres aux deux expreſſions équivalentes des formules, dans la premiere deſquelles les expoſans $n$, $2n$, &c. ſont poſitifs, & négatifs dans la ſeconde; on fera ſeulement remarquer qu'on peut auſſi réduire les differentielles incomplexes, comme $dx\sqrt{ax}=dx\times\overline{ax}^{\frac{1}{2}}$, aux complexes, en écrivant $x^{0}\times dx\times\overline{0+ax^{1}}^{\frac{1}{2}}$.

## PROBLÈME I.

78. *TROUVER les integrales des expreſſions generales des differentielles de la troiſiéme définition.*

### PREMIERE METHODE.

1°. IL faut réduire en *ſuite* la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, & multiplier chaque terme de cette ſuite infinie par la grandeur qui eſt hors du ſigne.

Prenant pour exemple le binome $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p}$, il faut réduire en *ſuite* la grandeur complexe $\overline{a + bx^{n}}^{p}$ par le moyen de la table de la page 410 ; & multiplier enſuite tous les termes par $gx^{m}dx$, & l'on aura $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p} = ga^{p}x^{m}dx + pga^{p-1}bx^{m+n}dx + p \times \frac{p-1}{2}ga^{p-2}b^{2}x^{m+2n}dx + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times ga^{p-3}b^{3}x^{m+3n}dx +$ &c.

2°. Il faut prendre par la 1^re^ propoſition l'integrale de chaque terme de la differentielle ainſi réduite en *ſuite* ; ce qui donnera une nouvelle *ſuite*, qui eſt l'integrale de la differentielle propoſée. Dans notre exemple on aura S. $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p}$

$$= \frac{ga^{p}}{m+1}x^{m+1} + \frac{pga^{p-1}}{m+1+n}bx^{m+1+n} + \frac{p \times \frac{p-1}{2}}{m+1+2n}ga^{p-2}b^{2}x^{m+1+2n} + \frac{p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}}{m+1+3n}ga^{p-3}b^{3}x^{m+1+3n} + \&c.$$

3°. Pour abreger cette expreſſion de l'integrale, il faut la diviſer par la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne $p$ élevée à la puiſſance $p + 1$, réduite auparavant en la *ſuite* qui lui convient par le moyen de la table de la page 410 ; le diviſeur ſera dans notre exemple $\overline{a + bx^{n}}^{p+1} = a^{p+1} + \overline{p+1} \times a^{p}bx^{n} + \overline{p+1} \times \frac{p}{2}a^{p-1}b^{2}x^{2n} + \overline{p+1} \times \frac{p}{2} \times \frac{p-1}{3}a^{p-2}b^{3}x^{3n} +$ &c. & faiſant la diviſion, on trouvera le quotient

$$\text{S.}\frac{gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p}}{\overline{a + bx^{n}}^{p+1}} = \frac{g}{\overline{m+1} \times a}x^{m+1} - \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times a^{2}}gbx^{m+1}$$

$$+ \frac{\overline{m+1+pn+n} \times \overline{m+1+pn+2n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times \overline{m+1+2n} \times a^{3}} \times gb^{2}x^{m+1+2n} - \&c.$$

4°. L'integrale abregée ſera le quotient qu'on vient de trouver, au devant duquel on aura mis la grandeur complexe (qui eſt ſous le ſigne dans la differentielle propoſée) élevée à la puiſſance $p + 1$ ; dans notre exemple l'integrale ſera S. $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p} = \overline{\overline{a + bx^{n}}^{p+1} \times \frac{g}{\overline{m+1} \times a}x^{m+1} - \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times a^{2}} \times gbx^{m+1+n}} +$ &c.

### REMARQUE.

### REMARQUE.

79. ON peut réduire $\overline{a+bx^n}^p$ & $\overline{a+bx^n}^{p+1}$ aux *ſuites* qui leur conviennent, en ſuppoſant que $a$ eſt le premier terme du binome, & $bx^n$ le ſecond terme; & c'eſt ainſi qu'on les a réduites dans les articles premier & troiſiéme; ou bien en écrivant $\overline{bx^n+a}^p$, & $\overline{bx^n+a}^{p+1}$, où l'on prend $bx^n$ pour le premier terme, & $a$ pour le ſecond. Si l'on ſe ſert de cette ſeconde maniere dans le premier & le troiſiéme article, on trouvera une autre expreſſion de l'integrale de la differentielle $x^m dx \times \overline{bx^n+a}^p$; c'eſt cette ſeconde expreſſion de la même integrale qu'on donnera dans la méthode ſuivante.

### AVERTISSEMENT.

CETTE méthode generale eſt facile à concevoir par l'exemple qu'on a ajouté en l'énonçant; elle réduit la differentielle propoſée à la premiere propoſition, de la même maniere qu'on y réduit les differentielles complexes élevées aux puiſſances dont l'expoſant eſt un nombre entier, comme on l'a enſeigné dans le ſecond Corollaire. * Mais le calcul en eſt ſi long même dans les binomes, & à plus forte raiſon quand la grandeur complexe a beaucoup de termes, qu'on eſt obligé d'avoir recours à d'autres méthodes, dont on mettra ici les principales. * 65 ſ.

## SECONDE MÉTHODE.

### *Pour les binomes.*

80. POUR trouver l'integrale de (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, 1°. il faut faire en ſorte que l'expoſant de la changeante $x$ qui eſt hors du ſigne, ſoit moindre d'une unité que l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ ſous le ſigne, ſans pourtant que la differentielle change de valeur. Cela ſe fait par le moyen des indéterminées, en multipliant la changeante $x^m$ qui eſt hors du ſigne par $x$ élevée à une puiſſance dont l'expoſant ſoit l'indéterminée $q$, c'eſt à-dire par $x^q$, & diviſant en même temps la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par la même $x^q$, & l'on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (B) $gx^{m+q} dx \times$

$\overline{ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}}}^{p}$ : & ſuppoſant enſuite $m + q + 1 = n - \frac{q}{p}$; car l'on en déduira $q = \frac{np - mp - p}{p+1}$; & cette valeur de $q$ étant miſe à ſa place dans (B), on aura (A) $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p}$ $= (C)\, gx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$, où l'expoſant de $x$ hors du ſigne ne differe que d'une unité de l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ ſous le ſigne. On remarquera qu'il eſt indifferent de multiplier $x^{m}dx$ par $x^{q}$, en diviſant en même temps la grandeur qui eſt ſous le ſigne par $x^{q}$, qui
* 662. devient $x^{\frac{q}{p}}$ à cauſe du ſigne * ou de diviſer $x^{m}dx$ par $x^{q}$, en multipliant en même temps la grandeur qui eſt ſous le ſigne
* 662. par $x^{q}$, qui devient $x^{\frac{q}{p}}$*.

2°. Il faut ſuppoſer une nouvelle changeante $z$ égale à la grandeur qui eſt ſous le ſigne, c'eſt-à-dire, (D) $z = ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}$; ce qui donne (E) $z = x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times \overline{a + bx^{n}}$; (cela ſe fait en ſéparant le multiplicateur commun $x^{\frac{m-n+1}{p+1}}$); ce qui donne auſſi (F) $z^{p+1} = x^{m-n+1} \times \overline{a + bx^{n}}^{p+1}$, & ($\varphi$) $z^{p} = \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$; ce qui donne enfin (G) $dz = \frac{m-n+1}{p+1} ax^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx + \frac{m+np+1}{p+1} bx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx$; d'où l'on déduit (H) $x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx = (I) \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} dz - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx$.

3°. Il faut ſubſtituer dans le ſecond membre de l'équation $A = C$, la valeur (I) de (H) & l'on aura (A) $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p} = (L) \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} dz \times \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$ $- \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$; où ſubſtituant encore dans le premier terme de (L) au lieu de $\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$, ſa valeur $z^{p}$ priſe de ($\varphi$), l'on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = $ (M) $\frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$ (N) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{n+np+1}{p+1}}}^p$, qui ſe réduit (en diviſant dans le terme (N) ce qui eſt ſous le ſigne par $x^{\frac{m-n+1}{p+1}}$, & multipliant en même temps ce qui eſt hors du ſigne par la même grandeur, c'eſt-à-dire * par $x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times p$) à (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = $ (M) $\frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$ (P) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} \times x^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$ * 662.

4°. Il faut prendre l'integrale de cette équation, & l'integrale de la partie (M) pouvant être priſe par la premiere propoſition, l'on aura S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = $ (Q) $\frac{1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^{p+1} -$ (R) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} \times$ S. $x^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Subſtituant dans (Q) la valeur de $z^{p+1}$ priſe de (F), l'on aura S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = $ (T) $\frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times gx^{m+1-n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (R) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \times$ S. $gx^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$.

5°. L'on a déja *le premier terme* (T) de la *ſuite* qui eſt l'integrale que l'on cherche, l'on aura par ordre tous les termes ſuivans à l'infini, les uns après les autres, par de ſimples ſubſtitutions. On aura le ſecond en ſubſtituant dans (T) & dans (R), $m - n$ à la place de $m$, & multipliant par le coëficient de (R) ce qui naîtra de la ſubſtitution, & ce ſecond terme ſera (V) $- \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times \frac{a}{bb} \times gx^{m+1-2n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (X) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \times$ S. $gx^{m-2n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$

On aura le troiſiéme terme en ſubſtituant dans (T) & dans (R), $m - 2n$ à la place de $m$, & multipliant ce qui viendra de la ſubſtitution par le coëficient de (X), ce 3ᵉ terme ſera (Y) $- \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-2n} \times \frac{1}{m+np+1-2n} \times \frac{aa}{b^3} \times gx^{m+1-3n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (Z) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{m+1-3n}{m+np+1-2n} \times \frac{a^3}{b^3} \times$ S. $gx^{m-3n} \times \overline{a+bx^n}^p$.

On trouvera de la même maniere tant de termes que l'on voudra de la ſuite infinie qui eſt l'integrale que l'on cherche de $x^m dx \times \overline{a+bx^n}^{p}$ : Et comme les deux premiers termes (T) & (V) de cette ſuite font aſſez connoître la maniere d'avoir les coëficiens des termes ſuivans, & les expoſans de $x$ dans ces termes, qui font une progreſſion arithmetique ; il eſt facile, ſans aucune ſubſtitution, de continuer tant qu'on voudra la *ſuite* de l'integrale quand on en a les deux ſeuls premiers termes : & comme ils ſont multipliés chacun par $g \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$, il ſuffit d'écrire ce commun multiplicateur une ſeule fois au commencement de la ſuite avec la marque $\times$ de la multiplication.

## REMARQUE.

681. POUR rendre l'expreſſion de l'integrale des differentielles binomes plus facile dans l'uſage, il faut, 1°. diviſer le numerateur & le denominateur du premier terme chacun par $n$ ; ceux du ſecond terme chacun par $nn$ ; ceux du 3ᵉ par $n^3$ ; & ainſi de ſuite, (ce qui ne changera point leur valeur ;) & cela donnera S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{?} = g \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{m+np+1}{n}} \times \frac{1}{b}x^{m+1-n} - \frac{\frac{m+1-n}{n\times n}}{\frac{\overline{m+np+1}\times\overline{m+np+1-n}}{n\times n}} \times \frac{a}{bb}x^{m+1-2n}$$

— &c. Retirant de tous les diviſeurs des numerateurs une $n$ pour la mettre au dénominateur du multiplicateur commun, l'integrale ſera $\frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{\frac{m+np+1}{n}} \times \frac{1}{b}x^{m+1-n}$

$$-\frac{\frac{m+1-n}{n}}{\frac{\overline{m+np+1}\times\overline{m+np+1-n}}{n\times n}} \times \frac{a}{bb}x^{m+1-2n}$$

— &c. 2°. Il faut à preſent ſuppoſer $\frac{m+1}{n} = r$, ce qui donnera $m+1 = rn$ ; $\frac{m+1-n}{n} = r-1$ ; $m+1-n = rn-n$ ; $\frac{m+1-2n}{n} = r-2$ : & ſuppoſer encore $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$, ce qui donnera $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1$ ; $\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2$. 3°. Il faut ſubſtituer $r$, $r-1$, $r-2$, &c. $s$, $s-1$, $s-2$, &c. à la place de leurs valeurs dans la derniere expreſſion de l'integrale, & l'on aura la formule ſuivante.

### *La formule des integrales de toutes les differentielles binomes qu'on peut réduire à* $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$

682. $S.\, gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s\times b} x^{rn-n} - \frac{r-1}{s\times s-1} \times \frac{a}{bb} \times x^{rn-2n} + \frac{r-1\times r-2}{s\times s-1\times s-2} \times \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} - \frac{r-1\times r-2\times r-3}{s\times s-1\times s-2\times s-3} \times \frac{a^3}{b^4} x^{rn-4n} + \frac{r-1\times r-2\times r-3\times r-4}{s\times s-1\times s-2\times s-3\times s-4} \times \frac{a^4}{b^5} x^{rn-5n}$ — &c. ou bien ſans changer l'expreſſion des expoſans, $S.\, gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s\times b} x^{m+1-n} - \frac{r-1}{s\times s-1} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{r-1\times r-2}{s\times s-1\times s-2} \times \frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n}$ — &c.

## REMARQUE II.

683. QUAND le ſecond terme $bx^n$ du binome $\overline{a-bx^n}^p$ eſt negatif, il faut changer les ſignes des termes de la formule dans leſquels $b$ a une dimenſion impaire, c'eſt-à-dire du 1$^{er}$ terme, du 3$^e$, du 5$^e$, &c.

## COROLLAIRE I.

684. SI l'on veut avoir par la même ſeconde méthode la formule où les puiſſances de la changeante $x$ qui en diſtinguent les termes, ayent pour expoſans la progreſſion $m+1$, $m+1+n$, $m+1+2n$, &c. c'eſt-à-dire la formule de l'integrale qui convient à $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, en prenant $a$ pour le premier terme du binome $\overline{a+bx^n}^p$; 1°. il faut multiplier la quantité qui eſt hors du ſigne par $x^q$, & diviſer celle qui eſt ſous le ſigne par la même grandeur, & l'on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (B) $gx^{m+q} dx \times \overline{ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}}}^p$. 2°. il faut ſuppoſer $m+q+1 = -\frac{q}{p}$, & non pas à $n - \frac{q}{p}$, & l'on trouvera $q = \frac{-mp-p}{p+1}$. Subſtituant cette valeur de $q$ dans (B), on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (C) $g\, x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times$ (D) $\overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$. 3°. Il faut ſuppoſer (E) $z = ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}} = x^{\frac{m+1}{p+1}} \times \overline{a+bx^n}^p$; ce qui donnera, 1°. (F) $z^{p+1} = x^{m+1} \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$. 2°. ($\varphi$) $z^p =$ (D) $\overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$

& 3°. $dz = \frac{m+1}{p+1} a x^{\frac{m-p}{p+1}} dx + \frac{m+1+np+n}{p+1} b x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$; d'où l'on déduira (C) $x^{\frac{m-p}{p+1}} dx =$ (G) $\frac{p+1}{m+1} \times \frac{1}{a} \times dz -$ (H) $\overline{\frac{m+1+np+n}{m+1}} \times \frac{b}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$. 4°. Il faut ſubſtituer dans $A = C \times D$, 1°. au lieu de $C \times D$, ſa valeur $\overline{G-H} \times D$; 2°. & ſubſtituer dans $A = G \times D - H \times D$, au lieu de $D$ dans le terme $G \times D$, ſa valeur $\varphi$; l'on aura $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{p+1}{m+1} \times \frac{g}{a} z^p dz - \frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{gb}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$, dont le terme $\frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{bg}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$, eſt égal (en diviſant ce qui eſt ſous le ſigne par $x^{\frac{m+1}{p+1}}$, & multipliant ce qui eſt hors du ſigne par $x^{\frac{m+1}{p+1} \times p}$) à $\frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{bg}{a} \times x^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$.

5°. Il faut prendre l'integrale de cette équation, & l'on aura $S. gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{g}{a} \times z^{p+1} - \frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{gb}{a} \times S. x^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$; où mettant à la place de $z^{p+1}$ ſa valeur priſe dans (F), l'on aura $S. gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (I) $\frac{1}{m+1} \times \frac{g}{a} \times x^{m+1} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ K $\frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{bg}{a} \times S. x^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Le terme (I) eſt le premier de la ſuite qui eſt l'integrale que l'on cherche. On trouvera le ſecond en ſubſtituant dans (I) & dans (K) $m+n$ à la place de $m$, & multipliant les deux quantités qui en naîtront par le coëficient du terme (K). On trouvera de même le 3$^e$, le 4$^e$, &c. comme

* 680. nomb. 5. ci-deſſus, * & l'integrale ſera $S. gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = g \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} x^{m+1} - \frac{m+1+np+n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{b}{aa} x^{m+1+n}$

$$+ \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{bb}{a^3} x^{m+1+2n} - \&c.$$

685. On peut abreger l'expreſſion de cette integrale, 1°. en diviſant le numerateur & le dénominateur du 1$^{er}$ coëficient

chacun par $-n$; ceux du ſecond coëficient par $-n \times -n$; ceux du troiſiéme par $-n \times -n \times -n$; & ainſi de ſuite. 2°. En retirant au dénominateur du multiplicateur commun des termes de l'integrale une $-n$ du diviſeur de chaque numerateur des coëficiens. 3°. En ſuppoſant $\frac{m+1}{-n} = s$, & $\frac{m+1}{-n} - p = s - p = r$; ce qui donnera $\frac{m+1+n}{-n} = s - 1$, $\frac{m+1+2n}{-n} = s - 2$, &c. & $\frac{m+1+np}{-n} = r$, $\frac{m+1+np+n}{-n} = r - 1$; $\frac{m+1+np+2n}{-n} = r - 2$, &c. 4°. En mettant dans les coëficiens de l'integrale $s$, $s - 1$, &c. $r - 1$, $r - 2$, &c. à la place de leurs valeurs, on aura

*La ſeconde formule de l'integrale de* $gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$.

86. $$S.\, gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p = \frac{g}{-n} \times \overline{a + bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{sa} x^{m+1} - \frac{\overline{r-1}}{s \times \overline{s-1}} \times \frac{b}{aa} \times x^{m+1+n} + \frac{\overline{r-1} \times \overline{r-2}}{s \times \overline{s-1} \times \overline{s-2}} \times \frac{bb}{a^3} \times x^{m+1+2n} - \&c.$$

## REMARQUES.

### I.

87. QUAND la valeur de $r$ dans la premiere & dans la ſeconde formule eſt un nombre entier poſitif, il eſt évident qu'elles font trouver une integrale finie, qui a autant de termes qu'il y a d'unité dans le nombre entier $r$.

### II.

88. Quand le ſecond terme du binome $\overline{a + bx^n}^p$ a le ſigne $-$, il faut changer les ſignes de tous les termes dans leſquels $b$ a une dimenſion impaire.

### III.

89. Si la differentielle binome étoit $x^m\, dx \times \overline{ax^n + bx^{2n}}^p$, il ſeroit facile de trouver par la même méthode une formule de l'integrale de cette differentielle; on la laiſſe à trouver aux Lecteurs; car ayant enſeigné * à preparer toute differentielle binome de maniere que la changeante $x$ ne ſe trouve qu'au ſecond terme, les deux formules précedentes ſuffiſent pour trouver les integrales de toutes les differentielles binomes. * 677.

### IV.

90. On peut trouver par la même méthode deux formules pour l'integrale de la ſeconde forme de la même differen-

tielle, qui eſt $g\,x^{m+np}dx \times \overline{b+ax^{-n}}^{p}$, l'une en prenant $ax^{-1}$ pour le premier terme du binome, l'autre en prenant le terme conſtant $b$ pour le premier terme du même binome; mais comme les deux que l'on a données ſont ſuffiſantes, on ne s'y arrêtera pas.

*Application des deux formules à un exemple pour en faire voir l'uſage.*

691. POUR trouver par la premiere formule l'integrale de la differentielle $h^5\,x^{-\frac{9}{2}}dx \times \overline{i+x}^{\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer $g = h^5$; $a = i$; $b = 1$; $m = -\frac{9}{2}$ $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$: ce qui donnera $r = -\frac{7}{2}$ Et la valeur de $r$ n'étant pas un nombre entier, on ne ſçauroit avoir par la premiere formule l'integrale finie de la differentielle propoſée: c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir de la ſeconde formule & ſuppoſer $g = h^5$; $a = i$; $b = 1$; $m = -\frac{9}{2}$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$; $s = \frac{m+1}{-n} = \frac{7}{2}$; $r = \frac{m+1}{-n} - p = +3$. La valeur de $r$ étant égale au nombre entier poſitif 3, cela fait voir que l'integrale de la differentielle propoſée ſera finie & aura trois termes. Pour avoir cette integrale, il ne faut plus que ſubſtituer dans la ſeconde formule les valeurs de $g, a, b, m, n, p, r, s$; & l'on aura $-h^5 \times \overline{i+x}^{\frac{3}{2}} \times \overline{\frac{2}{7i}\,x^{-\frac{7}{2}}}$ $\overline{-\frac{8}{35\times ii}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{16}{105\times i^3}x^{-\frac{1}{2}}}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée.

## V. REMARQUE.

692. QUAND on ne peut pas trouver par le moyen des deux formules précedentes l'integrale finie d'une differentielle binome propoſée, on peut toujours avoir cette integrale par approximation, en continuant de ſubſtituer dans les termes des formules les valeurs des lettres de ces formules priſes de la differentielle propoſée; & il faudra choiſir celle des deux formules pour l'approximation dont les termes iront le plus en diminuant. On peut auſſi employer les méthodes du Problême de l'art. 175, comme l'on a fait dans la quatriéme Section de la ſeconde Partie.

## COROLLAIRE II.

*Où l'on donne deux formules déduites de la formation des deux précedentes pour trouver les integrales finies des differentielles binomes, dont on ne peut trouver les integrales exactes par les formules qui précedent ; & cela en ſuppoſant données les integrales de quelques differentielles binomes dont on ne peut pas trouver les integrales exactes par les formules qui précedent.*

93. ON ſuppoſera pour abreger $u = g \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p+1}$ ; & l'on écrira dans chaque formule non ſeulement les termes des formules précedentes, qui ſont chacun une integrale, mais on écrira auſſi en parentheſe, pour les diſtinguer, chacun dans leur rang les autres termes qui ont fait découvrir les precedens, & qui ne ſont marqués que par (S.) qui veut dire *ſomme*.

### TROISIE'ME FORMULE.

Premier terme de l'integrale.

94. $$\text{S.}\, gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} = \frac{1}{m+1+np} \times \frac{1}{b} \times ux^{m+1-n} \Big( - \frac{m+1-n}{m+1+np} \times$$

A

Second terme de l'integrale.

$$\frac{a}{b} \times \text{S.}\, gx^{m-n}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} \Big) - \frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{1}{m+1+np-n} \times \frac{a}{bb} \times ux^{m+1-2n}$$

B

$$\Big( + \frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{m+1-2n}{m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times \text{S.}\, gx^{m-2n}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} \Big)$$

Troiſiéme terme de l'integrale.

$$+ \frac{}{m+1+np} \times \frac{m+1-n \times m+1-2n \times 1}{m+1+np-n \times m+1+np-n2} \times \frac{aa}{b3} \times ux^{m+1-3n}$$

C

$$\Big( - \frac{m+1-n \times m+1-2n \times m+1-3n}{m+1+np \times m+1+np-n \times m+1+np-2n} \times \frac{a^{3}}{b^{3}} \times \text{S.}\, gx^{m-3n}dx \times$$

$$\overline{a+bx^{n}}^{\,p} \Big) - \&c.$$

### QUATRIE'ME FORMULE.

Premier terme de l'integrale.

95. $$\text{S.}\, gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} \times ux^{m+1} \Big( - \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{a} \times$$

a

Second terme de l'integrale.

$$\text{S.}\, gx^{m+n}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} - \frac{m+1+np+n \times 1}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{b}{aa} \times ux^{m+1+n}$$

b

$$\Big( + \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{bb}{aa} \times \text{S.}\, gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} \Big)$$

Troiſiéme terme de l'integrale.

$$+ \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n \times 1}{m+1 \times m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{bb}{a3} \times ux^{m+1+2n} \Big( - \frac{m+1+np+n \times}{m+1 \times}$$

c

$$\frac{m+1+np+2n \times m+1+np+3n}{m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{b^{3}}{a^{3}} \times \text{S.}\, gx^{m+3n}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\,p} \Big) - \&c.$$

## AVERTISSEMENT.

ON peut continuer facilement ces deux formules tant qu'on voudra, les termes que l'on a mis ſuffiſent pour cela. On peut auſſi en abreger les coëficiens en ſuppoſant que $r$ & $s$ ont ici les mêmes valeurs que dans les formules précedentes ; mais on a cru qu'il valoit mieux les laiſſer tels que la ſeconde méthode les donne immédiatement, afin que les Lecteurs viſſent clairement la formation de ces deux formules.

## REMARQUE SUR CES FORMULES.

696. SI l'on ſuppoſe comme connue ou donnée l'integrale de celle des differentielles qu'on voudra marquées $A, B, C,$ &c. dans la troiſiéme formule, & a, b, c, &c. dans la quatriéme, l'on aura pour l'integrale de la differentielle $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ tous les termes 1, 2, 3, &c. qui précedent cette differentielle donnée, en y joignant l'integrale ſuppoſée de cette differentielle avec le coëficient qu'elle a dans la formule. Par exemple ſi l'on regarde comme connue l'integrale S. $gx^{m-2}\,dx \times \overline{a+bx^n}^p$, l'integrale de la differentielle $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ ſera $\frac{1}{m+1+np} \times \frac{1}{b} \times ux^{n+1-n} - \frac{m+1-n \times 1}{m+1+np \times m+1+np-n} \times \frac{a}{bb} \times ux^{m+1-2n} + \frac{m+1-n \times m+1-2n}{m+1+np \times m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times$ S. $gx^{m-2n}\,dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Il en eſt ainſi des autres.

## DE'FINITION ET REMARQUE.

697. UNE differentielle qui n'a qu'une même changeante $x$, comme ſont les differentielles $A, B, C,$ &c a, b, c, &c des formules precedentes peut être regardee comme l'element de l'aire ou de la quadrature d'une courbe ; il y en a auſſi quelques-unes qui ſont les élemens de la rectification de quelque courbe : c'eſt pourquoi quand l'integrale d'une differentielle propoſée contient avec les termes 1, 2, 3, &c. (qui ſont des termes complets de l'integrale) l'une des differentielles $A, B, C,$ &c. ou a, b, c, &c. on dit que ſon integrale eſt dépendante de la quadrature d'une courbe, ou de la rectification d'une courbe, ou qu'elle s'y réduit ; & que cette quadrature ou rectification étant ſuppoſée, on a l'integrale finie de la differentielle propoſée. Mais comme les

Sections coniques ſont plus ſimples que les autres courbes, qu'on s'y eſt plus appliqué qu'aux autres, & qu'elles ſont devenues par là plus familieres, c'eſt d'ordinaire à leur quadrature & à leur rectification ſuppoſée comme connue, que l'on réduit les integrales des differentielles qui n'en ont pas d'exactes ou de finies par la premiere & ſeconde formule, & qui n'en peuvent avoir de finies que par ce moyen, c'eſt-à-dire elles ont pour integrale quelques termes d'une integrale exacte, & pour dernier terme elles ont l'expreſſion de la quadrature ou de la rectification de l'une des Sections coniques, de maniere que cette quadrature ſuppoſée, leur integrale eſt finie.

698. La troiſiéme & la quatriéme formule font connoître quelles ſont les differentielles dont les integrales ſe trouvent finies en ſuppoſant la quadrature ou la rectification d'une Section conique, & elles font trouver ces integrales. Pour le concevoir clairement il faut avoir preſent les élemens de la rectification & de la quadrature des Sections coniques dont on a mis la plûpart *dans la ſeconde partie troiſiéme Section depuis l'article* 582 *juſqu'à* 610, ſçavoir (1) $rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ eſt l'élement de la rectification des arcs qui ne paſſent pas le quart de la circonference; (2) $adx \times \overline{aa - xx}^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant que $a$ eſt le diametre, eſt l'élement des arcs qui ne ſurpaſſent pas la demi-circonference; (3) $rrdx \times \overline{rr + xx}^{-1}$, en ſuppoſant la tangente d'un arc $= x$, eſt l'élement des arcs moindres que le quart de la circonference; (4) $\frac{x^{-1}dx}{2} \times \overline{px + 4xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt l'élement d'un arc de parabole. On ne met pas ici ceux qui ne ſe réduiſent pas à l'expreſſion generale qu'on a donnée d'une differentielle binome $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n}}^{p}$.

Les élemens de leur quadrature ſont (5) $dx : \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$ du cercle quand $x$ commence au centre; (6) $dx \times \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}}$ quand $x$ commence au ſommet du diametre $a$; (7) $dx \times \overline{-aa + xx}^{\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole équilatere par raport à ſon 1er axe; (8) $dx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$ de la même par raport au ſecond

axe ; (9) $\overline{2a}^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{2apx - pxx}^{\frac{1}{2}}$ de l'ellipſe ; (10) $\overline{2a}^{-\frac{1}{2}} dx \times - \overline{aap + pxx}^{\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole par raport au premier axe ; (11) $\overline{2b}^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{\pi bb + \pi xx}^{\frac{1}{2}}$ de la même par raport au ſecond axe ; (12) $dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$ d'un quadrilatere hyperbolique par raport à l'aſymptote ; (13) $\frac{1}{2} x^2 dx \times \overline{aa - xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſegment de cercle ; (14) $\frac{1}{8} aadx \times \overline{ax - xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur de cercle ; (15) $\frac{1}{2} rrdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ encore d'un ſecteur de
* 648. cercle ; (16) $\frac{1}{2} rdx \times \overline{1 + xx}^{-1}{}^{*}$ d'un ſecteur d'ellipſe dont la moitié
du ſecond axe eſt l'unité, $r$ la moitié du premier axe, & le ſommet eſt au centre ; (17) $\frac{1}{2} aadx \times - \overline{aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'hyperbole équilatere par raport au premier axe ; (18) $\frac{1}{2} aadx \times \overline{aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur de la même hyperbole par raport au ſecond axe ; (19) $\frac{1}{2} aapdx \times - \overline{2a^3p + 2apxx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'hyperbole par raport au 1er axe ; (20) $\frac{1}{2} bb\pi dx \times \overline{2b^3p + 2b\pi xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur hyperbolique par raport au ſecond axe ; (21) $\frac{1}{2} aapdx \times \overline{2a^3p - 2apxx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'ellipſe. Si l'on met le ſigne S. de ſomme ou d'integrale devant chacun de ces élemens, cela en marquera l'integrale ſuppoſée.

699. On remarquera dans ces élemens de trois ſortes de differentielles ; les premieres, comme la premiere, la ſeconde, &c. ſont toutes réduites à la differentielle generale $x^m dx \times \overline{a + bx^n}^{p}$ ; les ſecondes ſont celles où le premier terme du binome ſous le ſigne contient la changeante $x$, comme la 4e, la 6e, &c. Il faut préparer ces ſecondes pour les réduire à la differentielle generale ; par exemple on réduira la 6e $dx \times \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}}$ à $x^{\frac{1}{2}} dx \times \overline{a - x}^{\frac{1}{2}}$. Il faut faire la même choſe des autres ſemblables. Les 3es ſont la 3e, la 12e, la 16e, où le ſigne du binome eſt $-1$. Pour les comprendre dans la 3e & la 4e formule, il faut ſuppoſer $u = a + bx^n$, $u^{-1} = \overline{a + bx^n}^{-1}$, & $u^{-1+1} = u^0 = \overline{a + bx^n}^{+1-1=0}$ ; & remarquer que $u^0 = 1$ : car dans la

progreſſion geometrique $\div u^0, u^1, u^2, u^3$, &c. il eſt évident que le premier terme $u^0$, eſt l'unité, puiſque $\div 1, u^1, u^2, u^3$, &c. ainſi il faudra pour ces troiſiémes differentielles ſuppoſer dans la troiſiéme & la quatriéme formule $u = 1$. Ces choſes ſuppoſées.

*Uſage de la troiſiéme & de la quatriéme formule pour connoître les differentielles dont les integrales deviennent finies en ſuppoſant les quadratures ou les rectifications des ſections coniques, & pour trouver ces integrales.*

00. 1°. POUR avoir d'abord la differentielle la plus ſimple dont l'integrale dépend de la rectification ſuppoſée d'un arc de cercle marquée par (1) $S. rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer que dans la troiſiéme formule (A) $S. gx^{m-n}dx \times \overline{a + bx^n}^p$ eſt (1) $S. rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ & mettre au lieu de $g, a, b, n, p$, leurs valeurs priſes de (1), & ne laiſſer d'indéterminée que $m$, & l'on aura $S. gx^{m-n}dx \times \overline{a + bx^n}^p = S. rx^{m-2}dx \times \overline{rr - 1x^2}^{-\frac{1}{2}} = S. rx^0dx \times \overline{rr - x^2}^{-\frac{1}{2}}$. Il faut enſuite trouver la valeur de $m$ en ſuppoſant $m - 2 = 0$; ce qui donnera $m = 2$. Il faut mettre dans la differentielle generale $gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$, les valeurs de toutes les lettres indéterminées, & l'on aura $S. rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$ pour la differentielle la plus ſimple que donne la premiere formule dont l'integrale dépend de la rectification ſuppoſée $S. rx^0dx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour trouver à preſent l'integrale finie de la differentielle $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſubſtituer dans le terme (1) & (A) de la troiſiéme formule, les valeurs des lettres indéterminées priſes de $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$, & l'on trouvera $S. rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}rx^1 \times \overline{rr - x^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}rr \times S. rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$; c'eſt l'integrale de $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$.

2°. Pour avoir la differentielle plus compoſée d'un degré que la précedente, & dont l'integrale finie dépend de la même rectification ſuppoſée d'un arc de circonference, il faut ſuppoſer dans la troiſiéme formule (B) S. $gx^{m-2n}dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = \text{S.}\, rx^0dx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$; & faiſant les mêmes operations que dans le premier article, on trouvera que $m = 4$, & que la differentielle, dont l'integrale finie dépend de la même rectification, qui ſuit la plus ſimple, eſt $rx^4dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$; & l'on trouvera que ſon integrale finie (en mettant dans les termes 1, 2, B de la troiſiéme formule, les valeurs des lettres indéterminées priſes de $rx^4dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$) eſt $-\frac{1}{4}rx^3 \times \overline{rr - x^2}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}r^3x^1 \times \overline{rr - x^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}r^4 \times \text{S.}\, rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$.

3°. On trouvera de même que la differentielle ſuivante eſt $rx^6dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant dans la troiſiéme formule (C) S. $gx^{m-3n}dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = rx^0dx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$, & l'on aura ſon integrale en ſubſtituant dans les termes 1, 2, 3 & C, les valeurs de $m$ & des autres indéterminées priſes dans $rx^6dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$. Mais ſans ſe donner cette peine, il eſt viſible que ſi l'on met dans $gx^mdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ ſucceſſivement 2, 4, 6, & tous les autres nombres pairs, à la place de $m$, l'on aura toutes les differentielles de ſuite que peut donner la troiſiéme formule, dont les integrales finies dépendent de la rectification ſuppoſée donnée d'un arc de circonference marquée par S. $rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$; & que l'on aura l'integrale de chacune en prenant autant de termes d'integrale de la troiſiéme formule, que 2 ſe trouve de fois dans le nombre pair qu'on prendra pour $m$, & qu'il y aura de plus le terme qui les ſuit immédiatement marqué par l'une des lettres A, B, C, &c. avec ſon coëficient; & ſubſtituant dans tous ces termes les valeurs des indéterminées priſes dans $rx^mdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$, où au lieu de $m$ on aura mis ce nombre pair.

En ſe ſervant de la quatriéme formule comme l'on a fait de la troiſiéme dans les art. 1, 2, & 3, l'on trouvera que ſi l'on met ſucceſſivement dans $rx^mdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ à la place de *m*, les nombres pairs négatifs — 2, — 4, — 6, &c. l'on aura toutes les differentielles que l'on peut trouver par la quatriéme formule, dont les integrales dépendent de la rectification ſuppoſée d'un arc de circonference marquée par S. $rdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ & que pour avoir l'integrale de chacune, il faut prendre de ſuite dans la quatriéme formule autant de termes marqués 1, 2, 3, &c. qu'il y a de fois — 2 dans le nombre pair négatif qu'on voudra mettre à la place de *m* dans $rx^m dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$, & de plus celui des termes marqué a, b, c, &c. qui les ſuit immédiatement avec ſon coëficient, & y ſubſtituer les valeurs des lettres indéterminées, priſes dans $rx^m dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ où l'on aura déterminé *m*, en mettant à ſa place ce nombre pair négatif.

## AVERTISSEMENT.

IL ſuffit ici d'avoir fait clairement concevoir la méthode & la maniere de l'appliquer ; & on laiſſe aux Lecteurs qui voudront ſe la rendre familiere, & acquerir l'habitude de connoître tout d'un coup les differentielles dont les integrales ſont finies, en ſuppoſant les rectifications ou les quadratures des Sections coniques ; on leur laiſſe, dis-je, à trouver les differentielles qui ſe rapportent aux autres rectifications & aux quadratures des Sections coniques qu'on a miſes ci-deſſus *, & à en trouver les integrales finies par la 3^e^ & 4^e^ formule ; ils ne ſçauroient plus y avoir d'autre difficulté que celle du calcul. On va ſeulement l'appliquer aux differentielles dont l'integrale finie dépend de l'integrale ſuppoſée des differentielles de la 3^e^ ſorte * qui ont — 1 pour ſigne de la differentielle binome, comme la (12) $1dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$. * 698. * 699.

01. Pour trouver les differentielles qui ſe rapportent à $1x^0 dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$ par le moyen de la troiſiéme formule, 1°. il faut ſuppoſer (A) S. $gx^{m-n}dx \times \overline{a+bx^n}^{p'} = \text{S. } 1x^0 dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, ce qui réduit (A), en laiſſant la ſeule indéterminée *m*, à S. $1x^{m-1}dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$. Il faut enſuite ſuppoſer $x^{m-1} = x^0$, ou plutôt $m - 1 = 0$, ce qui donne $m = 1$ ; & mettre dans la differentielle generale $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, les valeurs de

toutes les indéterminées qu'on vient de trouver, & elle ſera changée en $1x^1dx \times \overline{1 \pm 1x^1}^{-1}$; c'eſt la differentielle la plus ſimple dont l'integrale dépend de la quadrature de l'eſpace hyperbolique marquée par S. $1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$. Pour en avoir l'integrale il faut ſubſtituer dans les termes 1 & A de la troiſiéme formule les valeurs des indéterminées priſes de $1x^1dx \times$
* 699. $\overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & l'on trouvera, en ſuppoſant $u = 1$ * comme on l'a fait remarquer, $\pm x^1 \mp$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$ pour l'integrale de $1x^1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$.

On trouvera de la même maniere par la ſuppoſition de
* 694. (B) * S.$gx^{m-2n}dx \times \overline{a + bx^n}^p =$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, que $1x^2dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$ eſt la differentielle qui ſuit la plus ſimple, dont l'integrale ſuppoſe la quadrature S. $1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & l'on aura ſon integrale $\pm \frac{1}{2} x^2 - x^1 +$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, en ſubſtituant dans les termes 1, 2 & B de la troiſiéme formule, les valeurs des indéterminées priſes de $1x^2dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$.

L'on verra clairement en faiſant ſoi-même ces operations, qu'en augmentant de ſuite d'une unité l'expoſant de $x$ hors du ſigne, l'on aura toutes les differentielles que peut donner la troiſiéme formule, dont les integrales finies dépendent de S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$; par conſéquent ſi l'on écrit $1x^mdx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & qu'on mette ſucceſſivement au lieu de $m$ les nombres naturels 1, 2, 3, &c. l'on aura toutes ces differentielles; & pour en trouver les integrales, il faudra prendre dans la troiſiéme formule autant de termes 1, 2, 3, &c. que le nombre mis à la place de $m$ contient d'unités, en y ajoutant celui des termes A, B, C, &c. qui les ſuit immédiatement avec ſon coëficient, & y ſubſtituer à la place des indéterminées leurs valeurs priſes de $1x^mdx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$ où l'on aura déterminé $m$, en mettant à ſa place le nombre qu'on aura voulu.

On trouvera de même par la quatriéme formule les differentielles dont les integrales finies dépendent de $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, il n'y a de difference qu'en ce qu'il faut mettre les

les nombres négatifs $-1, -2, -3,$ &c. dans $1x^{m}dx \times \overline{1 \pm x^{1}}^{-1}$ à la place de $m$.

On trouvera de la même maniere quelles ſont les differentielles dont les integrales finies dépendent de l'integrale ſuppoſée*(3) $S. rrdx \times \overline{rr + xx}^{-1}$, & de (16) $S. \frac{1}{2} rdx \times \overline{1 + xx}^{-1}$, & on trouvera enſuite les integrales finies de ces differentielles par la troiſiéme & la quatriéme formule. * 698.

## *APPLICATION DE LA SECONDE METHODE aux differentielles trinomes repréſentées par l'expreſſion generale* $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p}$, *pour trouver leurs integrales.*

02. ON ſuppoſera comme aux binomes $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p} = gx^{m+q}dx \times \overline{ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n - \frac{q}{p}} + cx^{2n - \frac{q}{p}}}^{p}$, & l'on déterminera la valeur de $q$ en ſuppoſant $m + q = -\frac{q}{p} - 1$, & non pas en ſuppoſant $m + q = 2n - \frac{q}{p} - 1$, ni $m + q = n - \frac{q}{p} - 1$, parce qu'on ſe trouveroit embarraſſé dans ces deux dernieres ſuppoſitions : on aura donc $q = \frac{-mp-p}{p+1}$; & ſubſtituant cette valeur de $q$, on aura $gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p} = gx^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}}}^{p}$; on ſuppoſera $z = \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}}}^{p}$; & continuant l'operation comme dans les binomes, on trouvera d'abord

Premier terme de l'integrale.

$$S. gx^{m}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p} = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} gx^{m+1} \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p+1}$$

$$\overset{A}{-} \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{a} \times S. gx^{m+n}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p} \underset{B}{-} \frac{m+1+2np+2n}{m+1} \times$$

$$\frac{c}{a} \times S. gx^{m+2n}dx \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p}$$

, où l'on a déja le premier terme de la ſuite infinie, qui eſt la formule generale de l'integrale des differentielles trinomes; & de plus l'on a le moyen de trouver par ordre tous les autres par des ſubſtitutions à peu près comme dans les binomes.

Par exemple pour trouver le ſecond terme, il faut ſubſtituer $m + n$ à la place de $m$ dans le premier terme, dans A & dans B & leurs coëficiens, & multiplier les trois quantités,

### Second terme de l'integrale.

qui naîtront de ces ſubſtitutions par le coëficient de A, & l'on aura $-\frac{m+1+np+n \times 1}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{b}{aa} gx^{m+1+n} \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p+1}$

C

$+\frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{bb}{aa} S. gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$

D

$+\frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{m+1+2np+3n}{m+1+n} \times \frac{bc}{aa} \times S. gx^{m+3n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$.

### Troiſiéme terme de l'integrale.

Pour trouver le troiſiéme terme, il faut ne faire qu'un ſeul terme de B & de C, en réduiſant le coëficient de B au dénominateur de C, ce terme ſera $-\overline{\frac{m+1+2np+2n \times m+1+n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{ac}{aa}}$

E

$\overline{+\frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n}} \times \frac{bb}{aa} \times S. gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$

Il faut enſuite ſubſtituer dans le premier terme, dans A & dans B, $m+2n$ à la place de $m$ dans les expoſans & les coëficiens, & multiplier les trois quantités qui en viendront par le coëficient de E, & l'on aura, en nommant $e$ le coëficient de E pour abreger, $e \times \frac{1}{m+1+2n} \times \frac{1}{a} gx^{m+1+2n} \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p+1}$

F

$-e \times \frac{m+1+np+3n}{m+1+2n} \times \frac{b}{a} \times S. gx^{m+3n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p} - e \times$

G

$\frac{m+1+2np+4n}{m+1+2n} \times \frac{c}{a} \times S. gx^{m+4n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$.

On trouvera de ſuite le $4^e$ terme, le $5^e$, & autant d'autres qu'on voudra, de la même maniere qu'on a trouvé le $3^e$, & l'on en fera la premiere formule. On fera par la même méthode une ſeconde formule pour la ſeconde forme $gx^{m+2np}dx \times \overline{c+bx^{-n}+ax^{-2n}}^{p}$ des differentielles trinomes où les expoſans $n$ ſont négatifs : On fera une troiſiéme formule pour les differentielles trinomes où les expoſans $n$ ſont poſitifs, dans laquelle on écrira après le premier terme, les quantités A & B ; après le ſecond terme, les quantités C & D ; & ainſi de ſuite. Enfin on en fera une $4^e$ pour les differentielles trinomes où les expoſans $n$ ſont négatifs, dans laquelle on écrira après le premier terme les quantités a & b ; après le ſecond terme, les quantités c & d, & ainſi de ſuite. On peut aiſément imaginer ces quantités a, b, c, d, &c. de la 4ᵉ formule, quoiqu'on ne les ait pas formées ici, où l'on ſe contente de faire bien concevoir aux Lecteurs les méthodes de faire eux-mêmes les formules, de maniere qu'ils n'y puiſſent plus trouver d'autre difficulté que la peine du calcul.

03. On peut par la même méthode faire des formules pour les differentielles quadrinomes, pour celles qui ont cinq termes, ſix termes, &c.

## USAGE DES FORMULES.

04. QUAND dans la réſolution des Problêmes on trouve une differentielle trinome, dont l'integrale donne la réſolution que l'on cherche, il faut réduire cette * differentielle à l'expreſſion des differentielles trinomes, & enſuite ſubſtituer dans la premiere formule de l'integrale de ces differentielles les valeurs de $g$, $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $p$, priſes de la differentielle propoſée; & ſi l'on trouve une integrale complete & finie, on a ce que l'on cherche: ſi on la trouve infinie, il faut réduire la differentielle propoſée à la ſeconde forme, en rendant négatifs les expoſans $n$, & ſubſtituer dans la ſeconde formule de l'integrale qu'on aura faite pour cette ſeconde forme, les valeurs des mêmes lettres priſes de la differentielle propoſée réduite à la ſeconde forme; & ſi l'on trouve l'integrale complete & finie, l'on a ce que l'on cherche; mais ſi l'on trouve une integrale infinie, on n'aura l'integrale que par approximation, qu'on pourra continuer tant qu'on voudra, en choiſiſſant celle des deux formules par le moyen de laquelle les termes de l'integrale approchée qu'elle donne de la differentielle propoſée, vont le plus en diminuant. * 677.

## REMARQUE.

05. ON a fait voir * que l'on pouvoit par la 3ᵉ & la 4ᵉ formule, qui repréſentent les integrales des differentielles binomes, trouver les integrales finies de celles de ces differentielles qu'on pouvoit réduire à l'integrale ſuppoſée connue de la quadrature ou de la rectification des Sections coniques: ſi l'on forme la 3ᵉ & la 4ᵉ formule de l'integrale des differentielles trinomes, leſquelles formules auront, outre les termes 1, 2, 3, &c. de l'integrale, les quantités marquées A, B, C, &c. dans la troiſiéme, & a, b, c, &c. dans la quatriéme: * 699.

on trouvera auſſi par leur moyen, quelles ſont les differentielles qu'on peut réduire aux quadratures & aux rectifications ſuppoſées connues des Sections coniques, c'eſt-à-dire dont on peut trouver les integrales finies en ſuppoſant ces quadratures ou rectifications, & l'on pourra en même tems trouver ces integrales finies.

Pour le faire concevoir clairement on fera remarquer, 1°. que les differentielles binomes qui contiennent $xx$, & qui ſont les élemens de la quadrature ou de la rectification des Sections coniques, peuvent facilement devenir trinomes; car en ſuppoſant $e + x$ ou $e - x$ au lieu de $x$, c'eſt-a-dire en ſuppoſant à l'origine des $x$ une grandeur connue $e$, & que la changeante $x$ ne commence qu'à l'extremité de la connue $e$; & ſubſtituant $\overline{e+x}^2$ à la place de $x$, par exemple dans l'élement de l'aire du cercle * (5) $dx \times \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$, & dans celui de l'hyperbole équilatere (8) $dx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$, le premier deviendra $dx \times \overline{rr - ee + 2ex - xx}^{\frac{1}{2}}$, & le ſecond $dx \times \overline{aa + ee + 2ex + xx}^{\frac{1}{2}}$, qui deviendront, en ſuppoſant dans le premier $rr - ee = f$, & dans le ſecond $aa + ee = f$, $dx \times \overline{f + 2ex - xx}^{\frac{1}{2}}$, $dx \times \overline{f + 2ex + xx}^{\frac{1}{2}}$. Il en eſt de même des autres. L'on pourroit auſſi ſuppoſer $e - x$ au lieu de $x$. 2°. Que pour avoir les integrales finies des differentielles binomes qui ſe réduiſent à la rectification où à la quadrature des Sections coniques, il ne faut ſuppoſer qu'une quadrature ou une rectification; mais qu'il en faut ſuppoſer deux pour les differentielles trinomes qu'on y peut réduire; trois pour les differentielles quadrinomes, & ainſi de ſuite. Il ſuffira d'en donner ici un exemple.

* 698.

Pour trouver les differentielles trinomes dont les integrales finies ſe réduiſent à la quadrature de l'hyperbole $1x^{0}dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$; 1°. on ſuppoſera que la quantité A $S. gx^{m+n}dx \times \overline{a + bx^n + cx^{2n}}^{p} = S. 1x^{0}dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$, & l'on ſubſtituera dans A les valeurs des lettres $g$, $a$, $b$, $c$, $n$, $p$, priſes de $S. 1x^{0}dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$, en laiſſant la ſeule indéterminée $m$, & S. $gx^{m+n}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p}$ deviendra S. $1x^{m+1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$. 2°. On ſuppoſera $m+1=0$, ce qui déterminera $m=-1$; ainſi $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p}$ deviendra $1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$. 3°. On ſubſtituera les valeurs des mêmes lettres dans (B) S. $gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p}$, & l'on aura (B) S. $gx^{+1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$.

Il eſt à preſent évident qu'en ſuppoſant la quadrature S. $1x^{0}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole comme donnée, & ſuppoſant encore l'integrale S. $1x^{1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$, la differentielle trinome $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p} = 1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$ ſera la plus ſimple que donne la formule des differentielles trinomes dont les expoſans $n$ ſont poſitifs, dont l'integrale dépend de la quadrature de l'hyperbole & de l'integrale ſuppoſée S. $1x^{1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$, & l'on aura l'integrale de cette differentielle, en mettant dans le premier terme de la formule, & dans les quantités A & B, & dans leurs coëficiens, les valeurs des lettres $g$, $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $p$, priſes de $1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$.

On trouvera comme dans les binomes, & en faiſant des operations ſemblables aux précedentes, en ſuppoſant (C) S. $gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p} =$ S. $1x^{0}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$ (qui eſt la même quadrature de l'hyperbole;) que $1x^{-2}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$ eſt la differentielle trinome qui ſuit la plus ſimple qu'on vient de trouver, dont l'integrale finie contiendra deux termes complets, & de plus l'integrale ſuppoſée de l'hyperbole, & encore l'integrale ſuppoſée (D) S. $gx^{m+3n}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{\,p} =$ S. $1x^{2}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\,\frac{1}{2}}$. De maniere qu'en ſuppoſant $m$ égale ſucceſſivement aux nombres négatifs $-1$, $-2$, $-3$, &c. l'on aura les differentielles trinomes pour les expoſans $n$ poſitifs, dont l'integrale finie ſe réduit à la quadrature ſuppoſée de l'hyperbole $dx \times \overline{f+2ex+xx}^{\,\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant outre cela pour la premiere $m$ de ces differentielles l'integrale donnée S. $1x^1dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$ ; pour la ſeconde S. $1x^2dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$ ; & ainſi de ſuite.

On en trouvera d'autres de la même maniere par le moyen de la formule de l'integrale des differentielles trinomes, dont les expoſans $n$ ſont négatifs.

On peut appliquer la même méthode aux differentielles quadrinomes, &c.

---

## TROISIE'ME MÉTHODE,

### *Par laquelle on trouve une formule generale de l'integrale des differentielles binomes, trinomes, & des autres plus composées.*

706. $x^m dx \times \overline{f + gx^n + hx^{2n} + ix^{3n}}$ + &c. $\times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$ + &c. eſt l'expreſſion generale de toutes les differentielles complexes qui auront tant de termes qu'on voudra ſous le ſigne quelconque $p$, & tant d'autres termes qu'on voudra hors du ſigne ; il faut en trouver l'integrale qui ſervira de formules generales pour trouver les integrales des differentielles binomes, trinomes, & des autres plus composées.

1°. Il faut ſuppoſer (1) $K = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}$ + &c. ce qui donnera (2) $dK = nbx^{n-1}dx + 2ncx^{2n-1}dx + 3nex^{3n-1}dx$ + &c. & changer l'expreſſion de la differentielle en cette autre équivalente $fx^mK^pdx + gx^{m+n}K^pdx + hx^{m+2n}K^pdx + ix^{m+3n}K^pdx$ + &c. ou bien (3) $\overline{f + gx^n + hx^{2n} + ix^{3n}}$ + &c. $\times x^mdx \times K^p$.

2°. Il faut ſuppoſer que (4) $Ax^{m+1}K^{p+1} + Bx^{m+1+n}K^{p+1} + Cx^{m+1+2n}K^{p+1} + Dx^{m+1+3n}K^{p+1}$ + &c. repréſente l'integrale que l'on cherche ; $A$, $B$, $C$, &c. ſont des indéterminées qui repréſentent les coëficiens qu'il faut trouver ; & il eſt évident par les articles 538 & 540, que les expoſans de la changeante $x$ doivent être en progreſſion arithmetique ; que dans le premier terme $A$, l'expoſant de $x$ doit ſurpaſſer d'une unité celui de $x$ dans le premier terme de la differentielle ; que dans le ſecond terme $B$ il doit augmenter d'une $n$, dans le troiſiéme de $2n$, & ainſi de ſuite ; & que l'expoſant de $K$

doit dans tous les termes être l'expoſant $p$ de la differentielle augmenté d'une unité, c'eſt-à-dire $p + 1$.

3°. Il faut prendre la difference de chacun des termes de (4), & l'on aura $\overline{m+1}\,Ax^{m}dxK^{p+1} + \overline{p+1}\,Ax^{m+1}K^{p}dK$ $+ \overline{m+1+n}\,Bx^{m+n}dxK^{p+1} + \overline{p+1}\,Bx^{m+1+n}K^{p}dK$ $+ \overline{m+1+2n}\,Cx^{m+2n}dx \times K^{p+1} + \overline{p+1}\,Cx^{m+1+2n}K^{p}dK$ $+ \overline{m+1+3n} \times Dx^{m+3n}dxK^{p+1} + \overline{p+1}\,Dx^{m+1+3n}K^{p}dK$ + &c. qu'il faut réduire à cette équivalente (5) $\overline{m+1}\,Ax^{m}dx \times K \times K^{p} + \overline{p+1}\,Ax \times x^{m}K^{p}dK + \overline{m+1+n}\,Bx^{n} \times x^{m}dx \times K \times K^{p} + \overline{p+1}\,Bx^{1+n} \times x^{m}K^{p}dK + \overline{m+1+2n}\,Cx^{2n}dx \times x^{m} K \times K^{p} + \overline{p+1}\,Cx^{1+2n} \times x^{m}K^{p}dK + \overline{m+1+3n} \times Dx^{3n} \times x^{m}dx \times K \times K^{p} + \overline{p+1}\,Dx^{1+3n} \times x^{m}K^{p}dK$ + &c. ou, ce qui eſt la même choſe (6) $\overline{\overline{m+1}\,AKdx + \overline{p+1}\,AxdK +}$ $\overline{\overline{m+1+n}\,Bx^{n}dxK + \overline{p+1}\,Bx^{1+n}dK + \overline{m+1+2n}\,Cx^{2n}dx \times K}$ $\overline{+ \overline{p+1}\,Cx^{1+2n}dK + \overline{m+1+3n}\,Dx^{3n}Kdx + \overline{p+1}\,Dx^{1+3n}dK}$ $+$ &c. $\times\, x^{m}K^{p}$.

4°. Il faut mettre dans (6) les valeurs de $K$ & de $dK$ priſes de (1) & (2), & les diſpoſer dans l'ordre qu'on voit ici; & ſuppoſer que cette differentielle eſt égale à la propoſée, c'eſt-à-dire que cette differentielle moins la propoſée eſt égale à zero.

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\overline{m+1}\,AKdx & = \overline{m+1}\,Aa + \overline{m+1}\,Abx^{n} & + \overline{m+1}\,Acx^{2n} & + \overline{m+1}\,Aex^{3n} & + \&c. \\
+\overline{p+1}\,AxdK & = \quad + \overline{p+1} \times nAbx^{n} & + \overline{p+1} \times 2nAcx^{2n} & + \overline{p+1} \times 3nAex^{3n} & + \&c. \\
+\overline{m+1+n}\,Bx^{n}Kdx & = \quad + \overline{m+1+n}\,Bax^{n} & + \overline{m+1+n}\,Bbx^{2n} & + \overline{m+1+n}\,Bcx^{3n} & + \&c. \\
+\overline{p+1}\,Bx^{n+1}dK & = & + \overline{p+1} \times nBbx^{2n} & + \overline{p+1} \times 2nBcx^{3n} & + \&c. \\
+\overline{m+1+2n}\,Cx^{2n}Kdx & = & + \overline{m+1+2n}\,Cax^{2n} & + \overline{m+1+2n}\,Cbx^{3n} & + \&c. \\
+\overline{p+1}\,Cx^{2n+1}dK & = & & + \overline{p+1} \times nCbx^{3n} & + \&c. \\
+\overline{m+1+3n}\,Dx^{3n}Kdx & = & & + \overline{m+1+3n}\,Dax^{3n} & + \&c. \\
& \quad -f \qquad -gx^{n} & -hx^{2n} & -ix^{3n} & - \&c.
\end{array}\right\} \times dx \times x^{m}K^{p} = 0.$$

5°. Il faut ſuppoſer chaque terme égal à zero, & trouver par les équations que donnera cette ſuppoſition les valeurs des indéterminées $A$, $B$, $C$, &c. & l'on aura $A = \frac{f}{\overline{m+1} \times a}$;

$$B = \frac{\overline{g - \overline{m+1} - \overline{p+1} \times \frac{n \times bf}{\overline{m+1} \times a}}}{\overline{m+1+n} \times a}, \&c.$$

6°. Il faut ſubſtituer ces valeurs des indéterminées dans (4), (pour abreger le calcul on laiſſera les capitales *A*, *B*, &c. au lieu de leurs valeurs, excepté dans le premier terme, ) & l'on aura.

*La formule de l'integrale de la differentielle* $x^m dx \times \overline{f + gx^n + hx^{2n} + ix^{3n} + \&c.} \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$.

707. $$\overline{x^{m+1} \times a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^{p+1} \times \frac{f}{\overline{m+1} \times a} +$$

$$\frac{\overline{g - \overline{m+1} - \overline{p+1}} \times n \times bA}{\overline{m+1+n} \times a} x^n + \frac{\overline{h - \overline{m+1} - \overline{p+1}} \times 2n \times cA - \overline{\overline{m+1+n} - \overline{p+1}} \times n \times bB}{\overline{m+1+2n} \times a} x^2$$

$$+ \frac{\overline{i - \overline{m+1} - \overline{p+1}} \times 3n \times eA - \overline{\overline{m+1} - \overline{p+1}} \times 2n \times cB - \overline{\overline{m+1+2n} - \overline{p+1}} \times n \times bC}{\overline{m+1+3n} \times a} x^3$$

+ &c. Le multiplicateur $x^{m+1} \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$ + &c. eſt commun à tous les termes.

### REMARQUE.

708. ON peut trouver tant de termes qu'on voudra de cette formule: Elle contient les formules des integrales des differentielles binomes, trinomes, &c. Par exemple ſi l'on veut s'en ſervir pour trouver l'integrale de la differentielle binome $x^m dx \times f \times \overline{a + bx^n}^p$, il faut ſuppoſer dans la formule, que les lettres qui ne ſe trouvent pas dans cette differentielle binome, ſont chacune égale à zero, comme $g = 0$, $h = 0$, $i = 0$, $c = 0$, $e = 0$, &c. & l'on aura la formule de l'integrale de l'expreſſion generale de la differentielle binome; il faudra faire la même choſe pour les differentielles trinomes, quadrinomes, &c. Elle fait même trouver les integrales des differentielles qui n'ont qu'un ſeul terme comme $fx^m dx$, en ſuppoſant de même chaque lettre de la formule égale à zero, excepté $f$ & $m$.

### COROLLAIRE I.

709. ON trouvera de la même maniere par la même méthode la formule de l'integrale de la ſeconde forme de la même differentielle, dans laquelle les expoſans $n$ ſont négatifs; mais il faudra marquer l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ dans la grandeur complexe élevée à la puiſſance dont

l'expoſant

l'expoſant eſt l'unité par une indéterminée, & de même celui de la plus haute puiſſance de $x$ dans la grandeur complexe élevée à la puiſſance $p$. Nommant, par exemple, l'expoſant de $x$ dans la premiére $(rn)$ & dans la ſeconde $(snp)$; la ſeconde forme de la différentielle ſera $x^{m+rn+snp}\,dx \times \overline{i - hx^{-n} + gx^{-2n} + fx^{-3n}}^{1} + \&c. \times \overline{e + cx^{-n} + bx^{-2n} + ax^{-3n}}^{p} + \&c.$ la lettre indéterminée $r$ marque le nombre entier poſitif qui multiplie l'expoſant $n$ du dernier terme de la ſuite $f + gx^{n} + hx^{2n} + ix^{3n} + \&c.$ Si $ix^{3n}$ étoit le dernier terme, $r$ ſeroit égal à 3; ſi le dernier terme contenoit $x^{7n}$, $r$ ſeroit égal à 7. De même ſi $ex^{3n}$ étoit le dernier terme de $\overline{a + bx^{n} + cx^{2n} + ex^{3n}}^{p}$, $s$ dans $snp$ ſeroit égal à 3, &c.

## COROLLAIRE II.

10. ON trouvera de la même maniére l'intégrale de la différentielle $x^{m}dx \times \overline{f + gx^{n} + hx^{2n}}^{1} + \&c. \times \overline{a + bx^{n} + cx^{2n}}^{p} + \&c. \times \overline{\alpha + \beta x^{n} + \varkappa x^{2n}}^{q} + \&c.$ Il faudra ſuppoſer, 1°. $K = a + bx^{n} + cx^{2n} + \&c.$ & $l = \alpha + \beta x^{n} + \varkappa x^{2n} + \&c.$ ce qui changera la différentielle propoſée en $x^{m}dx \times K^{p} l^{q} \times \overline{f + gx^{n} + hx^{2n}} + \&c.$ 2°. que l'intégrale que l'on cherche eſt repreſentée par l'intégrale indéterminée $x^{m+1} K^{p+1} l^{q+1} \times A + Bx^{n} + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c.$ 3°. Il faudra prendre la différentielle de chaque terme*, & mettre tous les termes correſpondans les uns ſous les autres, de façon qu'ils ne faſſent enſemble qu'une même ſuite, & écrire au-deſſous les termes correſpondans de la différentielle propoſée avec les ſignes négatifs pour marquer qu'on ſuppoſe la différentielle indéterminée égale à la propoſée. 4°. Il faudra ſuppoſer chaque terme de cette différentielle égal à zero, & trouver par les équations que donnera cette ſuppoſition les valeurs des indéterminées $A$, $B$, &c. & les ſubſtituer à leur place dans l'intégrale indéterminée, qui deviendra par-là l'intégrale de la différentielle propoſée.

* 537.

## USAGE DES FORMULES DES INTEGRALES.

11. QUAND on aura formé ſoi-même les formules des intégrales des expreſſions générales des différentielles, il ne faudra plus dans la réſolution des Problêmes que réduire les

différentielles qu'on trouvera à l'expreſſion générale des differentielles*, & ſubſtituer dans la formule de l'intégrale les valeurs des lettres des expoſans & des coéficiens, priſes de la différentielle dont on cherche l'intégrale, en ſuppoſant égales à zero les lettres de la formule qui ne ſont pas dans cette différentielle ; & ſi l'on arrive à un terme dont le coéficient ſoit zero, ou que l'un de ſes multiplicateurs ſoit 0, & que la même choſe ſe trouve dans les termes ſuivans, tous les termes qu'on aura trouvé qui précéderont celui qui eſt zero, ſeront l'intégrale exacte de la différentielle propoſée. Si l'on ne peut ainſi trouver l'intégrale finie de la différentielle propoſée par le moyen de la formule de la différentielle générale dont les expoſans *n* ſont poſitifs, il faudra ſe ſervir de la formule de la différentielle générale dont les expoſans *n* ſont négatifs ; & ſi l'on ne trouve pas d'intégrale finie par l'une & l'autre formule, la méthode ne peut la donner que par approximation, en ſubſtituant dans autant de termes qu'on voudra de celle des formules qui fera trouver les termes qui iront le plus en diminuant par raport à la différentielle propoſée, les valeurs des lettres des expoſans & des coéficiens priſes de la différentielle propoſée dont on cherche l'intégrale. * 677.

## AVERTISSEMENT.

712. ON ſçait par le calcul différentiel * quels doivent être les expoſans de la changeante $x$ dans tous les termes qu'on doit ſuppoſer pour former l'intégrale indéterminée (4) qui doivent aller en progreſſion arithmétique ; ainſi l'on n'a beſoin pour trouver l'intégrale que de trouver les coéficiens des termes ; & c'eſt à cela que ſervent les indéterminées *A*, *B*, *C*, &c. qui les repréſentent, & qui ſervent à les faire trouver. Cependant on peut employer la 3$^e$ méthode non-ſeulement à trouver ces coéficiens, mais auſſi à découvrir les expoſans que doit avoir la changeante $x$ dans tous les termes de l'intégrale que l'on cherche ; & comme ils ſont en progreſſion arithmétique, il ſuffit de trouver les deux premiers. Pour cela il faut trouver l'intégrale par parties, c'eſt-à-dire, en trouver les termes les uns après les autres. Cette méthode étant utile pour découvrir les intégrales de pluſieurs différentielles particuliéres, & même de celles qui * 541.

ne ſont finies que par la ſuppoſition des quadratures ou rectifications des courbes, on a cru la devoir expliquer ici, & pour abreger le calcul on l'appliquera ſeulement à trouver l'intégrale des différentielles binomes $x^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$.

---

## *Autre maniére de ſe ſervir de la troiſiéme méthode, en trouvant l'intégrale par parties.*

*Intégrale indéterminée* $A + \overline{Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n}} + \&c. \times x^{m+1} K^{p+1}$.

Différentielle de l'intégrale indéterminée.

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{m+1}\,Aa & +\overline{m+1}\,A\,b\,x^n & \\ & +\overline{p+1}\,A\,n\,b\,x^n & \\ & +\overline{m+1+n}Bax^n & +\overline{m+1+n}Bbx^{2n} \\ & & +\overline{p+1}\,Bnbx^{2n} \\ -1 & & \end{array}\right\} \times dxx^m K^p$$

713. On ſuppoſera, 1°. que le premier terme eſt $A \times x^{m+1} K^{p+1}$, ($A$ eſt une indéterminée qui marque le coéficient du premier terme, & qui ſervira à le faire trouver;) car il eſt évident par les régles du calcul différentiel *, que les expoſans de la changeante $x$ & de la grandeur complexe repréſentée par $K$, doivent augmenter d'une unité chacun dans l'intégrale. Il faut prendre la différentielle de $Ax^{m+1} K^{p+1}$, & l'on aura, en écrivant les termes de l'intégrale à part à meſure qu'on les découvrira, & en écrivant auſſi les termes correſpondans de leurs différentielles les uns ſous les autres; on aura, dis-je, les deux premiers termes de la différentielle de l'intégrale indéterminée.

* 536, 537, 538.

2°. Mais le ſecond terme de la différentielle fait voir qu'il faut ſuppoſer pour ſecond terme de l'intégrale indéterminée $Bx^{m+1+n} K^{p+1}$; car on a beſoin de l'indéterminée $B$ pour marquer le coéficient du ſecond terme, & il eſt évident qu'il faut ſuppoſer que l'expoſant de la changeante $x$ doit avoir pour expoſant $m + 1 + n$, afin que la différentielle du ſecond terme donne au moins un terme correſpondant au ſecond terme de la différentielle du premier terme, autrement on ne pourroit pas avoir une équation pour déterminer $B$. Il faut à préſent prendre la différentielle du ſecond terme, & l'ajouter à la différentielle du premier.

3°. Le troiſiéme terme de la différentielle des deux termes de l'intégrale indéterminée fait voir que le troiſiéme terme de cette intégrale doit être $Cx^{m+1+2n} K^{p+1}$, & la différentielle de ce troiſiéme terme fera connoître que le quatriéme terme doit être $Dx^{m+1+3n} K^{p+1}$, & ainſi de ſuite. Mais quand on a les deux premiers, la progreſſion arithmétique des expoſans eſt donnée, & il eſt inutile de chercher les autres.

4°. Après avoir pris autant de termes qu'on en voudra de l'intégrale indéterminée, & mis en ordre les termes de leurs différentielles, il faut ſuppoſer que la *ſuite* de cette différentielle eſt égale à la différentielle propoſée, c'eſt à-dire, il faut écrire les termes correſpondans de la différentielle propoſée, avec les ſignes négatifs, ſous ceux de la différentielle indéterminée qu'on vient de trouver; ſuppoſer que chaque terme de la *ſuite* que forment toutes ces différentielles, eſt égale à zero; déterminer par les équations que donnera cette ſuppoſition les valeurs de *A*, *B*, *C*, &c. & les ſubſtituer à leur place dans l'intégrale indéterminée, & l'on trouvera par la ſubſtitution la même intégrale qu'on a déja trouvée.

## SECONDE PROPOSITION FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL.

714. LA quantité différentielle $ydx + xdy$ a pour ſon intégrale
* 523. $xy$*; la différence $yzdx + xzdy + xydz$, a pour intégrale $xyz$†.
†. 523. De même $\overline{m+1}\ x^{n+1} y^m dy + \overline{n+1}\ x^n y^{m+1} dx$, a pour inté-
grale $y^{m+1} x^{n+1}$. De même la différentielle $\frac{ydx - xdy}{yy} = y^{-1} dx$
* 526. $- xy^{-2} dy$, a pour intégrale $\frac{x}{y} = xy^{-1}$*. De même

$$\frac{\frac{an}{b} x^{n-1} ydx - \frac{am}{b} x^n dy}{y^{m+1}} = \frac{an}{b} x^{n-1} y^{-m} dx - \frac{am}{b} x^n y^{-m-1} dy,$$

a pour intégrale $\frac{a}{b} x^n y^{-m} = \frac{ax^n}{by^m}$.

Il faut ſe rendre familiéres ces ſortes de différentielles & leurs intégrales où il y a pluſieurs changeantes, & ſur-tout celles où l'une des changeantes eſt au dénominateur; ou bien, ce qui eſt la même choſe, la puiſſance de l'une des changeantes à un expoſant négatif. On les a expliquées dans les articles 523, 524, 525, 526 & 527.

## TROISIE'ME PROPOSITION FONDAMENTALE.

715. QUAND une quantité différentielle eſt égale à zero, ſon intégrale, quand on la peut trouver, doit être ſuppoſée égale à une grandeur conſtante, qu'il faudra prendre homogéne aux termes de l'intégrale.

Cette grandeur conſtante eſt ordinairement arbitraire, mais il eſt ſouvent de l'induſtrie de celui qui reſout un Problême où ſe trouve une telle différence, de prendre une grandeur arbitraire qui donne la réſolution la plus ſimple.

Soit, par exemple, la différence $\frac{2xydy - yydx}{xx} = 0$, dont on trouve par la ſeconde propoſition fondamentale, que l'intégrale eſt $\frac{yy}{x} = yyx^{-1}$; il faut la ſuppoſer égale à une grandeur conſtante $a$, & l'on aura $\frac{yy}{x} = a$, ou bien $yy = ax$ pour l'intégrale complete.

### REMARQUES.

### I.

16. QUAND une différentielle qui contient deux changeantes, eſt une équation, & qu'on n'en peut pas trouver l'intégrale, il arrive quelquefois qu'en la multipliant par un même multiplicateur, ou la diviſant par un même diviſeur, on la réduit à la ſeconde ou à la troiſiéme propoſition fondamentale, c'eſt à-dire, on en peut trouver l'intégrale par ces propoſitions.

Par exemple on ne ſçauroit trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}$, mais en la réduiſant à cette expreſſion $2xdy - ydx = 0$, & la multipliant par $\frac{y}{xx}$, elle deviendra $\frac{2xydy - yydx}{xx} = 0$, dont l'intégrale ſe trouve par la ſeconde propoſition fondamentale $\frac{yy}{x}$; & la rendant égale à une conſtante homogéne, on aura pour l'intégrale complete $\frac{yy}{x} = a$, ou bien $yy = ax$.

On trouvera de même l'intégrale de $nxdy - ydx = 0$, en la multipliant par $\frac{y^{n-1}}{xx}$; car elle deviendra $\frac{nxy^{n-1}dy - y^{n}dx}{xx} = 0$, dont l'intégrale eſt par la ſeconde propoſition fondamentale $\frac{y^{n}}{x}$, qui deviendra complete en la rendant par la 3e propoſition fondam. égale à une grandeur homogéne $a^{n-1}$, car l'on aura $\frac{y^{n}}{x} = a^{n-1}$, ou bien $y^{n} = a^{n-1}x$.

On réduira de même la différentielle $y^3dy = aaydx - aaxdy$ à la ſeconde propoſition fondamentale, en la diviſant par $yy$; car elle deviendra $ydy = \frac{aaydx - aaxdy}{yy}$, dont on trouvera que l'intégrale eſt $\frac{1}{2}yy = \frac{aax}{y}$, ou bien $y^3 = 2aax$.

En diviſant de même la différentielle $3xxydx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$ par $xx$, elle deviendra $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, dont on trouvera par la ſeconde propoſition fondamentale, que l'intégrale eſt $3xy = \frac{ayy}{x}$, ou bien $3xx = ay$.

On réduira auſſi à la ſeconde propoſition fondamentale la différentielle $2axdy + xxdy = aydx + xydx$, en ſuppoſant $zz = 2ax + xx$, ce qui donnera $zdz = adx + xdx$; & ſubſtituant $zz$ & $zdz$ au lieu de leurs valeurs, l'équation deviendra $zdy = ydz$, ou bien $zdy - ydz = 0$; la diviſant par $zz$, l'on aura $\frac{zdy - ydz}{zz} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{y}{z}$, qu'on rendra complete en la ſuppoſant égale à une grandeur conſtante homogéne $\frac{a}{b}$; & remettant la valeur de $z$, l'intégrale ſera $by = a \times \sqrt{2ax + xx}$.

Enfin on réduira la différentielle $\frac{2axdy + 2xxdy - aydx - 2xydx}{2axy + 2xxy} = 0$ à la ſeconde propoſition fondamentale, en ſuppoſant $ax + xx = z$, ce qui donnera $dz = adx + 2xdx$; & ſubſtituant $z$ au lieu de $ax + xx$, & $dz$ au lieu de $adx + 2xdx$, l'équation deviendra $\frac{2zdy - ydz}{2zy} = 0$; la multipliant par $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura $\frac{2zdy - ydz}{2z^{1 + \frac{1}{2}}} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}}$, qu'il faut rendre égale à une conſtante $\frac{a}{b}$; & remettant la valeur de $z^{\frac{1}{2}}$, l'intégrale ſera $\frac{y}{\sqrt{ax + xx}} = \frac{a}{b}$. On remarquera dans les deux derniers exemples la maniére de réduire l'expreſſion compoſée de la différentielle à une plus ſimple, en ſuppoſant une ſeule changeante égale à une grandeur complexe.

## II.

717. Quand les différentielles dans leſquelles les changeantes $x$ & $y$, & leurs différences $dx$ & $dy$ ſont mêlées enſemble, ſont aſſez ſimples, ou quand étant compoſées on les peut aiſément réduire aux plus ſimples, comme dans les deux derniers exemples, on connoît d'abord ſi l'on en peut trou-

ver les intégrales par la ſeconde propoſition fondamentale ou ſi l'on ne le peut pas. Mais il s'en trouve beaucoup qui quoique ſimples ne ſont pas ſoumiſes à la ſeconde propoſition fondamentale, ou qui ſont ſi compoſées qu'on ne peut pas les réduire à des expreſſions ſimples dont on puiſſe trouver les intégrales par la ſeconde propoſition ſondamentale. Dans ces cas il faut ſéparer les changeantes $x$ & $y$ & leurs différences de maniére que dans les termes où ſont les $x$ & les $dx$ il n'y ait pas d'$y$ ni de $dy$, & que ce ſoit la même choſe des $y$ & $dy$; & enſuite on en cherche les intégrales par les méthodes qu'on a données pour trouver les intégrales des différentielles qui n'ont qu'une même changeante, ou bien l'on s'aſſure qu'on ne peut pas les trouver exactes, & qu'on ne peut les avoir que par approximation, ou tout au plus que ſi on les veut avoir finies dans pluſieurs cas, il faut ſuppoſer les rectifications ou les quadratures de quelques courbes.

Cette ſéparation des changeantes ſe fait, 1°. par les calculs ordinaires de l'Analyſe, par exemple en diviſant dans la différentielle $xdy = ydx$ chaque membre par $xy$, l'on aura $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, où les changeantes ſont ſéparées, & les cas où cela ſe peut faire ne font aucune difficulté. Cela ſe fait, 2°. en ſuppoſant les changeantes de la différentielle égales à d'autres changeantes autrement diſpoſées; & ſubſtituant dans la différentielle propoſée les ſecondes changeantes à la place des premiéres, on ſépare en pluſieurs cas les changeantes l'une de l'autre.

Par exemple pour ſéparer les changeantes de $adx = ydy - xdy$, on ſuppoſera $y - x = z$, d'où l'on aura $y = z + x$, & $dy = dz + dx$; & ſubſtituant $z$ à la place de $y - x$, & $dz + dx$ à la place de $dy$, la différentielle deviendra $adx = zdz + zdx$, ou $adx - zdx = zdz$; & diviſant par $a - z$, l'on aura $dx = \frac{zdz}{a-z}$, où les changeantes ſont ſéparées.

Pour ſéparer auſſi les changeantes de l'équation $\sqrt{y} \times \overline{xdx + ydy} = \sqrt{a} \times \overline{xdy - ydx}$, on ſuppoſera $y = \frac{tz}{a}$ & $x = \frac{t}{a} \times \sqrt{aa - zz}$: Ce qui donnera $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{tz}{a}}$; $dy = \frac{zdt + tdz}{a}$; $dx = \frac{dt}{a} \times \sqrt{aa - zz} - \frac{tzdz}{a\sqrt{aa - zz}}$. On ſubſtituera à la place de $\sqrt{y}$, $y$, $dy$, $x$, $dx$ leurs valeurs; & l'on changera par ces ſubſtitutions l'équation propoſée en cette autre équivalente $atdt\sqrt{t} \times \sqrt{z} \times$

$\sqrt{aa - zz} = aattdz$, ou bien $atdt\sqrt{t} \times \sqrt{aaz - z^3} = aattdz$, qui ſe réduit à $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{aaz - z^3}}$, qu'on peut auſſi exprimer par $\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, dans laquelle les changeantes ſont ſéparées.

Mais l'on n'a pas de régles générales pour trouver comment il faut ſuppoſer les changeantes nouvelles qu'il faut ſubſtituer à la place des changeantes de la différentielle, afin de ſéparer certainement les changeantes.

718. Dans les cas où l'on ne peut pas faire cette ſéparation exacte des changeantes d'une équation différentielle où elles ſont mêlées, on peut toujours avoir l'intégrale par approximation; car on peut par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, trouver la valeur de $y$ qui ne contienne que des $x$ & des $dx$; & par conſéquent la valeur de $dy$ auſſi en $x$ & $dx$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation différentielle, elle ne contiendra plus que la ſeule changeante $x$ & $dx$, & l'on en pourra trouver l'intégrale au moins par approximation.

## I I I.

### *Sur les intégrales des différences ſecondes, troiſiémes, &c.*

719. TOUTES les méthodes qu'on a données juſqu'ici pour trouver les intégrales des *premiéres différences*, ſervent auſſi à trouver les intégrales des *différences ſecondes, troiſiémes, &c.* en remarquant que les différences premiéres ſont les intégrales des différences ſecondes, que ces derniéres le ſont des troiſiémes différences, & ainſi de ſuite; car il eſt évident que $dx$ eſt l'intégrale de $ddx$, que $\frac{1}{2} dx^2$ eſt l'intégrale de $dxddx$, & ainſi des autres; ainſi l'intégrale de la différence ſeconde $dxdy = \frac{adxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dans laquelle on ſuppoſe $dy$ conſtante, c'eſt-à-dire que $dy$ n'a point de ſeconde différence, eſt $xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$. On remarquera auſſi qu'il faut quelquefois ajouter à l'intégrale qu'on trouve d'une ſeconde différence, ou en retrancher une grandeur différentielle conſtante du premier genre, c'eſt-à-dire une premiére différence qui n'ait pas de ſeconde différence, ou dont la ſeconde différence eſt zero; & de même pour les troiſiémes différences. La régle que l'on a donnée* pour trouver cette grandeur conſtante dans les intégrales des premiéres différences, ſert auſſi pour les intégrales des différences ſecondes, troiſiémes, &c. *664.

SECTION

# SECTION II.

## *Où l'on enſeigne à trouver les intégrales finies des différentielles qui n'ont qu'une changeante dont on ne peut trouver les intégrales exactes, en ſuppoſant la rectification ou la quadrature des courbes.*

### AVERTISSEMENT.

20. QUAND on ne peut pas trouver par les méthodes de la ſection précédente les intégrales exactes des différentielles qui n'ont qu'une changeante, on peut toujours en trouver les valeurs approchées tant près que l'on voudra, en ſubſtituant dans autant de termes que l'on voudra des formules auſquelles ſe réduiſent les intégrales de ces différentielles, les valeurs des lettres de ces formules priſes des différentielles dont on cherche les intégrales ; on peut encore trouver ces valeurs approchées des intégrales par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, comme on l'a fait voir dans la derniére ſection de la ſeconde Partie. Mais comme l'on eſt plus content de ſe repréſenter une grandeur incommenſurable, ( par exemple la racine incommenſurable qui eſt une des valeurs de l'inconnue dans une équation irréductible du troiſiéme degré ) par une ligne finie, ou par une figure finie, que par une approximation telle que l'on voudra ; les Géométres de notre temps ont auſſi voulu, pour contenter tout le monde, repréſenter une intégrale que les méthodes ne donnent que par approximation, la repréſenter, dis-je, par un arc de courbe fini & regardé comme connu, ou par l'aire d'une courbe ſuppoſée comme connue. Il a fallu pour cela trouver des méthodes pour réduire les intégrales des différentielles dont les Régles que l'on a données ne font pas trouver les intégrales exactes, aux rectifications ou aux quadratures des courbes les plus ſimples, comme ſont les ſections coniques quand cela ſe peut. On a déja donné de ces méthodes dans la ſection précédente,* on en va donner d'autres dans les Problêmes ſuivans, en faiſant remarquer qu'on ſuppoſera, dans l'expreſſion générale d'une différentielle, la grandeur complexe de tant de ter- * 694, 695.

mes qu'on voudra qui eſt ſous le ſigne $p$, comme $a + bx^{n} + cx^{2n} +$ &c. égale à une ſeule lettre $K$, ainſi $dK = nbx^{n-1}dx + 2ncx^{2n-1}dx +$ &c: S'il y a une ſeconde grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra ſous le ſigne $q$ multipliée par la premiére, on ſuppoſera cette ſeconde $\mathrm{a} + \mathrm{b}x^{n} + \mathrm{c}x^{2n} +$ &c. $= l$, ce qui donnera $dl = n\mathrm{b}x^{n-1}dx + 2n\mathrm{c}x^{2n-1}dx +$ &c.

## PROBLÊME I.

721. *LA lettre* r *dans l'expreſſion générale de la différentielle* $\mathrm{x}^{m+rn}\mathrm{dxK}^{p}$, *repréſentant tout nombre entier poſitif ou négatif, en y comprenant l'unité & zero, &* m, n, p *repréſentant tous les expoſans que peuvent avoir* x *&* K, *cette différentielle peut repréſenter une* ſuite *infinie de différentielles; l'intégrale d'une ſeule de ces différentielles étant ſuppoſée connue lorſque* $\mathrm{K}^{p}$ *eſt un binome; deux lorſque* $\mathrm{K}^{p}$ *eſt un trinome; trois quand* $\mathrm{K}^{p}$ *eſt un quatrinome, & ainſi de ſuite; trouver les intégrales de chacune des autres différentielles de cette* ſuite *infinie.*

CETTE ſuite infinie de différentielles eſt $\delta x^{m-3n}dxK^{p}$, $\varkappa x^{m-2n}dxK^{p}$, $\beta x^{m-1n}dxK^{p}$, $\mathrm{a}x^{m}dxK^{p}$; $\mathrm{b}x^{m+1n}dxK^{p}$, $\mathrm{c}x^{m+2n}dxK^{p}$, $\mathrm{d}x^{m+3n}dxK^{p}$, &c.

### POUR LES BINOMES.

L'INTEGRALE d'une ſeule de ces différentielles comme $\mathrm{a}x^{m}dxK^{p}$, étant ſuppoſée connue, & nommée $\mathrm{a} \times A$ ( c'eſt-à-dire $A$ eſt l'intégrale, & (a) ſon coéficient, ) il faut trouver les intégrales de toutes les autres quand elles ſont binomes. Pour les trouver il faut aller de ſuite, & trouver l'intégrale du terme $\mathrm{b}x^{m+1n}dxK^{p}$, qui ſuit à droite celle qu'on vient de ſuppoſer connue, & avec l'intégrale de ce terme on trouvera celle du ſuivant $\mathrm{c}x^{m+2n}dxK^{p}$, & ainſi à l'infini, & enſuite par le retour on trouvera les intégrales des termes qui vont de la droite à la gauche.

On remarquera que, quand une différentielle propoſée n'a pas par les régles de la premiére ſection une intégrale exacte, l'intégrale de cette différentielle n'eſt que ſuppoſée; mais que quand on a beſoin dans une réſolution d'une intégrale quelconque, par exemple ſi l'on a beſoin de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, ou $x^{m+n+}\ K^{p+1}$, ou de telle autre qu'on voudra; cette intégrale & ſa différentielle qu'on peut toujours trouver par le calcul différentiel, ne ſont pas ſuppoſées, elles ſont exactement connues.

### RESOLUTION.

22. POUR trouver l'intégrale de b$x^{m+n}dxK^{p}$, en ſuppoſant connue l'intégrale a × $A$ de a$x^{n}dxK^{p}$, l'on employera l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, & on en prendra la différentielle

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\,a+\overline{m+1}\,bx^{n} \\ \qquad\qquad +\overline{p+1}\,nbx^{n} \\ -\mathrm{a} \end{array}\right\}\times dx\times x^{m}K^{p}.$$

2°. On en ôtera la différentielle donnée

3°. On ôtera auſſi l'intégrale ſuppoſée a × $A$ de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$. La différence $x^{m+1}K^{p+1}$ — a × $A$ ſera l'intégrale de la différentielle entiere

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\,a+\overline{m+1}\,bx^{n} \\ \qquad\qquad +\overline{p+1}\,nbx^{n} \\ -\mathrm{a} \end{array}\right\}\times dx\times x^{m}K^{p}.$$

4°. On ſuppoſera le premier terme de la différentielle égal à zero, c'eſt-à-dire $\overline{m+1}\,a=\mathrm{a}$.

5°. On mettra cette valeur de (a) dans l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$ — a $A$, & l'on aura $x^{m+1}K^{p+1}-\overline{m+1}\,aA$ pour l'intégrale de la différentielle $\overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n}\times bx^{m+n}dxK^{p}$, le premier terme étant zero.

6°. On diviſera cette intégrale & ſa différentielle par le coéficient de la différentielle, & on multipliera les quotiens par b, & l'on aura $\dfrac{\mathrm{b}x^{m+1}K^{p+1}-\overline{m+1}\,\mathrm{b}aA}{\overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n}\times b}$ pour l'intégrale de la différentielle propoſée b$x^{m+n}dxK^{p}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Si l'on ſuppoſe à préſent connue l'intégrale qu'on vient de trouver, & qu'on la nomme pour abreger b × $B$, on trouvera par ſon moyen l'intégrale de la différentielle ſuivante c$x^{m+2n}dxK^{p}$, en ſe ſervant de l'intégrale $x^{m\pm n.+1}K^{p\pm 1}$; car ſa différentielle ſera

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+n+1}\,ax^{n}+\overline{m+n+1}\,bx^{2n} \\ \qquad\qquad\quad +\overline{p+1}\,nbx^{2n} \\ \\ \\ \qquad -\mathrm{b}x^{n} \end{array}\right\}\times dx\times x^{m}K^{p};$$

d'où l'on ôtera la différentielle propoſée

Et $x^{m+n+1}\,K^{p+1} - b \times B$ ſera l'intégrale de cette différentielle totale.

Suppoſant $\overline{m+n+1}\,a = b$, & ſubſtituant cette valeur de b dans l'intégrale, l'on aura $x^{m+n+1}\,K^{p+1} - \overline{m+n+1}\,a \times B$ pour l'intégrale de la différentielle $\overline{\overline{m+n+1}.+\overline{p+1}.n} \times b\,x^{m+2n}\,dx\,K^p$. Diviſant cette différentielle & ſon intégrale par le coéficient de cette différentielle, & multipliant les quotiens par c, l'on aura $\dfrac{c x^{m+n+1}\,K^{p+1} - \overline{m+n+1}\,a \times cB}{\overline{\overline{m+n+1}+\overline{p+1}\,n} \times b}$ pour l'intégrale de $c x^{m+2n} dx\,K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

## AVERTISSEMENT.

723. ON trouvera de la même maniére l'intégrale de la différentielle ſuivante $d x^{m+3n} dx\,K^p$ par le moyen de l'intégrale qu'on vient de découvrir ; & ainſi de ſuite à l'infini. Voici à préſent la maniére de retourner de la droite vers la gauche : on le peut faire de l'intégrale ſuppoſée de telle différentielle qu'on voudra de la *ſuite* infinie à celle qui la précéde immédiatement vers la gauche ; mais pour être court on n'en mettra que deux exemples.

724. Pour trouver l'intégrale de $a x^m dx K^p$, en ſuppoſant connue l'intégrale qu'on nommera $b \times B$ de la différentielle $b x^{m+n} dx K^p$, on ſe ſervira de l'intégrale $x^{m+1}\,K^{p+1}$, dont la différentielle eſt

$$\left.\begin{array}{r} \overline{m+1}\,a + \overline{m+1}\,b\,x^n \\ + \overline{p+1}\,nbx^n \\ \\ \\ - \quad bx^n \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p;$$

on ôtera la différentielle donnée du 2d terme

En ôtant l'intégrale ſuppoſée $bB$ de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, l'on aura $x^{m+1}\,K^{p+1} - bB$ pour l'intégrale de cette différentielle totale. On ſuppoſera ſon ſecond terme, & non pas le premier, égal à zero ; ce qui donnera $b = \overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n} \times b$. On ſubſtituera cette valeur de b dans l'intégrale précédente, & l'on aura $x^{m+1}\,K^{p1+} - \overline{\overline{m+1} - \overline{p+1}\,n} \times bB$ pour l'intégrale de $\overline{m+1}\,a x^m dx K^p$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $\overline{m+1}\,a$, & l'on multipliera les deux quotiens par (a), & l'on aura $\dfrac{a x^{m+1} K^{p+1} - \overline{\overline{m+1} - \overline{p+1}\,n} \times b a B}{\overline{m+1}\,a}$

pour l'intégrale de $ax^m dxK^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Suppoſant, pour abreger, l'intégrale de la différentielle $ax^m dxK^p$ qu'on vient de découvrir, repréſentée par $aA$, pour trouver l'intégrale de la différentielle $\beta x^{m-n}dxK^p$, on ſe ſervira de l'intégrale $x^{m-n+1}K^{p+1}$, dont la différentielle

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eſt.} & \overline{m-n+1}\,ax^{-n}+\overline{m-n+1}\,b \\ & +\overline{p+1}\,nb \\ \text{on ôtera la diffé-} & \\ \text{rentielle donnée} & \\ \text{du 2}^{\text{d}}\text{ terme} & -\text{a} \end{array}\right\}\times dx\times x^mK^p.$$

L'intégrale de cette différentielle totale ſera $x^{m-n+1}K^{p+1}-aA$. On ſuppoſera le ſecond terme égal à zero; ce qui donnera $a=\overline{m-n+1}+\overline{p+1}\,n\times b$. Subſtituant cette valeur dans l'intégrale, on aura $x^{m-n+1}K^{p+1}-\overline{\overline{m-n+1}-\overline{p+1}\,n}\times bA$ pour l'intégrale de $\overline{m-n+1}\,ax^{m-n}dxK^p$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $\overline{m-n+1}\,a$, & on multipliera les quotiens par $\beta$, & l'on aura

$$\frac{\beta x^{m-n+1}K^{p+1}-\overline{\overline{m-n+1}-\overline{p+1}\,n}\times b\beta A}{\overline{m-n+1}\,a}$$

pour l'intégrale de la différentielle $\beta x^{m-n}dxK^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

On trouvera de même par ordre les intégrales de toutes les différentielles qui vont de droite à gauche dans la *ſuite* infinie.

### POUR LES TRINOMES.

25. Les deux intégrales qu'on nommera $a\times A$, $b\times B$ des deux différentielles trinomes $ax^m dxK^p$, $bx^{m+n}dxK^p$, étant ſuppoſées connues; pour trouver l'intégrale de la différentielle ſuivante $cx^{m+2n}dxK^p$ de la *ſuite* infinie, 1°. il faut ſe ſervir de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, & en prendre la différentielle qui

$$\left.\begin{array}{llll} \text{eſt} & \overline{m+1}\times a & +\overline{m+1}\times bx^n & +\overline{m+1}\times cx^{2n} \\ & & +\overline{p+1}\times nbx^n & +\overline{p+1}\times 2ncx^{2n} \\ \text{en ôter les} & & & \\ \text{deux diffé-} & & & \\ \text{rentielles} & & & \\ \text{données} & -\text{a} & -\text{b}x^n & \end{array}\right\}\times dx\times x^mK^p.$$

L'intégrale de cette différentielle totale eſt $x^{m+1}K^{p+1} - \mathrm{a}\acute{A} - \mathrm{b}B$.

2°. Il faut ſuppoſer les deux premiers termes de la différentielle totale chacun égal à zero, ce qui donnera a $= m+1 \times a$, & b $= \overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}} \times n \times b$, & ſubſtituer ces valeurs dans l'intégrale précédente, & l'on aura $x^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1} \times a\acute{A} - \overline{\overline{m+1}-\overline{p+1}} \times n \times bB$ pour l'intégrale de $\overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}} \times 2n \times cx^{m+2n}dxK^{p}$, les deux premiers termes étant zero.

3°. Il faut diviſer par le coéficient de cette différentielle, cette même différentielle & ſon intégrale, & multiplier les deux quotiens par c, & l'on aura

$$\frac{cx^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1}\,acA - \overline{\overline{m+1}-\overline{p+1}}\,n \times bcB}{\overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}}\,2n \times c}$$

pour l'intégrale de la différentielle $cx^{m+2n}dxK^{p}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

## AVERTISSEMENT.

726. ON peut de la même maniére avec l'intégrale qu'on vient de découvrir, & avec l'intégrale b$B$, trouver l'intégrale de la différentielle trinome ſuivante d$x^{m+3n}dxK^{p}$, & ainſi de ſuite à l'infini; & retourner de la droite à la gauche comme dans les binomes. On peut de même appliquer la même méthode aux différentielles quadrinomes; mais il faudra ſuppoſer connues les intégrales de trois différentielles, & en ſuppoſer quatre pour les différentielles de cinq termes, & ainſi de ſuite à l'infini.

## PROBLÊME II.

727. *DANS l'expreſſion générale* $x^{m}dxK^{p+s}$, *l'indéterminée* s *repréſentant tous les nombres entiers poſitifs & négatifs en y comprenant l'unité & zero, &* m *repréſentant tous les expoſans que peut avoir la changeante* x *hors du ſigne, &* p *tout expoſant du ſigne de la grandeur complexe marquée par* K, *cette différentielle peut exprimer une ſuite infinie de différentielles dans leſquelles* m *repréſente tous les expoſans poſſibles des puiſſances de la changeante* x *hors du ſigne, &* p *tous les expoſans poſſibles des puiſſances de la grandeur complexe* K; s *marque* 0, 1, 2, 3, 4, *&c.* 0, — 1, — 2, — 3, *&c. l'intégrale d'une ſeule différentielle de cette* ſuite

*étant ſuppoſée connue quand* K *eſt binome ; deux quand* K *eſt trinome , & ainſi de ſuite ; trouver les intégrales de toutes les différentielles de la ſuite infinie.*

CETTE *ſuite* infinie de différentielles peut être ainſi repréſentée $\delta x^m dx K^{p-3}$, $\chi x^m dx K^{p-2}$, $\beta x^m dx K^{p-1}$, $\mathrm{a} x^m dx K^p$, $\mathrm{b} x^m dx K^{p+1}$, $\mathrm{c} x^m dx K^{p+2}$, $\mathrm{d} x^m dx K^{p+3}$, &c. on remarquera que , pour abreger , *m* repréſente tous les expoſans poſſibles de $x^{m+rm}$ hors du ſigne , comme au Problême précédent.

## POUR LES BINOMES.

ON trouvera de ſuite , l'une après l'autre , l'intégrale de chacune de ces différentielles , depuis celle dont on ſuppoſe l'intégrale connue , comme dans le Problême précédent ; mais la méthode étant un peu plus ſimple en allant de la droite vers la gauche , on la mettra la premiére , & enſuite on donnera la méthode pour aller de la gauche à la droite.

Pour trouver par exemple l'intégrale de $\beta x^m dx K^{p-1}$, en ſuppoſant connue l'intégrale de $\mathrm{a} x^m dx K^p$, qu'on nommera $\mathrm{a}A$, 1°. il faut préparer la différentielle donnée $\mathrm{a} x^m dx K^p$, en la multipliant par la valeur de $K = a + bx^n$, & la diviſant en même tems par $K$, ce qui n'en changera point la valeur , & l'on aura $\overline{\mathrm{a}a + \mathrm{a}bx^n} \times dx \times x^m K^{p-1}$, dont l'intégrale ſera toujours $\mathrm{a}A$. 2°. Il faut ſe ſervir de l'intégrale $x^{m+1}K^p$, & en prendre la différentielle qui eſt

Il faut lui ajouter la différentielle préparée

$$\left.\begin{array}{r}\overline{m+1}\,a+\overline{m+1}\,bx^n\\ +\;pnbx^n\\ \\ \\ +\,\mathrm{a}a+\mathrm{a}bx^n\end{array}\right\}\times dx\times x^m K^{p-1}.$$

L'intégrale de cette différentielle totale ſera $\mathrm{a}A + x^{m+1}K^p$.

3°. Il faut ſuppoſer le ſecond terme de la différentielle totale égal à zero , ce qui donnera $\mathrm{a} = -m - 1 - pn$ ; ſubſtituer cette valeur de (a) dans l'intégrale & dans le premier terme de la différentielle totale , & l'on aura $x^{m+1}K^p \overline{-m-1-pn} \times A$ pour l'intégrale de $-pna\,x^m dx K^{p-1}$ ; puiſque le ſecond terme $= 0$.

4°. Il faut diviſer cette intégrale & ſa différentielle par le coéficient $-pna$ de la différentielle , & multiplier les quotiens par $\beta$, & l'on aura $\frac{\beta x^{m+1}K^{p} - \overline{m - 1 - pn} \times \beta A}{- pna}$ pour l'intégrale de $\beta x^{m}dxK^{p-1}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

On trouvera de la même maniére avec l'intégrale de $\beta x^{m}dxK^{p-1} = \overline{\beta a + \beta b x^{n}} \times x^{m}dxK^{p-2}$ qu'on vient de découvrir, & qu'on peut ſuppoſer $= \beta B$, l'intégrale de la différentielle $\chi x^{m}dxK^{p-2}$, & ainſi de ſuite à l'infini en allant de la droite à la gauche.

728. Pour aller de la gauche vers la droite, il faut multiplier non la différentielle ſuppoſée, mais la différentielle même dont on cherche l'intégrale par la valeur de $K = a + bx^{n}$, & la diviſer en même tems par $K$, & de plus trouver d'abord l'intégrale d'un des termes de la différentielle préparée, & par le moyen de cette intégrale trouver l'intégrale de l'autre terme, & la ſomme de ces deux intégrales ſera l'intégrale de la différentielle propoſée.

Par exemple pour trouver l'intégrale de la différentielle $\mathrm{b}x^{m}dxK^{p+1}$, en ſuppoſant connue l'intégrale de $\mathrm{a}x^{m}dxK^{p}$ qu'on nommera $\mathrm{a}A$; 1°. il faut préparer $\mathrm{b}x^{m}dxK^{p+1}$ en la réduiſant à $\mathrm{b}\overline{a + \mathrm{b}bx^{n}} \times x^{m}dxK^{p}$; ſe ſervir de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, dont on prendra la différentielle qui eſt

$$\left.\begin{array}{ll} & \overline{m+1}\,a + \overline{m+1}\,bx^{n} \\ & \qquad\qquad + \overline{p+1}\,nbx^{n} \\ \text{Il faut lui ajouter} & \\ \text{la différentielle} & \\ \text{donnée} & + \mathrm{a} \end{array}\right\} \times x^{m}dxK^{p}.$$

L'intégrale de cette différentielle totale ſera $x^{m+1}K^{p+1} + \mathrm{a}A$.

2°. Il faut ſuppoſer le premier terme de la différentielle totale $= 0$, ce qui donnera $\mathrm{a} = -\overline{m+1}\,a$; ſubſtituer cette valeur de (a) dans l'intégrale, & l'on aura $x^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1}\,aA$ pour l'intégrale du 2d terme $\overline{m+1} + \overline{p+1}\,n \times bx^{m+n}dxK^{p}$, le premier terme étant $= 0$. Il faut diviſer cette intégrale & ſa différentielle par le coéficient de la différentielle, & multiplier les quotiens par $\mathrm{b}b$, & l'on aura $\frac{\mathrm{b}x^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1}\,\mathrm{b}aA}{\overline{m+1} + \overline{p+1}\,n}$ pour l'intégrale du ſecond terme $\mathrm{b}bx^{m+n}dxK^{p}$ de la différentielle dont on cherche l'intégrale.

3°. Pour trouver l'integrale du premier terme $\mathrm{b}ax^m dxK^p$ de la même differentielle, il faut ſe ſervir de la même integrale $x^{m+1}K^{p+1}$, en prendre la differentielle qui eſt

lui ajouter le ſecond terme de la differentielle propoſée

$$\left.\begin{array}{r}\overline{m+1}\;a+\overline{m+1}\;bx^n\\ +\overline{p+1}\;nbx^n\\ \\ +\qquad \mathrm{b}bx^n\end{array}\right\}\times\ x^m dxK^p$$

L'integrale de cette differentielle totale ſera $x^{m+1}K^{p+1}+\frac{\mathrm{b}x^{m+1}K^{p+1}-\overline{m+1}\,\mathrm{b}aA}{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n}$. Il faut ſuppoſer le ſecond terme de cette differentielle totale $=0$, ce qui donnera $\mathrm{b}=-\overline{m+1}-\overline{p+1}\,n$; ſubſtituer cette valeur de b dans l'integrale précedente, & l'on aura $x^{m+1}K^{p+1}\frac{-\overline{\overline{m+1}-\overline{p+1}\,n}\times x^{m+1}K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\,n}$

$$+\frac{\overline{m+1}\,a\times+\overline{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n}\times A}{m+1+\overline{p+1}\,n}=\frac{\overline{\overline{m+1}\,a\times m+1+\overline{p+1}\,n\times A}}{m+1+\overline{p+1}\,n}.$$

$=\overline{m+1}\;a\times A$ pour l'integrale du 1^er^ terme $\overline{m+1}\,ax^m dxK^p$ de la differentielle totale précedente, ſon ſecond terme étant $=0$.

Il faut diviſer cette integrale & ſa differentielle par le coëficient de la même differentielle, & multiplier les quotiens par $\mathrm{b}a$, & l'on aura $\mathrm{b}aA$ pour l'integrale du premier terme $\mathrm{b}ax^m dxK^p$ de la differentielle propoſée.

4°. Il faut ajouter les deux integrales des deux termes de la differentielle propoſée, & l'on aura $\mathrm{b}aA+\frac{\mathrm{b}x^{m+1}K^{p+1}-\overline{m+1}\,\mathrm{b}aA}{\overline{m+1}+\overline{p+1}\,n}$ $=\frac{\overline{p+1}\,n\mathrm{b}aA+\mathrm{b}x^{m+1}K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\,n}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée $\mathrm{b}x^m dxK^{p+1}=\overline{\mathrm{b}a+\mathrm{b}bx^n}\times x^m dxK^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

29. Pour s'aſſurer que ces méthodes de la droite à la gauche & de la gauche à la droite ſe rapportent, il n'y a qu'à chercher, par la premiere, l'integrale de $\mathrm{a}x^m dxK^p$ qu'on a ſuppoſée égale à $\mathrm{a}A$ par l'integrale $\frac{\overline{p+1}\,n\mathrm{b}aA+bx^{m+1}K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\,n}$,

qu'on vient de découvrir par la derniere, de la differentielle $\mathrm{b}x^m dxK^{p+1} = \overline{\mathrm{b}a + \mathrm{b}bx^n} \times x^m dxK^p$, & l'on retrouvera a$A$; car employant l'integrale $x^{m+1}K^{p+1}$ dont la differentielle

eſt

lui ajoutant la differentielle

$$\left.\begin{array}{r} \overline{m+1}\,a+\overline{m+1}\,bx^n \\ +\overline{p+1}\,nbx^n \\ +\mathrm{b}a + \mathrm{b}bx^n \end{array}\right\}\times x^m dxK^p;$$

L'integrale de cette differentielle totale ſera $x^{m+1}K^{+1}$ $+\frac{\overline{p+1}\,n\mathrm{b}aA+bx^{m+1}K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\,n}$. Suppoſant le ſecond terme de la differentielle totale $= 0$, l'on aura $\mathrm{b} = -m-1-\overline{p-1}\,n$. Subſtituant cette valeur de b dans l'integrale précedente & dans le premier terme de ſa differentielle, l'on trouvera après avoir abregé, $-\overline{p+1}\,naA$ pour l'integrale du premier terme de la differentielle; qui ſe réduira à $-\overline{p+1}\,nax^m dxK^p$, car le ſecond terme $= 0$. Diviſant cette integrale & ſa differentielle par $-\overline{p+1}\,na$, & multipliant les quotiens par a, l'on trouvera a$A$ pour l'integrale de a$x^m dxK^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

730. Il eſt évident que l'integrale d'une ſeule differentielle, laquelle on voudra, de la ſuite infinie du ſecond Problême où l'expoſant $p$ augmente ou diminue par ordre d'une unité, étant donnée, quand $K$ eſt un binome; on peut trouver par ces deux méthodes les integrales de toutes les autres.

## POUR LES TRINOMES.

731. LEs integrales, qu'on nommera a$A$, $fF$ des deux differentielles a$x^m dxK^p$, $fx^{m+n}dxK^p$ (dans leſquelles $K$ doit avoir le même expoſant $p$) étant ſuppoſées connues, on peut trouver l'integrale de laquelle on voudra des quatre differentielles $x^m dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{p-1}$, $x^{m+3n}dxK^{p-1}$, dans leſquelles l'expoſant $p-1$ de la grandeur trinome $K$ eſt le même, & d'une unité moindre que l'expoſant $p$ des deux differentielles données dont les integrales a$A$, $fF$ ſont ſuppoſées connues.

Pour cela, 1°. il faut préparer les deux differentielles données, les multipliant chacune par la valeur de $K = a + bx^n + cx^{2n}$, & les diviſant en même temps par $K$, & elles deviendront $\overline{\mathrm{a}a + \mathrm{a}bx^{n} + \mathrm{a}cx^{2n}} \times x^{m}dxK^{p-1}$, $\overline{fax^{n} + fbx^{2n} + fcx^{3n}} \times x^{m}dxK^{p-1}$, ſans changer de valeur.

2°. Il faut ſe ſervir des deux integrales $gx^{m+1}K^{p}$, $hx^{m+n+1}K^{p}$, en prendre les differentielles qui ſont

$$\left.\begin{array}{llll}
\overline{m+1}\,ga & +\overline{m+1}\,gbx^{n} & +m+1\,gcx^{2n} & \\
 & +pngbx^{n} & +2pngcx^{2n} & \\
 & +\overline{m+n+1}\,hax^{n} & +\overline{m+n+1}\,hbx^{2n} & +\overline{m+n+1}\,hcx^{3n} \\
 & & +pnhbx^{2n} & +2pnhcx^{3n} \\
 & & & \\
+\mathrm{a}a & +\mathrm{a}bx^{n} & +\mathrm{a}cx^{2n} & \\
 & +fax^{n} & +fbx^{2n} & +fcx^{3n}
\end{array}\right\} \times x^{m}dxK^{p-1};$$

Il faut leur ajouter les deux differentielles préparées.

L'integrale de cette differentielle totale eſt par la ſuppoſition $\mathrm{a}A + fF + gx^{m+1}K^{p} + hx^{m+n+1}K^{p}$.

3°. Pour trouver à preſent l'integrale de laquelle on voudra des quatre differentielles $x^{m}dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{1-p}$, $x^{m+3n}dxK^{p-1}$, qui ſont comme les inconnues qui diſtinguent les quatre termes de la differentielle totale ; il faut ſuppoſer les trois autres termes égaux chacun à zero, & non pas le terme où eſt la differentielle dont on veut trouver l'integrale.

Par exemple pour trouver l'integrale de la differentielle $x^{m+n}dxK^{p-1}$, il faut ſuppoſer le premier terme, le troiſiéme & le quatriéme de la differentielle totale chacun égal à zero, ce qui réduira la differentielle totale au ſeul ſecond terme : L'équation du premier terme donnera $\mathrm{a} = -m-1\,g$, celle du quatriéme donnera $f = -\overline{m-n-1-2pn} \times h$. Subſtituant ces valeurs de a & de $f$ dans la troiſiéme, on trouvera $h = \frac{2gc}{b}$.

Il faut ſubſtituer ces valeurs de a, $f$, $h$ dans le ſecond terme de la differentielle totale qui eſt demeuré ſeul, & dans l'integrale de la differentielle totale, & par ces ſubſtitutions on aura $-\overline{m-1}\,gA - \overline{m-n-1-2pn} \times \frac{2gc}{b}F + gx^{m+1}K^{p} + \frac{2gc}{b}x^{m+n+1}K^{p}$ pour l'integrale de cette differentielle $\frac{pngbb-4pngac}{b}x^{m+n}dxK^{p-1}$. Enfin il faut diviſer cette integrale & ſa differentielle par le coëficient de la differentielle, & l'on aura $\frac{bgx^{m+1}K^{p}+2gcx^{m+n+1}K^{p}-\overline{m-1}bgA\overline{-m-n-1-2pn}\times 2gcF}{pngbb-4pngac}$ pour l'integrale de la differentielle $x^{m+n}dxK^{p-1}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

## REMARQUES.

### I.

732. L'On peut trouver de la même maniere les integrales de $x^{m}dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{p-1}$, & $x^{m+3n}dxK^{p-1}$; & l'on trouvera par la même méthode avec les integrales de $x^{m}dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, les integrales de $x^{m}dxK^{p-2}$, $x^{m+n}dxK^{p-2}$; & avec celles-ci, les integrales de $x^{m}dxK^{p-3}$, $x^{m+n}dxK^{p-3}$; & ainſi de ſuite à l'infini. On trouvera auſſi les integrales des differentielles où l'expoſant $p$ augmente de ſuite d'une unité, comme de $x^{m}dxK^{p+1}$, $x^{m}dxK^{p+2}$, &c. en ſuppoſant pour la premiere les integrales connues de $x^{m}dxK^{p}$, $x^{m+n}dxK^{p}$, & trouvant par leur moyen celles de $x^{m}dxK^{p+1}$, $x^{m+n}dxK^{p+1}$, & enſuite, par celles-ci, on trouvera les integrales de $x^{m}dxK^{p+2}$; &c. comme dans les binomes.

### II.

733. Quand on a trouvé par ce ſecond Problême les integrales des quatre differentielles $x^{m}dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{p-1}$, $x^{m+3n}dxK^{p-1}$, on peut trouver par le premier Problême toutes les autres differentielles de la *ſuite* infinie, où l'expoſant $p-1$ demeurant le même, les expoſans de $x$ vont en augmentant de ſuite, ou en diminuant d'une $n$, ce qu'il faut auſſi entendre de chaque autre *ſuite* où l'expoſant $p-2$, ou $p-3$, ou $p+1$, ou $p+2$, &c. demeure le même, n'y ayant de changement que dans les expoſans $n$ de la changeante $x$ hors du ſigne qui augmentent ou diminuent de ſuite de $1n$.

### III.

734. La differentielle generale peut être compoſée de pluſieurs grandeurs complexes ſous differens ſignes, multipliées les unes par les autres, par exemple $x^{m+rn}dxK^{p+s}l^{q+t}$, où $K=a+bx^{n}+cx^{2n}$, &c. $l=e+fx^{n}+gx^{2n}+$ &c. & de plus $r, s, t$ repréſentent chacune de ſuite tous les nombres entiers poſitifs & négatifs y comprenant zero & l'unité. Or pourvû

qu'on ait les integrales données d'autant de differentielles de ſuite compriſes dans cette expreſſion generale, qu'il y a des termes moins deux dans les deux grandeurs complexes, c'eſt-à-dire, deux, quand les deux grandeurs complexes ſont chacune un binome; trois, quand l'une eſt binome & l'autre trinome; quatre, quand les deux ſont trinomes, & ainſi de ſuite; on pourra toujours par le premier & le ſecond Problême trouver les integrales de toutes les autres differentielles compriſes dans la differentielle generale, c'eſt-à-dire dans leſquelles $m$, $n$, $p$, $q$, ont les mêmes valeurs, & qui ne different entr'elles que par les nombres entiers poſitifs ou négatifs que peuvent repréſenter $r$, $s$, $t$.

### SUPPOSITION OU DEMANDE.

35. ON a déja dit qu'une differentielle quelconque $dx \times x^m \times \overline{a + bx^n + cx^{2n}}^p$ + &c. où il n'y a qu'une changeante, pouvoit être regardée comme l'élement de l'aire d'une courbe dont la coupée eſt la changeante $x$, l'ordonnée eſt $x^m \times \overline{a + bx^n}^p$ + &c. & la differentielle eſt le produit de l'ordonnée par la difference $dx$ de la coupée. Quand les élemens de l'aire de deux courbes ſont égaux, les aires de ces courbes ſont égales.

### DE'FINITION.

36. LE changement d'une differentielle en une autre dont l'integrale ſera égale à l'integrale de la premiere, s'appellera *la transformation* des differentielles comme auſſi des courbes & la ſeconde ſe nommera la *transformée* de la premiere.

## PROBLÊME III.

### SUR LA TRANSFORMATION DES DIFFERENTIELLES ET DES COURBES.

37. *UNE differentielle étant donnée, la transformer en telle autre qu'on voudra qui ſoit l'élement de l'aire d'une courbe égale à l'aire de la premiere.*

### RESOLUTION.

IL n'y a qu'à prendre une nouvelle changeante $u$ en tel raport que l'on voudra avec la changeante $x$ qui eſt la coupée dans la differentielle donnée, & ſuppoſer qu'elle eſt la coupée de la courbe transformée ; trouver la valeur de la premiere coupée $x$, & de la premiere ordonnée, exprimées par la nouvelle changeante $u$ de la ſeconde coupée ; prendre la difference de cette nouvelle coupée $u$, & faire une proportion dont la differentielle $du$ de la nouvelle coupée ſoit le premier terme, la difference $dx$ de la premiere coupée $x$ & ſon ordonnée exprimées par la nouvelle changeante $u$, le ſecond & le troiſiéme terme, & le quatrieme terme ſera l'ordonnée de la transformée ; car le produit des extrêmes ſera l'élement de l'aire de la transformée, & le produit des moyens eſt l'élement de la propoſée.

On a par exemple la differentielle $\frac{ax^{n-1}dx}{a+bx^{n}}$, qu'il faut regarder comme l'élement de l'aire d'une courbe dont $x$ eſt la coupée, & $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^{n}}$ l'ordonnée. On la transformera en une autre courbe dont l'aire ſoit égale à la premiere, & dont la coupée ſoit $u$, en ſuppoſant que $x^{n} = u$ eſt le raport de la premiere coupée à la ſeconde ; ce qui donnera $x = u^{\frac{1}{n}}$; $x^{n-1} = u^{1-\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$; & $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^{n}} = \frac{au^{1-\frac{1}{n}}}{a+bu}$. On fera enſuite cette proportion $du . dx \left(\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du\right) :: \frac{ax^{n-1}}{a+bx^{n}} \left(\frac{au^{1-\frac{1}{n}}}{a+bu}\right) . \frac{a}{n\times\overline{a+bu}}$; ce quatriéme terme ſera l'ordonnée de la transformée, puiſque l'élement de cette derniere, qui eſt le produit des extrêmes, eſt égal à celui de la premiere, qui eſt le produit des moyens ; & $\frac{a}{n\times\overline{a+bu}} du$ ſera l'élement de l'aire de la transformée ; & l'aire S. $\frac{a}{n\times\overline{a+bu}} du$ de la transformée ſera égale à l'aire S. $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^{n}} dx$ de la propoſée.

738. On peut auſſi (ce qui abrege ſouvent le calcul) faire la proportion en mettant pour premier terme la difference $du$ de la nouvelle coupée exprimée par la changeante $x$ ; pour ſecond & troiſiéme terme, la differentielle $dx$, & l'ordonnée $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^{n}}$, & le quatriéme terme qui en viendra ſera l'ordon-

née de la transformée, qu'il faudra exprimer enſuite par la changeante $u$.

Dans notre exemple, où $u = x^n$, la proportion ſera $du = nx^{n-1} dx . dx :: \frac{ax^{n-1}}{a+bx^n} . \frac{a}{n \times \overline{a+bx^n}}$. Subſtituant $u$ à la place de $x^n$, l'ordonnée de la transformée ſera $\frac{a}{n \times \overline{a+bu}}$, & la differentielle transformée ſera $\frac{a}{n \times \overline{a+bu}} du$.

Mais $\frac{a}{n \times \overline{a+bu}} du = \frac{1}{n} \times \frac{a}{a+bu} du$ (en ſuppoſant que (a) eſt le quarré de l'hyperbole équilatere, c'eſt-à-dire que $a = AG \times KG$ (fig. 47; ) que $b = 1$; $a = KF$; $u = FI$,) eſt l'élement * du quadrilatere hyperbolique $FIif$ multiplié par $\frac{1}{n}$, & $\frac{1}{n} \times$ S. $\frac{a}{a+bu} du$ eſt ce quadrilatere même ſuppoſé connu. Ainſi l'integrale de la differentielle priſe pour exemple $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^n} dx$, eſt égale à l'eſpace hyperbolique entre les aſymptotes $FIif$ de l'hyperbole équilatere multiplié par $\frac{1}{n}$.

FIGURE XLVII.

* 601.

L'on peut enſuite faire une table où ſoient toutes marquées les integrales des differentielles $\frac{bx^{2n-1}}{a+bx^n} dx$; $\frac{cx^{3n-1}}{a+bx^n} dx$, &c. qu'on trouvera facilement par le premier Problême *, ou par les formules des articles 694 & 695, en ſuppoſant connue la quadrature de l'aire hyperbolique S. $\frac{a}{a+bu} du$.

* 721, 722. & les ſuiv.

## COROLLAIRE.

397. ON peut par le moyen de ce troiſiéme Problême faire en ſorte que les expoſans de la nouvelle changeante $u$ dans les termes de la grandeur complexe de la differentielle transformée, ſoient en telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, & qu'ils y ſoient même négatifs.

Par exemple on peut raporter les differentielles particulieres à ces expreſſions generales; 1^re^. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n} + \&c.}^p$ 2^e^. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n} + \&c.} \times \overline{e+fx^n+gx^{2n} + \&c.}^p$ 3^e^. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^n + \&c.} \times \overline{e+fx^n+gx^{2n}}^p \times \overline{h+ix^n+Kx^{2n}}^q + \&c.$ Pour faire en ſorte que dans les termes des grandeurs complexes des transformées les expoſans de $u$ ſoient en une telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, que l'on pourra marquer par $l$, $2l$, $3l$, &c. en donnant à $l$ telle grandeur que l'on voudra, il n'y a qu'à ſuppoſer $x^n = u^l$, $u$ marque la nouvelle coupée ; cela donnera $u = x^{\frac{n}{l}}$, & $du = \frac{n}{l} x^{\frac{n}{l} - 1} dx$ ; on fera enſuite la proportion dont $du\left(\frac{n}{l} x^{\frac{n}{l} - 1} dx\right)$ ſera le premier terme, $dx$ le ſecond ; l'ordonnée $x^m \times \overline{a + bx^n}^p$ + &c. le troiſiéme terme ; le quatriéme terme ſera $\frac{l}{n} x^{m - \frac{n}{l} + 1} \times \overline{a + bx^n}^p$ + &c. on ſubſtituera dans le quatriéme terme la valeur de $x$ en $u$, & l'on aura $\frac{l}{n} u^{\frac{lm + l - n}{n}} \times \overline{a + bu^l + cu^{2l}}^p$ + &c. pour l'ordonnée de la transformée, & $\frac{l}{n} u^{\frac{lm + l - n}{n}} du \times \overline{a + bu^l + cu^{2l}}^p$ + &c. pour la differentielle transformée. On trouvera de même les differentielles transformées de la ſeconde & troiſiéme differentielle, en mettant $u$ à la place de $x$, & $\frac{lm + l - n}{n}$ à la place de $m$, & $l$ à la place de $n$.

Pour rendre négatifs les expoſans $n$ des termes des grandeurs complexes de trois differentielles generales, il n'y a qu'à ſuppoſer $\frac{1}{x} = x^{-1} = u$, ce qui donnera $du = - x^{-2} dx$ ; $x^m = u^{-m} = \frac{1}{u^m}$ ; $x^n = u^{-n}$ ; & en faiſant la proportion, dont le premier terme ſera $du = - x^{-2} dx$ ; le ſecond, $dx$ ; le troiſiéme, l'ordonnée de chacune des trois differentielles ; le quatriéme terme ſera l'ordonnée de la transformée, dans laquelle mettant la valeur de $x$ en $u$, on trouvera $- u^{-m-2} \times \overline{a + bu^{-n} + cu^{-2n}}^p$ + &c. & la differentielle transformée ſera $- u^{-m-2} du \times \overline{a + bu^{-n}}^p$ + &c. Il n'y a qu'à mettre dans la ſeconde & la troiſiéme differentielle generale $- m - 2$ à la place de $m$, & $- n$ à la place de $n$ ; & l'on aura les transformées.

Sans changer la valeur des transformées, on peut rendre poſitifs les expoſans négatifs $- n$ qui ſont ſous le ſigne, en ſuppoſant que l'indéterminée $r$ marque le nombre qui multiplie $n$ dans le dernier terme de la grandeur complexe, ſçavoir 1 dans les grandeurs binomes, 2 dans les trinomes, 3 dans les quatrinomes, &c. & l'on aura $- \frac{1}{u^{m + rnp + 2}} du \times \overline{au^{rn} + bu^{rn - n} + cu^{rn - 2n}}^p$ + &c. pour la transformée de la

premiere

premiere différentielle générale ; $-\frac{1}{u^{m+rnp+sn+2}}du\times\overline{au^{sn}+bu^{sn-n}+cu^{sn-2n}}+$ &c. $\times\overline{eu^{rn}+fu^{rn-n}+gu^{rn-2n}}^{p}$ + &c. pour la transformée de la ſeconde différentielle générale ; $-\frac{1}{u^{m+rnp+snq+2}}du\times\overline{au^{rn}+bu^{rn-n}+cu^{rn-2n}}^{p}$ + &c. $\times\overline{eu^{sn}+fu^{sn-n}+gu^{sn-2n}}^{q}$ + &c. pour la transformée de la troiſiéme différentielle générale ; $s$ dans la ſeconde & troiſiéme différentielle marque le nombre entier qui multiplie l'expoſant $u$ de la plus haute puiſſance de $u$ dans la ſeconde grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne 1 dans la ſeconde, & ſous le ſigne $q$ dans la troiſiéme différentielle.

40. On remarquera que quand on rend ainſi les expoſans $n$ négatifs, l'on trouve une ordonnée négative, ce qui marque que l'aire de la courbe transformée eſt du côté des ordonnées négatives ; & ſi la coupée de la propoſée & celle de la transformée ſont une même ligne, & que l'aire de la premiére ſoit ſur la coupée depuis ſon origine, l'aire de la transformée égale à l'aire de la premiére, ſera ſur le prolongement de la coupée de la premiére courbe.

## REMARQUES.

### I.

*Où l'on explique l'uſage des trois Problèmes qui précédent.*

41. CES trois Problêmes ſervent à réduire l'intégrale d'une différentielle qui n'a qu'une même changeante, qu'on ne peut pas trouver exacte par les méthodes de la premiére ſection, & qui eſt l'élement d'une courbe compoſée, à être finie par la ſuppoſition des rectifications ou des quadratures données des ſections coniques quand cela ſe peut, ou du moins d'autres courbes plus ſimples que celles dont la différentielle eſt l'élement. Pour le faire concevoir clairement, on prendra la différentielle $x^9dx\times\overline{a+bx^4}^{\frac{5}{2}}$ repréſentée par $x^m dx\times\overline{a+bx^n}^{p}$ ; ainſi $m=9$, $n=4$, $p=\frac{5}{2}$. 1°. Il faut lui trouver par le troiſiéme Problême une transformée, où l'expoſant de $u$ ſous le ſigne, ſoit 2, & l'on trouvera que ſa transformée eſt $\frac{1}{2}u^4du\times\overline{a+bu^2}^{\frac{5}{2}}$. Or l'élement de l'aire de l'hyperbole équilatere eſt * (8) $du\times\overline{aa+uu}^{\frac{1}{2}}$ ; ainſi ſup- * 698.

poſant que $a$ de la transformée eſt égale à $aa$ de l'élement de l'hyperbole, & que $b=1$; il faut, 2°. par le premier Problême, ou par les formules 694 & 695, trouver, cet élement de l'hyperbole ſuppoſé connu, les intégrales de $u^2du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$, de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$. 3°. Il faut trouver par le ſecond Problême avec l'intégrale de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$, l'intégrale de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}+1}$, & enſuite de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}}$, & multiplier cette derniére par le coéficient $\frac{1}{2}$ de la transformée, & ce ſera l'intégrale ou l'aire de la transformée qui eſt égale à l'aire de la propoſée.

## I I.

742. On peut par le moyen du premier & du troiſiéme Problême, comme auſſi par les formules des art. 694, 695, faire des tables (comme on l'a fait voir à la fin du troiſiéme Problême) où ſoient toutes formées les intégrales des différentielles dont la grandeur complexe binome ou trinome a le ſigne $p=\frac{1}{2}$, & qui ſont finies en ſuppoſant la quadrature des ſections coniques. On voit des tables de cette ſorte à la fin du Traité *de la quadrature des courbes* de Mr Newton; & quand on trouvera une différentielle que l'on pourra réduire à quelqu'une de celles des tables, on en aura l'intégrale par le moyen de ces tables: & quand le ſigne $p$ de la grandeur complexe des différentielles que l'on trouvera dans la réſolution des Problêmes, ſera plus élevé que le ſigne $\frac{1}{2}$, mais qui pourra s'y réduire en le diminuant ou l'augmentant ſucceſſivement d'une unité, on pourra achever de trouver les intégrales de ces différentielles par le ſecond Problême.

## I I I.

### *Où l'on fait voir l'étendue du troiſiéme Problême.*

743. Le troiſiéme Problême de la transformation des differentielles & des courbes eſt de grand uſage dans la réſolution des Problêmes; 1°. il peut ſervir pour trouver une infinité de valeurs approchées des intégrales de toutes les différentielles dont on ne peut trouver les intégrales exactes; car il eſt évident que l'on peut trouver un grand nombre de differentielles transformées de ces différentielles; & choiſiſſant les

plus ſimples, comme auſſi celles qui donneront des *ſuites* où les termes aillent le plus en diminuant, on pourra trouver par les méthodes du Problême de l'art. 175, dont on a fait voir l'application dans la derniére ſection de la ſeconde Partie, les intégrales approchées de ces transformées, leſquelles ſeront auſſi les intégrales des différentielles dont elles ſont les transformées.

744. 2°. Il peut ſervir à réduire tout d'un coup des différentielles fort compoſées, ou qui appartiennent à des courbes des genres bien élevés, à des différentielles qui ſoient les élémens de la quadrature des courbes les plus ſimples, & cela de beaucoup de façons, que l'on ne peut apprendre qu'en faiſant ſoi-même beaucoup d'uſage de ce Problême. On en mettra ſeulement ici quelques exemples pour faire entrer les Lecteurs qui commencent dans ces uſages.

La différentielle négative $\frac{-8r^5xx}{\overline{rr+xx}^3}dx$, qu'on peut regarder comme l'élément d'une quadrature de courbe dont $x$ eſt la coupée, $dx$ la différence de la coupée, & $\frac{8r^5xx}{\overline{rr+xx}^3}$ l'ordonnée peut ſe réduire tout d'un coup à la quadrature ſuppoſée de l'aire du demi-cercle S. $du \times \sqrt{2ru-uu}$, en ſuppoſant pour trouver la transformée, que $xx = \frac{2r^3-rru}{u}$; ce qui donnera $x = \frac{r}{u}\sqrt{2ru-uu}$; $dx = \frac{-rr}{u\sqrt{2ru-uu}}du$; & l'ordonnée $-\frac{8r^5xx}{\overline{rr+xx}^3} = -\frac{2ruu+u^3}{rr}$; & faiſant enſuite la proportion du troiſiéme Problême, $du \,.\, dx \left(\frac{-rrdu}{u\sqrt{2ru-uu}}\right) :: \frac{-8r^5xx}{\overline{rr+xx}^3} \left(\frac{-2ruu+u^3}{rr}\right) . \frac{2ru-uu}{\sqrt{2ru-uu}} = \sqrt{2ru-uu}$, on aura $du\sqrt{2ru-uu}$ pour la différentielle transformée de la propoſée; & S. $du \times \sqrt{2ru-uu}$ exprimera l'aire du cercle.* * 602.

La différentielle $\frac{a}{x} \times dx\sqrt{a+bx^n}$, dans laquelle $dx$ ſera regardée comme la différence de la coupée $x$, & $\frac{a}{x}\sqrt{a+bx^n}$ comme l'ordonnée, peut ſe réduire à la quadrature ſuppoſée de l'hyperbole ou de l'ellipſe S. $-du \times \sqrt{b+auu}$, en ſuppoſant pour trouver la transformée, que $\frac{1}{x^n}$ ou $x^{-n} = uu$;

ce qui donnera $x^{-\frac{1}{2}n} = u$; $x^{\frac{1}{2}n} = u^{-1}$; $x^{n} = u^{-2}$; $du = -\frac{1}{2}nx^{-\frac{1}{2}n-1}dx$; & faiſant la proportion $du (-\frac{1}{2}nx^{-\frac{1}{2}n-1}dx) . dx :: ax^{-1} \times \sqrt{a+bx^{n}} . \frac{2a}{-n}x^{\frac{1}{2}n} \times \sqrt{a+bx^{n}}$; & ſubſtituant dans le dernier terme la valeur de $x$ en $u$, on aura $\frac{2a}{-n}u^{-2} \times \sqrt{b+auu}$; & multipliant par $du$, on aura la transformée $\frac{2a}{-n}u^{-2}du \times \sqrt{b+au^{2}}$. Or en ſuppoſant connue S. $-du \times \sqrt{b+au^{2}}$, ou trouvera par le premier Problême l'intégrale de $\frac{2a}{-n}u^{-2}du \times \sqrt{b+au^{2}}$, qui ſera égale à l'intégrale de la propoſée.

Si la différentielle propoſée $ax^{-1}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{\frac{1}{2}}$ avoit eu pour expoſant du ſigne un autre nombre $p$ plus grand que $\frac{1}{2}$, on auroit pu ſuppoſer cet expoſant $= \frac{1}{2}$, & après avoir trouvé, comme on le vient de marquer, l'intégrale de $ax^{-1} \times \overline{a+bx^{n}}^{\frac{1}{2}}$, on trouveroit par le ſecond Problême, avec cette intégrale ſuppoſée, celle de $ax^{-1}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{p}$; pourvu que l'expoſant $p$ ſe puiſſe réduire à $\frac{1}{2}$, en augmentant ou diminuant $p$ d'un nombre entier quelconque.

745. 3°. Toutes les différentielles, comme $adx \times \overline{a+bx^{n}}^{-\frac{1}{2}}$, ayant deux parties, ſçavoir la différence $dx$ de la changeante $x$, & $a \times \overline{a+bx^{n}}^{-\frac{1}{2}}$; il eſt évident que pourvu que la premiére & la ſeconde partie d'une différentielle ſoient les extrêmes d'une proportion, & la premiére & la ſeconde partie d'une autre différentielle en ſoient les moyens; l'une de ces différentielles ſera toujours égale à l'autre; & par conſéquent l'une ſera la transformée de l'autre, & l'intégrale de l'une ſera égale à l'intégrale de l'autre. Or une différentielle peut-être l'élément de l'aire d'une courbe de différentes maniéres, par exemple une différentielle peut exprimer le rectangle infiniment petit, dont l'ordonnée eſt le plus long côté, & la différentielle $dx$ de la coupée $x$ eſt la baſe infiniment petite; une différentielle peut auſſi exprimer le triangle infiniment petit, qui eſt l'élément de l'aire d'une courbe, dont les ordonnées partent d'un même point; elle peut de même exprimer le quadrilatére infini-

ment petit, qui eſt l'élément de l'aire d'une courbe qui peut être conçue partagée en quadrilatéres infiniment petits, & ainſi de tous les autres élémens de l'aire des courbes, quelque figure que puiſſent avoir ces élémens. Cela ſuppoſé, le Problême de la transformation des différentielles & des courbes n'eſt pas borné à transformer une courbe dont les élémens ſont des rectangles ou des parallelogrammes infiniment petits, c'eſt-à-dire, dont les ordonnées ſont paralléles en une autre dont l'aire ſera égale à l'aire de la premiére, & qui aura auſſi ſes ordonnées paralléles; mais il ſert encore à transformer les courbes dont les ordonnées ſont paralléles en d'autres où elles partent d'un même point, ou dont les élémens de l'aire auront telle figure que l'on voudra, & à transformer les courbes dont les ordonnées partent d'un même point en d'autres qui auront les aires égales à l'aire de la premiére, & dont les ordonnées partiront auſſi d'un même point, ce qui fait voir la grande étendue du troiſiéme Problême: on en mettra ſeulement un exemple.

Par exemple on peut donner pour transformée à la différentielle $ax^{\frac{1}{2}n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-1}$, la différentielle $\frac{-2}{n}du \times \frac{a}{\sqrt{\overline{ab-abuu}}}$, qui eſt l'élément d'un ſecteur d'ellipſe $du \times \frac{x}{\sqrt{\overline{ab-abu^2}}}$, dont le ſommet eſt au centre de l'ellipſe, multiplié par $\frac{-2}{n}$, en ſuppoſant $\sqrt{\frac{a}{a+bx^n}} = u$; ce qui donnera $du = \frac{-anbx^{n-1}dx}{2\times\overline{a+bx^n}^2} \times \left.\overline{\frac{a}{a+bx^n}}\right|^{-\frac{1}{2}}$; $a+bx^n = \frac{a}{u^2}$; $x^n = \frac{a-au^2}{bu^2}$; $x^{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{u} \times \sqrt{\frac{a-au^2}{b}} = \frac{1}{bu}\sqrt{\overline{ab-abu^2}}$: Faiſant enſuite la proportion du 3^e^ Problême $du\left(\frac{-anbx^{n-1}dx}{2\times\overline{a+bx^n}^2} \times \left.\overline{\frac{a}{a+bx^n}}\right|^{-\frac{1}{2}}\right) . dx :: \frac{ax^{\frac{1}{2}n-1}dx}{a+bx^n} . -\frac{2\times\overline{a+bx^n}}{nbx^{\frac{1}{2}n}} \times \left.\overline{\frac{a}{a+bx^n}}\right|^{\frac{1}{2}}$; & ſubſtituant dans le 4^e^ terme la valeur de $\left.\overline{\frac{a}{a+bx^n}}\right|^{\frac{1}{2}} = u$, & celle de $a+bx^n$, & celle de $x^{\frac{1}{2}n}$, & multipliant par le premier terme $du$ la quantité qui naîtra des ſubſtitutions, l'on aura

la différentielle transformée $\frac{-2}{n} du \times \frac{a}{\sqrt{ab - abu^2}} = \frac{-4}{n} \times$
* 608. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$. Or $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$ eſt la valeur * d'un ſecteur elliptique infiniment petit dont le ſommet eſt au centre de l'ellipſe ; ainſi l'intégrale de la transformée ſera égale à l'aire du ſecteur entier S. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$, multipliée par $\frac{-4}{n}$. Ce ſera auſſi l'intégrale de la propoſée qu'on a réduite à la quadrature ſuppoſée d'un ſecteur d'ellipſe.

Si l'on veut avoir le grand axe de cette ellipſe avec ſon paramétre, (ce qui ſuffit pour la décrire par l'article 361,) & l'expreſſion de ſon ordonnée, il faudra ſuppoſer l'élément d'un ſecteur d'ellipſe, qu'on a trouvé dans l'article 608, $= \frac{aapdu}{2\sqrt{2a^3p - 2apuu}}$, en nommant $2a$ le grand axe, $p$ ſon parametre, & $\sqrt{\frac{aap - puu}{2a}}$ l'ordonnée ; il faudra, dis-je, ſuppoſer cet élément égal à l'élément $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$ ; ou bien, pour ôter l'équivoque que cauſeroit $a$ priſe différemment, on nommera $2r$ le grand axe de l'ellipſe, & l'on aura $\frac{rrpdu}{2\sqrt{2r^3p - 2rpuu}} = \frac{adu}{2\sqrt{ab - abuu}}$ ; & prenant $2r$ & $p$ pour deux indéterminées, il faudra en trouver les valeurs exprimées par $a$ & $b$, par le moyen de l'équation précédente, & l'on aura d'abord $ppr^4 \times \overline{ab - abuu} = aa \times \overline{2pr^3 - 2pruu}$, qui ſe réduit à $abpr^3 - abpr^3uu = 2aarr - 2aauu$ ; & ſuppoſant $abpr^3 = 2aarr$, & $abpr^3uu = 2aauu$, la premiére équation donnera $p = \frac{2a}{br}$, & la ſeconde $p = \frac{2aa}{abr^3} = \frac{2a}{br}$ ; par conſéquent $rr = \frac{a}{a}$ ; ainſi la moitié du grand axe de l'ellipſe dont on a trouvé l'élément, eſt $r = \sqrt{\frac{a}{a}}$ ; mettant cette valeur de $r$ dans $p = \frac{2a}{br}$, on trouvera $p = \frac{2a}{b\sqrt{\frac{a}{a}}} = \frac{2\sqrt{aa}}{b}$, qui eſt la valeur du paramétre de la même ellipſe : mettant ces valeurs de $r$ & de $p$ dans l'ordonnée indéterminée de l'ellipſe $\sqrt{\frac{prr - puu}{2r}}$, on trouvera $\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a}{b}uu}$ pour l'ordonnée de la même ellipſe dont le ſecteur S. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abuu}}$ multiplié par $\frac{-4}{n}$, eſt la valeur de l'intégrale de la différentielle propoſée, & dont la coupée eſt $u$.

On peut avec cette intégrale ſuppoſée trouver par le premier Problême les intégrales des différentielles $\frac{bx^{\frac{3}{2}n-1}dx}{a+bx^n}$, $\frac{cx^{\frac{5}{2}n-1}dx}{a+bx^n}$, $\frac{dx^{\frac{7}{2}n-1}dx}{a+bx^n}$, &c. & les mettre dans une table à côté de leurs différentielles : & ſi l'on avoit d'autres différentielles ſemblables, où l'expoſant du ſigne $p$ de la grandeur complexe $\overline{a+bx^n}^{-r}$ fût un nombre entier poſitif ou négatif différent de l'unité négative — 1, qui eſt l'expoſant de la grandeur complexe des différentielles précédentes, il eſt évident que l'on en trouveroit les intégrales par le ſecond Problême par le moyen des intégrales ſuppoſées des différentielles précédentes; & l'on pourroit auſſi mettre ces intégrales à côté de leurs différentielles dans une table.

46. 4°. On peut par le même Problême donner à la différentielle $\frac{adx}{bb+xx}$, la transformée $\frac{-a\times du}{2\sqrt{u-bbnn}}$ (qui eſt l'élément d'un ſecteur de cercle* où $bb$ eſt pris pour l'unité arbitraire * 607.
qui eſt auſſi le diametre du cercle, ) en ſuppoſant $x = \sqrt{\frac{1}{u}-bb}$; car on aura $du$ $\left(\frac{2xdx}{\overline{-xx+bb}^2}\right)$. $dx :: \frac{a}{bb+xx} \cdot \frac{a\times\overline{-xx+bb}^2}{2x\times\overline{bb+xx}}$ = (en ſubſtituant la valeur de $x$) $\frac{-a}{2\sqrt{u-bbuu}}$; & multipliant ce 4e terme par le premier $du$, on aura $-a\times\frac{du}{2\sqrt{u-bbuu}}$, qui eſt l'élément d'un ſecteur de cercle multiplié par la conſtante $-a$, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{4}$ dans la ſuppoſition qu'on prend $b$ pour l'unité arbitraire, & de plus pour le diamétre.

47. 5°. Enfin il pourra quelquefois arriver que le troiſiéme Problême de la transformation des différentielles ou des courbes, fera trouver une différentielle transformée qui aura une intégrale exacte, ou une courbe transformée, dont la quadrature ſera exacte, d'une différentielle propoſée, ou d'une courbe propoſée dont on ne peut pas avoir l'intégrale ou la quadrature exacte par les méthodes des intégrales.

## REMARQUE IV.

*Où l'on explique une méthode particuliére pour trouver les intégrales finies des différentielles qui ſe peuvent réduire à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole équilatére.*

748. OUTRE les méthodes générales pour trouver par les quadratures, ou par les rectifications ſuppoſées des courbes les plus ſimples, les intégrales finies des différentielles dont on ne peut pas les trouver exactes, contenues dans les trois Problêmes précédens, & dans les formules des articles 694 & 695, il y en a de particuliéres pour les différentielles dont la quantité complexe (qui eſt ſous le ſigne dont l'expoſant eſt $p$, qu'on ſuppoſe ici égal à $\pm\frac{1}{2}$,) multipliée par $dx$ & par quelque conſtante, eſt l'expreſſion de l'élément de la quadrature d'une des ſections coniques. On mettra ſeulement ici une de ces méthodes pour les différentielles qui contiennent l'élément de la quadrature du cercle ou celle de l'hyperbole équilatére $adx \times \overline{aa \mp x^2}^{\pm\frac{1}{2}}$, ou $adx \times \overline{2ax \mp x^2}^{\pm\frac{1}{2}}$, appliquée à un exemple.

Quand une différentielle eſt le produit d'une grandeur complexe ou incomplexe hors du ſigne par $dx \times \overline{aa \mp xx}^{\pm\frac{1}{2}}$, ou par $dx \times \overline{2ax \mp xx}^{\pm\frac{1}{2}}$, comme $\overline{2ax - xx} \times dx \times \sqrt{2ax - xx}$; 1°. ſi l'expoſant $\frac{1}{2}$ eſt poſitif, c'eſt-à-dire ſi la quantité qui eſt ſous le ſigne ſe trouve au numérateur, il faut la réduire au dénominateur en multipliant le numérateur & le dénominateur 1 de la différentielle par $\sqrt{2ax - x^2}$, & l'on aura $\frac{\overline{x^4 - 4ax^3 + 4aaxx} \times dx}{\sqrt{2ax - xx}}$: Quand la quantité incommenſurable eſt déja au dénominateur, cette préparation eſt inutile.

2°. Il faut multiplier le numérateur & le dénominateur par $x$ ou par une puiſſance de $x$ qui ſoit telle que l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ hors du ſigne, ſoit moindre d'une unité que celui de la plus haute puiſſance de $x$ ſous le ſigne, (ce qui eſt poſſible, parcequ'en multipliant la grandeur hors du ſigne par $x$ ou une puiſſance de $x$, il faut pour conſerver l'égalité de ce multiplicateur commun, multiplier la quantité

tité qui eſt ſous le ſigne par le quarré de $x$ ou de cette puiſſance de $x$ ;) cette puiſſance de $x$ eſt ici $x^3$ pour le numerateur, & $x^6$ pour le dénominateur ; & l'on aura la differentielle préparée $\frac{\overline{x^7 - 4ax^6 + 4aax^5} \times dx}{\sqrt{- x^8 + 2ax^7}} = \overline{x^7dx - 4ax^6dx + 4a^2x^5} \times dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$, qui n'a point changé de valeur.

3°. Il faut partager la differentielle préparée en parties, comme on le voit ici, $\overline{x^7 - 4ax^6 + 4a^2x^5} \times dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

Premiere Partie. Seconde Partie.

$= \overline{x^7 - \frac{7}{4}ax^6} \times dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}} - \overline{\frac{9}{4}ax^5 + \frac{15}{4}a^2x^4} \times dx \times$

Troiſiéme Partie.

$\overline{- x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}} + \overline{\frac{1}{4}a^2x^3 - \frac{3}{8}a^3x^2} \times dx \times \overline{- x^4 + 2ax^3}^{-\frac{1}{2}}$

Quatriéme Partie. Cinquiéme Partie.

$+ \overline{\frac{3}{8}a^3x - \frac{3}{8}a^4} \times dx \times \overline{- x^2 + 2ax}^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}a^4dx \times \overline{- x^2 + 2ax}^{-\frac{1}{2}}$.

Il faut faire ce partage avec ces deux conditions, 1°. qu'on puiſſe prendre l'integrale de chaque partie, ſi ce n'eſt de la derniere qui eſt l'element même d'un ſecteur de cercle, (en prenant $a$ pour le rayon) $\frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}}$ multiplié par $\frac{3aa}{4}$, & qui eſt ſuppoſé connu ; 2°. que la ſomme de ces parties ſoit égale à la differentielle preparée qui eſt égale à la propoſée : ainſi en mettant une quantité pour faire la premiere de ces parties avec le ſigne + ou —, il faut dans la partie ſuivante mettre la même quantité ou une quantité équivalente avec le ſigne oppoſé — ou +, & ainſi de ſuite. Les Lecteurs verront dans la pratique qu'on va donner de la méthode appliquée à notre exemple, qu'elle fait trouver certainement ces quantités, qu'il faut mettre ſous des ſignes oppoſés, & non par des tentatives : c'eſt pourquoi au lieu de leur faire trouver l'integrale de chacune des quatre premieres parties, on leur fera découvrir l'integrale comme ſi le partage n'avoit pas été fait en faiſant cet autre partage

A premiere Partie.

naturel de la differentielle préparée $x^7dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

B C

$- 4ax^6dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}} + 4a^2x^5dx \times \overline{- x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

$$= \overset{A}{x^7 dx} \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}} - \overset{b}{4ax^5 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{\,-\frac{1}{2}}$$

$$+ \overset{c}{4a^2x^4 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{\,-\frac{1}{2}} = \overset{A}{x^7 dx} \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}}$$

$$- \overset{b}{4ax^5 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{\,-\frac{1}{2}} + \overset{x}{4a^2x^3 dx} \times - \overline{x^4 + 2ax^3}^{\,-\frac{1}{2}}.$$

On ſe ſervira de la premiere propoſition fondamentale pour trouver les parties de l'integrale que l'on cherche ; on regardera la quantité qui eſt ſous le ſigne $- x^8 + 2ax^7$ comme la changeante, l'expoſant $-\frac{1}{2}$ du ſigne comme l'expoſant de la changeante ; la differentielle de la changeante ſera $- 8x^7dx + 2 \times 7ax^6dx$ pour A. Or pour avoir l'integrale de A, il faut augmenter d'une unité l'expoſant $-\frac{1}{2}$ de la changeante $-\overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}}$, ce qui donnera $x^7dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\,\frac{1}{2}}$; & ayant pris pour diviſeur la differentielle $- 8x^7dx + 2 \times 7ax^6dx$ multipliée par l'expoſant $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, il faut diviſer la quantité qui eſt hors du ſigne par le diviſeur $- 4x^7dx + 7ax^6dx$, & l'on trouvera le quotient $-\frac{1}{4}$; ainſi la premiere partie de l'integrale eſt $-\frac{1}{4} \times \overline{2ax^7 - x^8}^{\,\frac{1}{2}}$; on trouvera auſſi le reſte $+ \frac{7}{4}ax^6dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}}$; ce reſte eſt juſtement la quantité retranchée pour faire la premiere partie du premier partage ; & on remarquera que ce reſte n'étant qu'une differentielle, & non pas une integrale, il doit être multiplié par $-\overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}}$ qui eſt la partie ſous le ſigne de la differentielle, & non par $-\overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}}$ qui eſt la partie ſous le ſigne de l'integrale ; ce qu'il faut remarquer pour les parties ſuivantes ; il faut ôter ce reſte de la partie B, & il reſtera pour (B) $-\frac{9}{4}ax^6dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\,-\frac{1}{2}}$ qu'on nommera b.

Il faut à preſent, avant d'operer ſur b, préparer cette quantité de façon que l'expoſant de $x$ hors du ſigne ſoit moindre d'une unité que l'expoſant le plus grand de $x$ ſous le ſigne, ſans changer la valeur de b ; & l'on trouvera (b) $-\frac{9}{4}ax^5dx \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{\,-\frac{1}{2}}$.

Il faut operer ſur b comme l'on a fait ſur A, c'eſt-à-dire, après avoir réduit b à $-\frac{9}{4}ax^5dx \times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}+1=+\frac{1}{2}}$, & pris pour diviſeur $\frac{1}{2} \times -6x^5dx + \frac{1}{2} \times 10ax^4dx = -3x^5dx + 5ax^4dx$, il faut diviſer $-\frac{9}{4}ax^5dx$ par ce diviſeur, & l'on trouvera le quotient $+\frac{3}{4}a$; ainſi $+\frac{3}{4}a \times -\overline{x^6+2ax^5}^{\frac{1}{2}}$ eſt la ſeconde partie de l'integrale; & l'on trouvera auſſi le reſte $+\frac{15}{4}aax^4dx \times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la ſeconde partie du premier partage. Il faut ôter ce reſte de la partie c, & l'on aura (c) $+\frac{1}{4}a^2x^4dx \times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}} =$ (c) $+\frac{1}{4}a^2x^3dx \times -\overline{x^4+2ax^3}^{-\frac{1}{2}}$.

Il faut operer ſur c comme l'on a fait ſur A & ſur b, & l'on trouvera le quotient $-\frac{1}{8}a^2$; ainſi la troiſiéme partie de l'integrale ſera $-\frac{1}{8}a^2 \times -\overline{x^4+2ax^3}$; l'on trouvera auſſi le reſte $-\frac{3}{8}a^3x^2dx \times -\overline{x^4+2ax^3}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8}a^3xdx \times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la troiſiéme partie du premier partage. Il faut ôter ce reſte, c'eſt à-dire l'écrire avec le ſigne oppoſé, & ce reſte ſera $+\frac{3}{8}a^3xdx \times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$. On operera ſur ce reſte comme l'on a fait ſur A, ſur b & ſur c, & l'on trouvera le quotient $-\frac{3}{8}a^3$; ainſi la quatriéme partie de l'integrale ſera $-\frac{3}{8}a^3 \times -\overline{x^2+2ax}^{\frac{1}{2}}$. L'on trouvera auſſi le reſte $-\frac{3}{8}a^4dx \times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la quatriéme partie du premier partage: il faut l'ôter en écrivant $+\frac{3}{8}a^4dx \times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, qui eſt l'élement d'un ſecteur de cercle* dont $a$ eſt le rayon, multiplié par $\frac{3}{4}aa$. * 607.

On fera une ſomme de toutes les parties de l'integrale, dont la derniere partie ſera $\frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, & elle ſera l'integrale finie de la differentielle propoſée, en ſuppoſant la quadrature d'un ſecteur de cercle.

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir la méthode particuliere qu'on y a expliquée; & pour l'appliquer aux exemples ſemblables.

### *Définition de quelques Courbes méchaniques.*

749. ON peut imaginer des courbes méchaniques dont les ordonnées ſoient des lignes droites paralleles ſur une ligne droite des coupées, de maniere que les ordonnées, quoique droites, ſoient égales aux arcs d'une circonference pris de ſuite depuis le ſommet, ou aux arcs d'une parabole, ou à ceux d'une autre courbe dont la rectification n'eſt pas connue exactement, ou bien de façon que les ordonnées ſoient les puiſſances telles que l'on voudra de ces arcs, multipliées encore ſi l'on veut par la coupée, ou par une puiſſance quelconque de la coupée. On peut, par exemple, imaginer ſur le diametre d'un cercle depuis le ſommet, que les ordonnées ſoient de ſuite égales aux arcs du cercle, aux quarrés de ces arcs, ou à leurs troiſiémes puiſſances, &c. & de même pour la parabole & pour les autres courbes dont on n'a pas la rectification exacte.

*588. Par exemple S. $\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ * eſt l'integrale ſuppoſée d'un arc de cercle; $dx \times$ S. $\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$; $dx \times$ S. $\overline{\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}}\Big|^{2}$; $dx \times$ S. $\overline{\frac{rax}{\sqrt{2rx-xx}}}\Big|^{3}$; $xdx \times$ S. $\overline{\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}}\Big|^{3}$, &c. ſont les élemens de l'aire de ces ſortes de courbes méchaniques.

*591. De même un arc de parabole eſt * S. $\frac{dx}{2x} \times \sqrt{px+4xx}$; nommant cet arc $u$; $udx$, $u^2dx$, $u^3xdx$, ſeront les élemens de l'aire de ces ſortes de courbes; & ainſi des autres.

## PROBLÊME IV.

750. *TROUVER les integrales des differentielles de la définition précedente, en ſuppoſant donnée la rectification contenue dans ces differentielles.*

LA méthode eſt ſemblable à celle de l'article 713. Il faut trouver les termes de l'integrale indéterminée les uns après les autres, écrivant devant chacun un coëficient indéterminé, & prendre la differentielle de chacun de ces termes, à meſure qu'on le découvre ; la differentielle du premier terme fera découvrir le ſecond terme de l'integrale indéterminée ; la differentielle du ſecond fera découvrir le troiſiéme terme de l'integrale indéterminée, & ainſi de ſuite, obſervant que chaque terme de la differentielle doit avoir au moins deux quantités differentes avec des coëficiens differens. Il faut enſuite ſuppoſer que la differentielle de l'integrale indéterminée eſt égale à la propoſée, c'eſt-à-dire il faut écrire la differentielle propoſée avec le ſigne —, ſous les termes correſpondans de l'autre. Enfin il faut ſuppoſer chaque terme de cette differentielle égal à zero ; cette ſuppoſition donnera les équations dont on a beſoin pour trouver les valeurs des coëficiens indéterminés, leſquelles étant ſubſtituées à leur place dans l'integrale indéterminée, elle deviendra l'integrale de la differentielle propoſée.

Pour trouver l'integrale de $dx \times \overline{\text{S.}\,\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}}\Big|^3$, on ſuppoſera $u = \text{S.}\,\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ ; ce qui donnera $du = \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ : il faut auſſi prendre la differentielle de $\sqrt{2rx-xx}$, qui eſt $\frac{rdx-xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$. Ceux qui voudront abreger, pourront ſuppoſer $y = \sqrt{2rx-xx}$, & $dy = \frac{rdx-xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$. La queſtion ſe réduit à trouver l'integrale de $u^3dx$, en ſuppoſant l'integrale $u = \text{S.}\,\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

*Integrale indéterminée de* $u^3dx$.

$$\text{S.}\,u^3dx = Au^3x + Bu^2 \times \sqrt{2rx-xx} + Cu^3 + Dux + E \times \sqrt{2rx-xx} + Fu.$$

*Differentielle de l'integrale indéterminée.*

$$\left.\begin{array}{l} Au^3dx + \frac{3.Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Brudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Drxdx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Erdx}{\sqrt{2rx-xx}} \\ \qquad - \frac{Bu^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{3Cru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Dudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}} - \frac{Exdx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{Frdx}{\sqrt{2rx-xx}} \\ \text{Differentielle propoſée avec le ſigne —.} \quad -1u^3dx \end{array}\right\} = 0.$$

Il faut ſuppoſer $Au^3x$ pour le premier terme de l'integrale indéterminée, c'eſt-à-dire dans ce premier terme ſeulement on regarde $u$ comme conſtante; $A$ eſt une indéterminée. Il faut prendre la difference de $Au^3x$, & il eſt évident que ſon premier terme $Au^3dx$, & la differentielle propoſée $1u^3dx$, feront le premier terme de la differentielle totale, lequel premier terme étant ſuppoſé $= 0$, on pourra déterminer le coëficient indéterminé $A$.

Le ſecond terme $+\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ de la differentielle de $Au^3x$, où l'on a mis la valeur de $du = \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, ( ce que l'on fera toujours dans la ſuite, ) fait connoître que le ſecond terme de l'integrale indéterminée, devant avoir une differentielle dont un terme ſoit correſpondant à $\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, afin qu'on puiſſe faire une équation de ces deux termes pour déterminer le ſecond coëficient, doit être $Bu^2 \times \sqrt{2rx-xx}$, ($B$ eſt indéterminée, ) dont la differentielle a trois termes, l'un deſquels eſt $-\frac{Bu^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ qui eſt correſpondant à $\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le ſecond de ces trois termes qui eſt $+\frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$, fait connoître que le troiſiéme terme de l'integrale indéterminée doit être $Cu^3$, ($C$ eſt indéterminée, ) dont la differentielle $\frac{3Cru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt le terme correſpondant à $\frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le terme $\frac{Brudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}}$, ou ſimplement $Brudx$, fait connoître que pour avoir une grandeur correſpondante, il faut ſuppoſer $Dux$ pour le quatriéme terme de l'integrale indéterminée, ( $D$ eſt indéterminée, ) car le premier terme de ſa differentielle ſera $Dudx$, ou, ſi l'on veut, $\frac{Dudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}}$, qui eſt la grandeur correſpondante que l'on cherche.

Le ſecond terme de la differentielle de $Dux$, qui eſt $\frac{Drxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, fait connoître qu'il faut ſuppoſer $E \times \sqrt{2rx-xx}$ pour le cinquiéme terme de l'integrale indéterminée, ($E$ eſt indéterminée, ) car le premier terme de ſa differentielle eſt $-\frac{Exdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, qui eſt la grandeur correſpondante de $\frac{Drxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le ſecond terme $\frac{Erdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ de cette differentielle, fait connoître qu'il faut ſuppoſer $Fu$ pour le ſixiéme terme de l'integrale, ($F$ eſt indéterminée,) car ſa differentielle $\frac{Frdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ eſt la grandeur correſpondante de $\frac{Erdx}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Tous les termes de la differentielle de l'integrale indéterminée contenant pluſieurs quantités, de façon qu'en ſuppoſant chacun de ces termes égal à zero, tous les coëficiens peuvent être déterminés; l'integrale eſt finie, & il ne faut plus chercher de nouveaux termes.

Il faut à préſent ôter la differentielle propoſée $1u^3dx$ du terme correſpondant de la differentielle indéterminée; ſuppoſer chacun des termes égal à zero; ce qui donnera ici ſix équations, par le moyen deſquelles on trouvera les valeurs de $A$, $B$, $C$, &c. qui ſont $A = 1$, $B = 3r$, $C = -r$, $D = -3r^2$, $E = -3r^3$, $F = +3r^3$. Enfin il faut ſubſtituer ces valeurs dans l'integrale indéterminée, & l'on aura S. $u^3dx = 1u^3x + 3ru^2 \times \sqrt{2rx - xx} - ru^3 - 3r^2ux - 3r^3 \times \sqrt{2rx - xx} + 3r^3u$, pour l'integrale de la differentielle propoſée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir clairement la méthode & la maniere de l'appliquer; les Lecteurs pourront ſe la rendre familiere par des exemples.

---

## SECTION III.

### *Où l'on explique le calcul differentiel & le calcul integral des expreſſions logarithmiques, & des quantités exponentielles.*

### AVERTISSEMENT.

51. LES logarithmes des nombres ſont d'uſage pour faciliter les calculs les plus difficiles & les plus embarraſſés des nombres dans la réſolution des Problêmes des parties pratiques des Mathematiques, comme de l'Aſtronomie, de la Marine, de la Geometrie pratique, &c. Il y a auſſi des courbes qui contiennent toutes les grandeurs poſſibles avec leurs loga-

rithmes, c'eſt-à-dire toutes les grandeurs poſſibles qui ſont une progreſſion géometrique infinie, qui va en augmentant depuis celle de ces grandeurs que l'on peut prendre à diſcretion pour l'unité, & en diminuant à l'infini du côté oppoſé depuis la même unité; ces courbes contiennent encore les grandeurs qui ſont une progreſſion arithmetique, dont zero (qui eſt le terme de la progreſſion arithmetique correſpondant à l'unité de la progreſſion géometrique, & qui en eſt le logarithme) eſt entre les termes poſitifs à l'infini de cette progreſſion arithmetique qui ſont les logarithmes des termes correſpondans de ceux de la progreſſion géometrique qui ſurpaſſent l'unité, le premier étant le logarithme du premier, le ſecond du ſecond, &c. & entre les termes négatifs de la même progreſſion arithmetique, qui ſont auſſi les logarithmes des termes correſpondans de la progreſſion géometrique. Ces courbes, que l'on peut appeller *logarithmiques*, ſont auſſi de grand uſage dans la Géometrie compoſée, ſur-tout dans la partie qui traite des courbes méchaniques, pour décrire certaines courbes, en trouver les proprietés qui ſe découvrent par le ſeul calcul differentiel, comme leurs tangentes, les points où elles s'écartent ou s'approchent le plus de leur axe, &c. & celles que l'on découvre par le calcul differentiel & le calcul integral joints enſemble, comme la rectification des courbes, leur aire, &c. leſquelles deſcriptions & proprietés ne peuvent pas ſe découvrir par les regles dont on ſe ſert pour les autres courbes.

752. La premiere de ces courbes logarithmiques eſt *l'hyperbole*
FIGURE *équilatere*; car l'on a fait voir* qu'en prenant tous les nom-
XLVII. bres de ſuite ſur $KGF$ l'une des aſymptotes, ſuppoſant
* 643. que $KG$ eſt l'unité, & que chaque nombre plus grand que l'unité, comme $KF$, eſt exprimé par $1 + x$, & que chaque nombre plus petit que l'unité, comme $KP$, eſt exprimé par $1 - x$; le quadrilatere hyperbolique $GAfF$ qui eſt ſur l'excès $GF$ de ce nombre ſur l'unité, ou $GACP$ qui eſt ſur l'excès $PG$ de l'unité ſur ce nombre, eſt le loga-
* 643. rithme de ce nombre $1 + x$ ou $1 - x$. On a auſſi démontré* que $Ff$ étant égale à $\frac{KG \times GA}{KF} = \frac{1}{1+x}$, & que de même $PC$ étant égale à $\frac{KG \times GA}{KP} = \frac{1}{1-x}$, l'élement du quadrilatere $GAfF$ eſt $\frac{1dx}{1+x}$, & celui de $GACP$ eſt $-\frac{1dx}{1-x}$; & par conſéquent, nommant

nommant ces quadrilatéres $GAfF$, $l.\ 1+x$; & $GACP$, $l.\ 1-x$, ( $l.$ ſignifie logarithme; ainſi $l.\ 1+x$ marque le logarithme de $1+x$ ) la différentielle du logarithme d'un nombre $1+x$ qui ſurpaſſe l'unité, eſt $d.\ l.\ 1+x = \frac{1dx}{1+x}$; & celle du logarithme d'un nombre $1-x$ qui eſt moindre que l'unité, eſt $d.\ l.\ 1-x = \frac{-1dx}{1-x}$.

L'on a auſſi fait voir * qu'en prenant une grandeur quelconque $KS$, qu'on nommera $a$ ſur la ligne $KST$, qui fait avec l'aſymptote à l'origine $K$, l'angle quelconque $GKS$; & menant la ligne $SG$ au point $G$ où finit l'unité $KG$, & enſuite par tous les points $T$, $t$, de $KS$ tirant des paralleles $TF$, $tP$ à $SG$, & nommant les $KT$, $a+x$; & les $Kt$, $a-x$; les grandeurs $KT$ $(a+x)$ & $Kt$ $(a-x,)$ ont les mêmes logarithmes que les nombres correſpondans $KF$, $KP$ ſur l'aſymptote; $KS$ $(a)$ eſt priſe pour l'unité par raport à ces grandeurs; & $KF$ devient $1+\frac{x}{a} = \frac{a+x}{a}$, & $KP$ devient $1-\frac{x}{a} = \frac{a-x}{a}$ ( à cauſe des baſes paralleles de l'angle $GKS$; ) ainſi $Ff = \frac{KG \times GA}{KF}$ devient $\frac{a}{a+x}$; $PC = \frac{KG \times GA}{KP}$ devient $\frac{a}{a-x}$; l'élément de $GAfF$ devient $d.\ l.\ a+x = \frac{adx}{a+x}$, & l'élément de $GACP$ devient $d.\ l.\ a-x = \frac{-adx}{a-x}$; & $l.\ a+x = S.\ \frac{adx}{a+x}$; $l.\ a-x = S.\ \frac{-adx}{a-x}$. * 647.

53. *La logarithmique* eſt la ſeconde de ces courbes, & c'eſt de là qu'elle tire ſon nom. Les ordonnées $AB$, $CD$, $EF$, &c. de cette courbe, qu'on nommera $x$, ſont les grandeurs qui font une progreſſion géométrique infinie; elles vont en augmentant d'un côté, & en diminuant en retournant du côté oppoſé; l'une de ces ordonnées, laquelle on voudra, comme $AB$, doit être priſe pour l'unité, & le point $A$ ſur la ligne des coupées $ACE$, &c. ſera l'origine des coupées $AC$, $AE$, &c. qu'on nommera $z$; chaque coupée, comme $AC$ $(z)$, eſt le logarithme de l'ordonnée correſpondante $CD$ $(x)$; ces logarithmes pris du côté de $Ag$, comme $Ae$ $(-z,)$ ſont négatifs. FIG. XXXVI.

### *Deſcription de la logarithmique.*

54. AYANT tracé la droite $ACE$ indéterminée de côté & d'autre, & élevé deux perpendiculaires inégales $AB$, $EF$ d'une longueur arbitraire; il faut partager $AE$ par le milieu en $C$, & élever la perpendiculaire $CD$, & la faire moyenne

proportionnelle entre $AB$ & $EF$, & le point $D$ ſera un de ceux de la logarithmique : on trouvera de la même maniére tous les points de cette courbe qui ſont entre $B$ & $F$. Pour avoir chacun des points $H$, $K$, $M$, &c. qui ſont au-delà, comme le point $H$, il faut trouver aux deux ordonnées $CD$, $EF$ déja tracées, une troiſiéme proportionnelle qu'on nommera $GH$; prendre ſur la ligne des coupées $EG = CE$, & élever la perpendiculaire $GH$ égale à la troiſiéme proportionnelle qu'on a trouvée, & ſon extrémité $H$ ſera un point de la logarithmique. En prenant de même $GI = GE$, & élevant la perpendiculaire $IK$ égale à la troiſiéme proportionnelle aux ordonnées $EF$ & $GH$, le point $K$ ſera dans la logarithmique. On trouvera de la même maniére les points de la logarithmique qui vont de droite à gauche. On peut encore trouver, quand on a déja pluſieurs points de la logarithmique, chacun des autres points, en prenant à diſcrétion trois points déja connus, comme $B$, $D$, $H$, & faiſant $GI = AC$, qui eſt la diſtance entre les deux ordonnées des deux premiers points, & élevant la perpendiculaire $IK$ égale à la quatriéme proportionnelle aux trois ordonnées $AB$, $CD$, $GH$, le point $K$ ſera dans la logarithmique. On trouvera par ces trois pratiques tous les points qu'on voudra de la logarithmique.

### *Equation de la logarithmique.*

755. EN concevant toutes les ordonnées $x$ infiniment proches les unes des autres en progreſſion géométrique, il eſt évident que leurs différences $dx$ ſont auſſi dans la même progreſſion géométrique ; d'où il ſuit que chaque raport $\frac{dx}{x}$ eſt conſtant ; ainſi $\frac{Dd}{DC} = \frac{dx}{x} = \frac{Ff}{FE}$ &c. Si l'on conçoit par chaque point de la logarithmique la tangente en ce point, comme $DBS$ ; $Bd = AC$ ſera $dz$ ; l'on aura pour tous les
*550. points $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$, * (on nomme $a$ la ſoutangente $CS$) ; d'où il ſuit, toutes les $dz$ étant ſuppoſées conſtantes, que la ſoutangente eſt conſtante, c'eſt-à-dire la même pour tous les points de la logarithmique ; ainſi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$, ou $a = \frac{xdz}{dx}$, eſt l'équation de la logarithmique qui convient à tous ſes points. Si l'on prend pour l'unité celle des ordonnées qui eſt égale à la ſoutangente qu'on ſuppoſera être $AB$ ; $dz$ ſera poſitive

du côté que les ordonnées augmentent, & négative du côté qu'elles diminuent. L'on peut encore trouver l'équation de la logarithmique par l'art. 519; car concevant que le point $B$ décrit chaque particule infiniment petite $BD$, $DF$ &c. de la logarithmique dans le même tems $T$ qu'il décriroit les petits côtés angulaires $Bd$ ($dz$) $dD$ ($dx$) du petit parallelogramme dont cette particule $BD$ eſt la diagonale; ſi l'on ſuppoſe chaque côté $Bd$ ($dz$) décrit par une viteſſe uniforme qu'on nommera $a$, & chaque côté comme $dD$ ($dx$) par une viteſſe qui s'accélere en progreſſion géométrique; (on pourra nommer $x$ cette viteſſe par chaque $dD = dx$ :) En ſuppoſant $dz$ conſtante, l'on aura pour chaque particule, comme $BD$, cette équation $T = {}^{*} \frac{dz}{a} = \frac{dx}{x}$, où le raport $\frac{dx}{x}$ étant conſtant, les $x$ ſeront néceſſairement en progreſſion géométrique, comme on vient de le faire voir au commencement de cet article. * 519.

756. L'on déduit de l'équation de la logarithmique cette autre $dz = \frac{adx}{x} = \frac{1.dx}{x}$ quand $a$ eſt ſuppoſée l'unité. Or $dz$ eſt la différence du logarithme $z$; ainſi *la différence d'un logarithme d'un nombre ou d'une grandeur* x *eſt égale à la différence de ce nombre diviſée par ce nombre même*; $dz$ ou $dlx = \frac{dx}{x}$ quand le nombre ſurpaſſe l'unité, & $- dz$ ou $- dlx = \frac{-dx}{x}$, quand $x$ eſt moindre que l'unité. Ainſi $z$ ou $lx =$ S. $\frac{dx}{x}$. On peut auſſi, ſi l'on veut, nommer les nombres en progreſſion géométrique $1 + x$, quand ils ſurpaſſent l'unité; $1 - x$, quand ils ſont moindres, cela eſt arbitraire.

## REMARQUES.

### I.

757. QUAND le nombre eſt exprimé par $1 + x$; alors $dl. 1 + x = \frac{dx}{1+x}$, & $dl. 1 - x = \frac{-dx}{1-x}$. Quand au lieu de l'unité c'eſt une quantité $a$ qui en tient lieu, $dl. a + x = \frac{adx}{a+x}$; & $dl. a - x = - \frac{adx}{a-x}$. Quand la ſoutangente conſtante $a$ n'eſt pas priſe pour l'unité dans la logarithmique, alors la differentielle du logarithme eſt $dlx = \frac{adx}{x}$; & $d - l. x = - \frac{adx}{x}$.

### II.

758. Il eſt évident que zero eſt le logarithme de l'unité; & que le logarithme de zero eſt infini dans l'une & l'autre des courbes logarithmiques.

### III.

759. $\frac{dx}{a+x}$, $\frac{dx}{b+x}$, &c. ſont auſſi des différentielles logarithmiques ; car on peut exprimer chaque ordonnée $x$ de la logarithmique par une grandeur connue $a$ ou $b$, &c. plus une changeante $x$, en ſuppoſant néanmoins que la ſoutangente eſt l'unité ; & alors $\frac{f \times dx}{a+x}$ eſt une différentielle logarithmique multipliée par $f$.

## DE'FINITION.

760. L'ON employera ici $l$ pour ſignifier le logarithme de la grandeur au-devant de laquelle on l'écrira, & $l^2 x$, $l^3 x$, $l^m x$, &c. marqueront le logarithme de $x$ élevé à la puiſſance dont l'expoſant eſt 2, 3, $m$, &c. de même $l^{-1} x$, $l^{-2} x$, $l^{-m} x$, &c. exprimeront que le logarithme de $x$ ou ſa puiſſance dont l'expoſant eſt 1, 2, $m$, &c. ſe trouve au dénominateur ; $l.\, lx$ marquera le logarithme du logarithme de $x$, & $l^m lx$ exprimera le logarithme du logarithme de $x$ élevé à la puiſſance dont $m$ eſt l'expoſant.

### *Propoſition fondamentale du calcul différentiel des expreſſions logarithmiques.*

761. $dl.\, 1 + x = \frac{dx}{1+x}$ ; $dl.\, 1 - x = \frac{-dx}{1-x}$ ; $dl.\, x = \frac{1dx}{x}$ ; $d - l.\, x = - \frac{1dx}{x}$ ; $dl.\, a + x = \frac{adx}{a+x}$ ; $dl.\, a - x = \frac{-adx}{a-x}$ ; quand la ſoutangente $a$ de la logarithmique n'eſt pas priſe pour l'unité, $dl.\, x = \frac{adx}{x}$, & $d - l.\, x = - \frac{adx}{x}$.

## COROLLAIRES.

### I.

762. POUR trouver la différence de $l^m x$, on ſuppoſera $l^m x = y^m$,
ce qui donnera $lx = y$, & $dlx = dy = \frac{dx}{x}$ *par la première*
*761. *propoſition* * ; l'on aura auſſi $dl^m x = my^{m-1} dy$, & $l^{m-1} x = y^{m-1}$.
On ſubſtituera les valeurs de $y^{m-1}$ & de $dy$ dans $my^{m-1} dy$,
& l'on aura $dl^m x = ml^{m-1} x \times \frac{dx}{x} = mx^{-1} l^{m-1} x \times dx$. Si
l'on vouloit exprimer $x$ par $1 + x$, & $-x$ par $1 - x$, il n'y
auroit qu'à ſubſtituer dans la différence qu'on vient de trouver au lieu de $x$, $1 + x$ ou $1 - x$, & écrire dans ce dernier cas $-dx$.

### I I.

63. Pour trouver la différence de $l.lx$, on ſuppoſera $lx = y$; ce qui donnera, 1°. $dlx = dy = {}^{*}\frac{dx}{x}$; 2°. $l.lx = ly$; & 3°. $dl.lx = {}^{*}\frac{dy}{y} = \frac{dx}{xlx} = x^{-1}l^{-1}x \times dx$. * 761.

Si l'on veut exprimer $x$ par $1 + x$; pour avoir $dl.l\,1 + x$, on ſuppoſera $l.\,1 + x = 1 + y$, ce qui donnera, 1°. $dl.\,1 + x = dy = {}^{*}\frac{dx}{1+x}$; 2°. $l.l1 + x = l1 + y$; 3°. $dl.\,l1 + x = dl1 + y = \frac{dy}{1+y}$; & ſubſtituant les valeurs de $dy$ & de $1 + y$ dans $\frac{dy}{1+y}$, l'on aura $dl.\,l1 + x = \frac{dx}{l\overline{1+x} \times \overline{1+x}} = \overline{1+x}^{-1} \times l^{-1}\,\overline{1+x} \times dx$. * 761.

## REMARQUE.

64. L'ON peut auſſi employer ces expreſſions des logarithmes $l.1 + x = S.\frac{dx}{1+x}$. Par exemple, en ſuppoſant $l.l1+x = z$, & $l1+x = 1+y$, (ce qui donne $l.l1+x = l1+y = S.\frac{dy}{1+y}$,) l'on aura $dl.l1 + x = dz = \frac{dy}{1+y}$, & $dy = {}^{*}\frac{dx}{1+x}$. Ces expreſſions ſans les réduire (quand on n'a beſoin que de différentielles) à une quantité qui n'ait que $dx$, $1 + x$, & $l.\,1 + x$, peuvent être utiles à trouver les intégrales dans pluſieurs Problêmes, qui ſoient exprimées par des *ſuites* qui n'ayent pour inconnues que des $x$, ou des $y$, ou des $z$, comme on le verra dans la ſuite. * 761.

## COROLLAIRE III.

65. ON trouvera la différence de $l^{m}lx$, en ſuppoſant $lx = y$; ce qui donnera, 1°. $dlx = dy = \frac{dx}{x}$; 2°. $l^{m}lx = l^{m}y$; d'où l'on aura $dl^{m}y = {}^{*}\,my^{-1}\,l^{m-1}y \times dy$; où ſubſtituant les valeurs de $y^{-1}$, $l^{m-1}y$, $dy$, l'on trouvera $dl^{m}lx = ml^{m-1}lx \times l^{-1}x \times \frac{dx}{x}$. * 762.

### I V.

66. Enfin on trouvera de même la différence de $l^{n}l^{m}x$, en ſuppoſant $l^{m}x = y^{m}$; ce qui donnera, 1°. $lx = y$; 2°. $dlx = dy = \frac{dx}{x}$; ; 3°. $l^{n}l^{m}x = l^{n}y^{m}$; d'où l'on déduira (en regardant $y^{m}$ dans $l^{n}y^{m}$ comme l'on regarde $x$ dans $l^{m}x$) ${}^{*}\,dl^{n}y^{m}$ * 762.

$$= nl^{n-1}y^{m} \times \frac{my^{m-1}dy}{y^{m}} = nmy^{-1}l^{n-1}y^{m} \times dy,$$

où ſubſtituant les valeurs de $y^{-1}$, $y^{m}$, $dy$, l'on trouvera $dl^{n}l^{m}x = nml^{-1}x \times l^{n-1}l^{m}x \times \frac{dx}{x} = nmx^{-1}l^{-1}x \times l^{n-1}l^{m}x \times dx$.

## REMARQUE.

767. Si l'on ſubſtitue dans les valeurs trouvées par le troiſiéme & le quatriéme Corollaire, $1 + x$ à la place de $x$, on aura $dl^{m}lx = ml^{m-1}l1 + x \times l^{-1}\ 1 + x \times \frac{dx}{1+x}$, & $dl^{n}l^{m}x = nml^{-1}1 + x \times l^{n-1}l^{m}1 + x \times \frac{dx}{1+x}$.

## COROLLAIRE V.

*Qui eſt la propoſition fondamentale du calcul intégral des expreſſions logarithmiques.*

768. Il ſuit de la propoſition fondamentale & de ſes Corollaires,
que l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $x^{-1}dx$ ( qu'on marquera dans la ſuite
*761. par S. $\frac{dx}{x}$ ) $= lx.$ *
*762. S. $ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x} = l^{m}x.$ *
*766. S. $nml^{n-1}x^{m} \times \frac{dx}{x} = l^{n}x^{m}.$ *
*763. S. $l^{-1}x \times \frac{dx}{x} = l.lx.$ *
*765. S. $ml^{-1}lx \times \frac{dx}{x \times lx} = l^{m}lx.$ *
*766. S. $nml^{n-1}l^{m}x \times \frac{dx}{x \times lx} = l^{n}l^{m}x.$ *

Si l'on ſubſtitue dans les expreſſions précédentes $1 + x$ à la place de $x$, on aura les intégrales par raport à l'expreſſion $1 + x$; & on trouvera de même les intégrales pour les logarithmes négatifs S. $\frac{-dx}{x}$; S. $\frac{-dx}{1-x}$.

## REMARQUE.

769. On remarquera auſſi que $l.1 + x =$ S. $\frac{dx}{1+x} = {}^{*}\ x - \frac{1}{2}x^{2}$
*643. $+ \frac{1}{3}x^{3} - \frac{1}{4}x^{4} +$ &c. & que $l.\ 1 - x =$ S. $\frac{-dx}{1-x} = - x - \frac{1}{2}x^{2}$
$- \frac{1}{3}x^{3} - \frac{1}{4}x^{4} -$ &c.

Et ſuppoſant, pour abreger, $l.\ 1 + x = y$, l'on aura $1 + x$
*646. $= {}^{*}\ 1 + y + \frac{1}{2}y^{2} + \frac{1}{2\times3}y^{3} + \frac{1}{2\times3\times4}y^{4} +$ &c. d'où il ſuit que
$dx = dy \times \overline{1 + y + \frac{1}{2}y^{2} + \frac{1}{2\times3}y^{3} + \frac{1}{2\times3\times4}y^{4} + \&c.}$

En ſuppoſant de même $l.\ 1 - x = y$, l'on aura $1 - x = 1 - y + \frac{1}{2}y^{2} - \frac{1}{2\times3}y^{3} + \frac{1}{2\times3\times4}y^{4} -$ &c.

On peut de même exprimer par des *ſuites* les intégrales qui ſont des logarithmes de logarithmes; par exemple, ſuppoſant $z = l.l1 + x$, & $l.\ 1 + x = 1 + y$, l'on aura $z = l.1$
$+ y =$ S. $\frac{dy}{1+y}$; $dz = \frac{dy}{1+y}$; $dy = \frac{dx}{1+x}$; $y =$ S. $\frac{dx}{1+x}$.
*643. On déduira de $dz = \frac{dy}{1+y}$, $z = {}^{*}\ y - \frac{1}{2}y^{2} + \frac{1}{3}y^{3} - \frac{1}{4}y^{4}$

+ &c. & de $dy = \frac{dx}{1+x}$, $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.

1°. Si l'on veut la valeur de $l.l1 + x = z$, exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des $x$, il n'y a qu'à prendre dans la derniére équation les valeurs de $y$, $y^2$, $y^3$, &c. & les ſubſtituer dans $z = y - \frac{1}{2}y^2 +$ &c. & l'on aura la valeur de $l.l1 + x = z$, exprimée par une *ſuite* où il n'y aura que des $x$.

2°. Si l'on veut exprimer la valeur de $x$ par une *ſuite* où il n'y ait que des $z$; après avoir trouvé, comme on vient de le dire, la valeur de $z$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des $x$, il faudra par le retour des *ſuites* * trouver la *ſuite* où il n'y ait que des $z$, qui eſt la valeur de $x$. * 234.

3°. On peut par le même retour des *ſuites* trouver la valeur de $x$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des $y$.

---

## EXPLICATION DU CALCUL DIFFERENTIEL & intégral des quantités exponentielles.

### *Suppoſitions qu'on a démontrées ailleurs.*

70. LE calcul différentiel & intégral ne s'applique aux quantités exponentielles $x^x = y$, $a^x = y$, & aux autres plus compoſées, que par le moyen des logarithmes de ces quantités. Pour faire concevoir clairement cette application, on fera faire attention à ces trois propriétés des logarithmes; 1°. la ſomme des deux logarithmes de deux ou de pluſieurs grandeurs, comme $lx + la$, * eſt égale au logarithme du produit de ces grandeurs $l.ax$; 2°. la différence de deux logarithmes $lx - la$ * eſt égale au logarithme $l\frac{x}{a}$ du quotient qui naît de la diviſion de la grandeur $x$ par la grandeur $a$; 3°. le logarithme d'une grandeur linéaire $x$ multiplié par l'expoſant d'une puiſſance quelconque $m$ de cette grandeur, * eſt égal au logarithme de cette même grandeur élevée à la puiſſance $m$, $mlx = l.x^m$, $\frac{1}{n}lx = l.x^{\frac{1}{n}}$, &c. L'on peut mettre ſi l'on veut par tout $1 + x$ à la place de $x$, & l'on remarquera auſſi que quand la grandeur $x$ ou $1 - x$ eſt au-deſſous de celle qu'on aura priſe pour l'unité, ſon logarithme eſt négatif.

* 641.
* 641.
* 642.

### COROLLAIRE I.

771. IL ſuit de ces propriétés, que quand on a une équation qui contient des quantités exponentielles, on peut en déduire une autre équation qui contiendra les logarithmes des quantités de la premiére, car les grandeurs égales ont leurs logarithmes égaux, en ſuppoſant qu'on ſe ſert de la même logarithmique; ainſi l'on déduira de $x^x = a$, $xlx = la$: de même $a^x = y^x$ donnera $xla = xly$.

De même $x^{x^x} = y^{y^y}$ donnera $x^xlx = y^yly$, & celle-ci donnera $xlx + l.\,lx\ (= l.\,x^xlx) = yly + l.ly\ (= l.y^yly)$; & ainſi des autres.

### COROLLAIRE II.

772. ON peut auſſi tirer une équation exponentielle d'une équation logarithmique, en retournant des logarithmes aux grandeurs dont ils ſont les logarithmes; ainſi de $xlx = la$, on déduira $x^x = a$; & ainſi des autres.

### COROLLAIRE III.

773. QUAND même l'équation n'a pas d'expreſſion logarithmique dans un de ſes membres, comme $x = yla$, on peut en tirer une équation exponentielle, en multipliant les deux membres par un logarithme conſtant comme $l.b$, qui ne ſoit pas celui de la grandeur priſe pour l'unité, parce que ce logarithme ſeroit zero, & l'on aura $xl.b = y \times l.b \times l.a$; d'où l'on tirera l'équation exponentielle $b^x = a^{y\,l.b}$; ou bien quand un membre a déja une expreſſion logarithmique, on peut, pour rendre l'équation exponentielle plus ſimple, prendre l'unité, par laquelle le premier membre peut toujours être conçu multiplié dans $1 \times x = yla$, pour un logarithme conſtant dont le nombre $n$ ſoit connu par la logarithmique, puiſque la grandeur priſe pour l'unité dans l'équation eſt ſuppoſée connue; ainſi l'on aura $1 = l.n$, & l'équation ſera $xl.n = yla$; d'où l'on tirera $n^x = a^y$. Il en eſt de même des autres.

### REMARQUE.

774. IL arrive en pluſieurs cas que les équations logarithmiques qu'on tire des équations exponentielles, ſont des équations purement

purement algebriques, qui ne contiennent que des quantités connues & inconnues ordinaires. Par exemple on déduit de $a^x = b^{yy}$, l'équation $xla = yy \times l.\, b$; d'où l'on tire $\frac{l.a}{l.b} \times x = yy$, qui eſt une équation ordinaire à la parabole, parceque les logarithmes des grandeurs connues $a$ & $b$, ſont des grandeurs connues par la logarithmique; en les nommant $m$ & $n$, l'on a $\frac{m}{n} x = yy$.

## COROLLAIRE IV.

75. ON peut auſſi ſe ſervir de la méthode de réduire les équations des grandeurs exponentielles en d'autres équations logarithmiques, pour réduire les expreſſions exponentielles en expreſſions algebriques ordinaires par le moyen des *ſuites*; cela eſt très-utile dans la réſolution de pluſieurs Problêmes. Un exemple ſuffira pour en faire concevoir la méthode. Au lieu de $x^x = y$, on écrira $\overline{1+x}^{\,1+x} = 1+y$, ce qui donnera $\overline{1+x} \times l.\, 1+x = l.\, 1+y$.

L'on réduira $l.\, 1+x$ en* $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ &c. & on multipliera cette valeur par $1+x$, & l'on aura $\overline{1+x} \times l.\, 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. on réduira de même $l.\, 1+y$ en $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. & l'on aura cette équation $x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. D'où l'on déduira, par le retour des *ſuites**, la valeur de $y$ en une *ſuite* qui n'aura que des $x$; & y ajoutant l'unité, l'on aura l'équation exponentielle $1+y = \overline{1+x}^{\,1+x}$, changée en une équation dont le ſecond membre ſera une *ſuite* infinie, & qui n'aura que des grandeurs ordinaires. On peut appliquer cette méthode aux équations exponentielles plus compoſées.

* 643.

* 234.

# PROBLÊME I.

*TROUVER les differentielles des quantités exponentielles.*

## PREMIERE MÉTHODE.

76. IL faut les réduire aux expreſſions logarithmiques qui leur conviennent, & prendre enſuite les differentielles par le moyen de ces expreſſions. Ce qui s'éclaircira par les exemples ſuivans.

1. Pour trouver la difference de $x^y$, il faut ſuppoſer $x^y = z$;

d'où l'on déduira $ylx = lz$; il faut prendre les differences, & l'on aura $lx \times dy + y \times \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{x^y}$; ainſi l'on aura $x^y\, lx \times dy + x^{y-1}\, y \times dx = dz =$ à la difference de $x^y$. *Ce qu'il falloit trouver.*

2. Pour trouver la difference de $u^{x^y}$, on ſuppoſera $u^{x^y} = z$, ce qui donnera $x^y lu = lz$. On prendra les differences, & l'on aura par le premier exemple la difference de $x^y$ égale à $x^y\, lx \times dy + x^{y-1} y \times dx$; ainſi la difference de $x^y\, lu = lz$ ſera $x^y\, lx \times lu \times dy + x^{y-1} y \times lu \times dx + x^y \frac{du}{u} = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{u^{x^y}}$; ainſi la difference de $u^{x^y} = dz$ ſera $u^{x^y}\, x^y\, lxludy + u^{x^y}\, x^{y-1} y\, ludx + u^{x^y} \times u^{-1}\, x^y\, du = dz$.

On peut trouver de même les differences des grandeurs exponentielles plus compoſées.

## SECONDE ME'THODE PAR LE MOYEN DES *ſuites*.

POUR trouver la difference de $\overline{1+x}^{1+x}$, on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x} = 1+z$; d'où l'on aura, 1°. la difference $\overline{1+x}^{1+x} = dz$; 2°. $\overline{1+x} \times l.\, 1+x = l.\, 1+z$. Après cela on trouvera, comme dans le quatriéme Corollaire $\overline{1+x} \times l.\, 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \&c. = l.\, 1+z$. On trouvera de même $l.\, 1+z = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \&c. = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \&c.$ d'où l'on déduira par le retour des *ſuites* * la valeur de $z$, exprimée par une *ſuite* où il n'y aura que des $x$, qui ſera une équation dont $z$ ſera le premier membre, & la *ſuite* en $x$ le ſecond membre; on prendra la difference de chaque membre, qui donnera la valeur de $dz$ en $x$ & $dx$, & ce ſera la difference de $\overline{1+x}^{1+x}$, qui eſt égale à $dz$.

* 234.

Pour trouver la difference de $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}}$, on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = 1+z$; ce qui donnera, 1°. diff. $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = dz$; 2°. $\overline{1+x}^{1+x} \times l.\, 1+x = l.\, 1+z$. On ſuppoſera encore $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$, ce qui donnera, 1°. $\overline{1+x} \times l.\, 1+x = l.\, 1+y$; 2°. $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = \overline{1+x}^{1+y} = 1+z$; 3°. $\overline{1+y} \times l.\, 1+x = l.\, 1+z$. Après cela il faudra trouver par la mé-

thode des *ſuites**, 1°. la valeur de $\overline{1+x} \times l.\ 1+x$, comme ci-deſſus; *234.
2°. celle de $l.\ 1+y$, exprimée par des $y$. 3°. Ayant fait
une équation dont le premier membre ſoit la *ſuite* égale à
$\overline{1+x} \times l.\ 1+x$, & le ſecond ſoit la *ſuite* en $y$ égale à $l.\ 1+y$;
il faudra par le retour des ſuites* trouver, en ſe ſervant de *234.
cette équation, la valeur de $1+y$ exprimée par une ſuite où
il n'y ait que des $x$. 4°. Il faudra enſuite multiplier la valeur
de $1+y$ par la valeur de $l.\ 1+x$, & égaler la *ſuite* en $x$ qui
eſt cette valeur, à la valeur de $l.\ 1+z$* exprimée par des $z$; ce *643.
qui donnera une équation dont le premier membre ſera une
*ſuite* en $x$ égale à $\overline{1+x}^{1+x} \times l.\ 1+x$, & dont le ſecond membre
ſera la valeur de $l.\ 1+z$ exprimée par des $z$. 5°. Il faudra
par le retour des *ſuites* * trouver, en ſe ſervant de cette *234.
derniere équation, la valeur de $z$ lineaire exprimée par une
*ſuite* où il n'y ait que des $x$. Cette valeur ſera une équation
dont le premier membre ſera $z$, & le ſecond ſa valeur par
une *ſuite* où il n'y a que des $x$. Enfin il faudra prendre la
difference de chaque membre de cette équation, & ce
ſera la valeur de $dz$, & par conſequent la difference de
${\overline{1+x}^{1+x}}^{1+x}$ que l'on cherchoit.

Cette méthode peut s'étendre aux exponentielles des degrés plus élevés.

### REMARQUE.

QUAND l'expoſant changeant d'une grandeur changeante eſt different de cette changeante, comme dans $x^y$ ou $\overline{1+x}^{1+y}$,
&c. il faut ſçavoir* le raport de l'expoſant $y$ ou $1+y$ à $x$ ou *461.
à $1+x$, & prendre par le moyen de ce raport la valeur de $y$ exprimée par $x$, & la mettre dans l'expoſant à la place de $y$. Si par exemple $y = xx$, il faudra mettre $x^{xx}$, ou $\overline{1+x}^{1+xx}$, & ainſi des autres.

## PROBLÊME II.

*TROUVER les integrales des differentielles qui contiennent des expreſſions logarithmiques, & de celles qui contiennent des quantités exponentielles.*

## PREMIERE MÉTHODE.

777. LA premiere méthode eſt celle de l'art. 713, ainſi il ſuffira de l'appliquer à quelques exemples.

1er *Ex.* Pour trouver l'integrale de $xlx \times dx$, on la cherchera par parties par le moyen d'une integrale indéterminée, & l'on ſuppoſera que la premiere partie de l'integrale indéterminée eſt $Ax^2lx$, dans laquelle $A$ eſt indéterminée. On en prendra la difference qui eſt $2Axlx \times dx + Ax^2 \times \frac{dx}{x} = 2Axlx \times dx + Axdx$. Comme l'on doit ſuppoſer par la méthode de l'art. 713, qu'on employe ici, que la differentielle qui naîtra de l'integrale indéterminée eſt égale à la differentielle propoſée, & que les termes correſpondans ſont égaux, pour déterminer les coëficiens indéterminés; & que la differentielle propoſée $1xlx \times dx$ eſt déja le terme correſpondant du premier terme $2Axlx \times dx$ de la differentielle indéterminée; il faut ſe ſervir du ſecond terme $+ Axdx$ pour trouver quel eſt le ſecond terme qu'il faut ſuppoſer dans l'integrale indéterminée; c'eſt-à-dire, il faut trouver quel doit être le ſecond terme de l'integrale indéterminée, pour donner au moins un terme correſpondant à $+ Axdx$. Or il eſt évident que le ſecond terme doit être $Bx^2$, dont la difference eſt $2Bxdx$; ainſi l'on aura

$$\begin{array}{ll}\text{l'integrale indéterminée} & Ax^2lx \quad + \quad Bx^2\end{array}$$
$$\left.\begin{array}{lr}\text{ſa differentielle} & 2Axlx \times dx + Axdx\\ & + 2Bxdx\\ -\text{ la differentielle propoſée} & -1xlx \times dx\end{array}\right\} = 0.$$

Tous les termes de cette differentielle contenant les grandeurs qu'il faut pour déterminer les coëficiens, l'on a toutes les parties de l'integrale indéterminée. Il ne faut plus que ſuppoſer chaque terme de la differentielle égal à zero; ce qui donnera $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$; & ſubſtituer ces valeurs à la place des coëficiens dans l'integrale indéterminée, qui deviendra, par cette ſubſtitution, l'integrale $\frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2$ que l'on cherchoit.

On trouvera de la même maniere qu'en general $x^m lx \times dx$ a pour integrale $\frac{1}{m+1}x^{m+1}lx - \frac{1}{\overline{m+1}^2}x^{m+1}$.

2e *Exemple.* Pour trouver l'integrale de $x^m l^n x \times dx$, on fera les mêmes raiſonnemens que l'on a faits dans le premier

Exemple, & l'on trouvera par parties l'integrale indéterminée $Ax^{m+1}l^{n}x + Bx^{m+1}l^{n-1}x + Cx^{m+1}l^{n-2}x + Dx^{m+1}l^{n-3}x + \&c.$ ſa differentielle eſt

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\times Ax^{m}l^{n}x\times dx + nAx^{m}l^{n-1}x\times dx + \overline{n-1}\times Bx^{m}l^{n-2}x\times dx + \&c. \\ \qquad\qquad -\overline{m+1}\;Bx^{m}l^{n-1}x\times dx + \overline{m+1}\;Cx^{m}l^{n-2}x\times dx + \&c. \\ \text{la differentielle proposée.} \; -x^{m}l^{n}x\times dx. \end{array}\right\} = 0.$$

On ſuppoſera chaque terme de cette differentielle égal à zero, ce qui donnera $A=\frac{1}{m+1}$ $B=\frac{-n}{\overline{m+1}^{2}}$, $C=\frac{+n\times+\overline{n-1}}{\overline{m+1}}$, &c. on ſubſtituera ces valeurs dans l'integrale indéterminée, & après la ſubſtitution, l'on aura $\frac{1}{m+1}x^{m+1}l^{n}x - \frac{n}{\overline{m+1}^{2}}x^{m+1}l^{n-1}x + \frac{n\times\overline{n-1}}{\overline{m+1}^{3}}x^{m+1}l^{n-2}x - \&c.$ C'eſt l'integrale que l'on cherchoit; $m$ & $n$ repréſentent les nombres entiers qui peuvent être les expoſans de $x$ & du logarithme $lx$. Il eſt évident que quand $n$ eſt un nombre entier poſitif; l'integrale eſt finie, & qu'alors le dernier terme ne contient plus de logarithme, mais la ſeule inconnue $x$.

### *Troiſiéme Exemple ſur les grandeurs exponentielles.*

POUR trouver l'integrale de $x^{x}\times dx$, on ſuppoſera $x^{x}=1+y$; ce qui donnera $xlx=l.\,1+y$. Or $1+y=$ *$1+l.\,1+y + \frac{1}{2}l^{2}\,1+y + \frac{1}{2\times3}l^{3}\,1+y + \frac{1}{2\times3\times4}l^{4}\,1+y + \&c.$ ainſi en ſubſtituant dans cette équation la valeur de $l.\,1+y=xlx$, on aura $x^{x}=1+y=1+xlx+\frac{1}{2}x^{2}l^{2}x+\frac{1}{2\times3}x^{3}l^{3}x+\&c.$ en multipliant chaque membre par $dx$, on aura $x^{x}\times dx=dx+xlx\times dx+\frac{1}{2}x^{2}l^{2}x\times dx+\frac{1}{2\times3}x^{3}l^{3}x\times dx+\&c.$ en prenant les integrales de chaque terme du ſecond membre, comme dans le premier & le ſecond Exemple, on trouvera $S.\,x^{x}\times dx = x+\frac{1}{2}x^{2}lx-\frac{1}{4}x^{2}+\frac{1}{2\times3}x^{3}l^{2}x-\frac{1}{9}x^{3}lx+\frac{1}{27}x^{3}+\frac{1}{4}x^{4}l^{3}x-\frac{1}{32}x^{4}l^{2}x+\frac{1}{64}x^{4}lx-\frac{1}{4^{4}=256}x^{4}+\&c.$ C'eſt l'integrale que l'on cherchoit. * 646.

On donnera dans les uſages de ce calcul integral des différences logarithmiques & exponentielles, la maniere de connoître les grandeurs conſtantes qu'il faut ajouter aux integrales que l'on trouve pour les rendre completes.

## AVERTISSEMENT.

ON pourroit employer cette méthode pour trouver les integrales des differentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, comme $x^{\mathrm{m}} l.\, lx \times dx$, $x^{\mathrm{m}} l^{\mathrm{n}}\, lx \times dx$, &c. & les integrales des differentielles exponentielles $x^{x^{x}} \times dx$, & des autres plus élevées; mais comme elle ne fait trouver pour les integrales que des *ſuites* infinies qui contiennent des expreſſions logarithmiques fort compoſées, il vaut mieux ſe ſervir dans ces cas de la ſeconde méthode, qui fait trouver ces integrales par des *ſuites* qui ne contiennent que des grandeurs ordinaires.

## SECONDE MÉTHODE.

778. 1^er^ *Exemple*. Pour trouver par les *ſuites* l'integrale de $xlx \times dx$, ou, ce qui eſt mieux, de $\overline{1+x}\; l.\, 1+x \times dx$; 1°. Il faut réduire $l.\, 1+x$ en la *ſuite* qui lui eſt égale, $l.\, 1+x = 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. & multiplier cette *ſuite* par $\overline{1+x}\, dx$, & l'on aura $x\,dx + \frac{1}{2}x^2 dx - \frac{1}{2\times 3}x^3 dx + \frac{1}{3\times 4}x^4 dx -$ &c. $= \overline{1+x}\; l.\, 1+x \times dx$. 2°. Il faut prendre les integrales des termes de cette *ſuite*, & l'on aura $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\times 3}x^3 - \frac{1}{2\times 3\times 4}x^4 + \frac{1}{3\times 4\times 5}x^5 -$ &c. pour l'integrale que l'on cherchoit.

2^e^. *Exemple*. On trouvera de la même maniere l'integrale de $\overline{1+x}^{\mathrm{m}} l^{\mathrm{n}}\, 1+x \times dx$, en élevant la *ſuite* qui eſt la valeur de $l.\, 1+x$, à la puiſſance $n$, & la multipliant par $\overline{1+x}^{\mathrm{m}} \times dx$ réduite en la *ſuite* qui lui convient, & prenant enfin l'integrale de ce produit.

3^e^. *Exemple*. Pour trouver l'integrale de $\overline{1+x}^{1+x} \times dx$; 1°. on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$; ce qui donnera $\overline{1+x}\, l.\, 1+x = l.\, 1+y$. 2°. Après avoir trouvé * $\overline{1+x}\, l.\, 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. & $l.\, 1+y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. ce qui donnera l'équation $x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. on aura par le retour des *ſuites* * la valeur de $1+y = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^5 +$ &c. 3°. On multipliera le ſecond membre par $dx$, ce qui donnera l'équation $\overline{1+x}^{1+x} \times dx = dx + x\,dx + x^2 dx + \frac{1}{2}x^3 dx$ &c. & en prenant les integrales des termes du ſecond membre, on

* 775.

* 234.

aura $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 +$ &c. pour l'integrale que l'on cherchoit.

4$^e$. *Exemple.* Pour trouver l'integrale de $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} \times dx$, 1°. on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = 1 + z$, ce qui donnera $\overline{1+x}^{1+x}\, l.\, 1 + x = l.\, 1 + z$; on ſuppoſera de plus $\overline{1+x}^{1+x} = 1 + y$, ce qui donnera $\overline{1+x} \times l.\, 1 + x = l.\, 1 + y$, & encore $\overline{1+y}\, l.\, 1 + x = l.\, 1 + z$. 2°. * On trouvera la *ſuite* qui * 775.
eſt la valeur de $\overline{1+x} \times l.\, 1 + x$, où il n'y aura que des $x$, & la *ſuite* en $y$ qui eſt la valeur de $l.\, 1 + y$. On fera une équation de ces deux valeurs, & par le retour des *ſuites* on trouvera par cette équation la valeur de $1 + y$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des $x$; & l'on multipliera cette valeur de $1 + y$ par la *ſuite* qui eſt la valeur de $l.\, 1 + x$; & on mettra ce produit, qui eſt une *ſuite* en $x$, à la place de $\overline{1+y}\, l.\, 1 + x$ dans l'équation $\overline{1+y}\, l.\, 1 + x = l.\, 1 + z$. 3°. Après avoir trouvé la valeur de $l.\, 1 + z$ exprimée par la *ſuite* qui lui convient en $z$, & fait une équation de la valeur de $\overline{1+y}\, l.\, 1 + x$ en $x$, & de la valeur de $l.\, 1 + z$ en $z$, on trouvera par le retour des *ſuites* par le moyen de cette équation, la valeur de $1 + z$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des $x$. Il eſt évident que cette valeur de $1 + z$ en $x$ ſera égale à $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}}$; ainſi multipliant cette valeur de $1 + z$ par $dx$, elle ſera égale à $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} \times dx$. 4°. On prendra à l'ordinaire les integrales de tous les termes, & leur ſomme fera une *ſuite* qui ſera l'integrale que l'on cherchoit.

### AVERTISSEMENT.

ON peut ſi facilement appliquer cette ſeconde méthode aux differentielles des exponentielles plus élevées, & aux differentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, qu'il eſt inutile de s'y arrêter ici, & de plus cela n'eſt pas de grand uſage.

### *Uſage de la logarithmique pour décrire les courbes.*

9. LES courbes dont l'équation contient des expreſſions logarithmiques $lx$, $l.\, 1 + x$, S. $\frac{dx}{1+x}$, S. $\frac{a \times dx}{b \pm x}$, &c. ſe peuvent

décrire par le moyen de la logarithmique. On en mettra ſeulement ici deux exemples des plus ſimples, qui ſuffiront pour le faire clairement concevoir.

780. 1$^{er}$ *Exemple*. Pour décrire la courbe dont l'équation eſt $xlx$
$=y$, ou ſi l'on veut $\overline{1+x}\, l\, 1.+x=y$; 1°. Il faut avoir la
* 754. logarithmique $HBF$ toute tracée * dont on ſuppoſe que l'or-
FIG. L. donnée $AB$ eſt l'unité, $A$ l'origine des logarithmes des ordonnées; dont les poſitifs ſe prennent du côté de $ACE$, les négatifs du côté de $AI$; & on nommera les ordonnées $CD$, $EF$, $1+x$; les ordonnées des logarithmes négatifs comme $IH$, ſeront $1-x$; $AC$, $AE$, logarithmes des $CD$, $EF$, $(1+x)$, ſeront nommées $l.\ 1+x$, & $AI\ (-l.\ 1-x.)$ Quand un logarithme $\pm l.\ 1\pm x$ eſt déterminé, l'ordonnée $1\pm x$ eſt connue & déterminée; par exemple ſi $AI\ (-l.\ 1-x)$ $=AB=1$, $IH\ (1-x)$ eſt une grandeur connue.

2°. Suppoſant que $ALBM$ eſt la ligne des coupées de la courbe qu'on veut décrire, & que les ordonnées ſont paralleles à $ACE$; pour trouver chacun des points de la partie de la courbe dont les coupées $AM\ (1+x)$ ſurpaſſent l'unité, il faut prendre $AM$ plus grande que $AB$, & tirer $MDG$ parallele à $ACE$ qui coupe la logarithmique en $D$, & mener $DC$ parallele à $AB$, il eſt évident que $AM=DC$ étant
* 270. $1+x$; $AC$ eſt $l.\ 1+x$. Il faut faire * en lignes cette proportion qui ſe déduit de l'équation de la courbe $\overline{1+x}\ l.\ 1+x$ $=1y$; $AB\ (1).\ AC\ (l.\ 1+x) :: CD$ ou $AM\ (1+x).\ y$, qu'on ſuppoſe égale à $MG$; le point $G$ ſera l'un des points de la courbe; ſa coupée $1+x$ ſera $AM$; ſon ordonnée $y=\overline{1+x}$ $l.\ 1+x$ ſera $MG$. On trouvera de la même maniere chacun des autres points.

3°. Pour trouver les points de la partie de la courbe dont les coupées $AL$ ſont $1-x$. Ayant pris $AL$, il faut tirer $LH$ parallele à $AI$, & par le point $H$ où elle rencontre la logarithmique, tirer $HI$ parallele à $AB$, & faire enſuite cette
* 270. proportion en lignes * $AB\ (1).-AI\ (-l.\ 1-x) :: IH$ ou $AL\ (1-x).-y=\overline{1-x}\times -l.\ 1-x$, qu'on ſuppoſe égale à $-LK$, & le point $K$ du côté des ordonnées négatives ſera l'un des points de la courbe. On trouvera de la même maniere les autres points dont les coupées ſont les $1-x$.

La conſtruction ſeroit la même ſi l'on ſe ſervoit de cette expreſſion $xlx = y$ pour l'équation de la courbe ; & il y faudroit de même diſtinguer les coupées $x$ plus grandes que l'unité $AB$ dont les logarithmes $lx$ ſeroient poſitifs , des coupées $x$ moindres que l'unité $AB$ , dont les logarithmes $-lx$ ſeroient négatifs.

81. Si l'équation de la courbe étoit $x^2lx = y$ , $x^3lx = y$ , $x^4lx = y$ , &c. ( ce ſeroit la même choſe ſi l'on y exprimoit $x$ par $1 \pm x$ , ) la conſtruction ſeroit la même ; il faudroit ſeulement pour chaque coupée $AM$ ( $x$ ou $1 + x$ ) $AL$ ( $x$ ou $1 - x$ ,) prendre le double du logarithme $AC$ ( $lx$ ou $l.\ 1 + x$ , ) ou de $AI$ ( $-lx$ ou $-l.\ 1 - x$ ; ) & l'ordonnée de la logarithmique, dont ce double de $AC$ ou de $AI$ eſt le logarithme, ſera $x^2$ ou $\overline{1+x}^2$ ; ſi l'on prend le logarithme triple , quadrule , &c. ou qui ſoit la moitié , le tiers , &c. de $AC$ ou de $AI$ , l'ordonnée de la logarithmique qui répond à ce logarithme triple , quadruple, &c. ou qui eſt la moitié , le tiers , &c. du logarithme $AC$ ou $AI$ , ſera $x^3$ , $x^4$ , &c. ou $x^{\frac{1}{2}}$ , $x^{\frac{1}{3}}$ , &c. ou $\overline{1+x}^3$ , $\overline{1+x}^4$ , &c. ou $\overline{1+x}^{\frac{1}{2}}$ , $\overline{1+x}^{\frac{1}{3}}$ , &c. & cette ordonnée $x^3$ , $x^4$ , &c. ſeroit le troiſiéme terme de la proportion qui feroit trouver l'ordonnée $y$ de la courbe qu'on voudroit décrire, dont l'équation eſt $y = x^3lx$ , &c.

### *Second Exemple pour la conſtruction des courbes dont les équations contiennent des grandeurs exponentielles.*

82. POUR décrire la courbe dont l'équation eſt $x^x = y$ : d'où l'on tire l'équation logarithmique $xlx = ly$ ; 1°. ſuppoſant la logarithmique d f $BDF$ , dont l'ordonnée priſe pour l'unité ſoit $AB$ , & les autres ordonnées $CD$ , $EF$ , &c. ſont les grandeurs $x$ , & $AC$ , $AE$ leurs logarithmes $lx$ ; & les ordonnées de l'autre côté de l'unité, comme e f , c d , ſont les $x$ moindres que l'unité , & $Ae$ , $Ac$ ,&c. ſont leurs logarithmes $-lx$ ; il faut prendre les coupées $x$ de la courbe qu'on veut décrire ſur $ALBM$ , & les ordonnées paralleles à $ACE$. FIG. LI.

2°. Pour trouver chaque point de la courbe , il faut prendre une coupée quelconque $AM$ ($x$) , & tirer $MDG$ parallele à $AE$, laquelle rencontre la logarithmique en $D$, d'où il faut tirer $DC$ parallele & égale à $MA$ , & faire enſuite * en lignes * 270.

cette proportion que donne l'équation logarithmique $xlx = 1ly$ ; $AB(1) . AM$ ou $CD(x) :: AC(lx) . ly$, qu'on ſuppoſe égale à $AE$. Il eſt évident que l'ordonnée $EF$ eſt égale à $y$ ; ainſi il faut faire $MG = EF(y)$, & le point $G$ ſera un point de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de la même maniére les autres points.

3°. Pour trouver les points comme $K$ de la partie $bK$b de la courbe dont les coupées $AL(x)$ ſont moindres que l'unité $AB$, il faut prendre une coupée $AL(x)$, tirer par $L$ la ligne $KL$d parallele à la ligne des logarithmes $A$e, & mener par le point d, où elle rencontre la logarithmique, dc parallele & égale à $AL(x)$, & faire la même proportion $AB(1) . AL$ ou dc $(x) :: A$e $(-lx) . -ly$, qu'on ſuppoſe égale à $A$e ; il eſt évident que ef ſera égale à $y$ ; (on remarquera ici que quoique le logarithme $A$e $(-ly)$ ſoit négatif, l'ordonnée ef $(y)$ de la logarithmique n'eſt pas moins poſitive ;) ainſi il faut prendre $LK =$ ef $(y)$, & le point $K$ ſera un des points de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de même les autres points.

## REMARQUE.

783. 1°. L'EQUATION logarithmique $xlx = ly$ déduite de l'équation de la courbe $x^x = y$, fait connoître qu'en ſuppoſant à l'origine $A$, $x = 0$, $ly$ devient zero. Or zero eſt le logarithme de $AB = 1$, donc l'ordonnée $y$ dont $ly = 0$ eſt le logarithme, eſt égale à $AB$ ; ainſi prenant $A$b $= AB$, le point b eſt un point de la courbe.

2°. La même équation fait auſſi connoître que quand la coupée $x$ de la courbe eſt $= AB = 1$, $lx$ eſt zero ; ainſi $xlx$ devenant encore zero, $ly$ devient auſſi zero ; par conſéquent l'ordonnée $Bb(y)$ de la courbe au point $B$ eſt encore égale à $AB = 1$.

3°. Si dans l'équation $x^x = y$, l'expoſant $x$ étoit $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, &c. ou $2x$, $3x$, &c. ce qui donneroit l'équation logarithmique $\frac{1}{2}xlx = ly$, $\frac{1}{3}xl.x = l.y$, $2xl.x = l.y$, &c. la conſtruction de la courbe ſe feroit de la même maniére ; il n'y auroit qu'à mettre dans le ſecond terme de la proportion, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, &c. au lieu de $x$. Si l'expoſant $x$ étoit élevé à une puiſſance conſtante quelconque, comme $x^{x^2} = y$, $x^{x^3} = y$, &c. d'où l'on tireroit $x^2lx = ly$, $x^3lx = ly$, &c. on trouveroit le ſecond terme de la proportion $x^2$, $x^3$, &c. comme on l'a enſeigné à la fin du premier exemple.

4°. On fera remarquer ici que pour trouver les logarithmes de logarithmes des $x$, en ſuppoſant que $AM$ ou $DC$ eſt $x$, dont le logarithme $lx = AC$; il faut prendre ſur la ligne des $x$ qui eſt $AM$, la ligne $AH = AC\,(lx)$ & tirer $HI$ parallele à $AE$ juſqu'à la rencontre de la logarithmique en $I$, & il eſt évident que cette ligne $HI$ ou ſon égale $AP$ ſera $l.\,lx$. Fig. LI.

---

## *Les uſages du calcul différentiel & intégral des équations logarithmiques & exponentielles, pour trouver les propriétés des courbes de ces équations.*

84. ON trouve par le calcul différentiel les tangentes de ces courbes & les autres lignes qui y ont raport, les points où elles ſont les plus éloignées ou les plus proches de leur axe, & les autres propriétés qui ſe découvrent par le calcul différentiel.

Pour trouver la ſoutangente $MS$ d'un point $G$ quelconque de la courbe $KBG$ dont l'équation eſt $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = y$, il faut prendre les différences des deux membres de l'équation, & l'on aura $dx \times l.\ 1+x+1\,dx = 1\,dy$. Mettant cette valeur de $dy$ dans la formule de la ſoutangente * $\frac{ydx}{dy}$, & y ſubſtituant auſſi la valeur de $y = \overline{1+x}\ l.\ 1+x$, l'on aura la ſoutangente $MS = \frac{\overline{1+x} \times l.\ 1+x}{1+l.\ 1+x} = \frac{AM \text{ ou } DC \times AC}{AB+AC}$. Fig. L. * 550.

85. On trouvera de même la ſoutangente $MS$ d'un point quelconque $G$ de la courbe b$KG$ dont l'équation eſt $x^x = y$, d'où l'on déduit $xlx = ly$, en prenant la différence de chaque membre, qui eſt $dx \times lx + x \times \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$; d'où l'on déduira, en multipliant le tout par la valeur de $y$, $x^x lx \times dx + x^x dx = dy$; & mettant dans la formule de la ſoutangente * $\frac{ydx}{dy}$, les valeurs de $y$ & de $dy$, l'on aura la ſoutangente $MS = \frac{1}{1+x} = \frac{AB \times AB}{AB+AC}$. Fig. LI. * 550.

86. Si l'on veut découvrir le point $K$ le plus proche de l'axe $ABM$, il faut ſuppoſer * $dy = 0$, ce qui donnera $x^x lx + x^x = 0$, ou bien, diviſant par $x^x$, $1 + lx = 0$, & $1 = -lx$, ou $lx = -1$. * 556.

Mettant cette valeur dans l'équation $xlx = ly$, l'on aura $xx - 1 = ly$, où $-1$ eſt un logarithme négatif $-lx$ qui eſt égal à l'unité $AB$, ce qui fait voir qu'il faut prendre $A$c $= AB$, & tirer l'ordonnée cd qui ſera la valeur de $x$ par raport au point $K$ le plus proche de l'axe ; il faut auſſi mener d$LK$ parallele à $AE$, & elle rencontrera la courbe au point $K$ le plus proche ; l'on déterminera l'ordonnée $LK$ de ce point en faiſant cette proportion en lignes tirées de $xx - lx = 1\,ly$, $AB(1)$. cd ou $AL(x)$ :: $A$c $(-lx = -1)$. $-ly$ que l'on ſuppoſe égale à $A$e. Il faut enſuite tirer l'ordonnée e f qui ſera la valeur de $y$ dont $A$e $(-ly)$ eſt le logarithme, & faire $LK =$ fe $(y)$, & ce ſera l'ordonnée du point $K$ qui eſt la moindre des ordonnées.

### AVERTISSEMENT.

CES exemples ſuffiſent pour apprendre aux Lecteurs la maniére de découvrir les propriétés des courbes des équations logarithmiques & exponentielles que l'on peut trouver par le calcul différentiel. On découvre par le calcul intégral les rectifications de ces courbes, leurs quadratures, la meſure des ſolides formés par leur révolution autour d'un axe, la meſure des ſurfaces de ces ſolides, & les diſtances des centres de peſanteur de ces courbes, de leur aire, & des ſolides qui en ſont formés.

787. On mettra ſeulement ici pour exemples la maniére de trouver les quadratures des deux courbes qu'on a décrites.

FIG. L. 1$^{er}$ *Exemple.* Pour trouver l'aire $BGM$ de la courbe $BG$ dont l'équation eſt $\overline{1+x}\,l.\,1+x=y$, il faut ſe ſervir de la formule de la quadrature des courbes * $ydx$, qui devient ici $\overline{1+x}\,l.\,1+x\times dx$; ainſi la queſtion ſe réduit à trouver l'intégrale de cette différentielle. Or cette intégrale eſt * par le ſecond Problême $\frac{1}{2}\times\overline{1+x}^2\,l.\,1+x-\frac{1}{4}\overline{1+x}^2$.

*595.

*777.

### REMARQUE.

*La maniére de connoître les grandeurs conſtantes qu'il faut ajouter aux intégrales des différences logarithmiques & exponentielles pour les rendre completes.*

788. POUR voir ſi l'intégrale eſt complete, il faut ſuppoſer $l.\,1+x=0$, ce qui rendra le premier terme de l'intégrale

$= 0$, & $1 + x = 1$. En mettant dans le ſecond terme 1 à la place de $1 + x$, l'on trouve la grandeur négative $- \frac{1}{4}$; ainſi $\frac{1}{4}$ eſt la quantité conſtante qu'il faut ajoûter avec un ſigne oppoſé à l'intégrale trouvée; l'intégrale complete eſt donc $\frac{\overline{1+x}^2}{2} \times l.\, 1 + x - \frac{\overline{1+x}^2}{4} + \frac{1}{4}$. La raiſon de cette régle eſt que l'intégrale exprime l'aire *BGM* qui eſt zero à l'origine *B* de la courbe; ainſi l'intégrale doit auſſi être zero au point *B*; or on trouve qu'elle devient, à ce point *B*, $- \frac{1}{4}$; il faut donc lui ajouter $+ \frac{1}{4}$, afin qu'à ce point elle devienne $= 0$; ainſi $+ \frac{1}{4}$ eſt la quantité conſtante qui doit être ajoutée à l'intégrale pour lui ôter ce qu'elle a de trop, & pour la rendre exacte.

Si les $x$ commençoient à l'origine *A*, & que l'on ſe ſervît de cette expreſſion $xlx = y$, il ne faudroit pas moins, afin que l'intégrale exprimât exactement l'aire *BGM*, ſuppoſer $lx = 0$, ce qui rendroit $x = 1$; & l'intégrale de $xlx \times dx$ qui ſeroit alors $\frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2$, deviendroit de même $- \frac{1}{4}$, & comme il eſt évident que quand $x$ eſt égale à *AB* (1), l'aire $BGM = 0$, il eſt auſſi évident qu'il faut ajouter $+ \frac{1}{4}$ à l'intégrale afin qu'elle devienne zero au point *B*. Ainſi l'intégrale étant trop grande de $- \frac{1}{4}$, il faut lui ajouter $+ \frac{1}{4}$ pour la rendre complete.

789. 2$^{d}$ *Exemple.* Pour trouver l'aire *AMGK*b de la courbe bKG, dont l'équation eſt $x^x = y$, il faut ſe ſervir de la formule $ydx$ *, qui devient ici $x^x dx$; ainſi la queſtion ſe réduit à trouver l'intégrale de $x^x dx$; or l'on a trouvé * que cette intégrale eſt $S.\, x^x dx = x + \frac{1}{2}x^2 lx - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 l^2 x - \frac{1}{9}x^3 lx + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{24}x^4 l^3 x - \frac{1}{32}x^4 l^2 x + \frac{1}{64}x^4 lx - \frac{1}{256}x^4$ + &c. Ainſi l'aire que l'on cherche eſt exprimée par cette intégrale. FIG. LI. * 595. * 777. 3$^{e}$ *Exemp.*

## REMARQUE.

790. COMME l'on ſuppoſe que l'intégrale commence à l'origine *A*, & qu'elle doit exprimer l'aire *AMGK*b qui commence à la même origine *A*, il eſt évident que $x$ étant zero au point *A*, l'aire y doit auſſi être zero : il faut donc ſuppoſer $x = 0$, & comme cette ſuppoſition détruit tous les termes de l'intégrale, il n'y a point de grandeur conſtante à y ajoûter.

Si l'on vouloit l'aire *BMGb* qui commence au point *B*, ou à l'ordonnée *Bb*, il faudroit ſuppoſer $lx = 0$, ce qui donneroit *AB* $(x) = 1$; & ſubſtituant ces valeurs de $lx$ & de $x$ dans l'intégrale, il reſteroit $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} -$ &c. ainſi il eſt évident que la ſomme de cette ſuite ſeroit la grandeur conſtante qu'il faudroit ajoûter ſous un ſigne oppoſé à l'intégrale, afin qu'elle exprimât l'aire *BMGb* qui commence à l'ordonnée *Bb*.

Comme $AB = 1$, & que le logarithme de *AB* eſt zero; en ſuppoſant dans l'intégrale trouvée $lx = 0$, & $x = 1$, l'on trouve la ſuite $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} -$ &c. qui exprime la valeur de l'aire *ABbb*.

On peut auſſi trouver l'intégrale de $x^x dx$ par la ſeconde méthode du ſecond Problême.

## *Autre uſage des expreſſions logarithmiques & exponentielles pour trouver les intégrales des différentielles qui ſont des fractions dont le numérateur & le dénominateur ne contiennent que les puiſſances d'une même changeante, mais qui ſont toutes commenſurables.*

### AVERTISSEMENT.

ON ne peut pas trouver par les méthodes qui font découvrir les intégrales des différentielles, celles des différentielles, comme $\frac{ix^3 + ixx + mx + n}{pxx + qx + r} \times dx$, qui contiennent une fraction où il n'y a qu'une même changeante $x$ dont toutes les puiſſances ſont commenſurables : c'eſt pourquoi on a été obligé de chercher une autre méthode pour ces différentielles. Voici celle qu'on a découverte pour trouver les intégrales de ces différentielles par le moyen des expreſſions logarithmiques & exponentielles.

*Mémoires de l'Académie, 1702. p. 289.*

791. Soit une telle différentielle repréſentée par $\frac{p}{q} dx$, dont $p$ repréſente le numérateur & $q$ le dénominateur, chacun compoſé de termes qui contiennent les puiſſances de $x$ avec des conſtantes comme dans une équation, & $p$ & $q$ ſont ſuppoſées commenſurables. 1°. Il faut diviſer $p$ par $q$ juſqu'à ce que la plus haute dimenſion de $x$ ſoit moindre dans $q$

que dans $p$, à moins que cela ne ſe trouvât déja, & que l'on ne pût plus continuer la diviſion, car il la faut continuer tant qu'elle ſe pourra faire. Cette opération réduira la différentielle en deux parties, dont la premiére ſera le quotient commenſurable qui eſt venu de la diviſion; la ſeconde ſera le reſte de la diviſion chacun multiplié par $dx$. Il eſt évident qu'on peut toujours trouver l'intégrale de la premiére partie; ainſi il ne reſte qu'à trouver l'intégrale du reſte, qu'on ſuppoſe repréſenté par $\frac{r}{q}dx$. (Si $r$ & $q$ avoient quelque diviſeur commun, il faudroit les diviſer par ce diviſeur commun pour abreger le reſte; on ſuppoſe ici qu'ils n'en ont pas.)

2°. Il faut ſuppoſer $\frac{r}{q}dx = \frac{a\times dx}{f+x} + \frac{b\times dx}{g+x} + \frac{c\times dx}{h+x} +$ &c. c'eſt-à-dire il faut ſuppoſer $\frac{r}{q}dx$ égal à autant de différentielles logarithmiques qu'il y a d'unités dans la plus haute dimenſion de $x$ dans $q$, & que chacune ſoit multipliée par une grandeur conſtante indéterminée $a$, $b$, $c$, &c. On ſuppoſe auſſi que $f$, $g$, $h$, &c. ſont des conſtantes indéterminées.

3°. Il faut réduire ces différentielles en une ſomme qui les contienne toutes, ce qui ſe fait en les réduiſant au moindre dénominateur commun, & il eſt évident que la plus haute dimenſion de $x$ ſera la même dans le dénominateur de cette ſomme & dans $q$, & ſi la plus haute dimenſion de $x$ dans le numérateur de cette ſomme ſurpaſſoit celle de $x$ dans $r$, il faudroit ſuppoſer dans $r$ les termes qui manqueroient multipliés chacun par zero: il eſt évident que par cette opération le numérateur de la ſomme & $r$, auront un même nombre de termes, & de même le dénominateur de la ſomme & $q$. Il faut faire des équations des termes correſpondans des numérateurs, & de même des termes correſpondans des dénominateurs, & on trouvera les valeurs de toutes les indéterminées conſtantes $a$, $b$, $c$, &c. $f$, $g$, $h$, &c. qu'on a ſuppoſées, leſquelles valeurs ſeront exprimées par les coéficiens donnés des termes de $r$ & de $q$. Il faut ſubſtituer ces valeurs à la place de ces indéterminées dans $\frac{a\times dx}{f+x} + \frac{b\times dx}{g+x} + \frac{c\times dx}{h+x} +$ &c. & elles deviendront par ces ſubſtitutions les différentielles logarithmiques dont on a beſoin: on les ſuppoſera ici avec les mêmes lettres, mais on les doit à préſent regarder comme déterminées.

4°. Comme $\frac{dx}{f+x}$ eſt la différentielle de $l.f+x$, & qu'ainſi

S. $\frac{dx}{f+x} = l.f+x$, & qu'il en eſt de même des autres ; il eſt évident que pour avoir l'intégrale de $\frac{r}{q}dx = a \times \frac{dx}{f+x} + \frac{b\times dx}{g+x} + \frac{c\times dx}{h-x} +$ &c. il faut prendre les logarithmes de ces différentielles, & l'on aura S. $\frac{r}{q}dx = a \times l.\overline{f+x} + b \times l.\overline{g+x}$
* 770. $+ c \times l.\overline{h+x} +$ &c. Mais $a \times l.\overline{f+x} =$ * $l.\overline{f+x}^{a}$, ainſi S. $\frac{r}{q}dx = l.\overline{f+x}^{a} + l.\overline{g+x}^{b} + l.\overline{h+x}^{c}$. De plus, la ſomme
* 770. des logarithmes de pluſieurs grandeurs eſt égale * au ſeul logarithme du produit de ces grandeurs ; c'eſt pourquoi l'on aura enfin S. $\frac{r}{q}dx = l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$ ; c'eſt l'intégrale du reſte $\frac{r}{q}dx$, *qu'il falloit trouver.*

## COROLLAIRE.

792. QUAND on trouve dans la réſolution d'un Problême une équation $\frac{p}{q}dx = \frac{\pi}{\chi}dy$, dont chaque membre eſt une différentielle ſemblable à celle dont on vient d'enſeigner à trouver l'intégrale, mais dont le premier ne contient que la changeante $x$, & le ſecond que la changeante $y$ ; on peut, en trouvant par la méthode précédente l'intégrale de chaque membre, réduire l'équation à une autre équation qui ne contienne que des logarithmes, &, ſi l'on veut, à une équation exponentielle : après quoi ſi l'équation propoſée exprime la nature d'une courbe, on pourra la décrire par le moyen de la logarithmique. Car ſuppoſant que la premiére partie du premier membre $\frac{p}{q}dx$, qui eſt le plus grand quotient de $p$ diviſé par $q$ dont on peut toujours trouver l'intégrale, ait pour intégrale x, & que l'intégrale du reſte ſoit $l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$, & qu'ainſi l'intégrale entiére du premier membre ſoit S. $\frac{p}{q}dx = 1\,\mathrm{x} + l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$, & que de même l'intégrale du ſecond membre ſoit S. $\frac{\pi}{\chi}dy = 1\,\mathrm{y} + l.\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\chi}$ ; l'on aura l'équation $1 \times \mathrm{x} + l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = 1 \times \mathrm{y} + l.\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\chi}$, qu'on peut réduire à une équation exponentielle, en prenant l'unité par laquelle x & y ſont conçues multipliées pour un logarithme conſtant, dont le nombre ou l'ordonnée dans la logarithmique ſoit la grandeur con-

nue $n$; (cette unité ne doit pas être celle de la logarithmique, dont le logarithme eſt zero,) ainſi l'on aura $1 = l.\,n$; & mettant $l.\,n$ au lieu de $1$ dans $1 \times x$ & $1 \times y$, l'on aura $x \times ln + l.\,\overline{f+x}^{a} \times$ &c. $= y \times l.\,n + l.\,\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times$ &c. Mais $x \times ln$* $= l.\,n^{x}$, & $y \times l.\,n = l.\,n^{y}$; & de plus la ſomme des logarithmes de pluſieurs nombres eſt égale au logarithme du produit de ces nombres; on aura donc $l.\,n^{x} \times \overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = l.\,n^{y} \times \overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{x}$; & les logarithmes de deux grandeurs étant égaux, il faut que ces grandeurs ſoient égales, en ſuppoſant les logarithmes d'une même logarithmique; on aura donc enfin $n^{x} \times \overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = n^{y} \times \overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{3} \times \overline{\lambda+y}^{x}$, qui eſt l'équation exponentielle à laquelle on a réduit l'équation propoſée, & elle devient quelquefois une équation qui n'a que des grandeurs algebriques ordinaires, comme quand $x$ & $y$ ſont chacune zero, & que tous les expoſans ſont des nombres. * 77

## REMARQUES.

### I.

3. IL n'eſt pas néceſſaire que chaque membre de l'équation contienne une differentielle comme $\frac{p}{q}\,dx$ telle qu'on l'a expliquée, pour en déduire une équation exponentielle; il eſt évident qu'il ſuffit qu'un ſeul nombre en contienne une, & que l'autre nombre contienne une differentielle dont on puiſſe avoir l'integrale par les méthodes ordinaires, comme $\frac{p}{q}\,dx = dy$; car il ſera facile* de la réduire à une équation exponentielle. * 775.

### II.

4. Il y a encore des differentielles que l'on réduit à des differentielles logarithmiques dont on peut par conſéquent trouver les integrales par les logarithmes; par exemple, la differentielle $\frac{adx}{bb-xx}$ ſe réduira, (en ſuppoſant $z = \frac{+b+x}{+b-x}$, & ſubſtituant les valeurs de $dx$ & de $-xx$ priſes de cette équation, qui ſont $dx = \frac{2b \times dz}{\overline{z+1}^{2}}$, & $xx = \frac{\overline{bz-b}^{2}}{\overline{z+1}^{2}}$,) à $\frac{a}{2b} \times \frac{dz}{z} = \frac{adx}{bb-xx}$; & $\frac{a}{2b} \times \frac{dz}{z}$ eſt une differentielle logarithmique multipliée par une conſtante dont l'integrale eſt $\frac{a}{2b} \times l.\,z$.

La differentielle $\frac{4xxdx}{1-xx}$ ſe réduit à $-4dx+\frac{2dx}{1+x}+\frac{2dx}{1-x}$ *770. $=\frac{4xxdx}{1-xx}$, dont l'integrale eſt $-4x+2l1+x-2l1-x=$* $-4x+2l\frac{1+x}{1-x}$.

---

# SECTION IV.

## *Où l'on explique l'uſage du calcul integral pour trouver la rectification des courbes, leur quadrature, la meſure des ſolides formés par leur révolution, la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides, & la diſtance du centre de peſanteur.*

### ME'THODE.

795. LES principaux uſages du calcul integral ſont de faire découvrir les réſolutions des Problêmes, dont on a donné les formules dans la troiſiéme Section de la ſeconde Partie, par raport à chacune des courbes que l'on peut imaginer, geometriques, méchaniques, exponentielles. Pour cela il n'y a qu'à prendre, par le moyen de l'équation de chaque courbe, les valeurs des lettres des formules, & ſubſtituer ces valeurs à la place de ces lettres dans les formules, & par là elles deviendront propres à cette courbe, & elles exprimeront les élemens de ſa longueur, de ſon aire, du ſolide formé par ſa révolution, de la ſurface courbe de ce ſolide, de la diſtance du centre de peſanteur. Il faut enſuite trouver par les méthodes de cette troiſiéme Partie les integrales de ces élemens, & elles ſeront les réſolutions de ces Problêmes. On en donnera ſeulement ici quelques exemples en forme de Problêmes.

### PROBLÊME I.

*TROUVER la rectification des courbes par le moyen de la formule* S. $\sqrt{dx^2+dy^2}$.

### EXEMPLE I. POUR LES COURBES GEOMETRIQUES.

796. POUR mettre une infinité d'exemples en un ſeul, on cherchera la rectification des paraboles de tous les degrés, & des hyperboles de tous les degrés par raport à leurs aſymptotes, par le moyen de la formule S. $\sqrt{dx^2+dy^2}$, & de

l'équation $1^{q-1}y = x^q$ qui eſt commune à toutes ces courbes, en prenant le parametre pour l'unité afin d'abreger le calcul. On a déja trouvé * que l'élement de toutes ces courbes * 591. étoit $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{qqx^{2q-2} + 1}$ ; il ne faut plus que trouver l'integrale de cet élement ; on la trouvera par la formule generale des integrales des differentielles binomes

$$* \text{S. } gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^{p} = \frac{g}{n} \times \overline{a + bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s \times b} x^{m+1-n} \quad * 682.$$

$$- \frac{\overline{r-1}}{s \times \overline{s-1}} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{\overline{r-1} \times \overline{r-2}}{s \times \overline{s-1} \times \overline{s-2}} \times \frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n} - \&c.$$

dans laquelle $\frac{m+1}{n} = r$, & $r + p = \frac{m+np+1}{n} = s$ : En ſuppoſant $g = 1$, $a = 1$, $b = qq$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $n = 2q - 2$, $r = \frac{1}{2q-2}$, $s = \frac{q}{2q-2} = r + p$ ; & ſubſtituant ces valeurs dans la formule, on trouvera $\text{S. } dx\sqrt{1 + qqx^{2q-2}} = \frac{1}{2q-2} \times$

$$\overline{1 + qqx^{2q-2}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{s \times qq} x^{-2q+3} - \frac{\overline{r-1}}{s \times \overline{s-1}} \times \frac{1}{q^4} x^{-4q+5} +$$

$$\frac{\overline{r-1} \times \overline{r-2}}{s \times \overline{s-1} \times \overline{s-2}} \times \frac{1}{q^6} x^{-6q+7} - \frac{\overline{r-1} \times \overline{r-2} \times \overline{r-3}}{s \times \overline{s-1} \times \overline{s-2} \times \overline{s-3}} \times \frac{1}{q^8} x^{-8q+9}$$

$+$ &c. C'eſt l'integrale de l'élement $dx\sqrt{1 + qqx^{2q-2}}$, ou plutôt une formule pour trouver cette integrale ſelon les differens nombres qu'on mettra à la place de l'expoſant indéterminé $q$, qui repréſente tous les nombres.

Dans toutes les paraboles où $r = \frac{1}{2q-2}$ ſe trouvera égale à un nombre entier poſitif, l'integrale ſera finie & exacte comme on le voit par la formule même. Or en ſuppoſant $q$ égale à une fraction dont le numerateur eſt un nombre impair quelconque au-deſſus de l'unité, comme 3, 5, 7, 9, &c. & dont le dénominateur eſt le nombre pair qui eſt moindre d'une unité que le numerateur, l'on aura toujours $r = \frac{1}{2q-2}$ égale à un nombre entier poſitif ; car ſuppoſant le dénominateur pair $= a$, le numerateur ſera $a + 1$, & $q = \frac{a+1}{a}$ ; ce qui donnera $r = \frac{1}{2q-2} = \frac{a}{2a+2-2a} = \frac{a}{2}$, qui eſt un nombre entier, puiſque $a$ eſt pair : ce qui fait appercevoir à l'eſprit une infinité de courbes geometriques compriſes ſous l'équation $1y = x^q$, (qu'on peut exprimer ainſi par raport à ces courbes, en ſuppoſant que $a$ marque tout nombre pair poſitif, $1y^a = x^{a+1}$,) leſquelles courbes peuvent toutes être exactement rectifiées par le moyen de la formule qu'on vient de découvrir.

Si l'on prend pour exemple la ſeconde parabole cubique dont l'équation eſt $1y^2 = x^3$, où $q = \frac{3}{2}$, on trouvera la même
* 663. rectification qu'on a déja* trouvée, qui eſt $\frac{1}{27} \times \overline{4 + 9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$.

Si l'on prend la parabole $1y^4 = x^5$ dans laquelle $q = \frac{5}{4}$, l'élement ſera $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{25}{16}x\frac{2}{4}}$, & $r = 2$, $s = \frac{5}{2}$; & faiſant la ſubſtitution des valeurs de $r$, $s$, $q$ dans la formule, on trouvera l'integrale $2 \times \overline{1 + \frac{25}{16}x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1024}{9375}$.

*664. Pour avoir l'integrale complete* il faut ſuppoſer $x = 0$, ce qui donnera (en réduiſant au même dénominateur les grandeurs qui ſont ſous le ſigne du commun multiplicateur, ce qui le changera en $2 \times \frac{\overline{16 + 25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}}}{16^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{64} \times \overline{16 + 25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}}$) $- \frac{1024}{9375} \times \frac{2}{64} \times 64 = -\frac{2048}{9375}$, pour la grandeur conſtante qu'il faut ajouter ſous le ſigne oppoſé + à l'integrale qu'on a trouvée, afin qu'elle ſoit complete. La longueur d'un arc de la parabole $1y^4 = x^5$, dont la coupée eſt telle partie de l'axe qu'on voudra être marquée par $x$, ſera donc $\frac{1}{32} \times \overline{16 + 25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1024}{9375} + \frac{2048}{9375} = \frac{1}{32} \times \overline{16 + 25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1024}{9375}$.

L'on doit remarquer que l'on peut trouver de même, dans les autres paraboles dont on découvrira la rectification par la formule, la quantité conſtante qu'il faudra ajouter ſous un ſigne oppoſé à l'integrale trouvée, afin qu'elle ſoit complete.

## AVERTISSEMENT.

LES Lecteurs qui commencent, peuvent faire tant d'exemples qu'il leur plaira ſur les paraboles plus élevées dont on peut trouver la rectification exacte. Celui que l'on vient d'expliquer ſuffit pour leur faire voir la maniere dont on trouve les integrales exactes par les méthodes que l'on a données, des differentielles qui ſont les élemens de la rectification des courbes, lorſque ces differentielles peuvent avoir des integrales exactes par ces méthodes.

On va leur faire voir, à l'égard des autres paraboles, dont on ne peut pas trouver, par les méthodes que l'on a données, les integrales exactes qui en expriment les rectifications, la maniere de diſtinguer quelles ſont celles dont on peut avoir les integrales finies en ſuppoſant la rectification de la parabole du premier genre $1y = x^{\frac{1}{2}}$, qui eſt exprimée par S. $\sqrt{dx^2 + dy^2} =$ S. $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \times \sqrt{1+4x}$, & la maniere de trouver ces integrales finies, par les méthodes que l'on en a données. * * 694 & 721.

7. Pour cela, 1°. il faut transformer l'élement general de la rectification des paraboles $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}}$ en un autre qui appartienne à la parabole ſimple, c'eſt-à-dire, dont les quantités qui ſont ſous le ſigne ſoient, la premiere l'unité ou une conſtante; & que dans la ſeconde, la changeante ne ſoit que lineaire. Cette transformation * ſe fera en ſuppoſant $x^{2q-2} = u$, d'où l'on déduira $du = \overline{2q-2} \times x^{2q-3} dx$; * 737. & faiſant enſuite cette proportion $\overline{2q-2} \times x^{2q-3} dx . dx :: \overline{1+qqx^{2q-2}}^{\frac{1}{2}} . \frac{\overline{1+qqx^{2q-2}}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2q-2} \times x^{2q-3}}$; & ſubſtituant $u$ à la place de $x$ dans le quatriéme terme, & multipliant la quantité qui en viendra par $du$, on trouvera $\frac{1}{2q-2} \times u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \overline{1+qqu}^{\frac{1}{2}}$ pour la differentielle transformée dont l'integrale eſt égale à l'integrale de l'élement propoſé. Or il eſt évident que cette differentielle ſeroit l'élement de la rectification d'une parabole ſimple, ſi l'expoſant $-\frac{2q+3}{2q-2}$ de la changeante $u$ hors du ſigne étoit égal à $-\frac{1}{2}$; & qu'en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple $\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \times \overline{1+4u}^{\frac{1}{2}}$, on pourra y réduire l'integrale de $\frac{1}{2q-2} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \overline{1+qqu}^{\frac{1}{2}}$, par les méthodes expliquées dans les articles 694 & 721, dans tous les cas où l'expoſant $-\frac{2q+3}{2q-2}$ pourra devenir égal à $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, à $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$, à $-\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$, &c.

c'eſt-à-dire dans tous les cas où l'on pourra faire en ſorte que cet expoſant ſoit ſucceſſivement égal à chacun des termes de la ſuite infinie $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. Il faut donc chercher quelle doit être la valeur de $q$, afin que cela arrive. Il n'y a qu'à ſuppoſer $2 = a$, & que l'indéterminée $n$ repreſente tel nombre entier poſitif qu'on voudra, y comprenant l'unité & zero, & il eſt évident que $\frac{na+1}{a}$ repreſentera tel terme qu'on voudra de la ſuite $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. Il faut ſuppoſer $-\frac{2q+3}{2q-2} = \frac{na+1}{a}$, ce qui donnera $q = \frac{2na+3a+2}{2na+2a+2} =$ ( en remettant au lieu de $a$ ſa valeur 2 ) $\frac{2n+4}{2n+3}$. Si l'on ſuppoſe à preſent l'indéterminée $n$ égale ſucceſſivement à 0, 1, 2, 3, 4, &c. on aura $q$ ſucceſſivement égal à $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{10}{9}$, &c. ainſi, en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple, on pourra trouver la rectification finie de toutes les paraboles à l'infini où l'expoſant $q$ ſera égal à une fraction quelconque dont le numerateur ſera un nombre pair, & le dénominateur le nombre impair qui eſt moindre d'une unité que le numerateur : car alors l'élement $\frac{1}{2q-2} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$, commun à toutes ces paraboles, qui en exprime un arc infiniment petit, deviendra ſucceſſivement $\frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{16}{9}u}$, $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$, $\frac{7}{2} u^{\frac{5}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{64}{49}u}$, &c. & l'on peut en trouver les integrales finies en ſuppoſant la rectification de la parabole ſimple ; mais comme ces differentielles particulieres ſuppoſent chacune la rectification d'une parabole ſimple particuliere qui lui eſt propre, c'eſt-à-dire, dont le parametre eſt déterminé, il faut encore enſeigner à ceux qui commencent, comment on peut trouver une expreſſion indéterminée du parametre de toutes ces paraboles ſimples qui convienne à toutes, & qui devienne particuliere par la ſeule détermination de l'expoſant indéterminé $q$.

Pour la trouver, je remarque que l'élement de la rectification d'une parabole ſimple, dont le parametre eſt marqué
* 591. en general par $p$, eſt* $\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1p+4u}$, qui me fait voir que le ſecond terme $4u$ de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, ayant pour conſtante 4, le premier terme $1p$ con-

tient le parametre $p$ multiplié par l'unité. Je connois par là qu'en réduiſant la differentielle $\frac{1}{2q-2} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$ à avoir ſous le ſigne $4u$ au lieu de $qqu$, (en le faiſant de ſorte que cela ne change point la valeur de la differentielle,) la grandeur conſtante qui par cette operation ſera le premier terme ſous le ſigne, ſera auſſi le parametre de la parabole ſimple que je cherche. Or pour trouver la quantité dont il faut me ſervir pour réduire $qqu$ à $4u$, je ſuppoſe $zqq = 4$, ce qui me donne $z = \frac{4}{qq}$, & $\frac{4}{qq}$ eſt la quantité par laquelle multipliant les termes qui ſont ſous le ſigne, je réduirai $qqu$ à $4u$, & diviſant en même temps la quantité hors du ſigne par $\sqrt{\frac{4}{qq}} = \frac{2}{q}$, la differentielle nouvelle ſera équivalente à la premiere, & elle ſera $\frac{\frac{1}{2q-2}}{\frac{2}{q}} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{\frac{1 \times 4 + 4qqu}{qq}}$ : Elle me fait connoître que $\frac{4}{qq}$ eſt l'expreſſion indéterminée du parametre que je cherche : ainſi l'expreſſion de la parabole ſimple ſera (nommant ſon ordonnée $z$ & ſa coupée $u$) $zz = \frac{4}{qq} u$, ou $z = \frac{2}{q} u^{\frac{1}{2}}$ ; l'élement de ſa rectification ſera $\frac{1}{q} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+qqu}$.

D'où l'on voit que la rectification S. $\frac{1}{q} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+qqu}$ de la parabole ſimple, dont $\frac{4}{qq}$ eſt le parametre, étant ſuppoſée, l'on peut trouver la rectification finie de toutes les paraboles dont l'élement de la rectification eſt repreſenté par $\frac{1}{2q} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$, en ſuppoſant que $q$ eſt ſucceſſivement égal à chacun des termes de la ſuite $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}$, &c.

98. Par exemple on veut chercher la rectification de la parabole $1y^5 = x^6$, où $q = \frac{6}{5}$, on trouve* que l'élement de ſa * 592.
rectification eſt $dx \sqrt{1 + \frac{36}{25} x^{\frac{2}{5}}}$ ; que ſa transformée eſt* (en * 737.
ſuppoſant $x^{\frac{2}{5}} = u$) $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \sqrt{1 + \frac{36}{25} u}$; que la parabole ſimple dont il faut ſuppoſer la rectification pour avoir celle de la propoſée, eſt $z = \frac{10}{6} u^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3} u^{\frac{1}{2}}$, dont le parametre $\frac{4}{qq}$ eſt $\frac{4 \times 25}{36} = \frac{25}{9}$ ; que la rectification de celle qu'il faut ſuppoſer
eſt* S. $\frac{5}{6} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1 + \frac{36}{25} u}$. * 591.

Pour trouver cette rectification finie, on peut ſe ſervir de *694. la * 3ᵉ formule des integrales des differentielles binomes, ou *721. du premier Problême * de la ſeconde Section, en remarquant, ſi l'on ſe ſert du premier Problême, que chaque terme de l'integrale qu'on cherche doit ajouter à l'expoſant $-\frac{1}{2}$ de $u^{-\frac{1}{2}}$ qui eſt hors du ſigne, le premier l'unité, parceque $n$ de la formule ou du premier Problême eſt ici l'unité, ce qui fera changer $-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2}$; le ſecond terme doit encore ajouter une unité, ce qui changera $-\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$. Ainſi ſi l'on ſe *721. ſert du premier Problême *, il faut faire deux operations; *694. & en ſe ſervant de la troiſiéme formule *, (par où l'on va commencer ici,) il faut prendre les deux premiers termes de la formule, qui donneront les deux premiers termes exacts de l'integrale qu'on cherche, & le terme qui les ſuit diſtingué par une parentheſe, & marqué B; il finira l'integrale qu'on cherche par la ſuppoſition de la rectification donnée. Ce qui détermine à prendre ces trois termes eſt l'expoſant $+\frac{1}{2}$ de $u^{\frac{1}{2}}$ de la transformée, qui devant baiſſer d'une unité à chaque terme, parceque $n$ de la formule eſt égale à $1 = \frac{2}{2}$, l'on voit qu'il faut qu'il baiſſe de 2 ou de $\frac{4}{2}$ pour devenir $-\frac{1}{2}$ qui eſt l'expoſant de $u^{-\frac{1}{2}}$ dans la rectification ſuppoſée de la parabole ſimple; d'où l'on voit auſſi que c'eſt le terme $\frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{m+1-2n}{m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times S.\, gu^{m-2n}\, du \times$ *694. $\overline{a+bu^{n}}^{p}$, qu'il faut prendre dans la troiſiéme formule * pour déterminer la valeur de $m$. En voici l'operation.

1°. Il faut ſuppoſer que l'élement de la rectification de la parabole ſimple $\frac{5}{6} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$, (laquelle a pour parametre $\frac{4}{99} = \frac{4 \times 25}{36} = \frac{25}{9}$) eſt repreſenté par $gu^{m-2n}\, du \times \overline{a+bu^{n}}^{p}$; ainſi $g = \frac{5}{6}$, $a = 1$, $b = \frac{36}{25}$, $p = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $m - 2n = m - 2 = -\frac{1}{2}$, ce qui détermine $m = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

2°. Il faut ſubſtituer ces valeurs dans le commun multiplica- *694. teur dés termes de la troiſiéme formule * qui ſont des integrales exactes, lequel eſt $g \times \overline{a+bu^{n}}^{p+1}$, qu'on a nommé $u$ dans la formule, il devient par ces ſubſtitutions $\frac{5}{6} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$.

3°. Il faut auſſi ſubſtituer ces mêmes valeurs dans les deux premiers

premiers termes exacts de la formule, & dans le terme B de la rectification ſuppoſée qui les ſuit, & l'on trouvera $\frac{5}{6} \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}} \times \overline{\frac{1}{3} \times \frac{25}{36}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \times \frac{25\times25}{36\times36}u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8} \times \frac{25\times25}{36\times36} \times S.\ \frac{5}{6}u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$.

Mais comme la transformée a pour coéficient $\frac{5}{2}$, & que l'élément de la rectification ſuppoſée n'a pour coéficient que $\frac{5}{6}$, la quantité qu'on vient de trouver n'eſt l'intégrale que de $\frac{5}{6}u^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$; ainſi il faut encore la multiplier par le nombre 3; (car multipliant $\frac{5}{6}$ par 3, le produit ſera $\frac{5}{2}$,) & enſuite elle ſera l'intégrale que l'on cherchoit de la transformée, & par conſéquent de la différentielle propoſée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Pour découvrir la même intégrale de la transformée $\frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$ par le premier Problême de la ſeconde Section *, on ſuppoſera que cette transformée eſt repréſentée par le terme $cu^{m+2n}du \times K^{p}$; (la changeante $u$ eſt miſe ici pour la changeante $x$ du 1^er^ Problême) que $K = 1 + \frac{36}{25}u$, $p = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $n = 1$, $m + 2n = \frac{3}{2}$, & par conſéquent $m = -\frac{1}{2}$; que l'élément de la rectification ſuppoſée $\frac{5}{6} \times u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$, eſt repréſenté par le terme $au^{m}duK^{p}$; ainſi $K^{p} = \overline{a + bu^{n}}^{p} = \overline{1 + \frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$; $m = -\frac{1}{2}$; mais on ôtera le coéficient $\frac{5}{6}$ juſqu'à la fin de l'opération, pour mettre à ſa place le coéficient indéterminé a, la méthode du premier Problême le demandant ainſi; l'on a donc pour la rectification ſuppoſée $au^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}} = au^{m}duK^{p}$. Il faut faire deux opérations; par la premiére on trouvera l'intégrale du terme $bu^{m+1n}du \times K^{p} = bu^{\frac{1}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$; par la ſeconde on trouvera l'intégrale du terme $cu^{m+2n}du \times K^{p} = cu^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1 + \frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$.

* *Liſez le premier Problême* 721.

Pour faire la premiére opération, on prendra l'intégrale $u^{m+1}K^{p+1} = u^{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$; on en écrira la différentielle;

qui eſt . . . $$\left.\begin{array}{r} \overline{m+1}\times a+\overline{m+1}\,bu^{n} \\ +\overline{p+1}\,nbu^{n} \end{array}\right\} du\times u^{m}K^{p};$$

On en ôtera la différentielle ſuppoſée . . . $-a$

mettant les valeurs, la même différentielle ſera $$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}+2\times\frac{36}{25}u \\ -a \end{array}\right\} du\times u^{-\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}.$$

On ſuppoſera le premier terme de la différentielle totale $=0$; ce qui donnera, 1°. $a=\frac{1}{2}$; 2°. $u^{\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}S.u^{-\frac{1}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$ pour l'intégrale de la différentielle $2\times\frac{36}{25}u^{\frac{1}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $2\times\frac{36}{25}$ de la différentielle, & on multipliera les quotiens par b, & l'on aura $$\frac{bu^{\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}b\times S.\,u^{-\frac{1}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}}{2\times\frac{36}{25}}$$ pour l'intégrale de la différentielle $bu^{\frac{1}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$. Le coéficient b eſt indéterminé.

Pour faire la ſeconde opération, on prendra l'intégrale $u^{m+1+n}K^{p+1}=u^{\frac{3}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$. On en écrira la différentielle, qui eſt . $$\left.\begin{array}{r} \overline{m+1+n}\times au^{n}+\overline{m+1+n}\,bu^{2n} \\ +\overline{p+1}\,nbu^{2n} \end{array}\right\} du\times u^{m}K^{p}$$

On en ôtera la différentielle . . $-bu^{n}$

en mettant les valeurs, la même différentielle ſera $$\left.\begin{array}{l} +\frac{3}{2}u^{1}+3\times\frac{36}{25}u^{2} \\ -bu^{1} \end{array}\right\} du\times u^{-\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

On ſuppoſera le premier terme de la différentielle totale $=0$; ce qui donnera, 1°. $b=\frac{3}{2}$; 2°. $u^{\frac{3}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{3}{2}}$ $$-\frac{\frac{3}{2}\times u^{\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times S.\,u^{-\frac{1}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}}{2\times\frac{36}{25}}$$ pour l'intégrale de la différentielle $3\times\frac{36}{25}u^{\frac{3}{2}}du\times\overline{1+\frac{36}{25}u^{1}}^{\frac{1}{2}}$.

On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $3 \times \frac{36}{25}$ de la différentielle, & on multipliera les quotiens par le coéficient c de $c \times u^{m+2n} du \times K^p = \frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u^1}^{\frac{1}{2}}$, & le premier produit ſera l'intégrale de la différentielle transformée $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u^1}^{\frac{1}{2}}$, laquelle ſera le ſecond produit. *Ce qu'il falloit trouver.*

Mais afin que les Lecteurs qui commencent ; voyent le raport de la formule à la méthode du premier Problême de la ſeconde Section, ils ne multiplieront d'abord les quotiens que par $\frac{5}{6}$, & faiſant le calcul, ils trouveront préciſément l'intégrale qu'on a trouvée ci-deſſus par la formule, $\frac{5}{6} \times \overline{1 + \frac{36}{25} u}^{\frac{3}{2}} \times \overline{\frac{1}{3} \times \frac{25}{36} u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \times \frac{25 \times 25}{36 \times 36} u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8} \times \frac{25 \times 25}{36 \times 36} \times S. \frac{5}{6} \times u^{-\frac{1}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u}^{\frac{1}{2}}$; Enfin ils la multiplieront par 3, ( parceque $3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{2}$, qui eſt le coéficient de la transformée, ) & le produit ſera l'intégrale de la transformée, *qu'il falloit trouver.*

D'où l'on peut voir le parfait raport de la méthode du premier Problême de la ſeconde Section, * avec la formule *721.
générale des binomes. * *694.

## AVERTISSEMENT.

CEUX qui commencent pourront, s'ils veulent ſe rendre les méthodes familiéres, chercher la rectification finie des autres paraboles, qui en peuvent avoir en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple. On eſt entré dans cet exemple dans le détail de toutes les démarches que fait l'eſprit pour trouver ces intégrales par les méthodes qu'on a données, afin de leur apprendre la maniére d'en faire de ſemblables dans tous les Problêmes qu'ils voudront réſoudre par le calcul intégral & l'uſage de ces méthodes, & afin qu'ils puiſſent d'eux-mêmes faire des exemples, pour ſuppléer à ceux qu'on eſt obligé de paſſer dans ce huitiéme Livre, pour ne pas le rendre trop long.

### EXEMPLE II. SUR LA CYCLOÏDE.

799. *TROUVER la rectification de la Cycloïde.*

FIG. XXXV. SUPPOSANT $AE = a$, $AB = x$, $BF$ ſera* $= \sqrt{ax - xx}$;
* 288. ſuppoſant auſſi l'arc $AF = z$, $Bf = y$, l'arc $Af = u$,
* 455. l'équation de la cycloïde ſera* $y = z + \sqrt{ax - xx}$, d'où l'on
déduira $dy = dz + \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$, où mettant au lieu de $dz$ ſa
* 588. valeur* $\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$, l'on aura $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, d'où l'on tirera
$dy^2 = \frac{\overline{a-x}^2 \times dx^2}{\overline{a-x} \times x}$; ce qui donnera $dy^2 + dx^2 = \frac{\overline{a-x}^2 \times dx^2 + \overline{a-x} \times x \times dx^2}{\overline{a-x} \times x}$
* 582. $= \frac{a}{x} dx^2$; ainſi $fH\ (du)^* = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \times a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$;
* 653. prenant les intégrales*, l'on aura l'arc $Af\ (u) = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$
* 288. $= 2\sqrt{ax}$. Mais $\sqrt{ax}$* eſt la valeur de la corde $AF$; d'où l'on voit que l'arc $Af\ (u)$ d'une cycloïde eſt double de la corde correſpondante $AF\ (\sqrt{ax})$ du cercle générateur; ce qu'on a
* 510. déja démontré par une autre voye*. En ſuppoſant que $AB(x)$ devient le diametre $AE\ (a)$; c'eſt-à-dire, en mettant $a$ au lieu de $x$ dans $u = 2\sqrt{ax}$, l'on trouve que l'arc entier $AfD\ (u)$ de la cycloïde eſt égal à $2a$, c'eſt-à-dire au double du diametre $AE\ (a)$.

## PROBLÊME II.

800. *TROUVER la quadrature des courbes par le moyen de la formule S. $ydx$.*

* 598. ON a déja donné la quadrature des paraboles* & des hyperboles de tous les genres. Voici d'autres Exemples.

### EXEMPLE I.

801. *TROUVER la quadrature de l'eſpace* ABC *ou* ABc *de la courbe*
FIG. LII. *géométrique* ACa, *dont (les coupées* AB *étant nommées* x, *les ordonnées* BC *perpendiculaires aux coupées étant* y, *& ſuppoſant une ligne droite donnée qu'on nommera* a, *) l'équation eſt* $x^3 + y^3 = axy$.

COMME l'on ne peut pas ſéparer $y$ dans cette équation, c'eſt-à-dire, trouver une valeur de $y$ où il n'y ait de chan-

geante que $x$ ſans réſoudre une équation irreductible du troiſiéme degré, il faut mettre une autre expreſſion changeante à la place de $y$, qui ſoit égale à $y$, & qui ſoit telle qu'on puiſſe ſéparer les changeantes de l'équation. Il y a pluſieurs maniéres de le faire ; il ſuffit d'en mettre ici une. On peut ſuppoſer $y = \frac{axx}{zz}$ ; & ſubſtituant cette valeur de $y$ à ſa place dans l'équation, elle deviendra $a^3x^3 = aaz^4 - z^6$ ; d'où l'on aura $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$ ; prenant les différences, l'on trouvera $xxdx = \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$ ; & à cauſe de $y = \frac{a}{zz} \times xx$, l'on aura * $ydx = \frac{axx}{zz}\, dx = \frac{a}{zz} \times \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3} = \frac{4aazdz - 6z^3dz}{3aa}$. C'eſt l'élé- * 595.
ment de l'aire $ABC$ ou $AB$c. En prenant * les intégra- * 653.
les, on trouvera S. $ydx = \frac{2}{3}zz - \frac{z^4}{2aa}$ ; c'eſt la quadrature de l'eſpace $ABC$ ou $AB$c, qu'on réduira, (en mettant au lieu de $zz$ ſa valeur ſuppoſée $\frac{axx}{y}$,) à $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy} =$ S.$ydx$ ; c'eſt-à-dire, qu'en mettant dans cette intégrale les valeurs déterminées de $x$ & de $y$, qui conviennent à tel point de la courbe qu'on voudra, elle deviendra l'expreſſion toute connue de l'eſpace $ABC$ ou $AB$c compris entre l'arc de la courbe $AC$ ou $A$c, la coupée $AB$, & l'ordonnée $AC$ ou $A$c. Par exemple on verra dans les remarques ſuivantes, qu'au point a, $A$b $(x) = \frac{1}{2}a$, & que ba $(y)$ eſt auſſi égale à $\frac{1}{2}a$ ; ſubſtituant ces valeurs de $x$ & de $y$ dans l'intégrale, l'on aura S. $ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy} = \frac{5}{24}aa$ pour l'expreſſion de l'eſpace $AE$ab$A$ ; d'où ôtant le triangle rectangle $A$ab $= \frac{1}{8}aa$, il reſtera $\frac{1}{12}aa$ pour la valeur de l'eſpace $AE$a$A$ ; ainſi le double de cet eſpace, c'eſt-à-dire $AE$a$CA = \frac{1}{6}aa$.

## REMARQUES.

*Où l'on fait voir l'utilité de l'Analyſe, par raport aux lignes courbes.*

### I.

02. CETTE courbe, dont l'équation eſt $x^3 + y^3 = axy$, eſt très- FIG. LII.
propre pour faire clairement concevoir, & comme ſentir aux Lecteurs qui commencent, la grande utilité de l'Analyſe pour découvrir tout ce que l'on peut deſirer de ſçavoir d'une courbe, & en même tems le parfait accord de l'Analyſe avec la Géométrie.

Car, 1°. ſuppoſant $AB\ (x) = 0$, il eſt évident que $BC\ (y)$

$= 0$, ainſi le point *A* eſt l'origine de la courbe, ou l'origine des coupées & des ordonnées.

### I I.

803. 2°. Les changeantes $x$ & $y$ étant préciſément de la même maniére dans l'équation, tout ce qui convient à l'une, convient auſſi à l'autre : d'où il eſt évident que ſi l'on tire *DAf* par *A* perpendiculaire à *AB*, & qu'on prenne les *AD* ($y$) égales aux *AB* ($x$), & qu'on mene les perpendiculaires *DE*, *D*e, à *AD*; & *BC*, *B*c perpendiculaires à *AB*, les unes & les autres juſqu'à la courbe; il eſt, dis-je, évident que *DE* ($x$) $=$ *BC* ($y$); & de même que *D*e ($x$) $=$ *B*c ($y$) : Que ces ordonnées égales, à cauſe des perpendiculaires égales *AB*, *AD*, feront deux à deux un quarré *ADGB*; & que la diagonale *AG*a, commune à tous ces quarrés, partagera en deux également la courbe *AE*a*CA*, & fera au point *A* un angle demi droit avec chacune des lignes des coordonnées *AB*, *AD*.

### I I I.

804. 3°. Pour trouver la valeur de *A*b ($x$) & de b a ($y$) au point a, où la courbe coupe la droite *A*a, il eſt clair qu'à ce point a, b a ($y$) & d a $=$ *A* b ($x$), doivent être égales; ainſi ſuppoſant $x = y$ dans l'équation de la courbe, elle deviendra au point a, $2x^3 = axx$, d'où l'on déduit *A*b ($x$), & ba ($y$), chacune égale à $\frac{1}{2}a$. Par conſéquent l'hypotenuſe *A*a $= \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ $= a\sqrt{\frac{1}{2}}$. D'où il ſuit qu'en tirant par (a) la perpendiculaire *AP* à la ligne *A*a, juſqu'à la rencontre *P* de *AB* prolongée, le triangle *A*a*P*, rectangle en a, ſera iſocelle, à cauſe de l'angle demi droit a*AP*; ainſi *A*a $=$ a*P* $= \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, d'où l'on aura $AP = \sqrt{2\,Aa^2} = \sqrt{aa} = a$; par conſéquent *AP* eſt égale à la grandeur connue $a$, qui eſt ſuppoſée dans l'équation de la courbe.

### I V.

805. 4°. Pour connoître toutes les branches de la courbe & leur ſituation, par raport aux coordonnées *AB* ($x$), *BC* ($y$), on remarquera, 1°. que ſi l'on ſubſtitue dans l'équation de la courbe $x^3 + y^3 - axy = 0$, une grandeur poſitive, comme $\frac{1}{4}a$, moindre que *A*b $= \frac{1}{2}a$, à la place de $x$, l'équation deviendra $y^3 - \frac{1}{4}aay + \frac{1}{64}a^3 = 0$, qui eſt une équation du

troiſiéme dégré, où les trois valeurs de $y$ ſont réelles & inégales ; (car $\frac{1}{27}p^3$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}qq$*), & deux de ces valeurs ſont *80&82.
poſitives, & la troiſiéme valeur eſt négative, & égale à la
ſomme des deux autres*. De même ſi l'on ſubſtitue la valeur *79&80.
de $A$b ($x$) $= \frac{1}{2}a$ au point a, dans l'équation de la
courbe, elle deviendra pour le point a, $y^3 - \frac{1}{2}aay + \frac{1}{8}a^3 = 0$, qui étant diviſée par $y - \frac{1}{2}a = 0$, donne pour quotient l'équation du ſecond degré $yy + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{4}aa = 0$,
dont la racine poſitive eſt $y = -\frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{5}{16}aa}$ ; & la négative eſt $-y = -\frac{1}{4}a - \sqrt{\frac{5}{16}aa}$. Tout cela fait voir que
la courbe a trois branches par raport à chaque coupée poſitive $AB$ ($+x$) ; les deux valeurs poſitives de $y$ déterminent les ordonnées $BC$, $B$c des points dont la ſuite forme
les deux branches de la courbe $AC$a, $A$ca qui ſont au-deſſus de $AB$ ; la valeur négative de $y$, qui eſt toujours égale à
la ſomme des deux poſitives, exprime l'ordonnée $Bc$ qui ſe
termine à la troiſiéme branche de la courbe $Acc$, qui eſt
au-deſſous de $AB$, & l'on voit auſſi* que $AB$ eſt l'axe de la *357.
courbe entiére. Mais, 2°. on peut concevoir les branches,
que forment les $y$ poſitives, auſſi formées par les $x$ poſitives ;
& le point a eſt commun aux deux branches formées, l'une par
les $y$ poſitives, l'autre par les $x$ poſitives ; car au point a,
$x = \frac{1}{2}a = y$ ; cela fait voir que ces deux branches forment une courbe qui rentre en elle-même, & qui renferme une eſpace ; & cependant l'ordonnée ab ($y$) du point
a, rencontrant encore la courbe au point $C$, puiſque ab
($y$) a deux valeurs poſitives, il eſt évident qu'il y a encore des ordonnées poſitives $y$ qui rencontrent la courbe
au-delà de l'ordonnée ba. 3°. Pour trouver la plus éloignée des $y$ poſitives, & en même tems la plus grande $AB$ ($x$)
des coupées poſitives, on remarquera que cette derniére $y$
doit toucher la courbe ; car il eſt clair que les ordonnées
qu'on peut imaginer au-delà de celle qui touche la courbe,
ne la rencontrent plus, étant paralleles à l'ordonnée qui la
touche. Or au point où l'ordonnée $y$ eſt tangente, $dy$* eſt *556.
infinie par raport à $dx$ ; ainſi prenant les différences de l'équation $x^3 + y^3 - axy = 0$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - ay}{-3yy + ax}$ ; &
ſuppoſant $\frac{dy}{0}$, l'on aura $-3yy + ax = 0$ ; ce qui donne $yy = \frac{1}{3}ax$, & $y = \sqrt{\frac{1}{3}ax}$ ; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra (comme on le trouvera facilement par

le calcul ) $x^3 = \frac{4}{27}a^3$, d'où l'on tirera $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, pour la
valeur de la plus grande $x$, qui eſt la coupée de l'ordonnée
poſitive $y$ tangente de la courbe la plus éloignée des $y$ poſitives.
4°. Pour trouver la valeur de cette $y$ qui eſt tangente
de la courbe, il ne faut que ſubſtituer au lieu de $x$ ſa valeur
$\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ dans $x^3 + y^3 - axy = 0$, & l'on aura l'équation $y^3$
$- \frac{1}{3}aay\sqrt[3]{4} + \frac{4}{27}a^3 = 0$, dans laquelle $y$ a deux valeurs poſitives
*81. égales ( car $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ * ; ) & de plus il eſt viſible que
les deux points *C*, c, ( où les deux $y$ poſitives qui conviennent
à une même coupée $x$, rencontrent la courbe, ) ſe réuniſſent
au point où $y$ touche la courbe ; & une valeur négative égale
à la ſomme des deux poſitives, laquelle valeur négative eſt
celle de $-y$, qui eſt l'ordonnée de la branche de deſſous
*Acc* qui convient à la même coupée $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$. On trouvera
*85. aiſément * que les deux valeurs poſitives de $y$ ſont chacune
$y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, & que la valeur négative eſt $y = - \frac{2}{3}a\sqrt[3]{2}$.
5°. Si l'on ſubſtitue à la place de $x$ dans l'équation de la
courbe $x^3 + y^3 - axy = 0$, une grandeur poſitive qui ſurpaſſe
la plus grande $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, par exemple $+ a$, l'équation
$y^3 - aay + a^3 = 0$ aura deux valeurs de $y$ imaginaires
*83. ( car $\frac{1}{27}p^3$ eſt moindre que $\frac{1}{4}qq$ *, ) & une ſeule valeur
réelle de $y$, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a plus de branches de la
courbe au-deſſus de *AB* ; mais que la branche *Acc* qui eſt au-deſſous,
& dont les ordonnées $y$ ſont négatives, continue
toujours. 6°. Si l'on veut voir quelles ſont les branches de
la courbe qui ont raport aux coupées négatives *AF* ($-x$)
qui vont du côté oppoſé de l'origine *A* des $x$ ; alors l'équation
de la courbe ſera $y^3 + axy - x^3 = 0$, laquelle fait voir
qu'en ſubſtituant à la place de $x$ une quantité conſtante,
l'équation déterminée qui en viendra n'aura qu'une ſeule valeur
*80. réelle de $y$, & les deux autres ſeront imaginaires * à cauſe
de $+ axy$. Ainſi la courbe aura une 4e branche *Acc*, par raport
aux $x$ négatives, dont les ordonnées ſeront les valeurs réelles
des $y$ de l'équation précédente. Mais comme en prenant
les coupées ſur *AD* ($y$), & les ordonnées *DE*, *D*e, *De* ($x$)
paralléles à *AB*, l'on trouveroit les trois branches *AE*a, *AC*a,
*Aee* formées par les ordonnées $x$ : Les deux premiéres ſont
les mêmes que l'on a trouvées pour les valeurs poſitives des
ordonnées $y$, en prenant les $x$ pour les coupées ; & la troiſiéme
eſt ſemblable à la troiſiéme *Acc* des ordonnées néga-

tives

tives $y$, & la même que la quatriéme qu'on vient de marquer être formée par les valeurs réelles des $y$ dans l'équation $y^3 + axy - x^3 = 0$, où les $x$ ſont négatives.

## V.

06. 5°. La même équation de la courbe ſert à en trouver les tangentes & toutes les autres propriétés. On ne fera voir ici que la maniére de trouver les tangentes de la branche *Aee*, qui a raport aux $x$ négatives *AF*, parcequ'elle ſervira à trouver l'aſymptote de cette branche *Aee*, & de la branche *Acc* qui lui eſt entiérement ſemblable, & qui a raport aux $y$ négatives *A*f priſes pour coupées. Ainſi ſuppoſant les coupées $AF = -x$, & les ordonnées $Fe = y$, l'équation de la courbe *Aee* eſt $y^3 - x^3 = -axy$; en prenant les différences on aura $3yydy + axdy = 3xxdx - aydx$, ce qui donnera $\frac{dx}{dy} = \frac{3yy+ax}{3xx-ay}$; d'où l'on déduira $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3+axy}{3xx-ay} = FS = S$, c'eſt la ſoutangente. On déduira de $FS\ (S)\ \frac{3y^3+axy}{3xx-ay}$, $AS = -AF + FS = -x + S = \frac{-3x^3+axy+3y^3+axy}{3xx-ay} =$ (en mettant à la place de $3y^3 - 3x^3$ ſa valeur $-3axy$ priſe de l'équation de la courbe) $\frac{-axy}{3xx-ay}$, qu'on nommera $s = AS$.

## V I.

07. 6°. Pour trouver l'aſymptote de cette branche *Aee*, on remarquera que l'aſymptote eſt une tangente de la courbe à l'infini, c'eſt-à-dire, à un point de la courbe infiniment éloigné de ſon origine *A*; ainſi $y$ & $x$ ſont chacune infinie au point touchant de l'aſymptote. Prenant donc la valeur de $y$ dans l'équation $s = \frac{-axy}{3xx-ay}$, on trouvera $y = \frac{-3sxx}{ax-as} =$ (à cauſe que $x$ étant infinie par raport à $s$, $as$ doit être regardée comme zero par raport à $ax$) $\frac{-3sx}{a}$. Et mettant cette valeur de $y$ dans l'équation de la courbe $y^3 - x^3 = -axy$, elle deviendra $-27s^3x^3 - a^3x^3 = +3a^3sxx$, ou bien $-27s^3x - a^3x - 3a^3s = 0$; & $3a^3s$ étant nulle par raport aux deux autres termes, à cauſe que $x$ eſt infinie, l'équation ſera $-27s^3 = a^3$; d'où l'on déduira $s = -\frac{1}{3}a = AS$; c'eſt-à-dire la droite *AS* doit être égale à $-\frac{1}{3}a$ au point de la tangente infinie de la branche *Aee*. D'où l'on voit que ſi l'on prend, du côté des quantités négatives, $AK = \frac{1}{3}a$, le point *K* ſera l'un des points de l'aſymptote.

Pour trouver un ſecond point de l'aſymptote, il faut prolonger la tangente *eS* juſqu'à ce qu'elle rencontre *DAT* au point *T*, ce qui donnera les triangles ſemblables *eFS*, *SAT*; d'où l'on aura cette proportion *FS* ($\frac{3y^3+axy}{3xx-ay}$) . *Fe* ($y$) : : *AS* ($\frac{-axy}{3xx-ay}$) . $AT = \frac{-axyy}{3y^3+axy} = \frac{-axy}{3yy+ax}$, qu'on nommera $t$. Il faut prendre la valeur de $x$ par le moyen de l'équation $\frac{-axy}{3yy+ax} = t$, & l'on trouvera $x = \frac{-3tyy}{ay+at}$. Mais dans le cas où $x$ & $y$ ſont chacune infinie, c'eſt-à-dire, lorſque la tangente eſt infinie, le terme $at$ eſt nul par raport au terme $ay$; ainſi par raport à l'aſymptote l'on aura $x = \frac{-3ty}{a}$. Il faut mettre cette valeur de $x$ dans l'équation de la courbe, & elle deviendra $-27t^3y + a^3y = 3a^3t$. Et le terme $3a^3t$ étant nul, à cauſe que $y$ eſt infinie par raport à $t$, cette équation ſera $-27t^3y + a^3y = 0$; d'où l'on tirera $t = -\frac{1}{3}a = AT$; c'eſt-à-dire, la ligne *AT* ($t$) doit être égale à $\frac{1}{3}a$ au point de la tangente infinie, ou de l'aſymptote de la branche *Aee*. D'où l'on voit que ſi l'on prend du côté des grandeurs négatives $Ak = \frac{1}{3}a$, le point $k$ ſera un ſecond point de l'aſymptote; ainſi la ligne *Kk* ſera l'aſymptote de la branche *Aee*, & par conſéquent de la branche ſemblable *Acc*.

## VII.

808. 7°. On fera remarquer ici qu'en ſuppoſant $\frac{dy}{0}$, l'on trouve
*805. l'équation * $x^6 - \frac{4}{27}a^3x^3 = 0$, dont les racines déterminent
*Nomb.* 3^e^. *les plus grandes x*; & l'on n'a pris que la valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ pour déterminer la plus grande $x$ dont l'on avoit beſoin; mais l'équation $x^6 - \frac{4}{27}a^3x^3 = 0$ donnant auſſi trois valeurs de $x = 0$, cela fait voir qu'à l'origine *A* où $x$ eſt zero, il y a une tangente, parallele aux ordonnées $y$, des trois branches *ACC*, *AEE*, *Acc*, dont les ordonnées ſont les $y$, laquelle tangente eſt *AD*. L'on trouveroit de même en cherchant la plus grande $y$ par la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$, ou ſimplement de $dy = 0$, trois valeurs de $y = 0$; ce qui feroit de même connoître qu'à l'origine *A* où $y$ eſt zero, il y a une tangente, parallele aux $x$ priſes pour les ordonnées, des trois branches *ACC*, *AEE*, *Aec*, dont les $y$ ſont les coupées; laquelle tangente eſt *AF*. D'où l'on voit qu'à un même point *A*, qui eſt ici celui de l'origine, la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$, & celle de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$, peuvent faire connoître quelles ſont

les valeurs des coordonnées au point *A* d'une courbe qui a pluſieurs branches qui ſe coupent à ce même point *A*, dans le ſeul cas où les parties infiniment petites des branches de la courbe au point d'interſection *A*, ſont paralleles aux coordonnées ; car dans ce cas les tangentes au point d'interſection *A* ſont paralleles aux coordonnées, ſçavoir, la petite partie de la branche *AE*, & la petite partie de la branche *Acc* au point *A*, font partie de la tangente *DAT* paralleles aux ordonnées *BC*, *B*c, *Bc* ($y$). Ainſi $dy$ eſt infinie par raport à $dx$ au point *A*, eu égard à ces deux branches qui n'en font qu'une, & $y$ s'y trouve avoir trois valeurs égales à zero ; & de même les petites parties des branches *AC*, *Ae* qui n'en font qu'une, ſont au point *A* dans la tangente *BAK* de ces deux branches ; ainſi $dx$ eſt infinie à ce point *A*, par raport à $dy$, eu égard à ces deux branches qui ſont enſemble la même branche continuée. Ainſi quand on a dit, *art.* 554, *nomb.* 4 *à la fin*, & *art.* 559 *à la fin*, que $dx$ & $dy$ ne pouvoient pas être chacune égale à zero à un même point d'une courbe où la tangente eſt parallele à l'une des coordonnées, cela ne doit s'entendre à la rigueur que d'une même branche de courbe, & non pas de deux branches d'une même courbe, qui ſe couperoient de façon que les deux petits côtés de l'angle que font à ce point d'interſection les deux parties infiniment petites de chacune des branches, ſeroient paralleles aux coordonnées.

Cependant cette ſuppoſition alternative de $dy = 0$, de $dx = 0$ au même point d'une courbe, ne marque qu'il y a des tangentes paralleles des coordonnées au point d'interſection des branches d'une courbe, que dans le cas ſeul qu'on vient d'expliquer ; & pour ce ſeul cas, il y en a une infinité où les branches d'une même courbe ſe coupent de façon que les petites parties de chaque branche, au point d'interſection, ne ſont pas paralleles aux coordonnées, & ainſi il n'y a à ce point d'interſection aucune tangente de la courbe parallele aux ordonnées ; ni par conſéquent aucune *plus grande* ou *moindre* $x$, ni aucune *plus grande* ou *moindre* $y$. Mais comme on ne laiſſe pas de trouver à ce point d'interſection des valeurs de $x$ & de $y$, en ſuppoſant alternativement $dy = 0$, $dx = 0$, à ce point d'interſection ; parcequ'il eſt évident qu'il doit y avoir au point d'interſection des branches d'une

courbe, des racines égales, c'eſt-à-dire, des valeurs égales de la changeante $x$, que la ſuppoſition de $dy = 0$ fait découvrir; & des valeurs égales de la changeante $y$, que la ſuppoſition de $dx = 0$ fait trouver, ces ſuppoſitions revenant à la multiplication des termes de l'égalité, par une progreſſion
* 74. arithmétique*: Cela eſt cauſe qu'on a exclu du nombre des marques qu'on peut avoir pour s'aſſurer s'il y avoit des tangentes paralleles aux coordonnées d'une courbe à un point de cette courbe, ou, ce qui revient au même, des *plus grandes*, ou des *moindres*, cette marque que $dx$ & $dy$ ſe trouvaſſent chacune égale à zero à un même point de la courbe, cette marque pouvant ſe trouver ſans qu'il y en ait, puiſqu'il n'y a qu'un ſeul cas où cela arrive, dont il faudroit être aſſuré avant cette marque, ainſi elle y ſeroit même inutile. Il y a alors un point d'interſection des deux branches d'une courbe, & non pas des tangentes paralleles aux coordonnées. On peut aiſément ſe convaincre de ce qu'on vient de faire remarquer en l'appliquant à l'équation de la même courbe rapportée à l'axe a$AM$, dont on va parler. Ainſi la marque aſſurée pour reconnoître les points d'une courbe où les tangentes ſont paralleles aux coordonnées, eſt que le raport $\frac{dx}{dy}$ ſoit toujours infini, ſoit que $dx$ ſoit zero par raport à $dy$, ſoit que $dy$ ſoit zero par raport à $dx$; & quand on trouve ce raport fini, il n'y a pas de ces ſortes de tangentes aux points où cela arrive; & quand il ſe trouve de zero à zero, on n'eſt pas aſſuré s'il y en a, ou ſi c'eſt ſimplement un point d'interſection, & l'on ſçait ſeulement qu'il y a à ce point là des valeurs égales de $x$ & de $y$.

## VIII.

809. 8°. On peut rapporter les points de toutes les branches de la même courbe à l'axe $A$a, qui coupe l'angle droit $DAB$ en deux demi droits à l'origine $A$, de maniére que prenant les coupées $AH$ ſur cet axe $A$a, les perpendiculaires $HC$, $HE$ à cet axe ſoient les ordonnées des branches $ACC$a, $AEE$a, & que prolongeant cet axe vers $mM$, (ce qui rendra cette partie de l'axe négative,) $me$, $mc$ ſoient les ordonnées des autres branches $Aee$, $Acc$. Pour avoir l'équation de la courbe qui convient à ce nouvel axe $A$a, on nommera les coupées $AH$ ($u$), & les ordonnées $HC$ ($z$), &

l'on remarquera qu'à cauſe des angles demi droits des triangles rectangles $AHI$, $ABG$, $BCI$, $HCG$, qui rendent égaux les deux côtés de chacun qui comprennent l'angle droit, l'on aura $AH(u) = HI = HC(z) + CI$; & $CI$ étant égale à $\sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BI}^2} = \sqrt{2\overline{CB}^2} = \sqrt{2yy} = y\sqrt{2}$, l'on aura $AH(u) = HC + CI = z + y\sqrt{2}$; d'où l'on tirera $y = \frac{u-z}{\sqrt{2}}$. L'on aura de même $AB(x) = BG = BC(y) + CG$; & $CG$ étant égale à $\sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{HG}^2} = \sqrt{2 \times \overline{HC}^2} = z\sqrt{2}$, l'on aura $x = y + z\sqrt{2}$; & mettant à la place de $y$ ſa valeur $\frac{u-z}{\sqrt{2}}$, l'on aura $x = \frac{u+z}{\sqrt{2}}$. Il faut mettre ces valeurs de $x$ & de $y$ à leur place dans l'équation de la courbe $x^3 + y^3 = axy$; & en faiſant le calcul, l'on trouvera $u^3 + 3uzz - \frac{auu + azz}{\sqrt{2}} = 0$; ce ſera l'équation de la courbe qui exprime le raport commun de chacun de ſes points par le moyen des coordonnées $AH$ & $HC$; & faiſant $u$ négative, l'on aura l'équation des branches *Acc*, *Aee*; & l'on pourra faire ſur cette équation de la courbe, dont les changeantes ſont $u$ & $z$, des remarques ſemblables à celles qu'on a faites ſur la premiére équation, dont les changeantes étoient $x$ & $y$. On ſe contentera de faire remarquer ici que $z$ ne montant qu'au ſecond degré, la courbe eſt bien plus facile à décrire par l'équation des $u$ & des $z$ que par celle des $x$ & des $y$, en ſe ſervant de la méthode générale *de l'art.* 424.

## AVERTISSEMENT.

ON ne s'arrête pas à prolonger ces remarques ſur l'uſage de l'Analyſe par raport à cette courbe, pour en découvrir toutes les autres propriétés. Ce qu'on vient de dire ſuffit à ceux qui commencent pour leur faire faire de ſemblables remarques ſur les autres courbes, pour leur faire voir le raport de l'Analyſe avec la Géométrie compoſée, & qu'elle contient les vrayes méthodes pour découvrir tout ce qu'on peut deſirer de connoître dans cette ſcience, & dans les ſciences Phyſico-mathématiques qui en dépendent.

## EXEMPLE II.

10. *TROUVER l'aire de telle partie qu'on voudra ECF, EHcCE de la courbe ECcD, dont l'équation eſt* $x^4 - 6aaxx + 4yyxx + a^4 = 0$, *en ſuppoſant que l'origine eſt au point A, que les* FIG. LIII.

*coordonnées ſont $AE\,(x)$; $AB = FC = Hc\,(y)$, & que $Gc = a$.*

ON remarquera, 1°. qu'en ſuppoſant $AB\,(y) = 0$, l'équation devient du ſecond degré, dans laquelle la changeante $x$ a deux valeurs poſitives, ce qui fait voir que la droite $AB$ des $y$ eſt hors de la courbe qui a deux branches. 2°. Qu'en ſuppoſant $y = a\,(Gc)$, la changeante $x$ a deux valeurs égales à $Gc\,(a)$; ce qui fait connoître que les deux branches de la courbe ſe joignent en $c$, & que la courbe rentre en elle-même comme fait l'ellipſe. 3°. Que ſi l'on ſuppoſe $y$ égale à une grandeur qui ſurpaſſe $a$, par exemple ſi l'on ſuppoſe $y = 2a$, les valeurs de $x$ ſeront imaginaires; ce qui apprend que la courbe ne paſſe pas au-delà du point $c$. 4°. Que ſi l'on prend l'élément de l'aire ſur la ligne $AB\,(y)$, cet élément ſera exprimé par $xdy = BC \times \beta$, & l'aire qu'on trouvera pour l'intégrale ſera l'eſpace extérieur $AECB$ : Mais ſi l'on prend l'élément de l'aire ſur $AF\,(x)$, cet élément ſera ex-
* 595. primé par *$ydx = FC \times f$, & l'intégrale qu'on trouvera ſera l'eſpace intérieur $EFC$. On va chercher ici cet eſpace intérieur.

Pour le trouver on déduira de l'équation de la courbe (A) $y = \sqrt{\frac{-x^4 + 6aaxx - a^4}{4xx}}$; & pour réduire l'expreſſion de l'élément à être une quantité beaucoup plus ſimple, on ſuppoſera $\frac{x^4 - 2aaxx + a^4}{4xx} = zz$; ce qui donnera $\frac{xx - aa}{2x} = z$ quand $x$ ſurpaſſera $a$, c'eſt-à-dire pour la partie de la courbe $Dcc$ où les $Bc$ ſont les $x$, & $\frac{aa - xx}{2x} = z$ quand $a$ ſurpaſſera $x$, c'eſt-à-dire pour la partie $ECc$ de la courbe où les $BC$ ſont les $x$. On tirera de $\frac{xx - aa}{2x} = z$, l'équation $xx - 2zx - aa = 0$; & la valeur poſitive de $x$ ſera (B) $x = z + \sqrt{zz + aa}$; on déduira de même de $\frac{aa - xx}{2x} = z$, (C) $x = -z + \sqrt{zz + aa}$. Ainſi pour comprendre ces deux cas en un ſeul, l'on aura $x = \pm z + \sqrt{zz + aa}$; d'où l'on tirera (D) $dx = \pm dz + \frac{zdz}{\sqrt{zz + aa}}$. En ſubſtituant les valeurs de $x$ dans (A), le calcul donnera (E) $y = \sqrt{aa - zz}$; ſubſtituant ces valeurs de $y$ & de $dx$ dans la formule générale de la quadrature des cour-
* 595. bes *$ydx$, on aura pour l'élément de l'eſpace qu'on cherche, $\pm dz \times \sqrt{aa - zz} + \frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{zz + aa}}$. Il ne faut plus que trouver l'intégrale de cet élément, pour avoir l'aire qu'on cherche : mais cette intégrale ne pouvant ſe trouver exacte par

les méthodes, il faut la trouver par la ſuppoſition de l'aire du cercle donnée.

La premiére partie de l'élément eſt auſſi l'élément de l'aire d'une partie d'un quart de cercle : car en faiſant ſur le demi-diametre $cb = a$ un quart de cercle $cIb$, prenant $cK = z$, & tirant la perpendiculaire $KL$, il eſt viſible que l'eſpace $cKLI =$ S. $dz \times \sqrt{aa - zz}$. FIG. LIII.

Pour réduire la ſeconde partie de l'élément à l'élément d'une partie d'un quart de cercle, on ſuppoſera $aa + zz = uu$; ce qui donnera $- zz = aa - uu$, $u = \sqrt{aa + zz}$, $du = \frac{zdz}{\sqrt{aa + zz}}$, $\sqrt{aa - zz} = \sqrt{2aa - uu}$; & ſuſtituant les valeurs de $\frac{zdz}{\sqrt{aa + zz}}$, & de $\sqrt{aa - zz}$ dans la ſeconde partie de l'élément, on trouvera $\frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{aa + zz}} = du \times \sqrt{2aa - uu}$, qui eſt l'élément d'une partie d'un quart de cercle dont le rayon eſt $a\sqrt{2}$. Faiſant donc le rayon $bM = a\sqrt{2}$, égal à la corde $bI$ de l'arc $bI$ de 90 degrés, & avec ce rayon le quart de cercle $bMN$; prenant $MP = u = \sqrt{aa + zz}$, & tirant la perpendiculaire $PQ$, il eſt clair que l'eſpace $MPQN =$ S. $du \times \sqrt{2aa - uu}$. Par conſéquent l'eſpace $MPQN$ ( S. $du \times \sqrt{2aa - uu} =$ S. $\frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{aa + zz}}$ ) $\pm$ $cKLI$ ($\pm$ S. $dz \sqrt{aa - zz}$) eſt égal à l'intégrale ou à l'aire $ECccH$ quand il y a $+$, & à l'aire $ECF$ quand il y a $-$ devant S. $dz\sqrt{aa - zz}$.

II. Pour trouver ſi l'intégrale eſt complete, & ſi elle ne l'eſt pas, la quantité qui lui manque pour être complete; il faut ſuppoſer * la changeante $FC$ ($y$) égale à zero; & dans ce cas il eſt évident que l'eſpace qu'exprime l'intégrale doit être zero : & s'il ne l'eſt pas, la quantité qu'il faudra pour le rendre égal à zero, ſera celle qui manque à l'intégrale pour la rendre complete. Or en ſuppoſant $y = 0$ au point (E), l'on trouve $cK$ ($z$) $= a$, c'eſt-à-dire que dans ce cas $\pm$ S. $dz\sqrt{aa - zz}$, ou l'eſpace $cKLI$ devient le quart de cercle $cbI$ : mais $y = 0$ rendant $z = a$, l'équation $\sqrt{aa - zz} = \sqrt{2aa - uu}$ deviendra $\sqrt{2aa - uu} = 0$, ce qui donnera $u = a\sqrt{2}$; c'eſt-à-dire, $MPQN$ devient le quart de cercle $MbQN$. Ainſi dans le cas de $y = 0$, bien loin que l'eſpace exprimé par l'intégrale devienne zero, c'eſt le quart de cercle $MbQN$ $\pm$ le quart de cercle $cbI$; ainſi * 664.

il faut ajoûter, ſous des ſignes oppoſés, cette quantité conſtante à l'eſpace qu'on a trouvé, & l'on aura l'eſpace complet que l'on cherchoit. Mais les quarts de cercle ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, $MbQN . cbI :: 2aa . aa :: 2 . 1$. Ainſi la quantité conſtante qu'il faut retrancher eſt $3 \times cbI$ quand $xx$ ſurpaſſe $aa$, & $cbI$ quand $aa$ ſurpaſſe $xx$.

### AVERTISSEMENT.

LEs exemples qu'on a donnés dans cette quatriéme ſection ſuffiſent pour apprendre aux Lecteurs la maniére de mettre en uſage, dans la réſolution des Problêmes, les méthodes de trouver les intégrales exactes quand cela ſe peut; quand les méthodes ne les font pas trouver exactes, la maniére de les avoir finies par la ſuppoſition des rectifications ou des quadratures données des courbes plus ſimples. Ainſi il eſt inutile de prolonger ce huitiéme Livre d'exemples, pour trouver la ſolidité des corps formés par la révolution des courbes autour d'un axe, les ſurfaces courbes de ces corps, & les centres de peſanteur: les Lecteurs pourront les faire eux-mêmes.

---

# DERNIERE SECTION.

*Où l'on explique l'uſage de l'Analyſe pour trouver la nature des courbes, en employant le calcul différentiel & le calcul intégral. Ce qui comprend l'uſage de l'Analyſe dans la réſolution de la plupart des Problêmes Phyſico-mathématiques, en ſe ſervant des mêmes calculs: on explique auſſi la conſtruction des courbes par leurs équations différentielles, c'eſt-à-dire, des courbes dont on n'a que les équations différentielles.*

## PREMIERE PARTIE DE LA DERNIERE SECTION.

*De la méthode inverſe des tangentes.*

### DE'FINITION.

812. QUAND il arrive qu'en cherchant la nature d'une courbe, l'une des conditions du Problême fait découvrir ou contient la

la tangente de la courbe, ou ſa ſoutangente, ou quelqu'une des lignes qui ont raport à la tangente, dont l'on a donné les formules dans l'article 550; comme auſſi quand elle contient ou fait découvrir la rectification de la courbe ou ſa quadrature, ou la differentielle de quelqu'une de ces dernieres proprietés, ou quelque raport de ces proprietés. On dit que le Problême appartient *à la méthode inverſe des tangentes*; & la méthode pour trouver la nature des courbes, ou pour réſoudre les Problêmes ſur la nature des courbes, qui contiennent de ces ſortes de proprietés parmi leurs conditions données, s'appelle *la méthode inverſe des tangentes.* Lorſque quelqu'une des proprietés dont on vient de parler, n'entre pas dans les conditions données des Problêmes, où il faut trouver la nature des courbes, ils n'appartiennent pas à la méthode inverſe des tangentes. On en donnera ici des exemples.

## LA ME'THODE INVERSE DES TANGENTES.

13. 1°. IL faut, après avoir employé les lettres $x$ & $y$ des formules * pour exprimer les coupées & les ordonnées des courbes dont on cherche la nature, trouver par les conditions données du Problême l'expreſſion de la tangente, ou ſoutangente, ou perpendiculaire, ou ſouperpendiculaire, &c. ou de la rectification, ou de la quadrature de la courbe dont on cherche la nature; c'eſt-à-dire, il faut trouver l'expreſſion de celle de ces proprietés de la courbe que peuvent faire découvrir les conditions du Problême, & la ſuppoſer égale à la formule qui exprime la même proprieté. Quand cette proprieté eſt la rectification ou l'aire de la courbe, il faut ſuppoſer l'expreſſion de la rectification ou de l'aire égale à la ſomme de la formule; & quand ce n'en eſt que l'element, il le faut ſuppoſer égal à la formule. Si les conditions données du Problême contenoient quelque raport de ces proprietés, il faudroit trouver par ces conditions données l'expreſſion de ce raport, & la ſuppoſer égale au raport des formules des mêmes proprietés. Cette premiere operation donne l'équation du Problême qu'on veut réſoudre, laquelle contient les deux changeantes $x$ & $y$ avec leurs differences.

* 550.

2°. Il faut, quand cela ſe peut, trouver, par la deuxiéme & troiſiéme propoſition fondamentale, * & la premiere

* 714, 715 & 716.

remarque qui les ſuit, les integrales des termes de l'équation du Problême ; ce qui donnera une nouvelle équation, qui eſt celle qui exprime la nature de la courbe qu'on cherchoit ; ainſi le Problême ſera reſolu.

3°. Quand on ne peut pas trouver les integrales de l'équation du Problême par la ſeconde ou par la troiſiéme propoſition fondamentale, ni la reduire à ces propoſitions par les méthodes de la premiere remarque qui les ſuit, il faut ſeparer les *x* & les *dx*, les *y* & les *dy*, par les méthodes que l'on a données dans l'art. 717, & trouver enſuite par les méthodes de la premiere Section les integrales des termes de l'équation, où les changeantes ſont ſeparées ; & ſi l'on trouve ces integrales exactes, l'équation qu'elles formeront ſera l'équation que l'on cherchoit, qui exprime la nature de la courbe qu'on ſe propoſoit de trouver, & le Problême ſera reſolu.

4°. Si l'on ne peut pas trouver les integrales de l'équation où les changeantes ſont ſéparées ; ou ſi l'on ne peut trouver les integrales que d'un membre ou de quelques grandeurs de l'équation, & qu'il reſte quelque partie differentielle ; l'on n'aura pas d'autre équation pour exprimer la nature de la courbe que cette équation differentielle ; il faudra conſtruire cette équation differentielle, c'eſt-à dire, trouver les points très proches les uns des autres par où paſſe la courbe qu'exprime cette équation, par les méthodes qu'on donnera dans la ſuite ; & la conſtruction de la courbe ſera elle-même la reſolution du Problême ; & il arrivera des cas où cette conſtruction fera trouver l'équation de la courbe, & ſi elle eſt geometrique ou mechanique.

5°. Enfin ſi l'on ne peut pas ſeparer les changeantes & leurs differences dans l'équation du Problême, l'on ne pourra pas avoir de reſolution exacte du Problême par les méthodes qu'on a découvertes juſqu'au temps où nous ſommes, & l'on ne pourra l'avoir que par approximation, comme on l'a expliqué dans l'art. 718.

## *Application de la méthode inverſe des tangentes à des exemples.*

### EXEMPLE I.

814. *SUPPOSANT qu'une infinité de paraboles, toutes du même genre, ( mais il n'importe pas quel genre ce ſoit, ) dont l'une eſt*

Fig. XIV.

*AC, ayent toutes le même axe ABP, & le même ſommet A; & qu'elles ne different entr'elles que par leurs parametres; trouver la courbe CD qui les coupe toutes perpendiculairement.*

## PREPARATION.

On ſuppoſe, pour rendre la reſolution generale, que $p^{m-n}x^{n} = y^{m}$, qui eſt l'équation des paraboles de tous les genres, repreſente l'equation d'un nombre infini de paraboles d'un même degré, en mettant au lieu de l'expoſant *m* un nombre entier poſitif déterminé, & un autre à la place de l'expoſant *n*, & mettant ſucceſſivement au lieu du parametre *p* une grandeur telle qu'on voudra, lequel parametre ira en augmentant, quand on voudra que l'équation convienne aux paraboles qui vont en s'écartant de l'axe de plus en plus, & en diminuant quand on voudra qu'elle ſoit l'équation des paraboles du même genre qui s'approchent de l'axe de plus en plus. Quand on voudra que la même reſolution convienne à un autre nombre infini de paraboles, toutes d'un même genre, mais different de celui des paraboles de la premiere ſuppoſition; il faudra mettre au lieu des expoſans *m* & *n* les nombres entiers poſitifs qui conviennent au genre des paraboles, auxquelles on veut que la reſolution convienne.

Ainſi pour appliquer l'équation à la figure, on ſuppoſera $AB = x$, $BC = y$, & que le parametre de la parabole *AC* eſt égal à *p*. On ſuppoſera auſſi que *CT* eſt la tangente du point *C* de la parabole *AC*, & que *CP* eſt la perpendiculaire du point *C* de la même parabole. Ainſi $BT = {}^{*}\,\frac{m}{n}\,x$ * 550.
eſt la ſoutangente du point *C* de la parabole *AC*; & c'eſt en même temps l'expreſſion de toutes les ſoutangentes de toutes les paraboles du même genre qui ont le même axe *AB*, & le même ſommet *A*. *BP* eſt la ſouperpendiculaire du point *C* de la parabole *AC*.

On remarquera ſur la courbe *DC* que l'on cherche, qui doit couper toutes les paraboles perpendiculairement, que la partie infiniment petite *C* de cette courbe qui coupe la parabole *AC*, ſe trouve par la ſuppoſition dans la perpendiculaire *CP* de la parabole *AC*, & que cette particule *C*, de la courbe *DC*, eſt auſſi une partie infiniment petite de la droite *CP*; par conſequent la droite *CT*, tangente en *C* de la parabole *AC*, eſt la perpendiculaire de la courbe *DC* au point *C*. D'où il ſuit que *BT* ($\frac{m}{n}x$) eſt en même temps la ſoutangente de la parabole *AC*, & la ſouperpendiculaire de la courbe *DC* que l'on cherche. Ce que l'on vient de faire remarquer ſur l'interſection *C* de la courbe *DC*, & de la parabole *AC*, convient à chaque autre interſection de la courbe *DC*, & de chacune des autres paraboles du même degré qui ont le même axe *AB*, & le même ſommet *A*. C'eſt pourquoi $\frac{m}{n}x$ eſt l'expreſſion de la ſouperpendiculaire de la courbe *DC* que l'on cherche : mais elle doit être négative, parceque la ſouperpendiculaire *BT* eſt du côté oppoſé de la ſouperpendiculaire *BP* de la parabole *AC*. Ainſi $BT = -\frac{m}{n}x$.

Le Problême de ce premier exemple ſe réduit donc à trouver la courbe *DC*, dont la ſouperpendiculaire *BT* eſt $-\frac{m}{n}x$ ; ce qui fait voir que le Problême appartient à la méthode inverſe des tangentes.

### RESOLUTION.

IL faut ſuppoſer la ſouperpendiculaire $-\frac{m}{n}x$ égale à la
*550. formule de la ſouperpendiculaire * $\frac{ydy}{dx}$, ce qui donnera
l'équation du Problême $\frac{m}{n}x + \frac{ydy}{dx} = 0$. Pour en trouver l'integrale, il faut ſeparer les changeantes, & l'on aura $\frac{m}{n}xdx + ydy = 0$. Il faut en prendre l'integrale par la troiſiéme
*715. propoſition fondamentale*, & l'on trouvera $\frac{m}{2n}xx + \frac{1}{2}yy = aa$.
On met *aa* pour la conſtante homogene qu'il faut ajouter à l'integrale : $\frac{m}{2n}xx + \frac{1}{2}yy = aa$, ou bien $\frac{n}{m}yy = \frac{2n}{m}aa - xx$ eſt donc *l'équation de la courbe que l'on cherche*. C'eſt l'équation d'une ellipſe, & le terme $\frac{n}{m}yy$ fait voir que l'axe doit être à ſon parametre comme *n* eſt à *m* : c'eſt-à dire que ce raport eſt donné.

Si l'on ſuppoſe $m = 2$, & $n = 1$, l'équation generale des paraboles deviendra $px = yy$, & l'équation de l'ellipſe deviendra $\frac{1}{2}yy = aa - xx$ ; ce qui fait voir qu'une ellipſe *DC*, qui aura l'axe *AB* commun avec une infinité de paraboles du premier genre, qui aura pour centre le ſommet *A* de toutes ces paraboles, & qui aura enfin pour axe une ligne qui ſoit à ſon parametre comme 1 à 2, coupera toutes ces paraboles perpendiculairement.

## EXEMPLE II.

FIG. LV.

5. *SUPPOSANT qu'une infinité d'hyperboles toutes d'un même genre, (mais il n'importe pas quel genre ce ſoit,) dont l'une eſt* GCF, *ayant pour aſymptotes communes les droites* AE, AT *perpendiculaires l'une à l'autre en* A; *trouver la courbe* CD *qui les coupe toutes perpendiculairement.*

### PRÉPARATION.

LA même équation $p^{m-n} x^n = y^m$ des paraboles de tous les degrés, peut exprimer les hyperboles de tous les degrés, en ſuppoſant ſeulement que l'expoſant *m* eſt négatif; car cette ſuppoſition la changera en $x^n y^m = p^{m+n}$ qui eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés par raport aux aſymptotes. Les Lecteurs doivent appliquer à ces hyperboles tout ce que l'on a dit dans la préparation à la réſolution de l'exemple précedent.

Ainſi on ſuppoſera que $AB = x$, $BC = y$; que $p^{m+n}$ marque la *puiſſance* des hyperboles toutes d'un même degré (mais tel qu'on voudra,) auxquelles on veut appliquer la réſolution, que *CT* eſt la tangente au point *C* de l'hyperbole *GCF*; que *CP* lui eſt perpendiculaire au même point *C*; & l'on remarquera que la courbe *DC* que l'on cherche, a pour ſa ſouperpendiculaire au point *C* la même droite *BT*, qui eſt la ſoutangente de l'hyperbole *GCF* au point *C*, où elle eſt coupée perpendiculairement par la courbe *DC*; & qu'il en eſt de même de chacun des points d'interſection de la courbe *DC* avec les autres hyperboles. Mais la ſoutangente *BT* de l'hyperbole *GCF* ſe trouvera égale à* $-\frac{m}{n}x$. Ainſi $\frac{m}{n}x$ eſt l'expreſſion de la ſouperpendiculaire *BT* de la courbe *DC* que l'on cherche; cette ſouperpendiculaire (qui eſt négative, étant la ſoutangente de l'hyperbole *GCF*, parcequ'elle va du côté oppoſé à l'origine *A*, & les ſoutangentes de *GCF* devroient aller du côté de l'origine *A* pour être poſitives,) eſt poſitive par raport à la courbe *DC*, parcequ'elle va du côté où doivent aller les ſouperpendiculaires de *DC* par raport à l'origine, pour être poſitives. *550.

Le Problême ſe réduit donc à trouver la courbe dont $\frac{m}{n}x$ eſt la ſouperpendiculaire; ainſi il ſe rapporte à la méthode inverſe des tangentes.

## RESOLUTION.

IL faut ſuppoſer la ſouperpendiculaire $\frac{m}{n}x$ égale à la formule * $\frac{ydy}{dx}$ de la ſouperpendiculaire, & l'on aura l'équation du Problême $\frac{m}{n}x - \frac{yay}{dx} = 0$. Il faut en ſéparer les changeantes, & l'équation ſera $\frac{m}{n}xdx - ydy = 0$. Il faut trouver ſon integrale par la troiſiéme propoſition fondamentale *, & lui ajouter une conſtante homogene ; cette integrale ſera $\frac{m}{2n}xx - \frac{1}{2}yy = aa$, qui ſe réduit à $xx - \frac{2n}{m}aa = \frac{n}{m}yy$. *C'eſt l'équation de la courbe* D C *que l'on cherche.* Elle fait voir que la courbe eſt une hyperbole par raport au premier axe ; & le terme $\frac{n}{m}yy$ fait connoître que le premier axe doit être à ſon parametre comme $n$ eſt à $m$, c'eſt-à-dire en raport donné de l'expoſant $n$ de la puiſſance de la coupée $x$ à l'expoſant $m$ de l'ordonnée $y$ dans l'équation propoſée $x^n y^m = p^{m+n}$.

* 550.

* 715.

Si l'on ſuppoſe $m = 1$, $n = 1$, l'équation generale deviendra $xy = p^2$, qui eſt l'équation des hyperboles du premier genre par raport aux aſymptotes : & l'equation de la courbe $DC$ deviendra $yy = xx - 2aa$, qui appartient à une hyperbole équilatere par raport au premier axe. Ce qui fait voir qu'une hyperbole équilatere $DC$, qui aura pour centre l'origine $A$, pour premier axe la ligne $AB$, coupera perpendiculairement toutes les hyperboles du premier genre qui auront pour aſymptotes les droites $AE$, $AB$ perpendiculaires l'une à l'autre au point $A$.

## EXEMPLE III.

816. *L'ON a trouvé dans l'article* 806, *que l'expreſſion de la ſoutangente* F S *de la courbe* Aee, *en ſuppoſant la coupée* $AF = -x$, *l'ordonnée* $Fe = y$, *& la grandeur conſtante* $AP = a$ *étoit* $\frac{3y^3+axy}{3xx-ay}$. *Il faut à preſent, en ſuppoſant que* $\frac{3y^3+axy}{3xx-ay}$ *eſt la ſoutangente d'une courbe, trouver l'équation ou la nature de cette courbe.*

FIG. LII.

1°. IL faut ſuppoſer l'expreſſion de la ſoutangente donnée par les conditions du Problême, égale à la formule de la ſoutangente, ce qui donnera l'équation du Problême $\frac{3y^3+axy}{3xx-ay} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $3y^2dy + axydy = 3xxydx - ayydx$.

2°. En diviſant cette équation par $y$, & mettant $3yydy$ au premier membre, & les autres grandeurs au ſecond, l'on aura $3yydy = 3xxdx - axdy - aydx$, dont on trouvera par la ſeconde propoſition fondamentale* que l'integrale eſt $y^3 = x^3 - axy$. Ainſi $y^3 - x^3 + axy = 0$ eſt l'équation de la courbe *Aee*. *Ce qu'il falloit trouver.* *714.

## EXEMPLE IV.

7. *IL faut trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt* $-x$.

1°. ON ſuppoſera $-x = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $ydx + xdy = 0$, qui eſt l'équation du Problême.

2°. On trouvera par la troiſiéme propoſition fondamentale* que l'integrale eſt $xy = ab$, qui eſt l'équation de l'hyperbole entre les aſymptotes. *Ce qu'il falloit trouver.* *715.

## EXEMPLE V.

8. *ON ſuppoſe (en nommant* KB, x; KA, a; BC, y,*) que* KB (x) . KA (a) :: KA (a) . KS $= \frac{aa}{x}$; *il faut trouver l'équation de la courbe* ACC. FIG. XXI.

1°. LA ſoutangente $BS =$* $\frac{ydx}{dy}$; ainſi $KS = KB - BS = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy - ydx}{dy}$; cela étant, on aura $\frac{aa}{x} = \frac{xdy - ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $xxdy - aady - yxdx = 0$; c'eſt l'équation du Problême. *550.

2°. On peut la réduire à la troiſiéme propoſition fondamentale*, en ſuppoſant $z = xx - aa$; ce qui donnera $\frac{1}{2}dz = xdx$: car en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra $zdy - \frac{1}{2}ydz = 0$; & la multipliant par $\frac{1}{z^{1+\frac{1}{2}}}$, on trouvera $\frac{zdy - \frac{1}{2}ydz}{z^{1+\frac{1}{2}}} = 0$, dont l'integrale eſt $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{a}$, qui ſe réduit à $\frac{aa}{bb}yy = z = xx - aa$, qui eſt l'équation d'une hyperbole par raport au premier diametre, la moitié duquel eſt $a$, & la moitié du ſecond diametre eſt $b$. *Ce qu'il falloit trouver.* *715.

## EXEMPLE VI.

9. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, 1°. on ſuppoſera $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$, qu'on réduira

à $2axdy - 2xxdy = aydx - 2xydx$, ou bien $2axdy - 2xxdy - aydx + 2xydx = 0$ ; c'eſt l'équation du Problême. 2°. On prendra $z = ax - xx$ ; ce qui donnera $dz = adx - 2xdx$ ; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, on aura $2zdy - ydz = 0$, qui, étant multipliée par $\frac{y}{zz}$, devient $\frac{2zydy - yydz}{zz}$
*715. $= 0$, dont l'integrale eſt* $\frac{yy}{z} = \frac{b}{a}$, qui ſe réduit à $\frac{a}{b} yy = z = ax - xx$, qui eſt l'équation de l'ellipſe dont $a$ eſt le premier diametre, $b$ eſt le parametre. *Ce qu'il falloit trouver.*

## EXEMPLE VII.

820. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt $mx$, 1°. on ſuppoſera $mx = \frac{ydx}{ay}$, qui ſe réduira à $mxdy - ydx = 0$ ; c'eſt l'équation du Problême. 2°. On la multipliera par $\frac{y^{m-1}}{xx}$, & l'on aura $\frac{my^{m-1}xdy - y^m dx}{xx} = 0$, dont on trouvera, comme dans la troiſiéme propoſition fondamentale, que l'integrale eſt $\frac{y^m}{x} = a^{m-1}$, ou bien $y^m = a^{m-1}x$, qui eſt l'équation des paraboles de tous les degrés. *Ce qu'il falloit trouver.*

## EXEMPLE VIII.

821. POUR trouver l'équation de la courbe dont la longueur eſt S. $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}}$, 1°. il faut ſuppoſer S. $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}}$
*582. $=$* S. $\sqrt{dx^2+dy^2}$, qui ſe réduira d'abord à $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}} = \sqrt{dx^2+dy^2}$, & enſuite à $dx^2 + qqx^{2q-2} \times dx^2 = dx^2 + dy^2$, ou bien $qqx^{2q-2}dx^2 = dy^2$ ; & en prenant les racines quarrées, on aura $qx^{q-1}dx = dy$ pour l'équation du Problême. 2°. Il faudroit ſéparer les changeantes ſi elles ne l'étoient pas ; mais comme elles ſont toutes ſéparées, il faut prendre les integrales des deux membres par la premiere propoſition fondamentale, & l'on trouvera $x^q = y$ pour l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.* C'eſt l'équation des paraboles de tous les degrés dont le parametre eſt l'unité.

## EXEMPLE IX.

822. ON trouvera, par la même méthode, les équations des courbes exponentielles, & de celles qui renferment des expreſſions logarithmiques ; par exemple ſi $\frac{\overline{1+x} \times l.\,1+x}{1+l.\,1+x}$ eſt la ſoutangente

tangente d'une courbe dont il faut trouver l'équation, 1°. on ſuppoſera $\frac{\overline{1+x}\times l.\overline{1+x}}{1+l.\overline{1+x}} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $\frac{dy}{y} = \frac{1dx+dx\times l.\overline{1+x}}{\overline{1+x}\times l.\overline{1+x}}$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour en trouver les intégrales on ſuppoſera $\overline{1+x}\times l.\overline{1+x} = l.z$; d'où l'on déduira * $dz = 1dx\times l.\overline{1+x} + \frac{1dx}{1+x}\times\overline{1+x} = 1dx + dx\times l.\overline{1+x}$; * 764.
& ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, dont les intégrales ſont * $ly = l.z = l.\overline{\overline{1+x}\times l.\overline{1+x}}$: * 768.
& les grandeurs qui ont des logarithmes égaux étant égales, on aura $y = \overline{1+x}\times l.\overline{1+x}$ pour l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.*

On a donné la conſtruction de cette courbe dans l'art. 780.

## EXEMPLE X.

23. ON trouvera de même l'équation de la courbe dont la ſoûtangente eſt $\frac{1}{1+l.x}$, 1°. en ſuppoſant $\frac{1}{1+l.x} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $\frac{dy}{y} = 1dx + dx\times l.x$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour trouver les intégrales, on ſuppoſera $xlx = z$, ce qui donnera $dz = dx\times l.x + 1dx$; ainſi l'on aura $\frac{dy}{y} = dz$, dont les intégrales ſont $l.y = z = xlx =$ * $l.x^x$; d'où l'on déduit † $y = x^x$. * 770.
C'eſt l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.* † 772.

On a donné la conſtruction de cette courbe dans l'art. 782.

## AVERTISSEMENT.

LE calcul différentiel & intégral des expreſſions logarithmiques, ſert auſſi quelquefois à trouver les équations des courbes qui ne contiennent que des expreſſions ordinaires, comme on le verra dans l'Exemple ſuivant, qui contient une infinité d'Exemples.

## EXEMPLE XI.

24. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt ⋆ $\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax\pm xx}}{ma\pm\overline{m+n}\times x}$, 1°. on ſuppoſera $\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax\pm xx}}{ma\pm\overline{m+n}\times x} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe * 412.
réduira à $\frac{dy}{y} = \frac{madx\pm\overline{m+n}\times xdx}{\overline{m+n}\times\overline{ax\pm xx}}$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour trouver les intégrales, on multipliera le numérateur & le dénominateur du ſecond membre par $\frac{n}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$, & l'équation deviendra $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n}\times\frac{\frac{m}{n}ax^{\frac{m-n}{n}}dx\pm\frac{\overline{m+n}}{n}\times x^{\frac{m}{n}}dx}{ax^{\frac{m}{n}}\pm x^{\frac{m+n}{n}}}$,

On ſuppoſera $z = ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$; ce qui donnera $dz = \frac{m}{n} ax^{\frac{m-n}{n}} dx \pm \frac{m+n}{n} x^{\frac{m}{n}} dx$. On ſubſtituera $dz$ & $z$ au lieu de leurs valeurs, & l'on aura $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n} \times \frac{dz}{z}$ : prenant les *768. intégrales, on aura S. $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n} \times$ S. $\frac{dz}{z}$; c'eſt-à-dire * $l.\, y = \frac{n}{m+n} \times l.\, z$, où mettant la valeur de $z$, on aura $l.\, y = \frac{n}{m+n} \times l.\, ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$ : Mais $\frac{n}{m+n} \times l.\, ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$
*770. $=$ * $l.\, \overline{ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}}^{\frac{n}{m+n}}$; ainſi $l.\, y = l.\, \overline{ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}}^{\frac{n}{n+n}}$; & les grandeurs qui ont des logarithmes égaux étant égales, (car on ſuppoſe que ces grandeurs & leurs logarithmes ſont compris dans la même logarithmique,) on aura $y = \overline{ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}}^{\frac{n}{m+n}}$; élevant chaque membre à la puiſſance $m+n$, on trouvera $y^{m+n} = \overline{ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}}^{n} = x^{m} \times \overline{a \pm x}^{n}$. C'eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés par raport au diametre quand il y a $\overline{a+x}^{n}$, & celle des ellipſes de tous les degrés quand il y a $\overline{a-x}^{n}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

### AVERTISSEMENT.

ON donnera dans les Exemples ſuivans les conſtructions des courbes, en ſe ſervant de leurs équations différentielles.

### EXEMPLE XII.

825. POUR trouver la courbe dont la ſoutangente, qui convient à chacun des points de la courbe, eſt égale à une conſtante donnée $a$, 1°. on ſuppoſera $a = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $dx = \frac{ady}{y}$. C'eſt l'équation du Problême.

2°. Comme on ne peut pas trouver l'intégrale du ſecond membre, (on exclut ici & dans l'article ſuivant les logarithmes,) il faut conſtruire la courbe de cette équation différentielle : Pour cela il faut faire en ſorte que les membres de l'équation deviennent les élémens de l'aire de deux figures, dont on ſuppoſera les quadratures données, & que cependant l'égalité des deux membres ne change point; ce qui ſe fera en multipliant chaque membre par une même conſtante, comme $a$, & l'équation deviendra $adx = \frac{aady}{y}$, dont le premier membre $adx$ eſt l'élément de l'aire d'un rectangle, & le ſecond eſt l'élément de l'aire d'une hyperbole entre les aſymptotes, comme on le va voir; & leurs intégrales $ax$, ou S. $adx =$ S. $\frac{aady}{y}$ ſeront les aires de ces figures.

Après cette préparation, il faut tirer les deux droites $DCd$, $NCA$ qui ſe coupent à angles droits au point $C$, elles ſeront les lignes des coordonnées, & l'on prendra les $y$ ſur $DCd$, & les $x$ ſur $NCA$. Il faut prendre $Cd$ égale à la conſtante donnée $a = CA$, & mener par $d$ la droite $pdb$ parallele à $NCA$; & ſi l'on prend l'origine au point $C$, il eſt évident qu'un rectangle quelconque $CAbd$ ſera l'expreſſion géométrique de S. $adx = ax = Cd \times CA$. Fig. LVI.

Il faut enſuite prendre Ca $= a$, tirer ab $= a$ parallele à $CN$, & mener Cb qui ſera égale à $a\sqrt{2}$, & tracer par le point b l'hyperbole équilatére l h b f d entre les aſymptotes $CD$, $CN$. Il eſt évident que (*la puiſſance* de l'hyperbole étant $aa$, & chacune des coupées Ca, Ce, $CD$, &c. étant $y$,) chacune des ordonnées ab, ef, $D$d, &c. ſera $=$ * $\frac{aa}{y}$ : par conſéquent *410.
chacun des élémens de l'aire ſera $=$ * $\frac{aady}{y}$; & en concevant, *595.
par raport à l'aire hyperbolique a b d $D$ qui eſt au-delà de a b, que $y = a + y$; & par raport à l'aire a b i l qui eſt au-deſſous de a b, que $y = a - y$, chacune des aires ſera $=$ S. $\frac{aady}{y}$.

On peut à préſent tracer la courbe propoſée, c'eſt-à-dire, en trouver tant de points que l'on voudra très-proches les uns des autres; on peut commencer par quel point on voudra; mais pour faire concevoir plus diſtinctement aux Lecteurs la courbe que l'on va décrire, on prolongera b a en $B$, en faiſant a$B =$ b a $=$ Ca $= a$, & le point $B$ ſera le premier de la courbe; on abaiſſera par $B$, $BAb$ parallele à Ca. Pour avoir enſuite les points $F$, $D$, $M$, $P$, &c. de la partie de la courbe où les ordonnées $EF$, $CD$, &c. qu'on nommera $y$, vont en augmentant, on ſe ſervira de la partie de l'aire hyperbolique qui eſt au-deſſus de ab, & on ſe ſervira de la partie de l'aire hyperbolique qui eſt au-deſſous de ab pour trouver les points $H$, $L$, &c. de la partie de la courbe où les ordonnées $GH$, $IL$, &c. vont en diminuant.

Pour trouver un point quelconque *F* au-deſſus de *B*, on prendra l'aire hyperbolique aefb que l'on ſuppoſe donné ; on fera le rectangle *AEfb* égal à cette aire ; & prolongeant fe, *fE*, le point *F* où elles ſe rencontreront ſera un des points de la courbe ; prenant enſuite l'aire hyperbolique e*D*df = aefb, & faiſant le rectangle *ECdf* égal à cette aire, le point *D* où ſe rencontrent d*D*, *dC* prolongées ſera un autre point de la courbe. On trouvera de même le point *M* en prenant l'aire hyperbolique *D*kmd = e*D*df ; & faiſant le rectangle *CKmd* égal à cette aire, le point *M* où ſe rencontrent *mK*, mk eſt un point de la courbe. On trouvera de même le point *P* par le prolongement de *pN*, pn, & ainſi des autres.

En prenant au-deſſous de ab l'aire hyperbolique abhg égale à chacune de celles que l'on a déja priſes, & faiſant le rectangle *AbhG* égal à cette aire, le point *H*, où ſe rencontreront hg, *hG* prolongées, ſera un des points de la courbe ; & ainſi des autres.

On prendra à préſent l'origine des coupées $x = AE$, $AC$, &c. au point *A*, de la courbe *BFD*, & ſes ordonnées $y = AB$, $EF$, $CD$, &c. paralleles à $CD$ ; & comme il *633. eſt évident,* que les eſpaces hyperboliques pris de ſuite aefb, e*D*df, &c. étant égaux par la conſtruction, les $y$ ($Ca$, $Ce$, $CD$, &c.) font une progreſſion géométrique, & que les $x$ ($AE$, $AC$, $AK$, $AN$, &c.) étant, par la conſtruction, les baſes de rectangles égaux d'une même hauteur, *753. font une progreſſion arithmétique ; l'on voit clairement* que la courbe *BFD*, &c. qu'on vient de décrire, eſt la logarithmique. Et de plus on peut concevoir les eſpaces égaux correſpondans deux à deux, comme ed, *Ed*, partagés chacun en un même nombre infini d'élémens égaux ; chacun des élémens du premier *DR*td ſera $= \frac{aady}{y}$, & chacun de ceux du ſecond $C\rho\tau d$ ſera $= adx$ ; & puiſque $\frac{aady}{y} = adx$, l'on aura $DR\,(dy) . RT = C\rho\,(dx) :: a . \frac{aa}{y} :: DC\,(y) . a$ : ce *550. qui donne $\frac{ydx}{dy} = a$ ; ainſi* la ſoutangente de la courbe que l'on a décrite eſt partout égale à ($a$). *Ce qui étoit propoſé.*

## EXEMPLE XIII.

6. POUR trouver la courbe dont la ſoutangente eſt $\frac{m}{n}x$, (on ſuppoſe que $m$ & $n$ repréſentent chacune un nombre quelconque), 1°. on ſuppoſera $\frac{m}{n}x = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduira à $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$ : c'eſt l'équation du Problême. 2°. Comme on ne peut pas trouver l'intégrale de chaque membre où les changeantes ſont ſéparées, ſi ce n'eſt en employant la méthode *de l'art.* 820 ; ſans cela on va conſtruire la courbe par le moyen des rectifications, ou des quadratures ſuppoſées de deux courbes, en réduiſant, aux élémens de la rectification ou de la quadrature de deux courbes, les membres de l'équation, ſans changer leur égalité ; ce qui ſe fera en multipliant l'un & l'autre par le quarré d'une conſtante donnée $a$, & l'équation préparée ſera $\frac{maady}{y} = \frac{naadx}{x}$. Chaque membre de cette équation eſt l'élément de l'aire d'une hyperbole équilatére entre les aſymptotes ; $y$ eſt la coupée de la premiére, $maa$ eſt ſa *puiſſance*, & $\frac{maa}{y}$ eſt ſon ordonnée : de même $x$, $naa$, $\frac{naa}{x}$, ſont la coupée, la *puiſſance*, & l'ordonnée de la ſeconde. FIG. LVII.

Pour les conſtruire & enſuite la courbe propoſée par leur moyen, il faut tirer les deux droites $BAL$, b$Al$, qui ſe coupent à angles droits au point $A$, qui ſera l'origine des changeantes, dont on prendra les $y$ ſur $A$b, ou ſur les paralleles à $A$b, & les $x$ ſur $AB$. Enſuite on conſtruira la premiére hyperbole entre les aſymptotes $A$b, $AL$, en prenant $A$m $= \sqrt{aam}$ ; & menant ma parallele à $AL$ & égale à $A$m, & tirant $A$a qui ſe trouvera égale à $a\sqrt{2m}$, $A$a ſera le demi axe de la premiére hyperbole dont (a) ſera le ſommet ; on tracera la premiére hyperbole agec par ce ſommet a. Il eſt évident que chacune des ordonnées fg, de, bc, &c. ſera $= \frac{maa}{y}$, & qu'en menant tu infiniment proche de bc, le petit eſpace hyperbolique bt ſera $= \frac{maa}{y} \times dy$. On prendra pour la ſeconde, $AM = \sqrt{aan}$, & menant $Ma$ parallele à $Al$, & tirant $Aa$ qui ſe trouvera égale à $a\sqrt{2n}$, $Aa$ ſera le demi-axe de la ſeconde hyperbole dont $a$ ſera le ſommet, par lequel on tracera la ſeconde $agec$, dont chaque ordonnée $Fg$, $De$, $Bc$, ſera $= \frac{naa}{x}$ ; & en concevant que $Br\,(dx)$ eſt une partie infiniment petite de $AB\,(x)$, mais telle que bu $=$ cr $= CR = dy \,.\, Br\,(dx) :: Bc\,(\frac{naa}{x}) \,.\,$ bc $(\frac{maa}{y})$ ; &

concevant en même tems l'ordonnée *ru*, le petit eſpace ou l'élément hyperbolique *Bu* ſera $= \frac{naa}{x} \times dx = \frac{maa}{y} \times dy$ ; & prolongeant *cB*, cb, leur rencontre en *C* donnera un point de la courbe propoſée.

Mais comme on ne peut pas partager des particules infiniment petites *dx* & *dy* en tel raport qu'on veut autrement que par l'eſprit, & qu'on ne peut partager ainſi que des quantités finies ; il faut prendre les intégrales de l'équation préparée, qui ſont S. $\frac{maady}{y} =$ S. $\frac{naadx}{x}$, qui expriment des eſpaces hyperboliques finis égaux entr'eux, & qui font voir qu'il faut prendre ſur la premiére hyperbole un eſpace quelconque fini bg $(\frac{maady}{y})$, & lui trouver un égal eſpace hyperbolique *Fc* = S. $\frac{naadx}{x}$ ſur la ſeconde hyperbole, & prolongeant g f, *gF* ; leur rencontre au point *G* ſera un autre point de la courbe propoſée ; & l'on trouvera de la même maniére tant d'autres points de la courbe qu'on voudra.

Les eſpaces hyperboliques fc, *Fc* étant égaux par la ſuppoſition, on peut concevoir dans l'un & dans l'autre le même nombre infini d'élémens égaux entr'eux ; ceux du premier ſeront chacun $= \frac{maady}{y}$, & ceux du ſecond ſeront chacun $= \frac{naadx}{x}$ ; & l'on aura bu $= CR\ (dy)\ .\ Br = RT\ (dx)$
*550. $:: \frac{naa}{x}\ .\ \frac{maa}{y} :: CB\ (y)\ .\ \frac{m}{n}x =$ * à la ſoutangente : ainſi l'on a décrit la courbe dont la ſoutangente eſt égale à $\frac{m}{n}x$. *Ce qui étoit propoſé.*

## REMARQUES.

### I.

QUAND le raport des ordonnées bc, fg, &c. d'une hyperbole ceg, & des ordonnées *Bc*, *De*, &c. d'une autre hyperbole *ceg*, qui ſont également éloignées de l'origine *A*, eſt donné, ſi l'on prend ſur la premiére tel quadrilatére hyperbolique bg qu'on voudra, on peut toujours trouver ſur la ſeconde un quadrilatére hyperbolique *Bg* égal à celui de la premiére. Pour le concevoir clairement, il faut imaginer *BA* ſur b*A*, & l'hyperbole *ceg* en ϰεγ, & bc étant $= \frac{maa}{y}$, & bϰ étant $= \frac{naa}{x}$, il eſt évident que *A*b étant commune, *y* & *x* ſont la même ligne : ainſi bϰ . bc :: *n* . *m* ; par conſéquent le quadrilatére hyperbolique bε eſt à bg comme *n* eſt à $m$. D'où l'on voit que pour avoir un quadrilatére hyperbolique $b\gamma = bg$, il ne s'agit que de faire en ſorte que $n . m :: b\epsilon . b\gamma$. Or pour trouver ce $b\gamma$, il n'y a qu'à faire cette proportion $n . m :: bf . bh$, & tirer l'ordonnée $h\gamma$, & l'on aura $b\epsilon . b\gamma :: n . m$. Car on peut concevoir bf partagée en petites parties qui ſoient en progreſſion géométrique, qui ayent toutes chacune avec ſa voiſine le raport de $\sqrt[n]{Ab}$ à $\sqrt[n]{Af}$, & qu'il y ait autant de ces raports égaux de b à f qu'en marque le nombre $n$, & que bh eſt partagée de la même maniére, en ſorte qu'il y ait de b à h autant de ces raports égaux qu'en exprime le nombre $m$; & comme tous les petits quadrilatéres hyperboliques qui auront ces petites parties pour baſes * ſeront égaux, il eſt évident que l'eſpace * 633. hyperbolique $b\epsilon$, ſera à l'eſpace hyperbolique $b\gamma$ comme $n$ eſt à $m$; par conſéquent $b\gamma = bg$.

## II.

Chacun des petits raports égaux de la progreſſion géométrique des petites parties de bf, dont il y en a autant qu'en exprime le nombre $n$, peut être marqué ainſi $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$; car on peut concevoir le raport de $Ab$ à $Af$ composé d'autant de raports égaux qu'en exprime le nombre $n$, & il eſt évident par la doctrine des raports composés, que le raport de $Ab$ à $Af$ eſt composé d'autant de raports ſimples égaux à $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ qu'en exprime le nombre $n$, puiſqu'en élevant ce raport ſimple à la puiſſance dont $n$ eſt l'expoſant, on aura le raport composé $\frac{Ab}{Af}$.

## III.

Si on éléve le raport ſimple $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ à la puiſſance dont $m$ eſt l'expoſant, on aura le raport $\frac{\sqrt[n]{Ab}^{m}}{\sqrt[n]{\overline{Af}}^{m}} = \frac{\overline{Ab}^{\frac{m}{n}}}{\overline{Af}^{\frac{m}{n}}}$ pour le raport composé d'autant de raports ſimples égaux $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$

qu'en exprime le nombre $m$. Or le raport de $Ab$ à $Ah$ eſt compoſé d'autant de raports égaux à $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ qu'en exprime le nombre $m$, puiſque, par la premiére remarque, il y a autant de ces petits raports égaux entre $Ab$ & $Ah$ qu'en exprime le nombre $m$; par conſéquent $Ab \,.\, Ah :: \overline{Ab}^{\frac{m}{n}} \,.\, \overline{Af}^{\frac{m}{n}}$.

## I V.

D'où il ſuit que les ordonnées correſpondantes $b\varkappa$, $bc$ de deux hyperboles étant entr'elles comme deux nombres exprimés par $n$ & $m$, ſi l'on en prend deux eſpaces hyperboliques égaux $b\gamma$, $bg$, & qu'on partage $bh$ en $f$ dans le raport de $m$ à $n$, en ſorte que $bf \,.\, bh :: n \,.\, m$, l'on aura toujours $Ab \,.\, Ah :: \overline{Ab}^{\frac{m}{n}} \,.\, \overline{Af}^{\frac{m}{n}}$.

## V.

Si l'on prend ſur $AB$ la droite $AF = Ah$, il eſt évident que la coupée $AB = Ab$ eſt à la coupée $AF = Ah$, comme l'ordonnée $BC = Ab$, élevée à la puiſſance dont $\frac{m}{n}$ eſt l'expoſant, eſt à l'ordonnée $FG = Af$ élevée à la même puiſſance $\frac{m}{n}$. Ce qui fait voir que la courbe $AGC$, qu'on peut conſtruire par le moyen des quadrilatéres hyperboliques égaux de deux hyperboles équilatéres, eſt toujours une courbe géométrique, quand le raport des ordonnées de ces hyperboles peut s'exprimer par nombres; puiſque la puiſſance d'une ordonnée qui a ce raport pour expoſant, eſt toujours à une ſemblable puiſſance d'une autre ordonnée, comme la coupée correſpondante de la premiére eſt à la coupée correſpondante de la ſeconde. Mais quand ce raport qui fait l'expoſant des puiſſances des ordonnées eſt incommenſurable, on ne peut pas alors exprimer par les expreſſions de l'algébre le raport des ordonnées aux coupées, & la courbe décrite par le moyen des quadrilatéres hyperboliques égaux eſt méchanique.

## EXEMPLE XIV.

827. LEs deux droites $AE$, $AB$ font un angle droit en $A$ qui
FIG. LVIII. eſt diviſé en deux demi-droits par la droite $Ab$; d'où il ſuit que $AB = Bb$, $AD = Dd$; $BS$ eſt la ſoutangente d'une courbe $AGFC$; $a$ eſt une ligne droite donnée; nommant les

les coupées $AB$ $(x)$, les ordonnées $BC$ $(y)$, il eſt clair que $bC = BC$ $(y)$ $- Bb = AB$ $(x)$; il faut trouver la courbe $AGFC$ par le moyen de cette proprieté donnée, $BC$ $(y)$. $BS$ $(^* \frac{ydx}{dy})$ $:: a.$ $bC$ $(y - x)$. * 55.

Ce Problême, que *M. de Beaune* propoſa de ſon temps à *M. Deſcartes*, eſt un des premiers qui a fait ſentir le beſoin que l'on avoit du calcul differentiel & integral, qui n'étoit pas encore inventé de ce temps-là, pour reſoudre la plûpart de ces ſortes de Problêmes, comme on le va voir.

1°. La proprieté de la courbe qu'on cherche donne cette équation $\frac{aydx}{dy} = yy - xy$, qui ſe reduit à $dx = \frac{y-x}{a} \times dy$; c'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour en ſeparer les changeantes, il faut ſuppoſer $\frac{y-x}{a} = \frac{b-z}{b}$; ce qui donnera $y = \frac{ab+bx-az}{b}$, & $dy = \frac{bdx-adz}{b}$. Mettant les valeurs de $\frac{y-x}{a}$ & de $dy$ dans l'équation du Problême, elle deviendra $dx = \frac{adz}{b} - \frac{adz}{z}$, où les changeantes ſont ſeparées. Prenant les integrales, on aura $x = \frac{az}{b} - a \times S. \frac{dz}{z}$, ou bien* $x = \frac{az}{b} - a \times l.\ z$. C'eſt l'équation qui exprime la nature de la courbe propoſée. Voici la maniere de la conſtruire par cette équation. * 768.

Il faut prendre $AM = a$, & élever la perpendiculaire $Mf = a$, & par le point $f$ tracer la logarithmique $Ngfc$, dont la ſoutangente ſoit par tout égale à $AM$ $(a)$; on nommera $z$ les ordonnées $Mf$, $Ec$, $AN$, &c. de la logarithmique: l'origine des logarithmes, qu'il faut prendre ſur l'axe $AME$ de la logarithmique, ſera au point $M$, où $Mf$ $(z)$ eſt égale à $(a)$ qu'on prendra pour l'unité: les logarithmes $MH$, $MA$ ſeront poſitifs, les logarithmes $ME$ ſeront négatifs, & le logarithme $MA$ étant l'unité, l'ordonnée $AN$ $(z)$ eſt déterminée, & on la nommera $b$. Il faut auſſi tirer $MN$ qui ſera la tangente de la logarithmique au point $N$.

A preſent pour conſtruire la courbe, il n'y a qu'à prendre quel point on voudra $E$ ſur l'axe de la logarithmique, tirer l'ordonnée $Ec$ de la logarithmique, & lui abaiſſer en $c$ la perpendiculaire $ce$ juſqu'à la rencontre de $MN$, puis prolonger $cE$ en $C$, en ſorte que $EC$ ſoit égale à $ec$; le point $C$ ſera un de ceux de la courbe. Menant de même $Mf$, $fm$, & faiſant $MF = mf$, le point $F$ ſera celui de la courbe qui répond à l'origine $M$ des logarithmes ; menant de même $Hg$, $gh$, & faiſant $HG = hg$, $G$ ſera un point de la courbe. On trouvera de même les autres.

### *Demonſtration de la conſtruction.*

ON prendra le point $C$, qu'on démontrera être un point de la courbe. Pour cela il faut mener $e$e parallele à $AN$, & l'on aura, à cauſe des triangles ſemblables $AMN$, e$Me$, $NA\ (b). AM\ (a) :: e\text{e} = Ec\ (z)$. $M\text{e} = \frac{az}{b}$ ; ajoutant à cette quantité $ME = -1 \times l. z$ avec un ſigne contraire, c'eſt-à-dire avec le ſigne +, parcequ'il y a dans l'équation à conſtruire $x = \frac{az}{b} - a \times l. z$, on aura, par raport aux points qui ſont au-deſſus de l'origine $M$ des logarithmes, $\frac{az}{b} + a \times l. z = E\text{e}$ ; mais $x = \frac{az}{b} - a \times l. z$ ; & cette équation devient du côté des logarithmes négatifs, $x = \frac{az}{b} + a \times l. z$. Donc $AB = EC\ (x) = E\text{e}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C'eſt la même démonſtration pour les autres points, excepté qu'au deſſous de $M$, où les logarithmes ſont poſitifs, l'on aura $x = \frac{az}{b} - a \times l. z$.

On peut auſſi démontrer par la conſtruction, que la courbe
$AGFC$ a la proprieté donnée par le Problême. Car en
menant les ordonnées infiniment proches $trRT$r, $T$t, & la
*550. tangente $CS$, il faut que * $C\text{r} . \text{r}T :: CB . BS$, & qu'en met-
tant les valeurs de ces lignes priſes de la conſtruction, on
trouve l'équation du Problême $dx = \frac{y-x}{a} \times dy$. Or $cr = ER$
$= C\text{r} = dy$, étant la differentielle de $CB\ (y)$, $ER$ étant
auſſi la differentielle du logarithme $ME$, qui eſt ſuppoſé
*761. négatif, eſt * $-\frac{dz}{z}$ ; ainſi $C\text{r} = dy = -\frac{dz}{z}$ par la conſtruc-
tion ; $T\text{r} = \text{t}B$ eſt la differentielle de $AB\ (x)$, ainſi $T$r eſt
$dx$ ; mais $AB\ (x) = EC = ec =$ ( par la conſtruction ) $\frac{az}{b}$
$+ a \times \text{S}. \frac{dz}{z}$, (car le logarithme $ME$ ($a \times \text{S}. \frac{dz}{z}$) négatif, eſt
retranché de $\frac{az}{b}$, ) dont la differentielle eſt $-\frac{adz}{b} + \frac{adz}{z}$,
( parceque les ordonnées $Ec\ (z)$ allant en diminuant, la
differentielle $tr\ (-dz)$ eſt négative, & il faut écrire $-\frac{adz}{b}$
pour la differentielle de $+\frac{az}{b}$ ; ) ainſi $T\text{r} = dx = -\frac{adz}{b} + \frac{adz}{z}$.
*756. La proprieté de la logarithmique donne auſſi * $tr\ (-dz).$
$rc\ (dy) :: tR\ (z) . a$ qui eſt la ſoutangente ; d'où l'on tire
$adz = -zdy$ ; enfin ayant ſuppoſé pour la conſtruction
$\frac{y-x}{a} = \frac{b-z}{b}$, l'on en déduit $z = -\frac{by+bx+ab}{a}$. Mettant à

preſent dans la proportion $Cr . rT :: CB . BS$, les valeurs des lignes priſes de la conſtruction, l'on trouvera $Cr\ (-\frac{dz}{z} = dy)$ $. rT\ (-\frac{adz}{b} + \frac{adz}{z}) :: BC(y) . BS = \frac{-\frac{aydz}{b} + \frac{aydz}{z}}{-\frac{dz}{z}} = {}^{*}\frac{ydx}{dy}$; *550. ſubſtituant au lieu du dénominateur $-\frac{dz}{z}$ ſa valeur $dy$, & au lieu de $adz$ ſa valeur $-zdy$, l'équation de la ſoutangente $BS$ deviendra $-\frac{zdy}{b} + 1dy = dx$; & ſubſtituant dans cette derniere au lieu de $-z$ ſa valeur $\frac{by-bx-ab}{a}$, l'on trouvera $\frac{y-x}{a} \times dy = dx$: ainſi la courbe qu'on a décrite eſt celle à qui convient la proprieté donnée par le Problême.

## REMARQUE.

DANS la reſolution des Problêmes où l'on cherche la nature des courbes, qûand on prend l'integrale de l'équation differentielle, il arrive quelquefois que cette integrale, qui eſt l'équation du Problême, eſt complete, & quelquefois auſſi, il lui faut ajouter ou en retrancher une grandeur conſtante, afin de la rendre complete. Quand la differentielle ſe peut reduire à la troiſiéme propoſition fondamentale *, la conſtante qu'il faut ajouter eſt ordinairement arbitraire; il ſuffit qu'elle ſoit homogene aux termes de l'integrale; on peut cependant faire le choix de la grandeur conſtante qui donnera une reſolution plus ſimple. Voici la regle pour connoître, dans les autres cas, ſi l'integrale eſt complete; & quand elle ne l'eſt pas, pour trouver la grandeur conſtante qui lui manque pour la rendre complete. 1°. Il faut ſuppoſer la changeante $x$ égale à zero à ſon origine; ſi en même temps on trouve que l'autre changeante de l'équation, $y$ ou $z$ devient auſſi zero, & qu'il ne reſte aucune grandeur conſtante dans l'équation par cette ſuppoſition de $x = 0$, c'eſt une marque que l'integrale eſt complete. 2°. Mais ſi $x$ étant ſuppoſée égale à zero, on trouve une valeur déterminée de l'autre changeante $y$ ou $z$ à l'origine de $x$, il faut ſubſtituer cette valeur déterminée de $y$ ou de $z$ à ſa place dans l'équation; & ſi après la ſubſtitution on trouve que tout devient zero, & que les grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires, c'eſt encore une marque que l'integrale eſt complete: mais ſi après la ſubſtitution de la valeur déterminée de $y$ ou de $z$, *715.

ou de zero, quand $y$ ou $z = 0$, on trouve une grandeur conſtante ; il faut ajouter cette conſtante, avec un ſigne oppoſé, à l'integrale pour la rendre complete. Par exemple on ſuppoſera $x = 0$ dans l'integrale $x = \frac{az}{b} - a \times S. \frac{dz}{z}$ ; ce qui donnera une valeur déterminée de $z$, car au point $A$ qui eſt l'origine des $x$, la changeante $z$ eſt $AN = b$, & le logarithme $S. \frac{dz}{z}$ ou $l. z$ eſt égal à $AM = a = 1$ ; ce qui eſt cauſe que $\frac{az}{b}$ devient $\frac{ab}{b} = a = 1$ ; & $a \times l. z$ devient auſſi $a = 1$ ; & comme les quantités ſe détruiſent par des ſignes oppoſés, il n'y a point de conſtante à ajouter à l'integrale, ni à en retrancher. La raiſon de la regle eſt que la courbe doit être zero à ſon origine ; ainſi l'integrale, qui eſt l'équation qui exprime la courbe, doit auſſi être zero ; ce qui eſt cauſe que, quand il arrive que l'integrale n'eſt pas zero, il en faut retrancher la quantité conſtante qui l'empêche d'être zero ; ce qui ſe fait en la joignant avec un ſigne contraire.

---

# SECONDE PARTIE DE LA DERNIERE SECTION.

## *Exemples de l'uſage de l'Analyſe dans la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques, en ſe ſervant du calcul differentiel & integral.*

### EXEMPLE I.

829. *TROUVER les courbes dont il faut que les verres ayent les figures pour raſſembler en un point, par le moyen de la refraction, les rayons qui partent d'un autre point donné, ou qui ſont paralleles.*

FIG. LIX. SOIENT les courbes qu'on cherche repreſentées par $ACcc$, dont le ſommet ſoit au point donné $A$ de la droite $EAF$ ; ſoit $E$ le point d'où partent les rayons, $F$ celui où ils doivent s'aſſembler après avoir ſouffert refraction en entrant dans la courbe, $EC$ l'un de ces rayons qui entrant dans la courbe en $C$, ſe rompt, & continue ſon chemin par la droite $CF$ ; $dCD$ ſoit la perpendiculaire à la courbe au point $C$ ; ainſi $ECd$ * eſt l'angle *d'incidence* ; $DCF$ eſt l'angle de *refraction* ; que le raport du ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de

* Voyez l'article 498.

l'angle de refraction, qui convient au milieu où eſt le rayon incident $EC$, & au milieu qui eſt la matiere qui a la figure $ACc$, ſoit exprimé en general par deux lignes données, dont la plus grande ſera $m$, la moindre ſera $n$, ainſi $\frac{m}{n}$ exprimera *le raport de la refraction.* Soit priſe la partie $Cc$ infiniment petite de la courbe, & ſoient menés le rayon incident $Ec$ & le rayon rompu $cF$, & ſoient tirés $cM$, $cN$, la premiere perpendiculaire ſur le rayon incident $EC$ prolongé en $M$, & la ſeconde ſur le rayon rompu $CF$. L'angle $CcM$ du triangle $CMc$ rectangle en $M$, eſt égal à l'angle d'incidence $ECd$ ou à ſon oppoſé au ſommet $MCD$; car $CcM$ fait un angle droit avec $cCM$, & $MCD$ fait un angle droit avec le même $cCM$. L'angle $CcN$ eſt auſſi égal à l'angle de refraction $DCF$; puiſque dans le triangle $CNc$ rectangle en $N$, l'angle $CcN$ fait un angle droit avec $cCN$, avec lequel l'angle de refraction $DCF$ fait auſſi l'angle droit $DCc$. D'où il ſuit qu'en prenant la particule $Cc$ de la courbe pour le rayon, $CM$ eſt le ſinus de l'angle d'incidence, & $CN$ le ſinus de l'angle de refraction; par conſequent $\frac{CM}{CN} = \frac{m}{n}$. Ces choſes ſuppoſées.

Soient les droites données $EA = a$, $FA = b$, l'augmentation finie & changeante de chaque rayon incident $EC$ ſur le rayon $EA$, lequel entre par le ſommet $A$, ſoit ſuppoſée $= z$, ainſi $EC = a + z$; la difference finie & changeante de chaque rayon rompu $CF$ d'avec le rayon $AF$, ſoit $= u$; cette difference $u$ eſt l'excès de $FA$ ſur $FC$, ou de $FC$ ſur $FA$; ainſi $CF = b \mp u$. La differentielle $CM$ de $EC = dz$; la differentielle $CN$ de $CF = \mp du$. L'on aura donc, par les choſes que l'on vient de dire, $\frac{dz}{\mp du} = \frac{m}{n}$; ce qui donne $ndz = \mp mdu$; prenant les integrales on trouve $nz = \mp mu$; & la proportion $m. n :: z. \mp u.$ qui montre que l'excès $(z)$ de chaque rayon incident $EC$ ſur $EA\,(a)$, eſt à l'excès $(\mp u)$ de $FA\,(b)$ ſur le rayon rompu $CF$ correſpondant à $EC$, comme $m$ eſt à $n$. D'où l'on voit l'invention & *la conſtruction des quatre ſortes d'ovales dont parle M. Deſcartes vers la fin du ſecond Livre de ſa Geometrie*, qui ſont, du moins les trois premieres, les courbes propres au Problême propoſé; & avec quelle facilité on les trouve par le calcul differentiel & integral.

Pour tracer ces courbes, 1°. il faut mener la droite $GAg$, qui faſſe l'angle $GAF$ de quelle grandeur on voudra ; & pour avoir tel point $C$ qu'on voudra, prendre $A$m telle qu'on voudra, & $A$n telle que $m . n :: A\mathrm{m} . A\mathrm{n}$ ; mener la droite m n, & du centre $E$ avec le rayon $E$m tracer un arc. 2°. Après avoir pris $AG = AF$, tracer un ſecond arc du centre $F$ avec le rayon $G$n ; le point $C$ d'interſection de ces deux arcs ſera un point de la premiere de ces courbes. On trouvera de même tous les autres points ; par exemple pour avoir un ſecond point c, on prendra $Am$, & du centre $E$ avec le rayon $Em$ on tracera un arc : on tirera $mn$ parallele à m n, & du centre $F$, avec le rayon $Gn$, on tracera un ſecond arc ; l'interſection c de ces deux arcs ſera un ſecond point de la courbe ; & ainſi des autres. Car il eſt évident, par la conſtruction, qu'à l'égard de chaque point $C$, le rayon incident $EC = E\mathrm{m}$ ou $Em$ ſurpaſſe $EA$, & que l'excès eſt $A$m ou $Am = z$ ; que l'excès de $FA$ ſur le rayon rompu $FC$ eſt $A$n ou $An = u$ ; & que ces deux excès $A$m ou $Am$, & $A$n ou $An$, ſont entr'eux comme $m$ eſt à $n$ : ce qui donne $nz = -mu$ ; d'où l'on tire $ndz = -mdu$ ; & $dz . -du :: m . n$, qui eſt la proprieté de la courbe, *qu'il falloit décrire.*

Pour tracer la ſeconde courbe ou ovale, il faut laiſſer les points $E$ & $F$, l'un à gauche, l'autre à droite de $A$, comme ils ſont ſur la droite $EAF$, & changer de côté le point $G$, le mettant en g ſur $GA$g prolongée du côté de $A$g, de maniere que $A\mathrm{g} = AG = AF$, & prendre dans la conſtruction g n & g$n$ au lieu de $G$n & $Gn$, pour les rayons des ſeconds arcs qu'on doit tracer du centre $F$ ; & leurs interſections avec les premiers arcs, tracés du centre $E$ avec les rayons $E$m, $Em$, donneront les points de la ſeconde ovale.

Pour tracer la troiſiéme & la quatriéme, il faut tranſporter le point $F$ en f du même côté où eſt le point $E$, & qu'il ſoit plus éloigné de $A$ que n'eſt le point $E$ ; & pour la troiſiéme il faut faire $A\mathrm{g} = A\mathrm{f}$ ; prendre, dans la conſtruction, le centre f & les rayons gn, g$n$, pour décrire les ſeconds arcs, dont les interſections avec les premiers, qui ont pour centre $E$ & pour rayons $E$m, $Em$, donneront les points de la troiſiéme. Mais pour la quatriéme il faut prendre $AG = A\mathrm{f}$, & dans la conſtruction prendre f pour le centre des ſeconds arcs, & $G$n, $Gn$ pour leurs rayons ; leurs interſections avec les premiers arcs décrits du centre $E$ avec les rayons $E$m, $E$m, donneront les points de la quatriéme.

## REMARQUES.

### I.

ON remarquera que, dans la premiere & la quatriéme, les excès $A$n, $An$, ($u$) ſont négatifs, & poſitifs dans la ſeconde & la troiſiéme; c'eſt-à-dire dans la premiere & la quatriéme les rayons Gn, G$n$ des ſeconds arcs ſont moindres que $FA$ ou f$A$, & qu'ils vont en diminuant; mais dans la ſeconde & la troiſiéme, les rayons gn, g$n$ des ſeconds arcs ſurpaſſent $FA$ ou f$A$, & vont en augmentant. Comme auſſi qu'il eſt évident que, dans toutes ces ovales, l'excès $A$m ou $A$m ($z$) de chaque rayon incident $EC$ ſur $EA$, eſt à l'excès $A$n ou $An$ ($u$) du rayon rompu correſpondant $FC$ ſur $FA$, ou de $FA$ ſur le rayon rompu $FC$, comme $m$ eſt à $n$; ce qui donne $nz = \mp mu$, d'où l'on déduit $ndz = \mp mdu$, & $dz . \mp du :: m . n$; ainſi ces ovales ſont les courbes qu'il falloit conſtruire: la proportion $m . n :: z . u$ donne $u = \frac{nz}{m}$.

### II.

Si l'on veut avoir l'équation de ces courbes, il faut tirer l'ordonnée $CB$ d'un point quelconque $C$, & nommer les données $EA$ ($a$), $FA$ ($b$); les coupées changeantes $AB$ ($x$), les ordonnées $BC$ ($y$), l'excès de $EC$ ſur $EA$ ($z$), l'excès de $FA$ ſur $FC$, ou de $FC$ ſur $FA$, ($u = \frac{n}{m}z$) (remarquant auſſi que $z = \frac{m}{n}u$:) après ces dénominations, il eſt clair que $EB = a + x$; $FB = b - x$ dans la premiere & la ſeconde ovale; dans la troiſiéme & la quatriéme ovale f$B = b + x$; & f$E = b - a$; $EC = a + z$; comme auſſi $EC = a + \frac{m}{n}u$, $FC = b - u$, ou (pour ne mettre qu'une même changeante dans l'expreſſion des excès $z$ & $u$,) $FC = b - \frac{n}{m}z$, dans la premiere & la quatriéme ovale; mais dans la ſeconde & la troiſiéme $FC$ ou f$C = b + \frac{n}{m}z$. Cela ſuppoſé, les triangles rectangles $ECB$, $FCB$ ou f$CB$, donnent $\overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{FC} - \overline{FB}^2$; c'eſt-à-dire $zz + 2az - xx - 2ax = yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nh}{m}z - xx \pm 2bx$; d'où l'on tirera une équation qui n'aura que les changeantes $z$ & $x$ ſans $y$, par le moyen de laquelle on trouvera une valeur de $z$, qui étant ſubſtituée dans celle que l'on voudra des deux équations dont $yy$, eſt un membre, l'on aura une équation dont les changeantes ſeront $x$ & $y$ ſans $z$, & ce ſera l'équation de la courbe.

### III.

Si l'on ſuppoſe $EA$ ($a$) infinie, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe que les rayons incidens $EC$ ſont paralleles entr'eux & à $EA$ l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ deviendra $2az - 2ax = 0$, tous les termes où n'eſt pas $a$ devant zero par raport à ceux où eſt la grandeur infinie $a$; ce qui donnera $z = x$. Mettant cette valeur de $z$ dans l'équation $yy = \frac{nn}{mm} zz \mp \frac{2nb}{m} z - xx \pm 2bx$, elle deviendra, en tranſpoſant le ſecond membre, $+ \frac{mm - nn}{mm} xx \pm \frac{2nb}{m} x \mp 2bx + yy = 0$,
*440. qui eſt l'équation de l'ellipſe*, parceque $m$ ſurpaſſant $n$, le terme où eſt $xx$ eſt poſitif, & le terme $yy$ l'eſt auſſi; &
*439. $\frac{mm - nn}{mm}$* exprime le raport du parametre au diametre.

Si l'on ſuppoſe $AF$ ou $Af$ ($b$) infinie, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe que les rayons $FC$ ſont les rayons incidens, & qu'ils ſont paralleles à $AF$, l'équation $\frac{nn}{mm} zz \mp \frac{2nb}{m} z - xx \pm 2bx - yy = 0$ deviendra $\mp \frac{2nb}{m} z \pm 2bx = 0$; d'où l'on tire $z = \frac{m}{n} x$; & ſubſtituant cette valeur de $z$ dans l'équation $zz + 2az - xx - 2ax - yy = 0$, l'on trouvera $\frac{mm - nn}{nn} xx + \frac{2am}{n} x - 2ax - yy = 0$, qui eſt une équation de l'hyper-
*432. bole par raport au diametre; parceque* $xx$ & $yy$ ont des
*439. ſignes differens; & $\frac{mm - nn}{nn}$* exprime le raport du parametre au diametre. D'où l'on voit que dans le cas des rayons incidens paralleles, l'ellipſe & l'hyperbole ſont les courbes propres à diriger par la réfraction ces rayons vers un même point, comme on l'a démontré dans l'art. 498.

### EXEMPLE II.

830. *SUPPOSE' que la premiere ſurface d'un verre ſoit telle que l'on*
FIG. LX. *voudra, c'eſt-à-dire qu'elle ſoit la ſurface qui ſeroit formée par la révolution d'une courbe telle qu'on voudra* ACR *autour de ſon axe* EADF, *trouver la courbe* DHR, *qui par ſa révolution autour du même axe* EADF, *formera la ſurface courbe qu'il faut donner à l'autre côté du même verre, afin que les rayons qui partent d'un point donné* E *ſur l'axe commun aux deux ſurfaces du verre, après avoir ſouffert une premiere refraction en entrant dans le verre par ſa premiere ſurface courbe* ACR, *ſoient tous dirigés par la ſeconde refraction*

*refraction qu'ils ſouffriront en paſſant du verre dans l'air par la ſeconde ſurface* DHR*, au même point ou foyer* F *donné ſur l'axe commun* EADF.

On ſuppoſe, 1°. que quoique la premiére figure du verre $ACR$ ſoit arbitraire, elle doit pourtant être telle que l'on ſçache mener par chacun de ces points $C$ la tangente de la courbe en ce point là; afin que l'on puiſſe tirer par chaque point $C$ la perpendiculaire à la courbe ou à la tangente de ce point $C$; car on ne regarde point ici comme une partie de ce Problême, de trouver le rayon rompu $CH$f de chaque rayon incident $EC$ ſur la premiére ſurface $ACR$ du verre que l'on regarde comme donnée, quoiqu'il n'importe quelle courbe elle puiſſe être: ainſi on ſuppoſe que l'on ſçait trouver pour chaque rayon incident $EC$, ſon rayon rompu $CH$f: en voici la maniére. On tire la perpendiculaire à la courbe $PC$, puis ayant fait $PC$, priſe d'une longueur arbitraire, le diamétre d'une demi-circonférence $PKIC$, qui coupe le rayon incident $EC$ en $I$, on mene la droite $PI$, & ſuppoſant que $\frac{m}{n}$ exprime le raport de la refraction (qui eſt de l'air dans le verre $\frac{3}{2}$,) on prend $PK$ quatriéme proportionnelle à $m$, $n$, $PI$; & ayant mis une pointe du compas ouvert de la grandeur $PK$ au point $P$, on trace avec l'autre un arc qui coupe la demi-circonférence en $K$, & enfin on tire $KCH$f, qui ſera le rayon rompu du rayon incident $EC$; puiſque $PI$ qui eſt le ſinus de l'angle d'incidence $PCE$, eſt par la conſtruction à $PK$ ſinus de l'angle $PCK$ de la refraction, comme $m$ eſt à $n$.

Il s'agit donc de trouver ſur chaque rayon rompu $CH$f par la premiére ſurface $ACR$, lequel rayon rompu eſt donné de poſition, comme on vient de le voir; de trouver, dis-je, ſur ce rayon rompu, le point $H$ de la ſeconde ſurface courbe $DHR$ qu'il faut donner à l'autre côté du verre, afin que tous les rayons rompus $CH$ par la premiére ſurface ſoient dirigés au même point donné $F$ par la ſeconde refraction qu'ils ſouffriront aux points $H$ en ſortant du verre.

On ſuppoſe, 2°. que l'on prend à diſcrétion ſur l'axe $EADF$ le point $D$ pour le ſommet de la ſeconde courbe $DHR$ dont on veut trouver les points; ainſi les droites $EA$, $AD$, $DF$, & $F$f ſont données. On remarquera que la premiére courbe $ACR$ peut être telle que les rayons rompus $CHf$ iront rencontrer l'axe à des points $f$ qui ſeront du côté de $E$, & non pas du côté de $F$, ou quelques-uns du côté de $E$, & d'autres du côté de $F$; & en tous ces cas chaque point $f$ & la ligne $fD$ ſont toujours donnés. Il peut auſſi arriver que ces rayons rompus $CHf$, ou quelques-uns, ſoient paralleles à l'axe, & dans ce cas on prendra ſur chaque rayon rompu la grandeur $Cf$ arbitraire, & qui ſera par conſéquent donnée.

FIG. LIX. On ſuppoſe, 3°. qu'en prenant comme dans le premier exemple (fig. 59) une partie $Cc$ infiniment petite de la courbe, & tirant de $c$ la perpendiculaire $cM$ ſur le rayon incident $ECM$, & la perpendiculaire $cN$ ſur le rayon rompu $CNF$, ou, ce qui revient au même, du centre $E$ avec le rayon $Ec$ le petit arc $cM$, & du centre $F$ avec le rayon $Fc$ le petit arc $cN$; $CM$ eſt le ſinus de l'angle d'incidence, & $CN$ le ſinus de l'angle de refraction, comme on l'a démontré dans l'exemple précédent; de façon qu'en prenant auſſi $\frac{m}{n}$ pour l'expreſſion du raport de la refraction qui ſe fait au paſſage de l'air dans le verre; l'on aura pour tous les rayons incidens & les rompus correſpondans, $m . n :: CM . CN$. Au contraire au paſſage du verre dans l'air, conſidérant $FC$ dans le verre comme le rayon incident, & $CE$ dans l'air comme ſon rayon rompu, on aura $n . m :: CN . CM$. Or il eſt clair que $CM$ eſt la *différence* infiniment petite du rayon incident, & $CN$ la *différence* du rayon rompu; ainſi au paſſage de l'air dans le verre $m$ eſt à $n$ comme la *différence* du rayon incident eſt à la *différence* du rayon rompu; & au contraire dans le paſſage du verre dans l'air.

FIG. LIX. & LX. Mais chaque rayon incident $EC$ contient une partie conſtante égale à $EA$; & en tirant du centre $E$ avec le rayon $EA$ un arc de cercle $A\mu$ (fig. 59), $AM$ (fig. 60), la partie $\mu C$, $MC$ du rayon incident eſt ſon autre partie, qui eſt la ſeule quantité changeante du rayon incident. En tirant de même (fig. 60) du centre $f$ avec le rayon $fA$ l'arc $AN$, $NC$ ſera FIG. LIX. la partie changeante du rayon rompu; ainſi nommant $z$ la partie changeante $\mu C$, & $u$ la partie changeante $\nu C$ dans la figure 59, $CM$ ſera égale à $dz$, & $CN = du$, & l'on aura $m . n :: dz . du$; d'où l'on déduira $mdu = ndz$; & prenant les intégrales on trouvera $mu = nz$, ce qui donne $m . n :: z . u$: d'où l'on voit que les intégrales de $dz$ & de $du$ ſont $\mu C$ ($z$),

$vC\,(u)$, & qu'ainſi dans la figure 60 $MC \,.\, NC :: m \,.\, n$. FIG. LX.

Par la même démonſtration, en ſuppoſant que $H$ eſt le point de la ſeconde courbe que l'on cherche ; dont le rayon incident du verre dans l'air eſt $CH\mathrm{f}$, & le rompu $HF$, & tirant du centre f l'arc $Dn$, & du centre $F$ l'arc $Dm$ ; l'on aura $n \,.\, m :: Hn \,.\, Hm$. Ainſi nommant $Hn\,(z)$, $Hm$ ſera $\frac{m}{n}z$. Il faut bien remarquer ce que l'on vient de démontrer dans tout ce qui précéde ; car c'eſt de là qu'on déduira la réſolution.

## RESOLUTION.

ON ſuppoſera que le point $H$, pris dans le rayon rompu $CH\mathrm{f}$ de la premiére refraction, eſt celui de la ſeconde courbe $DHR$ qu'il faut trouver ; on tirera du centre f qui eſt donné les arcs $Dn$, $Hh$, $Cc$, $AN$ ; du centre $F$, l'arc $Dm$ ; du centre $E$, l'arc $AM$ ; on menera du point donné $C$ & du point $H$ les droites $CB$, $HG$ perpendiculaires à l'axe : on remarquera, qu'à cauſe des rayons égaux deux à deux $\mathrm{f}A$, $\mathrm{f}N$ ; $\mathrm{f}C$, $\mathrm{f}c$, $\mathrm{f}H$, $\mathrm{f}h$, $\mathrm{f}D$, $\mathrm{f}n$, on aura $NC = Ac$, $CH = ch$, $Hn = hD$, & $Nn = AD$. On nommera les données $\mathrm{f}F\,(f)$, $FD = Fm\,(c)$, $DB\,(b)$, $Dc\,(c)$ ; les inconnues $DG\,(x)$, $GH\,(y)$, & $Hn\,(z)$ ; d'où il ſuit que $FG = e + x$, $FH = Fm + mH = e + \frac{m}{n}z$ ; $\mathrm{f}G = f + e + x$, $\mathrm{f}H = \mathrm{f}D + nH = f + e + z$, $\mathrm{f}B = f + e + b$, $\mathrm{f}C = \mathrm{f}c = \mathrm{f}F + FD + Dc = f + e + c$. Ces choſes ſuppoſées. FIG. LX.

Les triangles $FGH$, $\mathrm{f}GH$, rectangles en $G$, donneront $\overline{FH}^2\,(ee + \frac{2m}{n}ez + \frac{mm}{nn}zz) - \overline{FG}^2\,(-ee - 2ex - xx) = \overline{GH}^2\,(yy) = \overline{\mathrm{f}H}^2\,(ff + 2ef + ee + 2fz + 2ez + zz) - \overline{\mathrm{f}G}^2\,(-ff - 2ef - ee - 2fx - 2ex - xx :)$ d'où l'on tire l'équation

$$\begin{array}{l} \frac{mm-nn}{n^n}zz + \frac{2me}{n}z + 2fx = 0. \\ \qquad\qquad\qquad - 2ez \\ \qquad\qquad\qquad - 2fz \end{array}$$

Les triangles ſemblables $\mathrm{f}CB$, $\mathrm{f}HG$, donnent auſſi $\mathrm{f}C\,(f + e + c) \,.\, \mathrm{f}B\,(f + e + b) :: \mathrm{f}H\,(f + e + z) \,.\, \mathrm{f}G\,(f + e + x :)$ d'où l'on déduit $DG\,(x) = \frac{\overline{f+e+b} \times z + bf + be - cf - ce}{c+e+f}$ ; ſubſtituant cette valeur de $x$ dans l'équation précédente, l'on aura

$$\begin{array}{l} \frac{mm-nn}{nn}zz + \frac{2me}{n}z + \frac{bf+be-cf-ce}{c+e+f} \times 2f = 0, \\ \qquad\qquad\qquad - 2ez \\ \qquad\qquad\qquad - 2fz \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{\overline{f+e+b} \times 2fz}{c+e+f} \end{array}$$

qui eſt une équation du ſecond degré dont $z$ eſt l'inconnue, & dont le dernier terme eſt négatif, à cauſe de $c$ ($Dc$) plus grande que $b$ ($DB$); ainſi il y a deux valeurs de $z$ dans l'équation, l'une poſitive & l'autre négative. On trouvera la ligne droite qui eſt la valeur poſitive de $z$, comme on l'a enſeigné dans l'article 294; & après avoir tracé du centre f avec le rayon f$D$ l'arc $Dn$ qui rencontre f$H$ au point $n$, on prendra $nH$ égale à la ligne droite qui eſt la valeur de $z$, & le point $H$, ainſi trouvé, ſera le point de la courbe $DHR$, *qu'il falloit trouver.*

On trouvera de la même maniére les autres points de la courbe $DHR$; & après l'avoir tracée, en faiſant faire une révolution à la courbe $DHR$ autour de ſon axe $DF$, elle formera la ſeconde ſurface qu'il faut donner au verre, afin qu'il dirige au foyer $F$ tous les rayons qui partent du point $E$, & qui ſouffrent une premiére refraction à l'entrée du verre $ACR$; ſi l'on fait faire une révolution à la figure $ACRHD$ autour de l'axe $AD$, elle décrira la figure ſolide que doit avoir le morceau de verre.

### REMARQUE.

SI les rayons rompus $CH$f, ou les incidens $EC$, ou quelques-uns de ces rayons, ſe trouvoient paralleles à l'axe, ſuppoſant, par exemple pour ces cas là, que $H$f eſt parallele à l'axe, il faut alors prendre $C$f d'une grandeur arbitraire que l'on regardera comme donnée, & tirer par $D$, au lieu de l'arc $Dn$, une droite $Dn$ perpendiculaire aux deux droites $ADF$, $CH$f, qui ſont paralleles dans ces cas; & le point $n$ étant ainſi déterminé ſur f$n$, on trouvera $nH$ ($z$) de la même maniére qu'on l'a trouvée dans la réſolution qui précéde; en remarquant que les arcs $Hh$, $Cc$, $AN$, ſont des lignes droites perpendiculaires aux deux droites $ADF$, $CH$f, que ce cas ſuppoſe paralleles.

### SECONDE RESOLUTION,

*Ou autre maniére plus ſimple de trouver chaque point* H *de la courbe que l'on cherche.*

ON a vû dans la premiére réſolution que $MC . NC :: m . n$, & qu'ainſi $NC = \frac{n}{m} MC$; que $Hm . Hn :: m . n$, d'où l'on a $Hn = \frac{n}{m} Hm$; que $Ac = NC = \frac{n}{m} MC$; que $Dh = Hn$.

$= \frac{n}{m} Hm$ ; que $Fm = FD$ ; & qu'enfin $Nn = AD$. L'on tire de là $CH = AD - NC - Hn = AD - \frac{n}{m} MC - \frac{n}{m} Hm$ ; tranſpoſant, on aura $CH + \frac{n}{m} Hm = AD - \frac{n}{m} MC$ ; ajoutant au premier membre $\frac{n}{m} Fm$, & au ſecond $\frac{n}{m} FD = \frac{n}{m} Fm$, l'on trouvera $CH + \frac{n}{m} Hm + \frac{n}{m} Fm = AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$. Mais $Hm + Fm = HF$ ; ainſi mettant $HF$ dans le premier membre au lieu de $Hm + Fm$, il viendra $CH + \frac{n}{m} HF = AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$. L'on a donc la grandeur toute connue $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$ égale à la ſomme des deux grandeurs $CH + \frac{n}{m} HF$, dont chacune en particulier eſt une inconnue : concevant que l'on ôte de chacune la grandeur $CH$, il doit reſter $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD - CH = \frac{n}{m} HF$.

Cela donne cette maniére très-ſimple de trouver le point $H$. 1°. Il faut prendre ſur la ligne $CH$f donnée de poſition & de grandeur, la ligne $CL$ égale à la ſomme des grandeurs données $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$ ; & tirer la droite $LF$. 2°. Il faut prendre ſur $LHC$ la ligne $L$n égale à la ligne donnée $n$, & ayant ouvert le compas de la grandeur de la ligne donnée $m$, en mettre une pointe au point n, & avec l'autre pointe tracer un arc qui coupe la droite $LF$ en un point m, & tirer la droite nm. 3°. Il faut mener par le point donné $F$ la ligne $FH$ parallele à mn, le point $H$, où elle rencontrera la droite $LH$, ſera le point de la courbe que l'on cherche : car $CL$ étant, par la conſtruction, égale à $CH + \frac{n}{m} HF$, en retranchant $CH$, il faut que le reſte $LH$ ſoit $\frac{n}{m} HF$. Or par la conſtruction mn $(m)$ . $L$n $(n)$ : : $HF$, $LH$ ; donc $LH = \frac{n}{m} HF$ ; ainſi le point $H$, que l'on trouve par la conſtruction, eſt celui *qu'il falloit trouver*. On trouvera de même les autres points de la courbe $DHR$.

## EXEMPLE III.

31. BAC *eſt une chaîne très-fléxible & incapable d'extenſion, compoſée par exemple de très-petits anneaux égaux, ou de globules égaux, attachée par les deux bouts en* B *&* C, *qui ſont dans la même horizontale* BC ; *il faut trouver la courbe* BAC *formée par cette chaîne ſuſpendue librement, & conſtruire cette courbe.* FIG. LXI.

IL eſt évident, 1°. qu'à cauſe de la parfaite uniformité qu'on ſuppoſe dans la chaîne, elle doit ſe diſpoſer par ſa peſanteur

& ſa fléxibilité, de telle ſorte qu'en menant par le point *A*, qu'on ſuppoſe le plus bas, la verticale *AD*, la figure *BAC* ſoit partagée par la moitié par *AD*, & que les deux moitiés de cette courbe *BA* & *CA* ſoient égales & uniformes; de façon que prenant *AD* pour l'axe, & *A* pour l'origine, les ordonnées *DB*, *DC*, à un même point *D* de l'axe, ſoient égales.

2°. Que la partie de la courbe au ſommet *A*, qu'on conçoit infiniment petite, eſt parallele à l'horiſon; & qu'ainſi la tangente *Ag* au ſommet, eſt horizontale.

3°. Que ſi dans la ſituation où s'eſt miſe la chaîne ſuſpendue en *B* & *C*, (la ſuppoſant ſur un plan vertical,) on l'attachoit à ce plan au ſommet *A*, elle ne changeroit point de figure; de maniére qu'en concevant l'une des moitiés, comme *AC*, retranchée, celle qui reſteroit, comme *BA*, conſerveroit la même figure qu'elle avoit; d'où il ſuit qu'on peut concevoir au ſommet *A* la force qu'on nommera (*a*), qui retire chaque moitié *BA*, *CA* de la ſituation verticale, ou de la perpendiculaire à l'horizon *Bg* ou *CK*, où elle ſe diſpoſeroit par ſa peſanteur, ſi elle n'étoit attachée que par l'un de ſes bouts *B* ou *C*, pour lui faire prendre la figure courbe *BA* ou *CA*.

4°. Que chaque point de la chaîne eſt tiré verticalement en bas par la peſanteur de la partie de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point le plus bas *A*. Ainſi le point *B* eſt tiré en bas verticalement par le poids de la moitié de la chaîne *BA*: chaque point, pris entre *B* & *A*, eſt tiré de même par le poids de l'arc de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point *A*. On peut prendre, à cauſe de l'uniformité de la chaîne, chacun des arcs de la chaîne, qu'on nommera (*u*), pour la peſanteur de ce même arc. D'où l'on voit que chaque petite partie de la chaîne eſt tirée verticalement par l'effort du poids (*u*), & en même tems horizontalement par la force (*a*) du ſommet *A*; ce qui lui fait prendre la ſituation de la tangente de ce point ou de cette petite partie de la courbe. Ainſi,

5°. En concevant par chaque point de la chaîne (on prendra ici pour exemple le point *B*) une verticale *Bg* juſqu'à la tangente horizontale *Ag* du ſommet *A*, la tangente *BM* de la chaîne à ce point *B*, & par *g* la parallele *gN* à la tangente *BM*, le point *B* eſt pouſſé verticalement ſuivant la direction $Bg$ par le poids de la moitié de la chaîne, & retiré en même tems horizontalement ſuivant la direction horizontale $gA$, ou une parallele à $gA$ au point $B$, par une force conſtante, qui eſt la même pour chaque point, & qu'on conçoit au ſommet $A$ tirant ſuivant $gA$; ce qui eſt cauſe que la partie infiniment petite $B$b eſt miſe par ces deux efforts dans la direction de la tangente $B$b$M$ qui eſt le prolongement de la petite partie $B$b. Or en menant la verticale ebm infiniment proche de $Bng$, l'on aura le petit triangle $B$be, rectangle en e, ſemblable au triangle $BgM$, rectangle en $g$, & l'on aura, pour chaque point comme $B$, cette proportion (en ſuppoſant que $Bg$ repréſente l'effort de la chaîne $BA$ $(u)$ ſuivant la verticale, & $gM$ l'effort de la force conſtante $(a)$ qu'on conçoit au ſommet $A$) $Mg \,.\, Bg :: B$e . eb :: $(a) \,.\, BA\ (u)$.

Ainſi nommant $(x)$ chaque coupée priſe ſur l'axe $AD$ ou ſur les paralleles à l'axe comme $Bg$, & $y$ chaque ordonnée $BD$; $B$e ſera $dy$, & eb ſera $dx$, & la proportion précédente s'exprimera de cette maniére $B$e $(dy)$ . eb $(dx) :: a \,.\, BA$ $(u)$; d'où l'on aura $adx = udy$, ou $dy = \frac{adx}{u}$, *pour l'équation de la courbe* BA *ou* CA *formée par la chaîne.*

### COROLLAIRE.

COMME $du = {}^{*}\sqrt{dx^2 + dy^2} =$ (en mettant au lieu de $dy^2$ ſa valeur $\frac{aadx^2}{uu}$ priſe de $dy = \frac{adx}{u}$) $\sqrt{\frac{uudx^2 + aadx^2}{uu}} = \frac{dx}{u}\sqrt{uu + aa}$, qui donne $du^2 = \frac{dx^2}{uu} \times \overline{uu + aa}$, ou bien $uudu^2 = dx^2 \times \overline{uu + aa}$; on aura $udu = dx\sqrt{uu + aa}$; d'où l'on tire $dx = \frac{udu}{\sqrt{uu + aa}}$; en prenant les intégrales, on aura $x = \sqrt{uu + aa}$, & $xx = uu + aa$, & $uu = xx - aa$; ou bien $u = \sqrt{xx - aa}$, (qui fait voir * que la longueur d'un arc quelconque $u$, de la courbe $BA$ formée par la chaîne, eſt égale à l'ordonnée d'une hyperbole équilatére dont $a$ eſt le demi-axe, & $x$ la coupée.) Enfin en mettant cette valeur de $u$ dans $dy = \frac{adx}{u}$, on aura $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$ *pour l'équation de la courbe formée par la chainette* qui exprime le raport de l'ordonnée $y = S.\,dy = S.\,\frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$, & de la coupée $x$.

* 582.

* 410.

### REMARQUE.

EN ſuppoſant $u = 0$ dans $x = \sqrt{uu + aa}$, ou dans $u = \sqrt{xx - aa}$, on trouve $x = a$; cela fait connoître que la coupée $x$ ne commence pas au ſommet $A$, qui eſt l'origine des arcs $u$ de la courbe $AB$, & n'eſt pas ſeulement $AD$, mais qu'elle s'étend plus loin juſqu'au point $E$ où l'on ſuppoſe $AE = a$; ainſi $ED = x$, & $AD = x - a$.

---

## *Différentes manières de conſtruire la courbe formée par la chaîne.*

### *I. Par l'hyperbole équilatére.*

IL faut multiplier les deux membres de $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$ par $a$, & l'on aura $ady = \frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$. Or $ady$ eſt l'élément d'un rectangle, & $\frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$ eſt le double de $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$,* qui eſt l'élément d'un ſecteur d'hyperbole équilatére, dont la moitié du premier axe eſt $a$. C'eſt pourquoi ſi l'on décrit ſur le premier axe $EAD$ ($x$) par le ſommet $A$, une hyperbole équilatére $AF$ dont le centre ſoit $E$, & la moitié du premier axe $EA$ ($a$), & qu'on tire la droite $EF$, on aura le ſecteur hyperbolique $AEF =$ * $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$; & ſi l'on mene $Ef$ parallele à $Ag$, & qu'on faſſe le rectangle $Af$ égal au double du ſecteur hyperbolique $AEF$, qu'on regarde comme donné, le rectangle $Af$ ſera $ay$ ou S. $ady =$ S. $\frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$. Enfin ſi l'on prolonge l'ordonnée $FD$ de l'hyperbole, & $fg$ du rectangle; le point de rencontre $B$ ſera un point de la courbe formée par la chaîne, On trouvera de même les autres points de la courbe; car en concevant le rectangle $Af$ partagé en un nombre infini d'élémens égaux, comme $fg$ m $m$, & de même le ſecteur hyperbolique $AEF$ partagé dans le même nombre infini d'élémens ou de petits ſecteurs égaux, chaque élément du rectangle ſera double de chacun des élémens du ſecteur, & $Be$ ($dy$) de la courbe $BA$ ſera égale à $fm$ ($dy$) de l'élément du rectangle, & eb ($dx$) de la courbe $BA$ ſera égale à gf ($dx$) qui entre dans l'élément du ſecteur hyperbolique. Ainſi par la conſtruction,

* 609.

* 609.

truction, $ady = \frac{2aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$, & $Be$ $(dy) = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, qui eſt la propriété de la courbe $BA$, *qu'il falloit conſtruire.*

### *II. Par la rectification ſuppoſée de la parabole.*

$du$ * $= \sqrt{dx^2 + dy^2} =$ ( en ſubſtituant au lieu de $dy^2$ ſa *582. valeur $\frac{aadx^2}{xx-aa}$ priſe de l'équation de la courbe $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$ ) $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$. Par conſéquent $dy + du = \frac{adx+xdx}{\sqrt{xx-aa}} =$ ( en diviſant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{x+a}$ ) $dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. Il faut trouver une courbe dont les coordonnées $x$ & $y$ ayent la même origine $E$ que les $x$ & les $y$ de la courbe $BA$, & ſe prennent ſur les mêmes lignes, qui ait S. $dy$ + S. $du$ pour ſa rectification; & nommant ($t$) chacun des arcs de cette nouvelle courbe depuis ſon ſommet, l'élément de ſa rectification ſoit $dt = dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. Pour cela il faut ſuppoſer $dt = dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} =$ * $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; ce qui donnera $\frac{xdx^2 + adx^2}{x-a} = dy^2 + dx^2$, *582. & ôter $dx^2$ de chaque membre, & l'on aura $\frac{xdx^2 + adx^2}{x-a} - dx^2 = \frac{2adx^2}{x-a} = dy^2$; ce qui donne $dy = dx\sqrt{\frac{2a}{x-a}}$: en prenant les intégrales, on aura $y = 2\sqrt{2a \times \overline{x-a}} = \sqrt{8a \times \overline{x-a}}$, qui eſt l'équation d'une parabole ſimple dont les coupées ſont $x - a$; c'eſt-à-dire l'origine des coupées eſt au point $A$, & le parametre $= 8a$.

C'eſt pourquoi ſi l'on décrit ſur l'axe $AD$ la parabole $AG$ dont le parametre ſoit $= 8a$, & qu'on prenne une droite égale à la longueur, qu'on ſuppoſe donnée, de chacun des arcs de cette parabole, & qu'on applique cette droite au point correſpondant de l'hyperbole équilatére $AF$, ſur l'ordonnée de ce point là; par exemple ſi l'on prend la droite égale à $AG$, & qu'on l'applique au point $F$ correſpondant à $G$, ſur $FD$, le point $B$ où ſe terminera cette droite $= AG$, ſera un point de la courbe $BA$ formée par la chaîne. On trouvera de même chacun des autres points: car la longueur de l'arc $AG =$ S. $dt =$ S. $dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} =$ ( en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{x+a}$) S. $\frac{xdx+adx}{\sqrt{xx-aa}} =$ S. $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$ + S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} =$ S. $dy$ + S. $du$; d'où ôtant S. $du =$ S. $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$

$= \sqrt{xx - aa}$, ( qui eſt l'intégrale de $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$ ) $= FD$ qui eſt l'ordonnée de l'hyperbole équilatére $AF$, il reſte S. $dy = y$ $=$ S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$. C'eſt l'équation de la courbe $BA$, *qu'il falloit conſtruire.*

### *III. Par la logarithmique.*

IL faut ſuppoſer la différentielle logarithmique $\frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$ $= dy$, & chercher la ligne qui peut avoir pour logarithme S. $\frac{adz}{z}$ : pour cela il faut ſuppoſer $\frac{zz+aa}{2z} = x$, ce qui donnera $zz - 2xz + aa = 0$ ; d'où l'on tirera deux valeurs poſitives de $z$, ſçavoir $z = x \pm \sqrt{xx - aa}$, ( la plus grande valeur de $z$ aura le ſigne $+$, & la moindre le ſigne $-$ ; ) & en prenant la différentielle, on aura $dz = \frac{dx \times \sqrt{xx-aa} \pm xdx}{\sqrt{xx-aa}}$ ; & diviſant le premier membre par $z$, & le ſecond par la valeur de $z = x \pm \sqrt{xx - aa}$, on trouvera en multipliant les quotiens par $a$, $\frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$ : ce qui fait voir que les grandeurs, dont S. $\frac{adz}{z}$ eſt le logarithme, ſont, la plus grande $z = x + \sqrt{xx-aa}$, la moindre $z = x - \sqrt{xx-aa}$ ; & les ajoutant enſemble, leur ſomme ſera $2x$, dont la moitié eſt la grandeur $x$, c'eſt-à-dire la coupée de la courbe $BAC$ formée par la chaîne. Ce qui donne cette conſtruction.

1°. Il faut mener par $E$ l'origine des $x$, l'horizontale $fEK$, la prendre pour l'axe de la logarithmique, c'eſt-à-dire pour la ligne des logarithmes $y =$ S. $\frac{adz}{z} =$ S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & tracer la logarithmique $IAL$ qui paſſe par le point $A$, où l'on a $AE$ $= a$, dont la ſoutangente ſoit par-tout égale à $AE$ ($a$), & $AE$ ($a$) ſera priſe pour l'unité dont le logarithme eſt zero, les logarithmes $EK$ ($y$) à la droite de $AE$, ſeront les logarithmes des grandeurs $KL$ qui ſurpaſſent l'unité ($a$), & les logarithmes $Ef$ ($-y$) à la gauche de $AE$, ſeront les logarithmes des grandeurs $fI$ moindres que $a$, & ces logarithmes ſeront $y =$ S. $\frac{adz}{z} =$ S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & les grandeurs, dont ils ſont les logarithmes, ſeront $KL$ ($z$) $= x + \sqrt{xx-aa}$ ; $fI$ ($z$) $= x - \sqrt{xx - aa}$.

2°. Il faut prendre de chaque côté de $E$ deux logarithmes égaux $EK$, $Ef$, & ajouter enſemble les deux grandeurs $KL$, $fI$, dont ils ſont les logarithmes ; ces grandeurs ſeront $KL = z = x + \sqrt{xx - aa}$, $fI = \frac{aa}{z} = x - \sqrt{xx - aa}$ ; car (à cauſe des logarithmes égaux $EK = Ef = y =$ S. $\frac{adz}{z} =$ S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$,) l'unité $a$ eſt moyenne proportionnelle entre $KL$ ($z$) & $fI$ ($\frac{aa}{z}$) : Or il eſt évident que leur ſomme ſera $KL + fI = z + \frac{aa}{z} = 2x$. Il faut prendre la moitié de cette ſomme, qui ſera $\frac{zz+aa}{2z} = x$, & faire $KC$, $fB$ chacune égale à $\frac{KL+fI}{2} = \frac{zz+aa}{2z} = x$, & les points $C$ & $B$ ſeront chacun un point de la courbe $BAC$ formée par la chaînette. On trouvera de même les autres points deux à deux. Car, par la conſtruction, en prenant $pK$ & $fm$ chacune $= dC = dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, $EK$ & ſon égale $Ef$ ſont chacune $= y =$ S. $\frac{adz}{z} =$ S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} = DC = DB$, & c'eſt l'équation de la courbe. De plus les logarithmes égaux $EK$, $Ef$ ſont, par la conſtruction, les logarithmes, le premier de $KL = z = x + \sqrt{xx - aa}$, & le ſecond de $fI = \frac{aa}{z} = x - \sqrt{xx - aa}$, & la moitié de la ſomme $\frac{KL+fI}{2} = KC = fB$, eſt égale à la coupée $ED$ ($x$) de la courbe $BAC$ ; parceque c'eſt la coupée ($x$) de la courbe $BAC$ qui ſe trouve dans l'expreſſion $dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & dans $z = x \pm \sqrt{xx - aa}$. Enfin en tirant $lp$ & $l$p, de façon que $dC$ ($dy$) ſoit égale à $l$p & à $Kp$, & la tangente $LS$, & nommant $KL$ ($x + \sqrt{xx - aa}$) ; $L$p ſera $\frac{dx\sqrt{xx-aa} + xdx}{\sqrt{xx-aa}}$ ; $l$p $= pK$ ſera, par la conſtruction, $dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$ ; & $KS$ ſera $= a$ ; & l'on aura cette proportion $L$p ($\frac{dx\sqrt{xx-aa}+xdx}{\sqrt{xx-aa}}$) . $l$p ($dy$) :: $LK$ ($x + \sqrt{xx - aa}$) . $KS$ ($a$), qui donne l'équation de la courbe $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$.

### EXEMPLE IV.

2. *SUPPOSANT qu'un corps peſant, étant mû par ſa ſeule peſanteur, doive aller du point* A *au point* K *qui ſont donnés, non pas dans la même verticale, mais dans la droite* AK *qui fait un angle aigu* KAB *avec l'horizontale* ABD ; *trouver la courbe* ACGK *qui doit décrire ce corps par ſa ſeule peſanteur pour aller de* A FIG. LXII.

en K *le plus vîte qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, en y employant le moins de tems qu'il eſt poſſible.*

QU'ON imagine que la courbe qu'on cherche, eſt *ACEGK*; il eſt évident qu'en prenant deux parties voiſines quelconques infiniment petites *CE*, *EG* de la courbe, le mobile doit employer à les parcourir le moindre tems poſſible; car s'il employoit plus de tems à parcourir les deux particules *CE*, *EG*, que deux autres *CH*, *HG* qu'on pourroit imaginer, il eſt clair que la courbe qu'on cherche ſeroit *ACHGK*, & non pas *ACEGK*, contre la ſuppoſition.

Pour réſoudre le Problême, on va chercher par les conditions données une propriété commune à ces deux particules *CE*, *EG*, c'eſt-à-dire qui ſoit exprimée par une même équation, & ce ſera l'équation de la courbe qui exprime une propriété qui convient à chacun de ſes points ou à chacune des parties infiniment petites dont elle eſt compoſée.

On prendra les coupées ſur l'horizontale *ABD*, & les ordonnées ſeront les verticales *BC*, *DE*, *FG*, &c. & ayant pris les deux parties infiniment petites *CE*, *EG*, qu'on conſiderera comme changeantes, on nommera *CE* ($z$), *EG* ($u$); & comme on les ſuppoſe priſes à une hauteur connue, les ordonnées *BC*, *DE* ſeront regardées comme connues; & on nommera *BC* ($b$), *DE* ($e$), & l'on menera les horizontales *CI*, *EL*; on regardera les points *C*, *G* comme donnés de poſition ſur le plan vertical, & *CI*, *EL* auſſi données de poſition; mais les petites parties de la courbe *CE*, *EG* étant regardées comme changeantes, il faut qu'on puiſſe les faire joindre à un point *E* ſur l'horizontale *LE* donnée de poſition; de façon que le tems que le mobile employera à les parcourir, ſoit moindre que le tems qu'il emploiroit à parcourir deux autres petites parties de courbe *CH*, *HG* qui ſe joindroient à un point *H* différent de *E*. Cela ſuppoſé, le mobile étant deſcendu de la hauteur *BC* quand il parcourt *CE*, & de la hauteur *DE* quand il parcourt *EG*, la viteſſe
* 308. avec laquelle il parcourt *CE* doit s'exprimer* par $\sqrt{BC}$ ($\sqrt{b}$), & $\sqrt{DE}$ ($\sqrt{e}$) ſera la viteſſe avec laquelle il parcourt *EG*, &
* 301. le tems qu'il employe à parcourir *CE* s'exprimera par* $\frac{CE}{\sqrt{EC}}$ ($\frac{z}{\sqrt{b}}$) de même $\frac{EG}{\sqrt{DE}}$ ($\frac{u}{\sqrt{e}}$) exprimera le tems qu'il employe à parcourir *EG*. Or il faut par les conditions du Problême,

que la ſomme de ces deux tems $\frac{z}{\sqrt{b}} + \frac{u}{\sqrt{e}}$ ſoit *un moindre* ; par conſéquent la différentielle de cette expreſſion doit être * éga- * 556.
le à zero ; ce qui donne l'équation $\frac{dz}{\sqrt{b}} + \frac{du}{\sqrt{e}} = 0$.

Qu'on imagine à préſent dans *LE* prolongée en *H* la ligne *EH* infiniment petite par raport à *EL*, c'eſt-à-dire, que *EH* eſt un infiniment petit du ſecond genre, puiſque *EL*, différentielle de la coupée, eſt un infiniment petit du premier genre : Qu'on tire *CH*, *GH*, & du centre *C* avec le rayon *CE* le petit arc *Em* qui rencontre *CH* en *m*, & de même du centre *G* avec le rayon *GE* le petit arc *En* ; il eſt évident que *Hm* eſt la différence $dz$ de *CE* ($z$) ; & comme *CE* va en diminuant, étant plus grande que *CH* de l'excès *Hm*, *Hm* eſt une différence négative ; ainſi $Hm = -dz$. De même $Hn = du$, & $du$ eſt poſitive, parceque *GE* ($u$) augmente en devenant *GH* de la différentielle *Hn* ($du$). Les angles *CEI*, *HEm* ſont égaux, faiſant chacun un angle droit avec l'angle *CEH*. Les angles *HEn*, *EGL* ſont auſſi égaux, faiſant chacun un angle droit avec l'angle *GEL* ; car, à cauſe du triangle *GEL* rectangle en *L*, $EGL + GEL$ font un angle droit, & les trois angles au point *E* ſur *HL*, $HEn + nEG + GEL$ faiſant deux angles droits, & *nEG* étant droit, $HEn + GEL$ valent un angle droit. En prenant *HE* pour le rayon, *Hm* ($-dz$) eſt le ſinus de l'angle $HEm = CEI$, & *Hn* ($du$) eſt le ſinus de $HEn = EGL$. D'où l'on voit qu'en donnant un rayon égal aux angles *CEI*, *EGL*, *Hm* ($-dz$) eſt à *Hn* ($du$) comme le ſinus de *CEI* au ſinus de *EGL*.

Si l'on fait donc $Cg = EG$, & qu'on tire *gl* parallele à *EI*, l'angle *Cgl* ſera égal à *CEI*, & les rayons *Cg*, *EG*, étant égaux, *Cl* ſinus de l'angle *Cgl*, égal à l'angle *CEI*, ſera à *EL* ſinus de *EGL*, comme $-dz$ eſt à $du$. Or nommant *CI* ($m$), & *EL* ($n$), on trouvera (à cauſe des baſes paralleles *EI*, *gl* de l'angle *ECI*) la valeur de *Cl* par cette proportion $CE\,(z) . Cg = EG\,(u) :: CI\,(m) . Cl = \frac{mu}{z}$. On vient de démontrer que $Hm\,(-dz) . Hn\,(du) :: Cl\,(\frac{mu}{z}) . EL\,(n)$. Donc $du = -\frac{nzdz}{mu}$. Il faut ſubſtituer cette valeur de $du$ dans l'équation $\frac{dz}{\sqrt{b}} + \frac{du}{\sqrt{e}} = 0$, & elle deviendra $\frac{dz}{\sqrt{b}} - \frac{nzdz}{mu \times \sqrt{e}} = 0$ ; d'où l'on tire $mu \times \sqrt{e} = nz \times \sqrt{b}$ ; & diviſant chaque membre par $mn$, on aura $\frac{z \times \sqrt{b}}{m} = \frac{u \times \sqrt{e}}{n}$ ; c'eſt-à-dire (en mettant les lignes exprimées par les lettres) $\frac{CE \times \sqrt{EC}}{CI} = \frac{EG \times \sqrt{DE}}{EL}$ ; ce qui fait

voir que c'eſt une propriété commune à chaque partie infiniment petite de la courbe qu'on cherche, que le produit de cette partie ou de ce petit arc par la racine de ſon ordonnée, diviſé par la différentielle de ſa coupée, eſt, pour chacune, la même grandeur, c'eſt-à-dire égal à une grandeur conſtante; ainſi nommant chaque coupée $AB$ ($x$), chaque ordonnée $BC$ ($y$), chacun des arcs de la courbe ($u$) à commencer au point $A$, & la grandeur conſtante ($\sqrt{a}$), *l'équation*
*582. *de la courbe* ſera $\frac{du\times\sqrt{y}}{dx} = \sqrt{a}$; ou bien (à cauſe de * $du =$
$\sqrt{dx^2+dy^2}$) $\sqrt{y}\times\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\times\sqrt{a}$.

Or on déduit de $\frac{du\times\sqrt{y}}{dx} = \sqrt{a}$, $dx = \frac{du\times\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$; ce qui donne $dx^2 = du^2\times\frac{y}{a}$; & mettant ces valeurs de $dx$ & de $dx^2$ dans $\sqrt{y}\times\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\times\sqrt{a}$; l'on trouve $\sqrt{y}\times\sqrt{\frac{y}{a}du^2+dy^2} = du\times\sqrt{y}$, qui ſe réduit à $\overline{a-y}\times du^2 = ady^2$; d'où l'on déduit $du = dy\times\sqrt{\frac{a}{a-y}}$; prenant les intégrales, on trouve
$u = -2\times a^{\frac{1}{2}}\times\overline{a-y}^{\frac{1}{2}}$, qui devient, en ſuppoſant $a-y$
*456. $= z$, $u = -2\sqrt{az}$, qui eſt l'équation de la cycloïde, * dont
le cercle $PSR$, qui ſert à la former, a ſon diametre $PR = a$, $PQ = y$, $RQ = a-y = z$; la corde $RS = \sqrt{a\times\overline{a-y}} = \sqrt{az}$; le ſigne négatif fait voir que ce n'eſt pas l'arc $AC$ de la cycloïde, mais l'arc $CR$, qui eſt $u = -2\sqrt{az}$. D'où l'on voit que la courbe $ACGR$ de la plus prompte deſcente, eſt une cycloïde. *Ce qu'il falloit trouver.*

## EXEMPLE V.

833. *TROUVER la figure courbe qu'il faut donner à la prouë d'un Vaiſſeau, afin qu'il vogue dans la mer avec la plus grande viteſſe poſſible; ou, ce qui revient au même, afin qu'il trouve dans l'eau de la mer la moindre réſiſtance poſſible.*

Fig. LXIII. ON réduira ici la queſtion à trouver quelle eſt la courbe $CEG$, qui tournant autour de ſon axe $BDF$, doit former la ſurface courbe d'un corps qui, allant dans l'eau ſuivant la direction de ſon axe $FDBAN$, trouve, de la part de l'eau, la moindre réſiſtance poſſible.

Il faut prendre, comme dans l'Exemple précédent, deux parties voiſines, chacune infiniment petite, de la courbe, comme $CE$, $EG$, & mener les ordonnées $BC$, $DE$, $FG$, &

les paralleles à l'axe, *CI*, *LE*. Et comme, en ſuppoſant que la ſurface formée par la courbe ſe meut dans l'eau en repos ſuivant la direction *FDBA*, elle trouve une réſiſtance préciſément égale à l'effort que feroit l'eau, qu'on ſuppoſeroit ſe mouvoir, ſuivant la même direction *ABD*, vers le côté oppoſé, contre cette même ſurface ſuppoſée en repos; en ſuivant cette derniére ſuppoſition, on prendra, ſur *IC* prolongée, *CK* pour la hauteur du volume d'eau qui viendroit heurter contre la zone formée par la révolution de la petite partie *CE* autour de l'axe *BD*. La même *CK* peut auſſi marquer le filet d'eau qui vient frapper le point *C*; & les paralleles à *CK* dans le même plan, peuvent marquer les filets d'eau qui viennent pouſſer la petite partie *CE*.

Or en tirant par *C* la perpendiculaire *pCP* à la courbe, & du point *K*, *Kp* perpendiculaire ſur *Cp*, & enfin de *p* tirant *pq* perpendiculaire ſur *CK*, on trouvera ainſi l'expreſſion de l'effort du quadrilatére d'eau frappant perpendiculairement $OC = EI$, & obliquement *CE*. Si *CK* exprime l'effort entier de ce quadrilatére d'eau contre *OC*, on doit prendre *pC* pour marquer * l'effort de ce même quadrilatére contre *CE* ſui- * 318.
vant la direction *pCP* perpendiculaire à *CE*. Et *pC* exprimant l'effort de l'eau contre *CE* ſuivant la direction perpendiculaire *CP*, la droite *qC* * doit marquer l'effort de la même eau * 318.
contre *CE* ſuivant la direction *CI* parallele à l'axe *BD*.

D'où l'on voit que l'effort de l'eau contre *CO* qu'elle rencontre perpendiculairement ſuivant la direction de l'axe, eſt à l'effort de la même eau contre *CE* ſuivant la même direction *CI* parallele à l'axe, comme *KC* eſt à *qC*, c'eſt-à-dire en raiſon doublée de *KC* à *pC*, (car $KC \,.\, pC :: pC \,.\, qC$.) Or les triangles rectangles *CEI*, *CKp* ſont ſemblables, *ECI*, *pCK* faiſant enſemble un angle droit (à cauſe des trois angles *ICE*, *ECp*, *pCK* égaux à deux droits, & que *ECp* eſt lui ſeul un angle droit;) par conſéquent $KC \,.\, qC :: \overline{KC}^2 \,.\, \overline{pC}^2 :: \overline{CE}^2 \,.\, \overline{EI}^2$. On peut donc exprimer le raport de l'effort de l'eau contre *CO* ou contre ſon égale *EI* ſuivant la direction de l'axe, à l'effort de la même eau contre *CE* ſuivant la même direction de l'axe, par $\frac{\overline{CE}^2}{\overline{EI}^2}$ Et comme la réſiſtance de $CO = EI$, & de *CE* contre l'effort de l'eau qui les pouſſeroit ſuivant la direction de l'axe, eſt égale à la réſiſtance que doivent trouver *CO* & *CE* en pouſſant elles-mêmes l'eau en repos ; le même raport $\frac{\overline{CE}^2}{\overline{EI}^2}$ exprimera le raport de ces réſiſtances.

Pour avoir à preſent l'expreſſion de la réſiſtance de la zone formée par la révolution de *CE* autour de l'axe *BD*, il faut trouver l'expreſſion de la ſurface ou couronne formée par *OC* ou par ſon égale *EI* autour de l'axe *BD*. Pour cela, en ſuppoſant que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonférence, nommant $DI = BC(y)$, & $EI\ (dy)$, & faiſant $r \,.\, c :: DE \,.\, \frac{c \times DE}{r} = \frac{c \times \overline{y+dy}}{r}$, ce quatriéme terme exprimera la circonférence dont *DE* eſt le rayon, & $\frac{1}{2} DE \times \frac{c \times DE}{r} = \frac{c \times \overline{I.E}^2}{2r} = \frac{c \times \overline{y+dy}^2}{2r}$ ſera l'aire de ce cercle. De même $\frac{c \times \overline{DI}^2}{2r} = \frac{cyy}{2r}$ ſera l'aire du cercle dont *DI* ou *BC* (*y*) eſt le rayon ; & ôtant le moindre de ces cercles du plus grand, le reſte $\frac{c \times 2ydy + cdy^2}{2r} = \frac{cydy}{r}$ ( à cauſe de $dy^2$ infiniment petite par raport à $ydy$ ) ſera la ſurface ou la couronne formée par la révolution de *EI* autour de l'axe *BD* ; & remettant les lignes de la figure à la place des lettres, on aura, pour cette ſurface, $\frac{c \times BC \times EI}{r}$. En ſuppoſant la hauteur du ſolide d'eau, que rencontre cette ſurface, égale à l'unité, & la viteſſe de ce ſolide d'eau, dans la ſuppoſition qu'il fût en mouvement, auſſi égale à 1 ; $\frac{c \times BC \times EI}{r}$ ſera l'expreſſion de l'effort de ce ſolide d'eau en mouvement contre cette ſurface en repos, & par conſéquent de la réſiſtance que trouve la ſurface formée par la révolution de *EI* autour de l'axe *BD*, en ſuppoſant qu'elle ſe meut contre l'eau en repos. Or le raport, de la réſiſtance de *EI* à celle de *CE* ſuivant la direction de l'axe, eſt $\frac{\overline{CE}^2}{\overline{IE}^2}$ ; faiſant donc cette proportion $\overline{CE}^2 \,.\, \overline{EI}^2 :: \frac{c \times BC \times EI}{r} \,.\, \frac{c \times \overline{EI}^3 \times BC}{r \times \overline{CE}^2}$, le quatriéme terme $\frac{c \times \overline{EI}^3 \times BC}{r \times \overline{CE}^2}$ ſera l'expreſſion de la réſiſtance que trouve la zone formée par la révolution de *CE* autour de l'axe *BD*, à ſe mouvoir dans l'eau ſuivant la direction de l'axe *DBA*.

Par les mêmes raiſons, $\frac{c \times \overline{GL}^3 \times DE}{r \times \overline{GE}^2}$ ſera la réſiſtance de la petite

petite zone voiſine formée par la révolution de $GE$ autour du même axe $BD$.

Ainſi ſuppoſant les changeantes $CE = z$, $GE = u$, & les conſtantes, regardées comme connues par raport à ces deux petites parties de la courbe, $CB = b$, $DE = c$, $EI = f$, $LG = g$, $CI = m$, $EL = n$; la ſomme des reſiſtances des deux petites zones voiſines formées par la révolution de $CE$, $EG$ autour de l'axe $BDF$, ſera $\frac{cf^3b}{rzz} + \frac{cg^3e}{ruu}$, ou bien (en diviſant l'un & l'autre terme par $\frac{r}{c}$, ce qui n'en change point la valeur) $\frac{bf^3}{zz} + \frac{eg^3}{uu}$. Or cette ſomme par les conditions du Problême, eſt *un moindre*; par conſequent * ſa differentielle $\frac{bf^3dz}{z^3} + \frac{eg^3du}{u^3} = 0$. * 55

Or en prenant ſur $LE$ prolongée en $H$, la droite $EH$ infiniment petite par raport à $LE$, tirant les droites $CH$, $GH$, & du centre $C$ avec le rayon $CE$, le petit arc $Em$ qui rencontre $CH$ prolongée en $m$, & du centre $G$ avec le rayon $GE$, l'arc $En$ qui rencontre $GH$ en $n$; on prouvera, comme dans le Problême précedent, que l'angle $mEH = CEI$, & $nEH = EGL$; que $Hm$ eſt $-dz$, & $Hn$ eſt $du$; &, en prenant les rayons égaux $cE = GE$, & tirant $ci$ parallele à $CI$; que $Hm\,(-dz)$ eſt à $Hn\,(du)$, comme le ſinus $ci$ de l'angle $CEI$, eſt au ſinus $EL$ de l'angle $EGL$; ainſi $CE\,(z) . cE = GE\,(u) :: CI\,(m) . ci = \frac{mu}{z}$; & $Hm\,(-dz) . Hn\,(du) :: ci\,(\frac{mu}{z}) . EL\,(n)$; ce qui donne $du = -\frac{nzdz}{mu}$. Subſtituant cette valeur dans l'équation précedente, elle devient $\frac{bf^3dz}{z^3} - \frac{eg^3nzdz}{mu^4} = 0$, d'où l'on tire $\frac{bf^3m}{z^4} = \frac{eg^3n}{u^4}$; c'eſt-à-dire (en remettant les droites de la figure à la place des lettres) $\frac{CB\times\overline{EI}^3\times CI}{\overline{CE}^4} = \frac{DE\times\overline{LG}^3\times EL}{\overline{GE}^4}$; ce qui fait voir, que c'eſt une proprieté commune à chaque partie infiniment petite de la courbe qu'on cherche; que le produit de ſon ordonnée par la troiſiéme puiſſance de la difference de la même ordonnée, & par la difference de ſa coupée, diviſé par la quatriéme puiſſance de cet arc infiniment petit de la courbe, eſt, pour chacun de ces petits arcs, une même grandeur, c'eſt-à-dire, qu'il eſt par tout égal à une même grandeur conſtante.

Ainſi ſuppoſant chaque coupée $BD$, $BF$, &c. $= x$, chaque ordonnée $BC$, $DE$, $FG$, &c. $= y$, chacun des arcs finis de la courbe depuis l'origine $= u$, & la conſtante $a$, *l'équation de la courbe qu'on cherche*, qui exprime une proprieté commune à chacune des parties infiniment petites de cette courbe; ſera $\frac{ydy^3dx}{du^4} = a$; ou bien $ydy^3dx = adu^4$; ou bien (à cauſe *582. de $du = {}^* \sqrt{dx^2 + dy^2}$) $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$. On ſuppoſera, pour ſéparer les changeantes, $dx = \frac{zdy}{a}$; & ſubſtituant les valeurs de $dx$ & de ſes puiſſances dans l'équation, l'on trouvera $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; en prenant les differences, on aura $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$. Par conſequent $dx = \frac{zdy}{a} = \frac{3z^3dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$; &, prenant les integrales, on trouvera $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \text{S}.\frac{adz}{z}$: d'où l'on voit qu'il faudra ſe ſervir de la logarithmique pour conſtruire la courbe $\text{S}.\frac{adz}{z}$ étant le logarithme de $z$.

Si l'on ſuppoſe $y = 0$, $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$ donnera l'équation $z^4 + 2aazz + a^4 = 0$, où l'on trouvera $zz = -aa$, & $z = \sqrt{-aa}$; cette valeur imaginaire de $z$, qui vient de la ſuppoſition $y = 0$, fait voir que $y$ ne peut pas être zero, & que la courbe *GEC* ne rencontre pas ſon axe *BD*. Pour trouver la *moindre y*, il faut ſuppoſer $dy = 0$; ce qui donnera $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz} = 0$, qui ſe réduit à $z^4 + \frac{2}{3}aazz - \frac{1}{3}a^4 = 0$, d'où l'on tire $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ à l'origine des $y$ & des $x$; & ſubſtituant cette valeur de $y$ dans $y = \frac{{}^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, on trouvera que la *moindre y*, à l'origine de la courbe & des $x$, eſt $y = \frac{16}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on ſuppoſe $x = 0$, & en même temps le logarithme $-\text{S}.\frac{adz}{z} = 0$, l'équation $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \text{S}.\frac{adz}{z} = 0$, deviendra $\frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} = 0$; & comme au point de l'axe, où $x = 0$, l'on a trouvé $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; en mettant cette valeur de $z$ dans la derniere équation, l'on trouve la quantité conſtante $+\frac{5}{12}a$; *828. ce qui fait voir* qu'il faut ajouter, à l'integrale qui contient la valeur de $x$, la quantité conſtante $-\frac{5}{12}a$ avec le ſigne $-$, pour avoir l'integrale complete $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12}a - \text{S}.\frac{adz}{z}$. Ces choſes ſuppoſées, voici la maniere de conſtruire la courbe.

### *Conſtruction de la Courbe.*

1°. IL faut tracer la droite *ABDF* qu'on prendra pour l'axe de la courbe: on en ſuppoſera l'origine au point *B*, & les coupées $x$ ſeront $BD$, $BF$, &c. on élevera à l'origine $B$, la perpendiculaire $BCT$ indéterminée des deux côtés; & ayant pris $BM$, de la longueur qu'on voudra, pour la conſtante $a = BM$, on fera $BC$, qui eſt la *moindre y*, $= \frac{16}{3} a \sqrt{\frac{1}{3}}$, & le point $C$ ſera le premier point de la courbe, ou le point qui répond à l'origine des coupées $x$ & des ordonnées $y$.

2°. Pour avoir chacun des autres points de la courbe, comme le point $G$, on prolongera $BA$ vers $N$ tant qu'on voudra, on prendra les $z$ ſur cette droite & ſur les paralleles à cette droite, & elles iront de l'origine $B$ vers $A$ & vers $N$; & ayant trouvé à l'origine $B$ que $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, on fera $BA = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & l'on tracera par le point $A$ une logarithmique $RAS$, dont l'axe ou la ligne des logarithmes ſera $BT$ pour les poſitifs $S. \frac{adz}{z}$, & $BX$ pour les négatifs $- S. \frac{adz}{z}$, & dont la ſoutangente, qui ſe doit trouver ſur l'axe $TBX$, doit partout être égale à la conſtante $a = BM$. Et comme c'eſt une choſe arbitraire de prendre telle ordonnée qu'on voudra pour celle qui doit être à l'origine des logarithmes, on prendra, pour cette conſtruction, $BA = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ pour l'ordonnée de la logarithmique à l'origine $B$, dont le logarithme eſt zero. Il eſt évident que tous les logarithmes au-deſſus de $B$, comme $BT$ ou une parallele à $BT$, comme $NR$, ſont exprimés par $+ S. \frac{adz}{z} = l. z$, & que ceux qui ſont au-deſſous de $B$, comme nr, ſont exprimés par $- S. \frac{adz}{z} = - l. z$.

3°. Il ne faut plus, pour trouver chaque point $G$ de la courbe, que prendre $BN$ d'une longueur arbitraire & connue, & la nommer $z$; élever par le point $N$ la perpendiculaire $NR$ qui ſera égale au logarithme de $BN$ (car on peut imaginer $BN$ au point $R$ menée de $R$ juſqu'à l'axe $BT$ de la logarithmique) & $NR$ ſera $= + S. \frac{adz}{z}$ ou à $l. z$. Il faut enſuite prendre $BF (x) = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12} a - NR$, & prendre $BT (y) = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; & enfin tirer $FG$ parallele à $BT$, & $TG$ parallele à $ADF$; & il eſt évident que le point $G$, où ces deux lignes ſe rencontreront, ſera un point de la courbe. *Ce qu'il falloit trouver.* On trouvera les autres points de la courbe de la même maniere.

## REMARQUES.

### I.

SI l'on tire par *M* la droite *MN*, elle ſera parallele à la tangente de la courbe au point *G*, qu'on a trouvé par le moyen de *BN* ($z$); car, par la conſtruction, $dx = \frac{zdy}{a}$; d'où l'on tire *GL* ($dy$). *LE* ($dx$) :: *BM* ($a$). *BN* ($z$): ainſi les angles droits *GLE*, *MBN*, ayant leurs côtés proportionnels, les angles *G* & *M* ſont égaux, comme auſſi *E* & *N*; & par conſequent l'hypotenuſe *MN* prolongée eſt parallele à l'hypotenuſe *GE* qui eſt une petite partie de la tangente de la courbe au point *G*. D'où il ſuit que *MA* eſt parallele à la tangente au premier point *C* de la courbe qui répond à l'origine *B*. D'où l'on voit auſſi que les ſoutangentes des points de la courbe augmentent du côté de *N* à meſure que ces points s'éloignent de l'origine, & la courbe ſe trouvant entre les tangentes & l'axe, tourne ſa concavité du côté de l'axe *BD*.

### II.

Quand on prend *BN* ($z$) plus grande que *BA*, on décrit la courbe *CEG*; mais en prenant *B*n moindre que *BA*, on décrit une autre branche de la courbe *CV*, & il y a un point de rebrouſſement au point *C*. Les logarithmes nr négatifs $= - \mathrm{S}.\frac{adz}{z} = - l.z$, ſe prennent poſitivement pour trouver les coupées *BF* ($x$); parceque le ſigne du logarithme étant négatif dans la valeur de $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12}a - \mathrm{S}.\frac{adz}{z}$, cela marque qu'il faut ôter le logarithme nr; & pour ôter un logarithme négatif, il faut l'ajouter. Cette ſeconde branche *CV* de la courbe qui ſatisfait au Problême comme la premiere *CG*, a ſa convexité tournée du côte de l'axe *BD*; puiſque ſes tangentes étant paralleles aux *M*n qui leur répondent, elles ſe trouvent entre cette branche & l'axe *BD*.

### III.

Si l'on fait tourner laquelle on voudra des deux branches de cette courbe autour de l'axe *BD*, elle formera par ſa révolution la figure qu'il faut donner à la ſurface de la partie de la proue d'un vaiſſeau qui doit être dans l'eau, & le vaiſſeau avec cette figure trouvera dans l'eau la *moindre réſiſtance* poſſible. Si l'on vouloit rendre la proue pointue, on pourroit y ajouter la figure conique que formeroit la tangente au point $C$ parallele à $MA$, par ſa revolution autour de l'axe $ABD$.

### EXEMPLE VI.

4. *TROUVER ſur un plan vertical la courbe* BEFM, *par laquelle un corps* M, *deſcendant par le ſeul mouvement que lui donne ſa peſanteur, la preſſe dans chacun de ſes points* M *avec une force conſtante toujours égale au poids de ce corps; c'eſt-à-dire, qu'il preſſe chaque point de cette courbe avec la même force qu'il preſſeroit le point d'un plan horizontal ſur lequel ce corps peſant ſeroit en repos; ou, ce qui revient au même, en ſuppoſant que la courbe* CHG *eſt la developpée de la courbe* BEFM *qu'on cherche, il faut que le poids M ſuſpendu à l'extrémité* M *d'un fil* CM *qui enveloppe* CHG, *en deſcendant librement le long de la courbe* BEFM, *tire, à chaque point* M *de cette courbe, le fil* CM *avec une force conſtante toujours égale à la force avec laquelle il tireroit le même fil par ſa ſeule peſanteur ſi ce corps étoit en repos.* FIG. LXIV.

### PREPARATIONS POUR LA RESOLUTION.

5. LES Lecteurs voyent bien que chacune des lignes infiniment petites dont on conçoit que la courbe $BEFM$ eſt compoſé, étant un plan incliné, le corps peſant en décrivant cette petite ligne, ne peut pas la preſſer avec toute ſa peſanteur, mais ſeulement avec une partie de cette peſanteur qu'il faut déterminer; & qu'il eſt néceſſaire par conſéquent que le corps, en décrivant chaque petite ligne de la courbe, ait, outre ſa peſanteur, une autre force (qu'on doit auſſi déterminer) qui lui vienne pourtant de ſa ſeule chute ou deſcente cauſée par ſa peſanteur; laquelle force étant unie à la partie de la peſanteur du corps qui preſſe cette même petite partie de la courbe, il ſe forme, de ces deux forces, un effort toujours égal à l'effort de la peſanteur entiere de ce corps.

6. Pour déterminer la partie de la peſanteur du corps $M$ avec laquelle il preſſe chaque petite ligne $M$ de la courbe que l'on cherche, on ſuppoſera que cette courbe eſt $BEFM$; que l'horizontale $AP$ en eſt l'axe; que l'origine des coupées $AP$ eſt au point fixe $A$; que les ordonnées ſont $PM$ & ſes paralleles, toutes perpendiculaires à l'axe $AP$; que la

developée de cette courbe eſt $CHG$, que le fil, dont l'extrémité $M$ forme la courbe en ſe developant, eſt $CM$; ainſi $CM$
* 507. eſt le rayon de la developée, & par conſequent * perpendiculaire à la courbe $BEFM$ au point $M$, & la tangente de la developée au point $C$: & l'on peut concevoir la petite partie de la courbe au point $M$, comme un arc infiniment petit décrit du centre $C$ avec le rayon $CM$. Ces choſes ſuppoſées, on prendra ſur l'ordonnée $PM$ qui repréſente toute autre ordonnée, la droite $MR$ d'une longueur arbitraire, qu'on nommera $(a)$, mais toujours de la même grandeur ſur chaque ordonnée, pour marquer l'effort entier de la peſanteur du corps $M$; on tirera $RS$ perpendiculaire ſur $CM$.
* 318. Il eſt évident * que $MS$ exprimera la partie de l'effort de la peſanteur avec laquelle le corps $M$ preſſe ce point $M$ de la courbe $BEFM$.

837. Pour déterminer la ſeconde force cauſée par la deſcente du corps peſant $M$ depuis l'horizontale $AP$, qui doit ſe joindre avec la partie, de l'effort de la ſeule peſanteur, exprimée par $MS$, afin que les deux enſemble faſſent une force égale à l'effort de la peſanteur entiere exprimée par $MR$; il faut faire attention à la force où à la viteſſe, ( on ne regardera ici le corps $M$ que comme un point, pour ne pas augmenter les difficultés, ainſi ſa force & ſa viteſſe ſont la même choſe; ) que le corps $M$ en deſcendant le long de la courbe $BEFM$ depuis l'horizontale $AP$, acquiert par ſa chute de la hauteur $PM$; & qu'avec cette viteſſe acquiſe il décrit dans un inſtant la partie $Mm$ infiniment petite de la courbe. Or cette viteſſe ſuivant la petite droite $Mm$, doit ſe partager en deux parties. Pour les bien diſtinguer, il faut prendre deux parties égales infiniment petites de la courbe des deux côtés du point $M$, ſçavoir $\mu M$ & $Mm$; mener la tangente $Mn$ au point $M$; faire $Mn = \mu M = Mm$; tirer du centre $M$ avec le rayon $Mm$ le petit arc $mn$, qu'on peut prendre pour une droite infiniment petite perpendiculaire ſur $Mn$, & par conſequent parallele au rayon $MC$ de la developée, & tirer $mL$ parallele à $Mn$, & par conſequent perpendiculaire au rayon $CM$ au point $L$: & alors on verra
* 317. clairement que la force ſuivante $Mm$ * ſe doit partager en deux, l'une ſuivant la tangente $Mn$ ou ſuivant ſa parallele $Lm$, laquelle ne preſſe ou ne pouſſe point la courbe, & ne tire

point le fil $CM$ ſuivant la direction $CM$, étant perpendiculaire à ce fil ; l'autre ſuivant la direction $mn$ ou ſa parallele $LM$ : de maniere qu'en ſuppoſant que $Mm$ marque la viteſſe ou la force entiere ſuivant $Mm$ avec laquelle le corps $M$ décrit cette partie infiniment petite $Mm$, la petite droite $mn$ où ſon égale $LM$ marquera la partie de cette force ou viteſſe qui agit ſuivant la direction $mn$ ou $LM$ du fil, & qui tire le fil du centre $C$ ſuivant la direction $CM$. C'eſt par cette ſeconde force ſuivant $mn$ ou $LM$ ( qu'on nomme *la force centrifuge* ) que le corps $M$ preſſe ou pouſſe la courbe au point $M$, ou tire le fil $CM$ ; & cette ſeconde force ſuivant $mn$ eſt preciſément la partie de la force acquiſe par la chute du corps $M$ de la hauteur $PM$, qui étant jointe avec la partie $MS$ de l'effort de ſa ſeule peſanteur conſiderée à part, forme l'effort entier avec lequel le corps $M$ preſſe le point $M$ de la courbe, lequel effort entier doit à tous les points de la courbe être égal à la peſanteur abſolue de ce corps, marquée par $MR$ ($a$).

8. D'où l'on voit que pour réſoudre le Problême, il faut, 1°. trouver l'expreſſion analytique de l'effort marqué par $mn$ qui convienne à tous les points de la courbe qu'on cherche. 2°. Trouver de même l'expreſſion de la partie de la peſanteur marquée par $MS$. 3°. Suppoſer la ſomme de ces deux expreſſions égale à la peſanteur abſolue du corps $M$ marquée par $MR$ ($a$). Voici la maniere de trouver l'expreſſion de l'effort marquée par $mn$.

9. $CM$ étant le rayon de la developée perpendiculaire à la courbe au point $M$, on peut concevoir que l'arc infiniment petit $Mm$ de la courbe, eſt auſſi l'arc d'un cercle décrit du centre $C$ par le rayon $CM$ ; ( car le fil $CM$ en ſe developant de maniere qu'il ne forme que l'angle infiniment petit $MCm$, décrit l'arc de cercle $Mm$, ) &, à cauſe de la petiteſſe infinie de cet arc $Mm$, on peut prendre ce petit arc pour ſa corde. Or le quarré de la corde $Mm$* eſt égal au produit du diametre entier, c'eſt-à-dire, de $2CM$ par le ſinus verſe de cette corde qui eſt ici $LM = mn$. On aura donc $\overline{Mm}^2 = 2CM \times mn$ ; d'où l'on déduira $mn = \frac{\overline{Mm}^2}{2CM}$. Mais $Mm$ étant la longueur que décrit la viteſſe qu'a le corps $M$ au point $M$ pendant un inſtant, en nommant cette viteſſe $u$, on peut pren-

* 288.

dre cette longueur *Mm* pour exprimer cette viteſſe, en ne la comparant avec une autre viteſſe que par le moyen de la longueur que cette autre fait décrire en un inſtant. En nommant auſſi (*r*) le rayon *CM*, on aura cette expreſſion de l'effort *mn*, ſçavoir $mn = \frac{\overline{Mm}^2}{2CM} = \frac{uu}{2r}$. Cette expreſſion de la force centrifuge *mn* convient à la force centrifuge de tout arc infiniment petit d'un cercle quelconque, & auſſi à la force centrifuge de toute partie infiniment petite d'une courbe par raport au rayon de la developée qui convient à cette petite partie de courbe. Il faut à preſent la déterminer à exprimer la force centrifuge de la courbe de notre Problême, en y faiſant entrer la peſanteur *MR* (*a*) & la hauteur *PM*. Pour le faire d'une maniere qui ne laiſſe aucune obſcurité aux Lecteurs qui commencent, on va démontrer les principes ſuivans que cela ſuppoſe.

---

## *Propoſitions démontrées ſur les chutes des corps peſans, en ſuppoſant le milieu ſans réſiſtance.*

### PREMIER PRINCIPE.

840. FIG. LXV. *SUPPOSE' qu'on marque le temps entier de la chute libre d'un corps peſant par la droite* AD, *dont l'origine ſoit en* A; *que* AB *marque une partie finie, par exemple la moitié de ce temps depuis le commencement de la chute, & qu'on nomme cette partie de temps* (t); AD *double de* AB *marquera* 2t. *Que l'on conçoive cette droite partagée en parties égales infiniment petites* Ah, hk, km, &c. *ces parties ſeront les* dt; *que l'on tire par chaque diviſion les droites paralleles* hi, kl, mn, &c. *& qu'elles ayent entr'elles les mêmes raports que les viteſſes que produit la peſanteur depuis l'origine juſqu'à l'inſtant que termine chacune de ces paralleles; c'eſt-à-dire que* hi *marque la viteſſe que produit la peſanteur dans le premier inſtant marqué par* Ah; kl *la viteſſe qu'elle produit dans les deux premiers inſtans* Ak; mn *la viteſſe qu'elle produit dans les trois premiers inſtans* Am; *& ainſi de ſuite. Or la peſanteur étant regardée comme une cauſe qui demeure toujours conſtante ou la même, & ſuppoſant le milieu ſans réſiſtance, elle doit produire à chaque inſtant une viteſſe égale à celle qu'elle a produite dans le premier inſtant, & aucune de ces viteſſes ne ſe perdant,*

*perdant, celle qu'elle a produite dans les premiers inſtans demeure entiere dans les inſtans ſuivans, pendant chacun deſquels, outre celle qui demeure, elle en produit toujours une égale à celle du premier inſtant. Ainſi chaque ordonnée exprime la ſomme de toutes les viteſſes produites depuis le commencement juſqu'à l'inſtant que termine cette ordonnée, par exemple* mn *exprime la ſomme des viteſſes produites pendant les trois premiers inſtans, marqués par* Am. *Les ordonnées* hi, kl, mn, &c. *ſont donc entr'elles comme leurs coupées* Ah, Ak, Am, &c. *la ligne* ACE *qui paſſe par les extrémités des ordonnées eſt donc une ligne droite.*

*Or à cauſe de la petiteſſe infinie de chacun des inſtans, qu'on ſuppoſe égaux, on peut conſiderer le mouvement du corps qui deſcend comme uniforme pendant cet inſtant : ainſi les longueurs parcourues par la viteſſe de chacun des inſtans, ſont entr'elles comme les viteſſes de ces inſtans, car* * L . l : : Vdt . udt ; *ainſi les longueurs parcourues pendant chaque inſtant, peuvent être repréſentées par les viteſſes de ces inſtans, c'eſt-à-dire, par les mêmes ordonnées, qui repréſentent les viteſſes, multipliées, ſi l'on veut, chacune par le tems* dt. *Par exemple la longueur parcourue au premier inſtant ſera* hi × dt ; *celle du ſecond ſera* ki × dt, &c. *D'où il ſuit qu'en prenant un tems fini* (t) *marqué par* AB, *la ſomme de toutes les ordonnées à* AB, *c'eſt-à-dire, l'aire du triangle* ABC *marquera la longueur que la peſanteur a fait parcourir à un corps peſant depuis le commencement pendant le tems fini marqué par* AB (t). *De même l'aire* ADE *marquera la longueur parcourue pendant* AD (2t). * 302.

*Par conſequent* les longueurs *L*, *l*, que la peſanteur fait parcourir par un mouvement acceleré à un corps peſant pendant deux tems finis *T*, *t* depuis le commencement de la chute, ſont entr'elles comme les quarrés des tems $T^2$, $t^2$, employés à les parcourir ; & encore comme les quarrés des viteſſes $V^2$, $u^2$, produites par la peſanteur pendant ces deux tems-là. *Ce qui convient évidemment à toutes les longueurs parcourues de même pendant les tems finis qu'on voudra.*

## SECOND PRINCIPE.

1. *SI le même corps étoit mû d'un mouvement uniforme pendant le premier tems fini* AB (t), *avec la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems fini, repréſentée par* BC (*u*), *qui demeurât toujours conſtante ſans acceleration ; il eſt évident que toutes les ordonnées*

*à* AB, *c'eſt-à-dire, toutes les paralleles à* BC *qui marqueroient les viteſſes de chaque inſtant, & qui repreſenteroient auſſi les longueurs parcourues à chaque inſtant avec cette même viteſſe conſtante, ſeroient toutes égales, & leur ſomme ſeroit l'aire du parallelogramme* BP *double du triangle* ABC. *Par conſequent* ſi un corps étoit mû d'un mouvement uniforme avec la viteſſe conſtante qu'il auroit acquiſe en deſcendant par le ſeul mouvement de la peſanteur pendant tel tems qu'on voudra, il parcoureroit une longueur double de celle qu'il auroit parcourue en deſcendant depuis le repos d'un mouvement acceleré. *C'eſt-à-dire, s'il parcourt* l *pendant le tems* t *d'un mouvement acceleré, il parcourera* 2l *pendant le même tems* t *d'un mouvement uniforme, avec la viteſſe acquiſe à la fin du tems* t; * 301. *ainſi** $u = \frac{2l}{t}$, & $t = \frac{2l}{u}$.

842. *Il faut étendre les deux mêmes principes aux longueurs qu'empêche de parcourir la perte de la viteſſe cauſée par l'action de la peſanteur, lorſque les corps ſont jettés en haut, & que leur mouvement eſt retardé à chaque inſtant.*

### TROISIÉME PRINCIPE.

843. *LA viteſſe que produit la peſanteur dans le premier inſtant, peut auſſi être conſiderée en deux états; 1°. comme s'acquerant dans le premier inſtant; 2°. comme toute acquiſe à la fin de ce premier inſtant. Dans le premier état, l'aire du petit triangle* Ahi *repréſente (par le premier principe) la longueur qu'elle fait parcourir en s'acquierant pendant la durée du premier inſtant. Dans le ſecond état, l'aire du petit parallelogramme* Ahiq *repréſente (par le ſecond principe) la longueur qu'elle feroit parcourir toute acquiſe, en perſeverant ainſi conſtante, pendant la durée du premier inſtant. Or de la même maniere qu'on regarde les arcs infiniment petits des courbes comme des lignes droites, & qu'on les compare avec des lignes droites, infiniment petites; on peut auſſi, à cauſe de la petiteſſe infinie d'un inſtant, comparer la viteſſe qui s'acquiert pendant cet inſtant avec celle qui eſt acquiſe à la fin du même inſtant, & les regarder l'une & l'autre comme uniformes; par conſequent la viteſſe qui s'acquiert pendant le premier inſtant par l'action de peſanteur, eſt à celle qui eſt acquiſe à la fin de ce premier inſtant, comme la longueur que fait parcourir la premiere, eſt à la longueur que feroit parcourir la ſeconde, en demeurant conſtante & uniforme, pendant le même inſtant: c'eſt-à-dire,* que

la viteſſe que produit la peſanteur pendant le premier inſtant, & qui s'acquiert dans la durée de cet inſtant, eſt à la viteſſe toute acquiſe à la fin de cet inſtant, comme 1 à 2. *En nommant la premiere de ces viteſſes* la peſanteur (p), *parcequ'elle eſt le premier effet de la peſanteur, la ſeconde de ces viteſſes ſera* = 2p.

## QUATRIÉME PRINCIPE.

4. *D'OU l'on voit que la premiere ordonnée* hi *marque la viteſſe* 2p *acquiſe à la fin du premier inſtant; la ſeconde* kl *marque la viteſſe* 2p *acquiſe à la fin du premier inſtant, qui ſe conſerve dans tous les inſtans ſuivans; elle marque encore de plus la viteſſe* 2p *qui eſt acquiſe à la fin du ſecond inſtant: la troiſiéme ordonnée* mn *marque la viteſſe acquiſe à la fin des trois premiers inſtans, qui eſt* 2p + 2p + 2p = 3 × 2p, *& ainſi de ſuite; c'eſt-à-dire, que chaque ordonnée repréſente* 2p *multipliée par le nombre des inſtans depuis le commencement. Par conſequent* la viteſſe *(u)* acquiſe depuis le repos dans un tems fini (*t*), eſt égale à $2p \times t$.

## CINQUIÉME PRINCIPE.

5. *MAIS* u =* $\frac{2l}{t}$; *par conſequent* $\frac{2l}{t}$ = 2pt; *ce qui donne* * 841.
l = ptt; *c'eſt-à-dire*, la longueur parcourue par la chute d'un corps qui ne reçoit de mouvement que de la peſanteur qui produit la même viteſſe à chaque inſtant de la chute, peut s'exprimer par le produit de la peſanteur *p* & du quarré *tt* du tems employé à la parcourir.

## AVERTISSEMENT.

LES principes qu'on vient de démontrer ſur les chutes des corps peſans par les lignes verticales, conviennent auſſi aux chutes des mêmes corps par des lignes inclinées ſur l'horizon, & aux deſcentes des mêmes mobiles par des lignes courbes: on va le demontrer ici, afin que les Commençans n'ayent pas beſoin de le chercher ailleurs.

## SIXIÉME PRINCIPE.

6. LA peſanteur entiere d'un corps A, *avec laquelle il tireroit un fil vertical s'il étoit attaché à ſon extrémité, (qui eſt la peſanteur qui produit la chute verticale,)* eſt à la peſanteur du même corps, ſupporté par un plan incliné AE, *(qui eſt la peſanteur qui produit la chute ſur le plan incliné* AE,) com- FIG. LXVI.

me la longueur AE du plan incliné eſt à ſa hauteur AB, terminées l'une & l'autre par l'horizontale BE.

*Car en tirant de quel point on voudra* e *pris dans la verticale* AB, *la perpendiculaire* eb *à la ligne inclinée* AE, *& faiſant le rectangle* Adeb; *il eſt évident qu'en prenant* Ae, *pour marquer*
* 317. *la peſanteur abſolue*, * *ou l'effort entier de la peſanteur ſuivant* Ae, *cet effort eſt conçu compoſé des deux efforts, l'un ſuivant* be, *lequel eſt entierement ſoutenu par le plan incliné auquel cet effort eſt perpendiculaire; l'autre ſuivant* Ab; *& c'eſt ce ſeul effort qui demeure au corps peſant* A *pour deſcendre ſuivant la direction* AE *du plan incliné. La peſanteur abſolue du corps* A *eſt donc à la peſanteur qui reſte au même corps ſur le plan incliné* AE, *comme* Ae *eſt à* Ab. *Or les deux triangles rectangles* ABE, Abe *ſont ſemblables, ayant l'angle aigu* A *commun; ainſi* Ae. Ab :: AE. AB; *par conſequent la peſanteur abſolue du corps* A *eſt à ſa peſanteur ſur le plan incliné* AE, *comme* AE *eſt à* AB.

*Ainſi nommant* p *la peſanteur abſolue*; l, *la longueur de la ligne vertical* AB; i, *la longueur* AE *du plan incliné; (en ſuppoſant ces deux longueurs entre les mêmes horizontales)* $\frac{lp}{i}$ *ſera l'expreſſion de la partie de la peſanteur du mobile qui lui reſte ſur le plan incliné.*

## COROLLAIRE I.

847. *QUOIQU'IL ne reſte à un corps* A *ſur un plan incliné* AE *qu'une partie de ſa peſanteur abſolue, il n'eſt pas moins évident que cette partie agiſſant ſur le corps à tous les inſtans de la deſcente par le plan incliné, les principes qu'on a démontrés à l'égard des chutes verticales, doivent auſſi convenir aux chutes inclinées: ſçavoir, que les longueurs inclinées parcourues par la deſcente libre du mobile, priſes depuis le commencent de la chute, ſeront entre-elles comme les quarrés des tems employés à ces deſcentes, & comme les quarrés des viteſſes acquiſes à la fin de chacune de ces deſcentes; ainſi nommant les longueurs inclinées* (i), *les viteſſes par ces longueurs* (u), *le tems employé à parcourir ces longueurs* (t), *on aura* $i . 2i :: u^2 . 4u^2 :: tt . 4tt$. *Que ſi le même corps étoit mû par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe pendant la chute inclinée par le mouvement acceleré, il parcoureroit dans le même tems une longueur double de celle qu'il auroit parcourue par la chute accelerée, & ainſi des autres. L'on aura donc* $u = \frac{2i}{t}$, $t = \frac{2i}{u}$, $i = \frac{tu}{2}$.

## COROLLAIRE II.

8. *MAIS ſi l'on veut comparer les chutes verticales avec les chutes inclinées, il faut ſe ſervir du ſixiéme principe; par exemple pour trouver les longueurs inclinées & verticales parcourues dans le même tems, en ſuppoſant les verticales marquées par l'indeterminée* (m) *& les inclinées par l'indeterminée* (n), *il faut faire cette proportion;* $p . \frac{lp}{i} :: m \frac{lm}{i} = n$; *le quatriéme terme* $\frac{lm}{i} = n$ *marquera la longueur* n *qu'il faut prendre ſur le plan incliné depuis le commencement de la chute. Ainſi ſi l'on veut déterminer la longueur inclinée* AC (n) *qui ſera parcourue ſur le plan incliné* AE (i) *dans le tems de la chute verticale par* AB (l), *il n'y a qu'à mettre* l (AB) *à la place de* m *dans* $\frac{lm}{i}$, *& l'on aura* $\frac{ll}{i} = \frac{AB \times AB}{AE}$ *pour la longueur* AC; *ce qui fait voir qu'en tirant* BC *perpendiculaire à* AE, *elle déterminera la longueur* AC, *puiſque* $AC = \frac{AB \times AB}{AB}$.

9. *Si l'on veut ſçavoir la viteſſe qu'aura acquiſe le corps peſant* A *lorſqu'il ſera arrivé à l'horizontale* E B, *après avoir deſcendu librement par le plan incliné* AE (i); *on nommera cette viteſſe* (u); *le temps employé à deſcendre* (t); *on nommera auſſi* v *la viteſſe par la verticale* AB (l); *le tems de la chute par* AB (T); *& on remarquera que, ſuivant le ſecond Corollaire, le temps* T *par* AB (l) *eſt le même que le tems par* AC $(\frac{ll}{i})$. *On fera enſuite cette proportion* * AC $(\frac{ll}{i})$. AE (i) :: TT . tt; *mais* ¶ $t = \frac{2i}{u}$, † $T = \frac{2l}{v}$. *Mettant ces valeurs de* t *& de* T *dans les deux derniers termes de la proportion, elle deviendra* $\frac{ll}{i} . i :: \frac{4ll}{vv} . \frac{4ii}{uu}$; *d'où l'on tire* $\frac{1}{vv} = \frac{1}{uu}$, *& par conſequent* $v = u$ : *ce qui donne le ſeptiéme principe.*

* 847.
¶ 847.
† 841.

7

## SEPTIEME PRINCIPE.

0. LA viteſſe acquiſe par un corps peſant qui eſt deſcendu librement ſur un plan incliné, eſt égale à la viteſſe qu'il auroit acquiſe par la chute perpendiculaire ou verticale d'une même hauteur. *Ainſi la viteſſe acquiſe par la chute verticale ſe pouvant exprimer par la racine de la hauteur, c'eſt-à-dire,* $v = \sqrt{l}$, *la viteſſe par un plan incliné de la même hauteur ſe pourra auſſi exprimer par* $u = \sqrt{l}$.

*On pourroit déduire immédiatement le même principe du ſixié-*
* 844. *me, de cette façon :* $v =$ * $2pT$. *En mettant pour la chute incli-*
*née* $\frac{lp}{i}$ *au lieu de* $p$, $u$ *au lieu de* $v$, *&* $t$ *au lieu de* $T$, *l'on aura*
* 841. $u = \frac{2lpt}{i}$. *Par conſequent* $v . u :: 2pT . \frac{2lpt}{i} :: T . \frac{lt}{i}$. *Mais* * $T$
$= \frac{2l}{v}$, *&* $t = \frac{2i}{u}$. *Mettant ces valeurs dans les deux derniers ter-*
*mes, on aura* $v . u :: \frac{2l}{v} . \frac{2l}{u} :: \frac{1}{v} . \frac{1}{u}$; *ce qui donne* $vv = uu$, *&*
*par conſequent* $v = u$.

Voici l'application aux chutes par les courbes de ce qu'on vient de démontrer des chutes par un plan incliné.

851. FIGURE LXVII. *Quand un plan incliné* AE *ne fait qu'un angle infiniment petit* EAF *avec un autre plan incliné* AF, *l'excès, dont l'effort, de la peſanteur qu'a un corps* A *ſur le premier* AE, *ſurpaſſe l'effort de la peſanteur du même corps ſur le ſecond* AF, *n'eſt qu'une differentielle du ſecond genre par raport à l'effort de la peſanteur du corps* A *ſur le premier* AE.

*Car ayant pris* AG *pour marquer l'effort de la peſanteur du*
*corps* A *ſur le plan incliné* AE, *& tiré* GH *perpendiculaire ſur*
* 317. AF, *il eſt certain* que* AH *repréſente l'effort de la peſanteur*
*qui reſte au corps* A *ſur le ſecond plan incliné* AF. *Or en tirant*
*du centre* A *avec le rayon* AH *le petit arc* HK *qui rencontre*
AG *en* K, KG *ſera l'excès dont l'effort de la peſanteur du corps*
A *ſur* AE *ſurpaſſe l'effort de la peſanteur du même corps* A *ſur*
AF. *Il reſte donc à prouver que* KG *eſt une differentielle du*
*ſecond genre par raport à* AG. *Pour le voir clairement, il n'y*
*a qu'à conſiderer que l'angle* HAG *étant infiniment petit, l'arc*
HK *qui en eſt la meſure, eſt infiniment petit par raport au*
*rayon* AH *ou* AK; *car s'il avoit un raport fini avec ce rayon,*
*l'angle ne ſeroit pas infiniment petit. On peut donc prendre le*
*petit arc* HK *pour une perpendiculaire du ſommet* H *de l'angle*
*droit* AHG *ſur ſon hypotenuſe* AG; *ce qui donne cette propor-*
*tion* AK . KH :: KH . KG. *On vient de voir que* KH *eſt une*
*quantité infiniment petite du premier genre par raport à* AK;
*par conſequent* KG *eſt une differentielle du ſecond genre par*
*raport à* AK *& à* AG *qui repréſente l'effort de la peſanteur du*
*corps* A *ſur* AE.

852. FIGURE LXVIII. *Si un corps peſant deſcend par le ſeul mouvement de ſa peſanteur ſur un plan incliné* FG, *il aura au point* G *la viteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant verticalement d'une égale hauteur, & il continueroit enſuite de ſe mouvoir ſur le même plan*

*incliné en conſervant la viteſſe acquiſe, & ſa peſanteur lui en feroit encore acquerir à chaque inſtant: Or ſuppoſé qu'il rencontre au point* G *un nouveau plan incliné* GE *tel qu'il faſſe avec le premier l'angle aigu* KGE *infiniment petit, l'excès, dont la viteſſe, avec laquelle il continueroit de deſcendre ſur le premier plan* FGK, *ſurpaſſe celle qu'il aura en continuant ſa deſcente par le ſecond* GE, *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à la viteſſe qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* FG.

*Car ſi l'on ſuppoſe que* GH *repréſente la viteſſe qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* FGH, *& de plus celle qu'il recevroit de ſa peſanteur, & qu'on tire* HE *perpendiculaire ſur le ſecond plan* GE; *il eſt évident que* GE *repréſentera la viteſſe qu'il aura en même tems ſur le ſecond plan; & que le raport de* GH *à* GE *eſt égal au raport de la viteſſe, qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* GH, *avec la viteſſe qu'il aura dans le même tems ſur le ſecond plan* GE. *Qu'on tire à preſent du centre* G *avec le rayon* GE *le petit arc* EK, *qu'on peut regarder comme une petite droite tirée perpendiculairement du ſommet* E *de l'angle droit* GEH *ſur* GH; *&* KH *ſera l'excès, dont la viteſſe du corps qui deſcendroit par* GH, *ſurpaſſe la viteſſe du même corps qui deſcend par* GE. *Mais* GK . KE :: KE . KH; *&* KE* *eſt une differentielle du premier* *851.
*genre par raport à* GK *& à* GH; *par conſequent* KH *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à* GK *& à* GH.

*Or les courbes peuvent être regardées comme des poligones d'une infinité de côtés qui font deux à deux des angles aigus infiniment petits. Ainſi un corps peſant, qui deſcend ſur une courbe, peut être regardé comme deſcendant par une infinité de plans inclinés, dont les angles aigus ſont infiniment petits. Ce qui donne le huitiéme principe.*

## HUITIÉME PRINCIPE.

3. LES viteſſes d'un corps, qui deſcend ſur une courbe par le ſeul mouvement de ſa peſanteur, priſes à chaque point de cette courbe, peuvent être exprimées par les racines de hauteurs depuis l'horizontale, qui paſſe par le commencement de la chute, juſqu'à ces points là. *Ainſi ſi l'on repreſente les hauteurs changeantes de ces points par* ($l$), *& les viteſſes par* $u$; *on aura* $u=\sqrt{l}$ *pour l'expreſſion de la viteſ-*

*ſe, qu'a le corps qui deſcend, à chaque point de la courbe.*

*Car, s'il deſcendoit par un même plan incliné, les viteſſes, qu'il auroit à chaque point, ſeroient, par le ſeptiéme principe,* $u = \sqrt{l}$. *Or en deſcendant par la courbe, il aura, à tous les points qui ſont à la même hauteur que les points correſpondans du plan incliné que feroit la tangente de la courbe au point où commence la deſcente, la même viteſſe qu'il auroit à tous ces points correſpondans du plan incliné; puiſque les differentielles, qui feroient l'excès des viteſses aux points du plan incliné ſur les viteſſes aux points correſpondans de la courbe, ſont du ſecond genre, dont un nombre infini, égal au nombre des angles des petits côtés de la courbe, ne fait qu'une differentielle du premier genre, ainſi elle ne peut avoir de raport fini avec ces viteſſes, & elle ne peut empêcher qu'elles ne ſoient égales.*

## COROLLAIRE.

854. *D'OU l'on voit que les expreſſions des viteſſes des chutes verticales d'un corps peſant, conviennent aux viteſſes des deſcentes du même corps ſur des courbes, en prenant les unes & les autres la même hauteur.*

855. FIGURE LXIV. *Il ſuit de tous ces principes, & de l'article* 839, *qu'en nommant la force centrifuge* mn (c), *&* (r) *le rayon* CM *de l'arc circulaire infiniment petit dont* mn *eſt la force centrifuge, on aura toutes ces expreſſions,* $c = \frac{uu}{2r}$, $u = 2pt$, $p = \frac{u}{2t}$, $t = \frac{2l}{u}$, $u = \frac{2l}{t}$, $l = ptt$, &c. *Ceux qui veulent s'appliquer aux Problêmes où entrent les forces centrifuges, & à ceux où entre la peſanteur, doivent ſe rendre très-familieres ces expreſſions & leurs démonſtrations.*

856. *L'on en déduit cette expreſſion de la force centrifuge où entre la peſanteur; la force centrifuge* mn $(c) = \frac{uu}{2r} =$ (*à cauſe de* $u = 2pt$) $\frac{2pptt}{r} =$ (*à cauſe de* $l = ptt$) $\frac{2lp}{r}$; *ce qui donne auſſi le raport de la force centrifuge* (c) *à la peſanteur* (p), $c . p :: 2l . r$. *Ces choſes ſuppoſées, voici l'expreſſion analytique de l'effort centrifuge* mn *par raport à notre Problême, c'eſt-à-dire par raport à tous les points de la courbe* BEFM *que l'on cherche.*

857. Nommant les coupées *AP (x)*, les ordonnées *PM (y)*, les arcs finis *BEFM (u)*, la peſanteur abſolue repreſentée par *MR (a)*; prenant la petite partie *Mm* de la courbe qui ſera *(du)*, & menant l'ordonnée infiniment proche *mp*, & tirant *MK* perpendiculaire ſur *mp*; l'on aura $MK = dx$, $Km = dy$;

$Km = dy$; le rayon de la dévelopée $MC$ ſera, en ſuppoſant $du$ conſtante,* $\frac{dydu}{ddx}$, (car on retient ici $du$ au lieu de ſa valeur *570. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui eſt dans la ſeconde formule de l'art. 570,) & il eſt évident que les lettres de la formule de la force centrifuge $mn(c) = \frac{2lp}{r}$, où entrent la peſanteur & le rayon de la dévelopée, repréſenteront, $l$ la hauteur $PM(y)$; $p$, la peſanteur marquée par $MR(a)$; $r$, le rayon de la dévelopée $CM$ $(\frac{dydu}{adx})$; & mettant ces valeurs au lieu des lettres de la formule, l'on trouvera $mn = \frac{2PM \times MR}{CM} = \frac{2ayddx}{dydu}$ pour l'expreſſion de la force centrifuge $mn$ qui convient à tous les points de la courbe que l'on cherche.

358. Voici à preſent la maniere de trouver l'expreſſion analytique de la partie de la peſanteur repréſentée par $MS$. Les deux triangles $MSR$, $MKm$, rectangles en $S$ & en $K$, ſont ſemblables; car les angles $RMS$, $mMK$, faiſant chacun un angle droit avec l'angle $CMK$, ſont égaux; ce qui donne cette proportion $Mm\,(du) . MK\,(dx) :: MR\,(a) . MS = \frac{adx}{du}$.

359. Or par les conditions du Problême, $mn = \frac{2PM \times MR}{CM} (\frac{2ayddx}{eydu})$ $+ MS\,(\frac{adx}{du}) = MR\,(a)$; ainſi l'équation, qui doit donner la réſolution du Problême, eſt $\frac{2ayddx}{dydu} + \frac{adx}{du} = a$.

## RESOLUTION.

360. L'EQUATION précedente donne $2yddx + dydx = dudy$. Multipliant chaque terme par $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, il vient $y^{\frac{1}{2}}ddx$ $+ \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dydx = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dudy$. Prenant les integrales de chaque membre, en ſuppoſant $du$ conſtante, on trouve par la ſeconde propoſition fondamentale*, $y^{\frac{1}{2}}dx = y^{\frac{1}{2}}du$. (Car *714. en regardant $y^{\frac{1}{2}} \times dx$ comme le produit des deux changeantes $y^{\frac{1}{2}}$ & $dx$, ſa differentielle en eſt le premier membre $y^{\frac{1}{2}}ddx$ $+ \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy \times dx$; &, à cauſe de $du$ conſtante, la differentielle de $y^{\frac{1}{2}}du$ eſt le ſecond membre $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy \times du$.). Mais cette équation, étant diviſée par $y^{\frac{1}{2}}$ donne $dx = du$; ce qui ne peut pas être, puiſque dans le triangle rectangle $MKm$, $Mm\,(du)$ qui en eſt l'hypotenuſe, doit ſurpaſſer $MK\,(dx)$

qui eſt l'un des côtés. Cela fait voir que l'integrale, qu'on vient de trouver $y^{\frac{1}{2}} dx = y^{\frac{1}{2}} du$, n'eſt pas complete ; ainſi pour la rendre complete, il faut retrancher une grandeur conſtante du ſecond membre pour le rendre égal au premier. On prendra pour cette grandeur conſtante $a^{\frac{1}{2}} du$, & l'équation ſera $y^{\frac{1}{2}} dx = y^{\frac{1}{2}} du - a^{\frac{1}{2}} du$. Car on en déduit $dx = du - a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} du$ ; & prenant les differences, en ſuppoſant $du$ conſtante, on trouve $ddx = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} du\,dy = \frac{du\,dy\sqrt{a}}{2y\sqrt{y}}$. Mettant cette valeur de $ddx$ dans $MC = \frac{du\,dy}{ddx}$, l'on a $MC = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$ ; & ſubſtituant ces valeurs de $dx$, de $ddx$, & de $MC$ dans l'équation $\frac{2PM \times MR}{CM} + MS = MR$, qui eſt $\frac{2ay\,ddx}{du\,dy} + \frac{adx}{du} = a$, elle devient $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{y}} - \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{y}} + a = a$ ; c'eſt-à-dire, le premier membre devient preciſément égal au ſecond. Ce qui fait voir que l'équation $y^{\frac{1}{2}} dx = y^{\frac{1}{2}} du - a^{\frac{1}{2}} du$, eſt celle qui exprime la proprieté de la courbe que l'on cherche. Or en mettant au lieu de $du$ ſa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, elle devient $y^{\frac{1}{2}} dx = \overline{y^{\frac{1}{2}} - a} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; en élevant chaque membre au quarré, l'on a, après avoir abregé & tranſpoſé, $dx^2 \times \overline{2\sqrt{ay} - a} = dy^2 \times \overline{y + a - 2\sqrt{ay}}$ ; d'où l'on tire $dx\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = dy\sqrt{y + a - 2\sqrt{ay}}$ : mais $\overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$ eſt la racine quarrée de $y + a - 2\sqrt{ay}$ ; ainſi $dx\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = dy \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$ ; d'où l'on déduit $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$. C'eſt l'équation differentielle de la courbe que l'on cherche, qui ne contient pas d'autres changeantes que celles des coupées & des ordonnées.

2661. Pour trouver les integrales, on ſuppoſera * $z = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$ ; ce qui donnera $z^2 = 2\sqrt{ay} - a$ ; $\sqrt{ay} = \frac{z^2 + a}{2}$ ; $ay = \frac{\overline{z^2 + a}^2}{4}$ ; $y = \frac{\overline{z^2 + a}^2}{4a}$ ; $dy = \frac{z^2 + a}{a} \times z\,dz$, & $\sqrt{y} = \frac{z^2 + a}{2\sqrt{a}}$. On ſubſtituera ces valeurs de $y$ & de $dy$ dans l'équation, & elle deviendra d'abord $dx = \frac{\frac{\overline{z^2 + a}^2}{2a\sqrt{a}} \times z\,dz - \sqrt{a} \times \frac{\overline{z^2 + a}}{a} \times z\,dz}{z}$, qui ſe réduira, après avoir diviſé le numerateur & le dénominateur par $z$,

& fait le calcul, à $dx = \begin{array}{l} \frac{z^4dz}{2a\sqrt{a}} + \frac{2az^2dz}{2a\sqrt{a}} + \frac{a^2dz}{2a\sqrt{a}} \\ - \frac{az^2dz}{a\sqrt{a}} - \frac{a^2dz}{a\sqrt{a}} \end{array}$; d'où l'on déduit $2a\sqrt{a} \times dx = z^4dz - a^2dz$; prenant les integrales, on trouve l'équation $2ax\sqrt{a} = \frac{z^5}{5} - a^2z$, dans laquelle ſubſtituant la valeur de $z$ en $y$, il vient $\frac{\overline{4y - 4a\sqrt{ay} + a^2}}{5} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a} - aa\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = 2ax\sqrt{a}$, qui ſe réduit en multipliant par 5 & diviſant par $2a$, à $2y - 2\sqrt{ay} - 2a \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a} = 5x\sqrt{a}$. Multipliant chaque membre par $\sqrt{a}$, on aura enfin $2y - 2\sqrt{ay} - 2a \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$, *pour l'équation de la courbe* BEFM. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cette équation, qui n'a plus de differences, & qui exprime le raport de tous les points de la courbe par des coordonnées qui ſont des lignes droites, fait voir que la courbe eſt geometrique; il n'y a qu'à ôter les incommenſurables, & l'on verra de quel genre elle eſt: on peut la décrire par la méthode generale de l'article 424.

## REMARQUES.

DANS les Problêmes, où l'on cherche la nature des courbes, quand on a trouvé les équations qui les expriment, on peut enſuite découvrir par le moyen de ces équations les proprietés de ces courbes. On va découvrir par l'équation de la courbe de ce ſixiéme Exemple quelques-unes de ſes proprietés, pour apprendre aux Lecteurs qui commencent la maniere de le faire dans les autres Exemples qu'ils pourront rencontrer.

1°. Si l'on ſuppoſe dans l'équation de la courbe $x = 0$, l'autre membre deviendra auſſi égal à zero; ce ſecond membre eſt composé des deux équations $\sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 0$, $2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$, multipliées l'une par l'autre. Or la premiere, en ôtant les incommenſurables, donne $y = \frac{1}{4}a$; ce qui fait connoître que l'ordonnée *AB* ($y$) a une valeur à l'origine des $x$, laquelle eſt égale à $\frac{1}{4}a$; ôtant les incommenſurables de la ſeconde, on trouve l'équation $y^2 - 3ay + a^2 = 0$, dont la plus grande racine eſt $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, qui fait voir que l'ordonnée *ABF*, à l'origine *A*, rencontre encore la courbe en un point $F$, de maniere que $AF = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$; & ne ſe trouvant aucune valeur de $y$, à l'origine $A$ des $x$ qui ſoit égale à zero; cela fait voir que la courbe ne rencontre pas l'axe $AP$.

2°. Si l'on veut trouver la moindre $y$, on ſéparera, dans l'équation differentielle de la courbe, $dy$ des autres quantités qu'on mettra dans le ſecond membre, & cette équation $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ deviendra $dy = dx \times \frac{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$. On
*556. ſuppoſera $dy = 0$ *, & l'on trouvera, en faiſant le calcul, $y = \frac{1}{4}a$. On mettra cette valeur de $y$ dans l'équation de la courbe $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$; & comme le multiplicateur $\sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$ devient zero par cette ſubſtitution, le premier membre eſt égal à zero, & par conſequent le ſecond; ce qui donne $x = 0$ : d'où l'on voit que la moindre ordonnée $AB(y)$ eſt $= \frac{1}{4}a$ à l'origine des $x$, & que la courbe ne commence qu'au point $B$; ainſi le corps $M$, en commençant à décrire la courbe $BEFM$ au point $B$, doit déja avoir la viteſſe acquiſe par la chûte $AB = \frac{1}{4}a$.

3°. Si l'on ſuppoſe $dx = 0$ dans l'équation differentielle de la courbe $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ (ce qui arrive au point de la courbe, où $y$ eſt une tangente de la courbe, & où ſe trouve
*556. la plus grande $x$*) on aura $\sqrt{y} - \sqrt{a} = 0$, ce qui donne $y = a$. D'où l'on voit, qu'en prenant à l'origine $A$, $AD = a$, & menant par $D$ la droite $ED(x)$ parallele à l'axe $AP$, cette droite $ED$ ſera la plus grande des $x$ pour tous les points de l'arc $BEF$. En mettant $a$ au lieu de $y$ dans l'équation de la courbe $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$, on trouve $-2aa = 5ax$; d'où l'on tire $x = -\frac{2}{5}a$. Cela fait voir que $DE(x)$ au point $D$, où $AD(y) = a$, eſt égale à $-\frac{2}{5}a$, & le ſigne négatif montre que $DE(x) = -\frac{2}{5}a$, doit être priſe vers la gauche de $AD$, & qu'ainſi le point $E$ eſt celui de tous les points de l'arc $BEF$ qui eſt le plus éloigné de $ADF(y)$.

4°. L'équation differentielle de la courbe donne $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{ay} - a}}$; multipliant l'un & l'autre membre par $y$ l'on aura la
*550. ſoutangente de chaque point de la courbe* $\frac{ydx}{dy} = \frac{y\sqrt{y} - y\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$.

5°. Si l'on met, dans $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, la valeur de $AB$ $(y)$ qui eſt $\frac{1}{4}a$, le dénominateur deviendra $\sqrt{a-a} = 0$. Cela fait voir qu'au point $B$, où commence la courbe, $dx$ eſt infinie par raport à $dy$; & par conſequent que * la tangente au point $B$ devient parallele à la ſoutangente, c'eſt-à-dire aux $x$ ou à l'axe $AP$: ainſi la tangente au point $B$ eſt perpendiculaire à $AB$, & la partie infiniment petite de la courbe au point $B$ étant une partie de la tangente au point $B$, cette petite partie, & par conſequent la courbe, rencontre perpendiculairement $AB$ au point $B$. * 554.

6°. Si l'on ſuppoſe $y$ infinie dans l'équation de la courbe $\frac{\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}}{5a} = x$, elle deviendra $\frac{\overline{2y - 2\sqrt{ay}} \times \sqrt{2a\sqrt{ay}}}{5a} = x$, les grandeurs $-2a$ & $-aa$ étant zero par raport aux autres où ſe trouve $y$; & par la même raiſon le numerateur du premier membre eſt infini par raport à ſon dénominateur; ainſi $x$ eſt auſſi infinie. Cela fait voir que la courbe ne va pas en s'approchant de ſon axe, mais qu'elle s'en écarte à l'infini.

7°. On a trouvé dans la réſolution du Problême, le rayon de la dévelopée $MC = \frac{dudy}{ddx} = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$ : ce qui donne $\sqrt{AD}$ $(\sqrt{a})$ . $\sqrt{PM}$ $(\sqrt{y})$ :: $2PM$ $(2y)$. $MC$ $(\frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}})$. Subſtituant dans cette valeur de $MC$ celle de $AB$ $(y)$ au point $A$ qui eſt $\frac{1}{4}a$, l'on trouve $MC = \frac{1}{4}a$; ce qui apprend que le rayon de la develope $MC$ devient $GB = \frac{1}{4}a$ au commencement de la courbe où $y = AB = \frac{1}{4}a$, & que le fil $CM$, qui envelope la developée $CHG$, & dont l'extrémité décrit, par le developement, la courbe $BEFM$, doit ſurpaſſer la longueur de cette developée de la droite $GB = \frac{1}{4}a$.

Si l'on ſubſtitue, dans $MC = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, la valeur $a$ de $AD$ $(y)$ l'on trouvera $MC = 2a$; ce qui fait connoître que le rayon de la developée $HDE$, qui paſſe par l'extrémité $D$ de $AD$ $(y)$ $= \frac{1}{4}a$, eſt égal à $2a$. Ce rayon de la developée $HDE$ coupe perpendiculairement $AD$; car l'on a vû (*nombre* 3$^e$) que $dx$ eſt zero au point $E$ par raport à $dy$; par conſequent* la tangente de la courbe au point $E$ eſt parallele aux $y$, c'eſt-à-dire à $AD$. Mais le rayon de la dévelopée $HDE$ eſt perpendiculaire à la tangente au point $E$; $HDE$ eſt donc auſſi perpendiculaire à $AD$. * 554.

8°. Si l'on veut chercher la rectification de tel arc qu'on
* 582. voudra de la courbe *BEFM*, on ſe ſervira de la formule* $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui donnera $du^2 = dx^2 + dy^2$; on prendra la valeur de $dx^2$ dans l'équation differentielle de la courbe *BEFM*, $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, & l'on aura $dx^2 = dy^2 \times \frac{y + a - 2\sqrt{ay}}{2\sqrt{ay} - a}$: on ſubſtituera cette valeur de $dx^2$ dans $du^2 = dx^2 + dy^2$, & l'on trouvera $du^2 = \frac{y\,dy^2}{2\sqrt{ay} - a}$; d'où l'on tirera $du = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$.
Il faut à preſent trouver l'integrale du ſecond membre. On
*661. ſuppoſera pour cela * $z = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; ce qui donnera $z^2 = 2\sqrt{ay} - a$, $\frac{z^2 + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$, $\frac{\overline{z^2 + a}^2}{4a} = y$, $dy = \frac{z^2 + a}{a} \times z\,dz$. On ſubſtituera les valeurs de $y$ & de $dy$ dans $du = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, & l'on trouvera, après avoir fait le calcul, $du = \frac{z^4dz + 2az^2dz + a^2dz}{2a\sqrt{a}}$. On prendra les integrales, & l'on aura $u = \frac{z^5}{5 \times 2a\sqrt{a}} + \frac{az^3}{3a\sqrt{a}} + \frac{a^2z}{2a\sqrt{a}}$. On mettra dans cette équation les valeurs de $z^5$, $z^3$, $z$, en $y$; & en faiſant le calcul, on trouvera $u = \overline{6y + 4\sqrt{ay} + 4a} \times \frac{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}{15\sqrt{a}}$; & multipliant le numerateur & le dénominateur du ſecond membre par $\sqrt{a}$, on aura enfin l'arc $BEFM\,(u) = \frac{6y + 4\sqrt{ay} + 4a}{15a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$. Et comme $y$ eſt égale à $(a)$ au point $E$, ſi l'on met $(a)$ à la place de $y$, on trouvera l'arc $BE = \frac{14}{15}a$.

9°. Si l'on veut ſçavoir la quadrature de l'eſpace *BEFMCHGB* compris entre un arc quelconque *BEFM* de la courbe *BEFM*, la dévelopée *BGHC* & le rayon *CM* de la dévelopée, lequel rayon termine l'arc *BEFM* de la courbe, & la partie *BGHC* de la dévelopée qui a ſervi à former l'arc *BEFM*; on remarquera que cet eſpace peut être conçu comme compoſé de petits triangles tels que *MCm*, formés chacun par deux rayons de la dévelopée infiniment proches l'un de l'autre, & dont la baſe eſt un arc infiniment petit, comme *Mm*, de la courbe. Ainſi tout ce qu'il y a à faire eſt, 1°. de trouver l'expreſſion qui convient à chacun de ces petits triangles, & ce ſera l'élement de l'aire que l'on cherche. 2°. Il faut enſuite trouver l'integrale de cet élement, & elle exprimera la quadrature que l'on cherche.

Or le petit triangle $MCm = CM \times \frac{1}{2} Mm$; & comme on a trouvé, dans la réſolution, $CM = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, & que $Mm = du$, l'on aura $CM \times \frac{1}{2} Mm = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{2} du = du \times \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$. Mais l'équation * $dx\sqrt{y} = du\sqrt{y} - du\sqrt{a}$, donne $du = \frac{dx\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{a}}$; *865. en mettant cette valeur dans $du \times \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, il vient $\frac{y^2dx}{\sqrt{ay}-a}$, où ſubſtituant au lieu de $dx$ ſa valeur priſe de $dx = \frac{dy\sqrt{y}-dy\sqrt{a}}{\sqrt{\overline{2\sqrt{ay}-a}}}$; on trouve, après avoir fait le calcul, $\frac{y^2dy}{\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa}} = CM \times \frac{1}{2} Mm$. C'eſt l'élement de l'aire que l'on cherche.

Pour avoir l'integrale de cet élement, on ſuppoſera * $z$ *661. $= \sqrt{2a\sqrt{ay}-aa}$; ce qui donnera $\frac{z^2+a^2}{2a} = \sqrt{ay}$, $\frac{\overline{z^2+a^2}^2}{4a^3} = y$, $dy = \frac{\overline{z^2+a^2} \times zdz}{a^3}$. On ſubſtituera les valeurs de $y$ & de $dy$ en $z$ dans l'élement de l'aire, & après avoir fait le calcul, on trouvera $\frac{y^2dy}{\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa}} = \frac{\overline{z^2+a^2}^5}{16a^9} \times dz = \frac{z^{10}dz + 5a^2z^8dz + 10a^4z^6dz + 10a^6z^4dz + 5a^8z^2dz + a^{10}dz}{16a^9}$. On prendra les integrales, * & l'on aura $z \times \overline{\frac{z^{10}}{11\times16a^9} + \frac{5z^8}{9\times16a^7} + \frac{10z^6}{7\times16a^5} + \frac{10z^4}{5\times16a^3} + \frac{5z^2}{3\times16a} + \frac{a}{16}}$. *654. On ſubſtituera les valeurs de $z$ en $y$, ſuivant les ſuppoſitions qu'on a faites, & l'on trouvera $\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa} \times \overline{\frac{\overline{2a\sqrt{ay}-aa}^5}{11\times16a^9} + \frac{5\times\overline{2a\sqrt{ay}-aa}^4}{9\times16a^7} + \frac{10\times\overline{2a\sqrt{ay}-aa}^3}{7\times16a^5} + \frac{10\times\overline{2a\sqrt{ay}-aa}^2}{5\times16a^3} + \frac{5\times\overline{2a\sqrt{ay}-aa}}{3\times16a} + \frac{a}{16}}$; c'eſt l'integrale qui exprime l'aire que l'on cherche. Si l'on veut ſe donner la peine de former toutes les puiſſances de $2a\sqrt{ay}-aa$ qui ſont marquées dans l'integrale, les ordonnant de façon que toutes les grandeurs correſpondantes qui appartiennent à un même terme ſoient les unes ſous les autres, & réduiſant à un même dénominateur toutes les grandeurs de chaque terme, on trouvera $\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa} \times \frac{2}{11}\sqrt{\frac{y^5}{a^3}} + \frac{10}{11\times9} \times \frac{yy}{a} + \frac{5\times8}{11\times9\times7} \times \sqrt{\frac{y^3}{a}} + \frac{5\times4\times6}{11\times9\times7\times5} \times y + \frac{10\times6\times4}{11\times9\times7\times5\times3} \times \overline{a+\sqrt{ay}}$ pour l'expreſſion de l'aire *BEFMCHGB, qu'il falloit trouver.*

## *Additions qui regardent la pratique des horloges.*

### PREMIERE ADDITION.

*Ajoutez à la fin de l'article 511, page 150, ce qui ſuit :*

LE temps de la deſcente du centre de peſanteur ou du centre d'oſcillation $A$ du pendule ſimple ou compoſé $SA$ (fig. 41.) qui eſt entre les cycloïdes $SK$, $Sk$, par chacun des arcs de cycloïde $GA$, $PA$, &c. & par la demi-cycloïde $DA$, eſt toujours le même, par l'art. 499. Nommant $D$ le diametre $AE$ du cercle generateur de la cycloïde $DA$; la viteſſe acquiſe par la chute $DA$, eſt, comme on l'a vu dans le même article 499, $\surd AE (\surd D)$ : & le temps ($T$) de cette deſcente par la demi-cycloïde $DA$, eſt $\frac{2DA}{\surd AE}$. Ainſi, par l'article 510, $DA$ étant égale à $2AE$, l'expreſſion du temps de chaque deſcente du centre de peſanteur ou d'oſcillation par tel arc qu'on voudra $GA$, $PA$, $DA$ de la demi-cycloïde $DA$, ſera $T = \frac{2DA}{\surd AE} = \frac{4AE}{\surd AE} = \frac{4D}{\surd D} = 4\surd D$.

Si on prend tel autre pendule qu'on voudra entre deux autres cycloïdes qui lui conviennent ; en ſe ſervant des mêmes lettres, mais italiques pour marquer la difference, on aura, pour l'expreſſion du temps de chacune de ſes vibrations, $t = 4\surd d$.

Comparant le temps $T$ de chaque vibration du premier pendule avec le temps $t$ de chaque vibration du ſecond, on aura $T . t :: 4\surd D . 4\surd d :: \surd D . \surd d :: \surd 2D . \surd 2d$ : c'eſt-à-dire, le temps $T$ de la premiere eſt au temps $t$ de la ſeconde, comme la racine de la longueur du premier pendule $\surd 2D$, eſt à la racine de la longueur du ſecond pendule $\surd 2d$; la longueur du premier étant $2D$, & celle du ſecond étant $2d$, par l'article 511.

Mais en ſuppoſant que le premier pendule eſt le plus long, & que chacune de ſes vibrations a plus de durée que chacune des vibrations du ſecond, & que le raport de $\frac{T}{t}$ eſt marqué par $\frac{n}{1}$; il eſt évident, en nommant $a$ une vibration du ſecond pendule, que le nombre des vibrations du ſecond pendule, faites dans le temps $T = nt$ d'une vibration du premier pendule, eſt $na$; & qu'ainſi le temps $T$ d'une vibration du premier

premier pendule, eſt au tems $t$ d'une vibration du ſecond, reciproquement comme le nombre des vibrations du ſecond pendule faites dans le tems $T = nt$, ou dans tel tems qu'on voudra, eſt au nombre des vibrations du premier pendule faites dans le même tems; $T = nt \,.\, t :: na \,.\, 1a$.

Par conſéquent nommant $N$ le nombre des vibrations du premier pendule pendant tel tems qu'on voudra, comme pendant une heure, & $n$ celui des vibrations du ſecond pendant le même tems, on aura cette proportion $T \,.\, t :: n \,.\, N :: \sqrt{2D} \,.\, \sqrt{2d}$; prenant les quarrés, on aura $nn \,.\, NN :: 2D \,.\, 2d$, qui donne $2d = \frac{NN \times 2D}{nn}$, ou bien, en nommant $2D\,(L)$ & $2d\,(l)$, $l = \frac{NN \times L}{nn}$.

C'eſt la formule pour trouver par le moyen de la longueur connue du pendule à ſecondes, qui eſt de trois pieds huit lignes & demie, quelle doit être la longueur du pendule qui fera pendant une heure tel nombre de vibrations qu'on voudra. Par exemple ſi l'on veut ſçavoir la longueur du pendule dont les vibrations ſeroient d'une demie ſeconde, on ſuppoſera cette longueur inconnue égale à $l$: on mettra dans la formule, à la place de $L$, le nombre $3^{\text{pi.}}\ 8^{\text{lig.}}\ \frac{1}{2}$; à la place de $NN$, le quarré du nombre des ſecondes que contient une heure; & au lieu de $nn$, le quarré du nombre des demi-ſecondes que contient une heure; & l'on aura la longueur $(l)$ que l'on cherchoit.

Cette même formule peut s'étendre aux pendules ſimples, comme $ST$, $SL$ (fig. 13 & 14) qui ne ſont point entre des cycloïdes, pourvû qu'on leur faſſe décrire des arcs ſemblables $TC$, $LP$. Car nommant $(A)$ l'arc que décrira le pendule $SL$, & $(a)$ celui que décrira le pendule $ST$; nommant $(S)$ le ſinus verſe du premier, & $(s)$ celui du ſecond; & enfin nommant $(L)$ la longueur du pendule $SL$, & $(l)$ la longueur $ST$ du ſecond, l'expreſſion du tems $T$ de chaque vibration du premier, ſera $T = \frac{2A}{\sqrt{S}}$; l'expreſſion du tems de chaque vibration du ſecond ſera $t = \frac{2a}{\sqrt{s}}$.

Mais, à cauſe des arcs ſemblables, $2A \,.\, 2a :: S \,.\, s :: L \,.\, l$. Ainſi l'on peut mettre, quand on compare enſemble ces deux expreſſions, $L$ à la place de $A$ & de $S$; & $l$ à la place de $a$ & de $s$, & l'on aura $T \,.\, t :: \frac{2A}{\sqrt{S}} \,.\, \frac{2a}{\sqrt{s}} :: \frac{2L}{\sqrt{L}} \,.\, \frac{2l}{\sqrt{l}} :: 2\sqrt{L} \,.\, 2\sqrt{l} :: \sqrt{L} \,.\, \sqrt{l}$. Nommant $(N)$ le nombre des vibrations du pendule $SL$, & ($n$) le nombre des vibrations du pendule $ST$ (qu'on ſuppoſe le plus court) faites dans le même tems; on aura, comme dans les pendules entre les cycloïdes, $T . t :: n . N :: \sqrt{L} . \sqrt{l}$: & prenant les quarrés, on aura $nn . NN :: L . l$; ce qui donne la formule $l = \frac{NN \times L}{nn}$.

---

## SECONDE ADDITION.

*Ajoutez à la page* 180, *avant les Remarques, ce qui ſuit:*

ON peut trouver, par le moyen de la même formule, quel eſt le point du pendule compoſé de deux poids $SL$ (fig. 14.) où il faut mettre la lentille $A$, afin que les vibrations du pendule $SL$ ſoient *les plus promptes* qu'il ſoit poſſible. Car étant démontré dans l'article 344, que la diſtance du centre d'oſcillation de ce pendule compoſé eſt $SC\,(z) = \frac{aee + ffl}{ae + fl}$, ou bien, en nommant $x$ la diſtance $SA$ pour mieux repréſenter qu'elle eſt changeante, $SC\,(z) = \frac{axx + ffl}{ax + fl}$; la queſtion ſe réduit à trouver la *moindre* $SC\,(z)$. Pour la découvrir, 1°. il faut prendre les différences, & l'on aura $\frac{dz}{dx} = \frac{aaxx + 2aflx - affl}{\overline{ax + fl}}$. 2°. Il faut ſuppoſer $dz = 0$; ce qui donnera $xx + \frac{2fl}{a} x - \frac{ffl}{a} = 0$. D'où l'on tirera $x = -\frac{fl}{a} + \frac{f}{a}\sqrt{ll + al}$. 3°. Il faut ſubſtituer cette valeur de $x$ dans l'équation, & l'on trouvera, après avoir fait le calcul, $z = -\frac{2fl}{a} + \frac{2f}{a}\sqrt{ll + al}$.

Ce qui fait voir que, quand la diſtance du centre d'oſcillation $SC\,(z)$ eſt la *moindre* qu'elle puiſſe être, (ce qui rend les vibrations du pendule compoſé *les plus promptes* qu'il ſoit poſſible,) alors la diſtance $SA\,(x)$ de la lentille $A$ eſt égale à $-\frac{fl}{a} + \frac{f}{a}\sqrt{ll + al}$, qui eſt la moitié de la *moindre* diſtance du centre d'oſcillation.

D'où l'on voit que, ſoit qu'on hauſſe la lentille $A$ au-deſſus du point du pendule qu'on vient de déterminer, ſoit qu'on l'abaiſſe au-deſſous, on retardera l'horloge: Et que quand la lentille eſt au-deſſus de ce point, ſi on l'abaiſſe, & quand elle eſt au-deſſous, ſi on la hauſſe, on fera avancer l'horloge.

*FIN.*

## TROISIE'ME ADDITION.

EN cherchant dans la page 142 quelle eſt la courbe *DGA* (fig. 41.) que doit décrire le centre d'oſcillation d'un pendule, afin que les deſcentes par chacun de ſes arcs *DA*, *PA*, *GA* ſe faſſent en des tems égaux; on a ſuppoſé dans la réſolution ( en nommant $s$ chacun de ces arcs, & $x$ leurs hauteurs correſpondantes *AE*, *AB*, *AM*) que $\frac{s}{\sqrt{x}}$, ou ſon multiple $\frac{2s}{\sqrt{x}}$, étoit un raport conſtant égal au tems de chaque deſcente qui eſt ſuppoſé le même. Voici la démonſtration de cette ſuppoſition.

Qu'on prenne deux arcs quelconques *DA*, *GA* de la courbe *DGA*, qu'on ſuppoſe être celle que l'on cherche; qu'on conçoive chacun de ces arcs partagé dans le même nombre de parties infiniment petites, en ſorte que les parties du premier ſoient toutes égales entr'elles, & que les petites parties du ſecond ſoient auſſi égales entr'elles; & qu'on nomme *parties correſpondantes* la premiére partie de l'un & la premiére partie de l'autre, la ſeconde partie de l'un & la ſeconde partie de l'autre, & ainſi de ſuite; il eſt évident que le raport du premier arc au ſecond eſt égal au raport de deux parties correſpondantes. Qu'on ſuppoſe que deux parties correſpondantes ſont parcourues en deux inſtans égaux; il eſt évident qu'en conſidérant dans ces inſtans indéfiniment petits les mouvemens comme uniformes, le raport de deux petites parties correſpondantes eſt égal au raport des viteſſes avec leſquelles ces parties ſont parcourues. Ainſi le raport de deux parties correſpondantes étant le même pour toutes, le raport des viteſſes avec leſquelles elles ſont parcourues ( qui lui eſt égal ) eſt auſſi le même. Le raport des arcs *DA*, *GA* eſt donc auſſi le même que celui des viteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus. Il ſuit de là que le raport de l'arc *DA* à ſa viteſſe eſt égal au raport de l'arc *GA* à ſa viteſſe. D'où l'on voit que dans la courbe que l'on cherche, le raport de chacun de ſes arcs à la viteſſe avec laquelle il eſt parcouru, qui eſt $\frac{s}{\sqrt{x}}$, eſt un raport conſtant égal au tems employé à le parcourir, qui eſt auſſi ſuppoſé conſtant. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ainſi en ſuppoſant $\frac{s}{\sqrt{x}}$ égale à une conſtante homogéne $2\sqrt{a}$, on aura $s = 2\sqrt{ax}$ pour l'équation de la courbe que l'on cherche, qui eſt la cycloïde.

On remarquera que ce n'eſt que dans la comparaiſon des tems des deſcentes par différentes cycloïdes, que l'on peut exprimer le tems de la deſcente par chacun des arcs de la cycloïde $DGA$ ( fig. 41. ) par $\frac{DA}{\sqrt{AE}}$, ou par ſon multiple $\frac{2DA}{\sqrt{AE}}$; & que ce n'eſt qu'en ce ſens qu'on l'a ſuppoſé dans la premiére addition.

Mais dans la comparaiſon des tems des deſcentes par deux arcs ſemblables de cercle que l'on a faite à la fin de la premiére addition, il faut conſidérer ces arcs comme des polygones ſemblables, & les raporter à deux plans inclinés compoſés chacun de pluſieurs petits plans inclinés qui font deux à deux des angles égaux indéfiniment petits, & dont les hauteurs ont le même raport que les longueurs de ces plans inclinés. Ainſi nommant leurs longueurs $A$ & $a$, & leurs hauteurs correſpondantes $S$ & $s$, & les tems correſpondans $T$ & $t$; l'on aura $T . t :: \frac{2A}{\sqrt{S}} . \frac{2a}{\sqrt{s}}$.

On peut encore remarquer qu'en nommant $s$ chaque corde $AH$, $AF$ (fig. 41.) du cercle $AHE$; $x$, chaque ſinus verſe correſpondant $AM$, $AB$; & $4a$ le diamétre $AE$; l'on trouve que chaque corde $AH$ $(s) = \sqrt{4ax}$, qui eſt la même équation. Cela vient de ce que le tems de la deſcente par chaque corde $AH$ $(s)$ qui peut s'exprimer par $\frac{s}{\sqrt{x}}$, eſt auſſi conſtant, ou le même : ainſi en ſuppoſant ce raport conſtant, on trouve l'équation du cercle par raport à ſes cordes.

La même équation $s = \sqrt{4ax}$ convient aux ordonnées $BC$, $bc$, (fig. 19.) de la parabole $ACc$, en nommant $s$ chaque ordonnée $BC$; $x$, chaque coupée $AB$; & $4a$, le paramétre $AP$. Cela vient de ce que le raport $\frac{s}{\sqrt{x}}$ de chaque ordonnée de la parabole à la racine de ſa coupée eſt conſtant. Ainſi en cherchant une courbe qui ſoit telle, qu'un corps peſant deſcendant de la hauteur de ſes coupées, il décrive dans un tems égal par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe de cette hauteur, qui ſera $\sqrt{x}$, chaque ordonnée correſpondante $s$ de cette courbe; l'on trouvera que l'équation ſera celle de la parabole, l'expreſſion du tems par chaque ordonnée $s$, qui eſt $\frac{2s}{\sqrt{x}}$ ou $\frac{s}{\sqrt{x}}$, étant un raport conſtant.

D'où l'on tire aiſément ( les ordonnées ayant le même raport que les viteſſes ) que le mobile décrira dans un tems égal par un mouvement uniforme, avec la viteſſe acquiſe par la hauteur de chaque coupée $x$, chaque circonférence $c$ que formeroit l'extrêmité de chaque ordonnée correſpondante $s$ de la parabole par ſa révolution autour de l'axe. Car $\frac{c}{r}$, qui eſt le raport de la circonférence au rayon, ſera l'expreſſion du tems.

REMARQUES

# REMARQUES
## DE MONSIEUR VARIGNON
## SUR L'ANALYSE DEMONTRÉE
## DU R. P. REYNEAU.

VOICI, mon Reverend Pere, le Manuſcrit que vous m'avez mis entre les mains : je n'ai pû que le parcourir & par repriſes, en ayant été inceſſamment diſtrait non-ſeulement par mes devoirs de Claſſe & d'Academie ; mais encore par des choſes à examiner tant par ſon ordre que par celui de Monſeigneur le Garde des Sceaux, outre des corrections d'épreuves de choſes qui me regardent dans les Mémoires de l'Academie : Cependant quelque rapidement que j'aye parcouru ce Manuſcrit, je n'ai pas laiſſé d'y voir beaucoup d'ordre & de netteté, avec des Obſervations curieuſes ſur la nature des racines des équations cubiques dont le ſecond terme eſt évanoui. Quant aux valeurs de ces racines, la plus grande partie de ce Manuſcrit eſt employée à faire voir que le quotient du dernier terme de chacune de ces équations diviſé ſans reſte par la difference de la grandeur du troiſiéme terme à un quarré parfait qui auroit ce quotient pour racine, en eſt une de l'équation propoſée : cela eſt vrai, & l'équation $x^3 x \mp px \mp q = 0$, generale y combinant de toutes les manieres chacun des ſignes du troiſiéme avec chacun de ceux du dernier, le fait voir tout d'un coup en donnant tout d'un coup $x = \frac{\pm q}{xx \mp \overset{o}{p}}$. Mais pour avoir ce quarré parfait $xx$, il faudroit en avoir la racine $x$, &c. c'eſt ce qu'on cherche : auſſi l'Auteur abandonne-t-il enfin cette méthode, & a recours aux formules ordinaires des racines de ces équations, deſquelles formules on pouvoit abreger le calcul de la moitié, ainſi que je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Academie Tome I. de 1699. p. 142. &c. où j'ai trouvé ces racines cubiques ſur la même méthode que le quarré.

# LIVRE V.

## SECTION II.

### REMARQUES

*Sur les équations cubiques.* Voyez *les Mémoires de l'Academie de* 1699. *pag.* 142. *Tome I. de ces Memoires.* Voyez auſſi *le Tome II. Liv. IX. des Elemens de Mathematique du* P. PRESTET. Voyez auſſi *l'Analyſe demontrée du* P. REYNEAU, *Tome I. pag.* 198. *ſect.* 2. Voy. auſſi *l'Arithmetique univerſelle de M.* NEWTON, *pag.* 272.

### DE LA NATURE DES RACINES DES EQUATIONS CUBIQUES DONT LE SECOND TERME EST EVANOUI.

I. DANS $x^3 \times + px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme $px$ eſt poſitif, il y a une racine réelle avec deux imaginaires. Car ſi elles étoient toutes trois réelles, l'évanouïſſement du ſecond terme de cette équation, marquant qu'une d'elles ſeroit poſitive égale à la ſomme des autres négatives, ou une négative égale à la ſomme des deux autres poſitives ; la ſomme des trois produits de ces trois racines multipliées l'une par l'autre deux à deux, ſeroit négative, & conſéquemment auſſi $p$ qui exprime cette ſomme de produits.

II. On jugera de même des racines des autres formules de ces ſortes d'équations : Par exemple dans $x^3 \times - px \mp q = 0$, qui a $p$ négatif, ſi $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$, cette équation aura trois racines réelles dont les deux moindres ſeront égales entre elles, & leur ſomme égale à la plus grande ; car ſi l'on prend $\pm r$ pour la plus grande de ces trois racines, & conſéquemment $\mp \frac{1}{2} r$ pour chacune des deux moindres, la ſomme $p$ des trois produits de ces trois racines multipliées l'une par l'autre deux à deux, ſera $- p = \frac{1}{4} rr - \frac{1}{2} rr - \frac{1}{2} rr = \frac{1}{4} rr - rr = - \frac{3}{4} rr$, ou $p = \frac{3}{4} rr$ ; ce qui donne $\frac{1}{3} p = \frac{1}{4} rr$, & $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{64} r^6$. D'un autre côté le produit $q$ de ces trois mêmes racines ſera $\mp q = \frac{1}{2} r \times \frac{1}{2} r \times r = \frac{1}{4} r^3$, & $\pm \frac{1}{2} q = \frac{1}{8} r^3$ ; ce qui donne $\frac{1}{4} qq = \frac{1}{64} r^6$. Donc $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

III. Si, le troiſiéme, étant encore négatif, l'équation a $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, elle a une racine réelle avec deux imaginaires. Car ſi elles étoient toutes trois réelles dont les deux moindres fuſſent égales entr'elles, cette équation auroit (Art. 2.) $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q$; & ſi les deux moindres racines étoient inégales, la même équation auroit $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$; parceque cette inégalité feroit croître $q$, & décroître $p$. Donc $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, lorſque $p$ eſt négatif, marque une racine réelle avec deux imaginaires.

IV. Si $p$ eſt négatif, $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, l'équation a trois racines réelles, dont les deux moindres ſont inégales, puiſque (Art. 2.) ſi elles étoient égales elles rendroient $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$; & leur inégalité faiſant croître $\frac{1}{27}p^3$, & décroître $\frac{1}{4}qq$, ſans bornes, il ne peut y avoir d'inégalité entre $\frac{1}{27}p^3$ & $\frac{1}{4}qq$, ni conſéquemment entre les deux moindres racines. *Il faudra examiner ceci.*

V. Dans ce dernier cas l'expreſſion generale des racines, telle qu'elle eſt dans les Mem. de 1706, ne peut ſignifier aucune quantité réelle (dit M. Newton,) parceque la racine eſt ici multipliée, & cette quantité eſt ſimple (*à examiner:*) elle exprime cependant une de ces valeurs dont les autres ſont impoſſibles.

## PROBLÊME A METTRE

*Après les égalitez de la page ſuivante. Il faudra voir s'il ne doit point être auſſi après les Obſervations qui la ſuivent, & avant les Theorêmes; & de plus ſi ces Obſervations ne doivent point être miſes par propoſitions détachées.*

### PROBLÊME.

*TROUVER auxquelles des formes précedentes les égalitez* A, B, C, D, E, F, *ſe réduiſent ſelon que* f *&* g, *ſont égales ou inégales, avec les valeurs de* p, q, *qui en réſultent à ces égalitez.*

SOLUT. I. Quelque ſoit le raport de $f$ à $g$, il eſt manifeſte que l'égalité $A$ eſt de la premiere forme $G$, & que $B$ eſt de la ſeconde $H$; & qu'elles auront également $3ff = p$, & $2f^3 = q$.

II. Dans le cas de $f = g$,

1°. Les égalitez $C$, $D$, deviendront du ſecond degré qui n'a aucune difficulté, ce cas faiſant évanouir leur quatriéme terme.

2°. L'égalité $E$ ſera de la cinquiéme forme $L$, & l'égalité $F$ de la ſixiéme $M$: ce qui donnera $0 = p$ dans toutes deux; $2f^3 + 2fgg = q$ dans l'égalité $E$, & $2f^3 + 6fgg = q$ dans l'égalité $F$.

III. Dans le cas de $f > g$,

1°. L'égalité $C$ ſera de la premiere forme $G$, & l'égalité $D$ de la ſeconde $H$; ce qui leur donnera également $3ff + gg = p$, & $2f^3 - 2fgg = q$.

2°. L'égalité $E$ ſera de la premiere forme $G$, & l'égalité $F$ ſera de la ſeconde $H$; ce qui leur donnera également $3ff - 3gg = p$, & $2f^3 + 6fgg = q$.

IV. Dans le cas de $f < g$,

1°. L'égalité $C$ ſera de la ſeconde forme $H$, & l'égalité $D$ de la premiere $G$; ce qui donnera également $3ff + gg = p$, avec $2fgg - 2f^3 = q$.

2°. L'égalité $E$ ſera de la troiſiéme forme $I$, & $F$ de la quatriéme $K$; ce qui leur donnera également $3gg - 3ff = p$, $2f^3 + 6fgg = q$.

*Au lieu de ce Corollaire il en faudra un plus correct.*

## *FORMULES GENERALES*
### *d'Equations du troiſiéme degré dont le ſecond terme eſt évanoüi; & les racines données.*

*A.* $x^3 \times - 3ffx - 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont $x + f = 0$, $x + f = 0$, & $x - 2f = 0$, dont deux ſont égales entre elles, & négatives avec la troiſiéme poſitive égale à leur ſomme, & toutes trois réelles.

*B.* $x^3 \times - 3ffx + 2f^3 = 0$, dont les deux premieres ſont encore égales entre elles, mais poſitives avec la troiſiéme négative, & toutes trois réelles.

C. $\begin{array}{l} x^3 \times - 3ffx - 2f^3 = 0, \\ \qquad - ggx + 2fgg \end{array}$ dont les trois racines ſont $x + f + g = 0$, $x + f - g = 0$, & $x - 2f = 0$, toutes trois réelles & inégales, deſquelles la troiſiéme égale encore à la ſomme des deux autres eſt poſitive; & elles négatives, lorſque $f$ eſt plus grande que $g$; ou la premiere d'entre elles négative, & la ſeconde poſitive ſi $g > f$.

D. $x^3 \times -3ffx + 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$-ggx - 2fgg$

$x - f - g = 0$, $x - f + g = 0$, & $x + 2f = 0$, toutes trois réelles & inégales, & dont la troiſiéme égale à la ſomme des deux autres, eſt négative ; & elles poſitives, lorſque $f$ eſt plus grande que $g$ ; ou la premiere d'entre elles poſitive, & la ſeconde négative ſi $g > f$.

E. $x^3 \ . \ -3ffx - 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$+3ggx - 6fgg$.

$x + f + \sqrt{-3gg} = 0$, $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$, & $x - 2f = 0$; deſquelles racines la troiſiéme égale à la ſomme des deux autres, eſt réelle & poſitive ; la troiſiéme égale, & elles imaginaires négatives, quelle que ſoit $g$ par raport à $f$, plus grande ou plus petite, il n'importe.

F. $x^3 \ . \ -3ffx + 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$+3ggx + 6fgg$

$x - f - \sqrt{-3gg} = 0$, $x - f + \sqrt{-3gg} = 0$, & $x + 2f = 0$; deſquelles les deux premieres ſont encore imaginaires & inégales, mais poſitives ; & dont la troiſiéme égale à leur ſomme eſt réelle négative, quelle que ſoit encore $g$ par raport à $f$, plus grande ou plus petite, il n'importe..

## FORMULES GENERALES

*de toutes les égalitez du troiſième degré, leſquelles n'ont point de ſecond terme, & dont le dernier* q *& le coëficient* p *du ſecond, ſont connus.*

G. $x^3 \ . \ -px - q = 0.$
H. $x^3 \ . \ -px + q = 0.$
I. $x^3 \ . \ +px - q = 0.$
K. $x^3 \ . \ +px + q = 0.$
L. $a^3 \ . \ \ . \ . \ -q = 0.$
M. $x^3 \ . \ \ . \ . \ +q = 0.$

Pour trouver les racines cherchées de ces ſix dernieres égalitez generales, il faut les comparer de la maniere ſuivante avec les ſix précedentes de racines données, chacune avec ſa ſemblable.

## COMPARAISON

*Des ſix premieres égalitez* A, D, C, D, E, F, *de racines données, avec les ſix autres* G, H, I, K, L, M, *de racines cherchées.*

I. Il eſt manifeſte que les égalitez *C*, *E*, ſont de même forme que *A*, lorque $f$ eſt plus grande que $g$; & que l'égalité *D* eſt auſſi de la même forme, lorſque $g$ eſt au contraire plus grande que $f$. De ſorte que *A* étant toujours de même forme que *G*, les égalitez *C*, *E*, *D*, ſont auſſi de la même forme que *G* dans ces ſuppoſitions de $f > g$ pour *C*, *E*, & de $f < g$ pour *D*. D'où il ſuit que dans ces conditions pour *C*, *E*, *D*, & abſolument pour *A*, ces quatre égalitez ſont de même forme *G*; & qu'ainſi dans ces ſuppoſitions les cinq égalitez *A*, *C*, *E*, *D*, *G*, renferment deux racines négatives, & une racine poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme par la conſtruction.

COROL. Cet Article premier fait voir que les égalitez de la premiere formule $x^3. - px - q = 0$, ont toujours deux racines négatives, & une poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égales à leur ſomme.

II. Il eſt pareillement manifeſte que les égalitez *D*, *E*, ſont de même forme que *B*, lorſque $f$ eſt plus grande que $g$; & que l'égalité *C* eſt auſſi de la même forme, lorſque $g$ eſt au contraire plus grande que $f$. De ſorte que *B* étant toujours de même forme que *H*, les égalitez *D*, *E*, *C*, ſont auſſi de la même forme que *H* dans ces ſuppoſitions de $f > g$ pour *D*, *E*, & de $f < g$ pour *C*. D'où il ſuit que dans ces conditions pour *D*, *E*, *C*, & abſolument pour *B*; & qu'ainſi dans ces ſuppoſitions les cinq égalitez *D*, *E*, *C*, *B*, *H*, renferment toujours deux racines poſitives, & une négative plus grande que chacune de celle-là, mais égale à leur ſomme.

COROL. Il ſuit de cet Art. 2. que les égalitez de la ſeconde formule $x^3. - px + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives, & une négative plus grande que chacune de ces deux là, mais égale à leur ſomme.

III. Il eſt encore manifeſte que lorſque $f$ eſt plus petite que $g$, l'égalité *E* eſt de même forme *I*; ainſi l'égalité *E* dans cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines négatives imaginaires inégales, & une racine réelle poſitive égale à leur ſomme par la conſtruction, donc l'égalité *I* renferme auſſi trois pareilles racines.

Corol. Il ſuit de cet Art. 3. que les égalitez de la troiſiéme formule $x^3. + px - q = 0$, renferment toujours deux racines négatives imaginaires entre elles, & une réelle poſitive égale à leur ſomme.

IV. Lorſque $f$ eſt plus petite que $g$, l'égalité *F* ſe trouvant de même forme que *K*; & par cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines poſitives imaginaires & inégales avec une racine réelle négative égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité *K* doit renfermer auſſi trois pareilles racines.

Corol. Il ſuit de cet Art. 4. que les égalitez de la quatriéme formule $x^3. + px + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives imaginaires & inégales, avec une réelle négative égale à leur ſomme.

V. Lorſque $f = g$, l'égalité *E* ſe trouvant de même forme que l'égalité *L*; & par cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines négatives imaginaires inégales, avec une racine réelle poſitive égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité *L* doit auſſi renfermer trois pareilles racines.

Corol. Il ſuit de cet Art. 5. que les égalitez de la cinquiéme formule $x\,.\,. - q = 0$, renferment toujours deux racines négatives imaginaires & inégales, avec une réelle poſitive égale à leur ſomme.

VI. Lorſque $f = g$, l'égalité *F* ſe trouvant de même forme que l'égalité *M*; & par cette ſuppoſition renfermant toujours alors deux racines poſitives imaginaires & inégales, avec une racine réelle négative égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité *M* doit auſſi toujours renfermer trois pareilles racines.

Corol. Il ſuit de cet Art. 6. que les égalitez de la ſixiéme formule $x\,.\,. + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives imaginaires inégales, & une réelle négative égale à leur ſomme

## THEORÊME I.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré repréſentées d'une maniere generale par les égalitez* A, B; *le cube du tiers de la grandeur connue de leur troiſiéme terme, eſt toujours égal au quarré de la moitié du dernier, ou toujours* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Car la grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez *A*, *B*, eſt $3ff = p$, le tiers eſt $ff = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 = \frac{1}{27}p^3$. Or la grandeur du dernier terme des mêmes égalitez eſt $3f^3 = q$, donc la moitié eſt $f^3 = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 = \frac{1}{4}qq$. Donc $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Th. 8.

## THEORÊME II.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré repréſentées d'une maniere generale par les égalitez* C, D; *l'on a toujours* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez *C*, *D*, eſt $3ff + gg = p$, dont le tiers eſt $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 + f^4gg + \frac{1}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$. Or la grandeur du dernier terme de ces égalitez *C*, *D*, eſt $\pm 2f^3 \mp 2fgg = q$, dont la moitié eſt $\pm f^3 \mp fgg = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 - 2f^4gg + ffg^4 = \frac{1}{4}qq$.

Donc ayant $f^6 + f^4gg + \frac{1}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$, & $f^6 - 2f^4gg + ffg^4 = \frac{1}{4}qq$; dans les égalitez *C*, *D*, ſi l'on retranche la ſeconde de la premiere de ces valeurs de $\frac{1}{27}p^3$, $\frac{1}{4}qq$; il en reſtera $3f^4gg - \frac{2}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$, de qui le premier membre eſt poſitif, étant le tiers du quarré $9f^4gg - 2ffg^4 + \frac{1}{9}g^6$ certainement poſitif, puiſque ſa racine $3ffg - \frac{1}{3}g^3$ n'eſt point imaginaire, donc $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ eſt pareillement ici poſitif; & conſequemment $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Th. 9.

## THEORÊME III.

*Toutes les égalitez du troiſiéme degré generalement exprimées par* E, F, *ont toujours* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

Ceci ne ſatisfait qu'au cas de $f < g$, & non à celui de $f < g$: pour ſatisfaire aux deux à la fois, il faudroit $\pm 3ff \mp 3gg = p$, ainſi qu'ils le donnent enſemble dans les égalitez E, F, ce qui donne $ff - gg = \pm \frac{1}{3}p$, dont le ſuperieur du double ſigne eſt pour le premier de ces deux cas, & l'inferieur pour le

le

le ſecond : & en procedant comme ici, l'on trouveroit $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq \mp \frac{1}{27}p^3$, dont le ſigne ſuperieur donneroit ce que porte ce Theorême 3. mais non pas l'inferieur qui ne dit rien de ce qu'on veut ici ſçavoir : car on trouvera $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq \mp \frac{1}{27}p^3$.

DEMONST. La grandeur du troiſiéme terme de ces égalitez E, F, eſt $3ff - 3gg = p$, dont le tiers eſt $ff - gg = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 - 3f^4gg + 3ffg^4 - g^6 = \frac{1}{27}p^3$. La grandeur du dernier terme des mêmes égalitez eſt $2f^3 + 6fgg = q$, dont la moitié eſt $f^3 + 3fgg = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 + 6f^4gg + 9ffg^4 = \frac{1}{4}qq$, duquel retranchant le cube précedent, il reſte $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; ce qui étant poſitif, l'on aura $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 10.

## THEORÊME IV.

*Dans toutes ces égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours trois racines réelles, dont les deux moindres ſont égales entre elles, & la troiſiéme égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font voir que le cube du tiers de la grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez *A*, *B*, eſt toujours égal au quarré de la moitié de la grandeur connue du dernier terme, & toujours plus grand ou plus petit dans les autres égalitez *C*, *D*, *E*, *F* : c'eſt-à-dire toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ dans *A*, *B*; & au contraire toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans les autres égalitez *C*, *D*, *E*, *F*. Or l'inconnue a toujours trois racines réelles dans les égalitez *A*, *B*, deſquelles racines deux ſont égales entre elles, & la troiſiéme égale à leur ſomme. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, cette égalité aura toujours trois racines réelles dont deux ſont égales entre elles, & une troiſiéme égale à leur ſomme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 11.

## THEORÊME V.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours trois racines réelles & inégales entre elles, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font voir auſſi que les égalitez *C*, *D*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$; & que les quatre autres *A*, *B*, *E*, *F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or l'inconnue a toujours trois racines réelles & inégales dans les égalitez *C*, *D*, par leur conſtruction. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi; cette égalité a toujours trois racines réelles & inégales entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 12.

## THEORÊME VI.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font pareillement voir que les égalitez *E*, *F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$; & que les quatre autres *A*, *B*, *C*, *D*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Or l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales, & une réelle égale à leur ſomme dans les égalitez *E*, *F*, par leur conſtruction. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi; cette égalité a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle égale à leur ſomme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 13.

## THEORÊME VII.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme* $x^3 . - px - q = 0$, *l'inconnue a toujours deux racines réelles négatives égales entre elles, & une racine poſitive réelle égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Par la comparaiſon art. 1. on a vû que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, les deux moindres racines ſont toujouts réelles négatives, & la plus grande réelle poſitive; & par le Theorême 4. que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles, deux égales entre elles, & la troiſiéme toujours plus grande qu'elles, & égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, l'inconnue a toujours deux racines réelles négatives égales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, puiſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

## Th. 14. THEORÊME VIII.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule* $x^3. - px - q = 0$, *l'inconnue* x *a toujours deux racines réelles négatives inégales, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. On a vû par la comparaiſon premiere, que toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, ont leur deux moindres racines toujours négatives, & leur plus grande toujours poſitive & égale à la ſomme de ces deux-là. Le Theorême 5. fait voir auſſi que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles & inégales, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, l'inconnue a toujours deux valeurs réelles négatives inégales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune de ces deux-là, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## Th. 15. THEORÊME IX.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme* $x^3. - px - q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs négatives imaginaires inégales, & une réelle poſitive égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaiſon premiere fait voir que toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, ont leurs deux moindres racines toujours négatives, & la plus grande toujours poſitive. Le Theorême 6. fait auſſi voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, l'inconnue a toujours deux valeurs négatives imaginaires inégales, & une réelle poſitive égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## Th. 16. THEORÊME X.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme* $x^3 - px + q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives égales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaiſon 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, les deux moindres racines ſont toujours poſitives, & la plus grande toujours négative. Le Theorême 4. fait voir de plus que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles, que les deux moindres ſont toujours égales entre elles, & la plus grande toujours égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives égales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

## Th. 17. THEORÊME XI.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme* $x^3. - px + q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives inégales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaiſon 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, les deux moindres racines ſont toujours poſitives, & la plus grande toujours négative. Le Theorême 9. fait auſſi voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles inégales entre elles, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, l'inconnue a toujours deux racines réelles poſitives inégales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égales à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## Th. 18. THEORÊME XII.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme l'inconnue a toujours deux valeurs poſitives imaginaires & inégales, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaiſon 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, les deux moindres racines ſont toujours poſitives, & la plus grande toujours negative. Or le Theorême 6. fait auſſi voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours deux valeurs imaginaires inégales entre elles, & une réelle plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, l'inconnue a toujours deux valeurs poſitives imaginaires inégales, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## Th. 19. THEORÊME XIII.

*Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & ſeconde forme, chacune des deux moindres racines eſt toujours la racine quarrée du tiers de la grandeur connue de leur troiſiéme terme, ou la racine cube de la moitié du dernier (ces deux termes conſiderez ſans raport aux ſignes qui leur conviennent dans les égalitez qui les renferment;) & la troiſiéme racine ou la plus grande des trois, toujours le double de ces mêmes racines quand* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, *ou bien chacune des deux moindres racines eſt toujours* $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, *ou* $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$; *& la plus grande des trois toujours* $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, *ou* $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, *ou quand* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. On ſçait que les ſix égalitez *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, repréſentent d'une maniere generale toutes les égalitez poſſibles du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi.

On a vû dans les démonſtrations des Theorêmes 1, 2, 3, que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ dans les égalitez *A*, *B*; & que dans les quatre autres, c'eſt toujours $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

On ſçait que l'égalité *A* eſt toujours de la premiere forme, & l'égalité *B* toujours de la ſeconde.

On ſçait que chacune des deux moindres racines des égalitez *A*, *B*, eſt $= f$, & que la plus grande des trois eſt $2f$, par leur conſtruction.

On ſçait encore que $3ff$ grandeur connue de leur troiſiéme terme eſt $= p$, & que la connue du quatriéme eſt $2f^3 = q$; ce qui donne $ff = \frac{1}{3} p$, & $f^3 = \frac{1}{2} q$, d'où réſulte $f = \sqrt{\frac{1}{3} p}$, & $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$.

Or $f = \sqrt{\frac{1}{3} p}$ eſt la racine quarrée du tiers de $3ff = p$, & $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$ la racine cubique de la moitié de $2f^3 = q$; & que $2f = 2\sqrt{\frac{1}{3} p} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$ eſt le double de chacune de ces mêmes racines.

Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, chacune des deux moindres racines eſt toujours $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, ou $\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$; & la plus grande toujours $2\sqrt{\frac{1}{3} p}$, ou $2\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$, quand $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 20. Corol. Puiſqu'on a ici $ff = \frac{1}{3} p$, & $f^3 = \frac{1}{2} q$, l'on y aura auſſi $f (\frac{f^3}{ff}) = \frac{3q}{2p}$ pour la valeur de chacune des deux moindres racines, & $2f = \frac{3q}{p}$ pour la valeur de la plus grande égale à leur ſomme.

Th. 21.

## THEORÊME XIV.

*Lorſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ dans les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, la plus grande de leurs trois racines, la poſitive dans une égalité de la premiere forme, & la négative dans une égalité de la ſeconde forme, eſt toujours $2f = \frac{q}{4ff - p}$, c'eſt-à-dire, eſt toujours la racine $2f$ d'un quarré parfait $4ff$ plus grand que la grandeur connue* p *de leur troiſiéme terme, & qui diminué de cette grandeur* p *diviſe le dernier terme* q *ſans reſte, & donne cette racine $2f$ pour quotient de cette diviſion, ſous le ſigne qui lui convient dans l'égalité lineaire qui la renferme auſſi bien que l'inconnue dont elle eſt la valeur, ſçavoir ſous le ſigne — pour l'égalité de la premiere forme, & ſous le ſigne + pour celle de la ſeconde.*

DEMONST. Les Theorêmes 1, 2, 3, font voir que les égalitez *A* de la premiere forme, & *B* de la ſeconde, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, & que les quatre autres égalitez *C, D, E, F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or les égalitez *A, B*, comparées aux égalitez *G, H*, de leurs formes, ont $3ff = p$, & $2f^3 = q$; ce qui donne $4ff - p = 4ff - 3ff = ff$, & en conſequence $\frac{q}{4ff - p} = \frac{2f^3}{ff} = 2f$, qui eſt la plus grande racine de chacune des égalitez *A, B*, par leur conſtruction, leſquelles ſont de la premiere & ſeconde formes, & ont ſeules (Th. 1, 2, 3,) $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, donc, &c.

## Th. 22. THEORÊME XV.

*Lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ dans les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, chacune de leurs deux moindres racines égales, eſt toujours* $= f = \frac{q}{p-ff}$; *c'eſt-à-dire, égale à la racine* $f$ *d'un quarré parfait* $ff$ *moindre que la grandeur connue* $p$ *du troiſiéme terme de ces égalitez, & qui retranché de cette grandeur connue* $p$, *laiſſe un reſte* $p - ff$, *lequel diviſe le quatriéme terme* $q$ *ſans reſte, & donne cette racine* $f$ *pour quotient de cette diviſion, ſous le ſigne qui lui convient dans l'égalité lineaire qui la renferme, c'eſt-à-dire ſous le ſigne + pour l'égalité de la premiere forme, & ſous le ſigne — pour celle de la ſeconde forme ou formule.*

DEMONST. Les Theorêmes 1, 2, 3, font voir que les égalitez *A, B*, de la premiere & de la ſeconde forme, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, & que les quatre autres *C, D, E, F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or ces égalitez *A, B*, comparées avec les égalitez *G, H*, de leurs formes, ont $3ff = p$, & $2f^3 = q$, ce qui donne $2ff = p - ff$, & conſéquemment $\frac{q}{p-ff} = \frac{2f^3}{2ff} = f$, qui eſt la valeur des deux plus petites racines égales de chacune des égalitez *A, B*, par leur conſtruction, leſquelles ſont de la premiere & de la ſeconde forme, & les ſeules (Th. 1, 2, 3.) qui ayent $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. donc, &c.

## Th. 23. (*à remarquer.*) THEORÊME XVI.

*Lorſque les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme ont $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$ comme les ſeules égalitez* C, D; *la plus grande des trois racines de chacune de ces égalitez, poſitive dans la premiere forme, & négative dans la ſeconde, eſt toujours la racine d'un quarré dont la difference à la grandeur connue* $p$ *du troiſiéme terme de ces égalitez, diviſe ſans* *reſte leur quatriéme terme* q, *& donne cette racine pour quotient de cette diviſion.*

Il faudra comprendre dans ce Theorême les trois racines $2f$, $f+g$, $f-g$, ou $g-f$ des égalitez $C$, $D$, dont les deux premieres $2f$, $f+g$, ſont déja dans la démonſtration de ce Theorême, & la troiſiéme $f-g$, ou $g-f$ eſt dans ſon Corol. 2.

DEMONST. 1°. Lorſque $f>g$, l'égalité $C$ eſt de la premiere forme, & l'égalité $D$ de la ſeconde; & ont également $2f^3 - 2fgg = q$, $3ff+gg=p$, de ſorte que la preſente hypotheſe de $f>g$, rendant $4ff > 3ff+gg=p$, & $ff+2fg+gg < 3ff+gg=p$; cette hypotheſe dans ces deux égalitez $C$, $D$, leur donnera également $4ff-p = 4ff-3ff-gg = ff-gg$, & $p-ff-2fg-gg = 3ff+gg-ff-2fg-gg = 2ff-2fg$. Ce qui leur donne $\frac{q}{4ff-p} = \frac{2f^3-2fgg}{ff-gg} = 2f$, & $\frac{q}{p-ff-2fg-gg} = \frac{2f^3-2fgg}{2ff-2fg} = f+g$.

2°. Lorſque $f<g$, l'égalité $C$ eſt de la ſeconde forme, & $D$ de la premiere; & ont également $2fgg - 2f^3 = q$, & $3ff+gg=p$, de ſorte que la preſente hypotheſe de $f<g$, rendant $4ff < 3ff+gg=p$, & $ff+2fg+gg > 3ff+gg=p$; cette hypotheſe dans les égalitez $C$, $D$, leur donnera $p-4ff = 3ff+gg-4ff = gg-ff$, & $ff+2fg+gg-p = ff+2fg+gg-3ff-gg = 2fg-2ff$. Ce qui leur donne $\frac{q}{p-4ff} = \frac{2fgg-2f^3}{gg-ff} = 2f$, & $\frac{q}{ff+2fg+gg-p} = \frac{2fgg-2f^3}{2fg-2ff} = g+f$.

3°. Donc non ſeulement, (*nomb.* 1.) $f>g$, qui rend l'égalité $C$ de la premiere forme, & l'égalité $D$ de la ſeconde, leur donne également $\frac{q}{4ff-p} = 2f$, & $\frac{q}{p-ff-2fg-gg} = f+g$; mais encore (*nomb.* 2.) $f<g$, qui rend au contraire $C$ de la ſeconde forme, & $D$ de la premiere, leur donne auſſi également $\frac{q}{p-4ff} = 2f$, & $\frac{q}{ff+2fg+gg-p} = f+g$. Or $2f$, $f+g$, ſont les racines des quarrez $4ff$, $ff+2fg+gg$, donc ces racines des égalitez de la premiere & de la ſeconde forme, qui (comme les égalitez $C$, $D$,) ont $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ſont les quotiens du dernier terme $q$ de ces égalitez, diviſe ſans reſte par la difference de ces quarrez à la grandeur connue $p$ de leur troiſiéme terme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. 1. Le cas de $f>g$ donnant ici $4ff>p$, & $ff+2fg+gg<p$; au contraire le cas de $f<g$ donnant $4ff<p$, & $ff+2fg+gg>p$: on voit que lorſque la difference d'un quarré à la grandeur connue $p$ du 3<sup>e</sup> terme de l'égalité, diviſe

diviſe ſans reſte le dernier terme $q$, & que le quotient ſe trouve la racine de ce quarré, ce quotient eſt auſſi une des racines de l'équation dont il s'agit ici.

Il faudra examiner ſi cette racine doit venir ſous le ſigne qu'elle a dans l'égalité lineaire qui entre dans l'égalité en queſtion : ce qui ſera aiſé de lui donner.

On voit auſſi que lorſqu'il n'y a aucun quarré parfait qui puiſſe ainſi donner quelqu'une des racines de cette équation, cette racine eſt incommenſurable.

COROL. 2. quel que ſoit le raport de $f$ à $g$, la moindre des trois racines des égalitez $C$, $D$, étant $f-g$, ou $g-f$, dont le quarré eſt $ff-2fg+gg$; & ayant encore ci-deſſus $3ff+gg=p$; l'on aura ici $p-ff+2fg-gg=3ff+gg-ff+2fg-gg=2ff+2fg$. Donc ayant auſſi $2f^3-2fgg=q$; on aura ici $\frac{q}{p-ff+2fg-gg}=\frac{2f^3-2fgg}{2ff+2fg}=f-g$, troiſiéme racine des égalitez $C$, $D$, dont les deux moindres racines ſont dans le preſent Th. 16. Cette troiſiéme racine s'expliquera comme les deux autres.

Ou jugera ici de l'incommenſurabilité de cette racine comme ſur la fin du Corol. 1. pour les démontrer.

REMARQUE. L'on aura de même $ff-2fg+gg-p=ff-2fg+gg-3ff-gg=-2ff-2fg$, donc à cauſe de $q=2f^3-2fgg$, l'on aura ici $\frac{q}{ff-2fg+gg-p}=\frac{2f^3-2fgg}{-2ff-2fg}=-f+g=g-f$.

Il faudra comprendre ce Corollaire dans le Theorême qui donnera ainſi toutes les racines.

## *FORMULES RADICALES D'EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.*

Voyez l'*Analyſe démontrée du P.* REYNEAU, *Tome* 1. *pag.* 8. *Art.* 9.

Soit l'équation propoſée $y^3 \times +3by+2c=0$. ($A$).

I. Soit priſe $y=z-\frac{b}{z}=\frac{z^2-b}{z}=\frac{z^4-bz^2}{z^2}$ ($B$).

Cette équation $B$ donnera $y^3=\frac{z^6-3bz^4+3bbz^2-b^3}{z^3}$,

avec . . . . $+3by=+\frac{3bz^4-3bbz^2}{z^3}$.

Donc l'équation ($A$) $0=y^3 \times +3by+2c=\frac{z^6-b^3}{z^3}+2c=0$; d'où réſulte $z^6+2z^3-b^3=0$; (C) & conſéquemment $z^6+2cz^3+c^2=c^2+b^3$, dont la racine quarrée eſt $z^3+c=\sqrt{c^2+b^3}$: d'où réſulte $z^3=-c+\sqrt{c^2+b^3}$ ($D$), & $z=\sqrt[3]{-c+\sqrt{c^2+b^3}}$ ($E$). Donc ayant $y=z-\frac{b}{z}$ ($B$); l'on aura auſſi $y=\sqrt[3]{-c+\sqrt{c^2+b^3}}-\frac{b}{\sqrt[3]{-c+\sqrt{c^2+b^3}}}$ (E) pour une des racines de l'équation propoſée ($A$).

II. De plus l'équation *C* donnant $\frac{b^3}{z^3} = z^3 + 2c$ (ſuivant l'équation *D*.) $= - c + \sqrt{c^2 + b^3} + 2c = c + \sqrt{c^2 + b^3}$; l'on aura $\frac{b}{z} = \sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}$, d'où réſulte $z = \frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}}$. Donc l'équation *B* étant $y = z - \frac{b}{z}$, l'on aura auſſi $y = \frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}} - \sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}$ (*G*) racine encore de l'équation *A*. *Il* faudra comparer cette racine *G* avec la précedente *F*.

*Formes de toutes les Equations cubiques dont le premier terme eſt évanoüi.*

$y^3 \times + py + q = 0$ (*H*)

$y^3 \times + py - q = 0$ (*K*)

$y^3 \times - py + q = 0$ (*L*)

$y^3 \times - py - q = 0$ (*M*)

III. Pour trouver les racines des équations cubiques de toutes les formes que voici, par le moyen de la racine *F* ou *G* de l'équation *A*, il faut comparer terme à terme chacune de ces formes avec cette équation *A*; & ſubſtituer enſuite dans la valeur de ſa racine *F* ou *G* au lieu de *b*, *c*, leurs valeurs réſultantes en *p*, *q*, de ces comparaiſons; & cette racine *F*, *G*, ſe changera en celle de la forme dont la comparaiſon avec l'équation *A* aura donné ces valeurs de *b*, *c*, en *p*, *q*, ſçavoir

1°. La comparaiſon de la premiere forme *H* avec l'équation *A*, donne $b = \frac{1}{3} p$, & $c = \frac{1}{2} q$; leſquelles valeurs *b*, *c*, ſubſtituées dans ſa racine *F*, la changeront en $y = \sqrt[3]{- \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{- \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}}$ (*N*); & dans la racine *G*, la changeront en $y = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ (*G*) pour la forme *H*.

2°. La comparaiſon de la ſeconde forme *K* avec la même équation *A*, donne de même $b = \frac{1}{3} p$, $c = - \frac{1}{2} q$; leſquelles valeurs de *b*, *c*, ſubſtituées dans la racine *F*, la changeront en $y = \sqrt[3]{\frac{2}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}}$ (*P*); & dans la forme *G*, la changeront en $y = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}} - \sqrt[3]{- \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ (*Q*) pour la forme *K*.

3°. La comparaiſon de la forme $L$ avec $A$, donnera $b = -\frac{1}{3}p$, & $c = \frac{1}{2}q$; ce qui changera $F$ en $y$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}\ (R)$$

pour la troiſiéme forme $L$. Et ainſi de la quatriéme $M$, lorſqu'il n'y aura que le premier & le quatriéme terme, il faudra prendre $p = 0$.

## *DES EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.*

### THEORÊME I.

*Toute équation cubique* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *de trois racines réelles, doit toujours avoir ſon troiſiéme terme* px *négatif, quel que ſoit le ſigne de ſon quatriéme terme* q.

DEMONST. Soient $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, & $x \mp 2r = 0$, les trois racines réelles de cette équation, deſquelles la troiſiéme vaut la ſomme des deux autres, ainſi que l'évanoüiſſement du ſecond terme de cette équation le requiert; lequel évanoüiſſement exigeant auſſi que ces deux premieres racines $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, ſoient négatives ou fauſſes lorſque la troiſiéme $x \mp 2r = 0$ eſt poſitive ou vraye; & au contraire que ces deux-là ſoient toutes deux poſitives ou vrayes, lorſque cette troiſiéme eſt négative ou fauſſe; exige auſſi $r > b$.

Cela poſé, la ſomme des trois produits de ces trois racines multipliées deux à deux, chacune par chacune, ſera $= rr - bb - 2rr \mp 2rr - 2rr \pm 2br = -3rr - bb$, donc cette ſomme étant exprimée par $p$ dans l'équation propoſée $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$ de trois racines réelles, cette équation doit avoir $-p = -3rr - bb$, c'eſt-à-dire avoir $-px$ négatif, & conſéquemment être $x^3 \times -px \ldots q = 0$, quel que ſoit le ſigne de $q$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

$$\begin{array}{l} x^3 \times -3rrx \mp 2r^3 = 0, \\ \qquad\ \ -bbx \pm 2rbb. \end{array}$$

COROL. Donc une équation cubique $x^3 \times + px \ldots q = 0$, qui a $+px$ poſitif, ou $px = 0$ pour troiſiéme terme, n'a jamais qu'une racine réelle avec deux imaginaires qui marchent toujours deux à deux ou en nombre pair; puiſque le preſent Theorême fait voir que ſi cette équation avoit trois racines réelles, elle ſeroit $x^3 \times - px \ldots q = 0$, & non pas $x^3 \times + px \ldots q = 0$, comme ici.

SCHOLIE. Quoique trois racines réelles donnent toujours $x^3 \times - px \ldots q = 0$, il n'eſt pas réciproquement vrai qu'elles ſoient toujours toutes réelles dans toute équation de cette forme; car on va voir qu'une telle équation $x^3 \times px \ldots q = 0$, peut avoir quelquefois deux racines imaginaires avec une réelle, auſſi bien que $x^3 \times + px \ldots q = 0$, qui les a toujours: en voici le cas.

## THEORÊME II.

*Toute équation cubique de trois racines réelles, toujours exprimée* (Th. 1.) *par* $x^3 \times - px \ldots q = 0$, *aura toujours*

1°. $\frac{1}{27}p^3$ *plus grand que* $\frac{1}{4}qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines inégales entre elles.*

2°. *Et* $\frac{1}{27}p^3$ *égal à* $\frac{1}{4}qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines égales entre elles.*

DEMONST. Soient encore $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, $x \mp 2r = 0$, les trois racines réelles de la preſente équation $x^3 \times - px \ldots q = 0$. Il eſt viſible que le produit de ces trois racines enſemble, exprimé par $\ldots q$, eſt $= \mp 2r^3 \pm 2rbb$; & qu'ainſi l'on aura ici $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$, ou $\frac{1}{2}q = r^3 - rbb$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = r^6 - 2r^4bb + rrb^4$. Or dans la démonſtration du Theorême 1. ces trois racines ont donné $-p = -3rr - bb$, d'où réſulte $\frac{1}{3}p = rr + \frac{1}{3}bb$, dont le cube eſt $\frac{1}{27}p^3 = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6$. Donc $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6 - r^6 + 2r^4bb - rrb^4 = 3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$. Or

1°. Lorſque des trois racines réelles ici ſuppoſées les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, ſont inégales entre elles, elles ont non-ſeulement $b$ réel pour les rendre inégales; mais encore $b$ moindre que $r$ pour rendre leurs valeurs de même ſigne, qui contraire au correſpondant de la troiſiéme racine $x \mp 2r = 0$ égale à leur ſomme, rende la ſomme des trois égale à zero, ainſi que le requiert l'évanoüiſſement du ſecond terme de l'équation propoſée: lequel cas de $b$ réel, & moindre que $r$, rendant poſitive la quantité $3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$, & conſéquemment auſſi ſon égale $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$; rend ici $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Donc en ce cas d'inégalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée $x \times - px \ldots q = 0$, cette équation aura toujours $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. Quant au cas où les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines de cette équation, ſont égales entre elles, ce cas rendant $b = 0$, rend auſſi la quantité $3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4 = 0$, & en conſequence auſſi $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 0$, d'où réſulte $\frac{3}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. Donc en ce cas d'égalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée $x^3 \times - px \ldots q = 0$, cette équation aura toujours $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. 1. Donc quand cette équation $x^3 \times - px \ldots q = 0$, aura $\frac{1}{27} p^3$ moindre que $\frac{1}{4} qq$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$; elle n'aura qu'une racine réelle avec deux imaginaires qui vont toujours deux à deux; puiſque ſuivant ce Theorême 2. ſi les racines de cette équation étoient toutes trois réelles, elle auroit toujours alors $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

COROL. 2. Il ſuit de ce Corollaire 1. & du Corol. du Theorême 1. qu'une équation cubique $x \times px \ldots q = 0$, dont le ſecond terme eſt évanoüi, aura toujours deux racines imaginaires avec une ſeule réelle, tant qu'elle aura $+ px$, quelqu'en ſoit le reſte, ou qu'elle aura $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, même avec $- px$, quelqu'en ſoit auſſi le reſte.

## THEORÊME III.

*Toute équation cubique* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *qui a des racines imaginaires, a toujours* $p = 0$, *ou toujours* $+ px$ *poſitif; ou ſi elle a* $- px$ *négatif, elle a toujours alors* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, *quelque ſoit le ſigne de* q.

DEMONST. I. Soient $x \pm r + \sqrt{-bb} = 0$, $x \pm r - \sqrt{-bb} = 0$, les deux racines imaginaires de cette équation $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, & égales enſemble. La ſomme $p$ des trois produits $x \mp 2r = 0$ de ces trois racines multipliées deux à deux, chacune par chacune, ſera $= rr + bb - 2rr \mp 2r\sqrt{-bb} - 2rr \pm 2r\sqrt{-bb} = bb - 3rr$; ce qui donnera $\ldots p = bb - 3rr$: ſçavoir $p = 0$, ſi $b = r\sqrt{3}$, ou $+ p = bb - 3rr$, ſi $b > r\sqrt{3}$; & $- p = bb - 3rr$, ſi $b < r\sqrt{3}$.

II. Quant à ce cas de $b < r\sqrt{3}$, il rendra auſſi $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Car en donnant $- p = bb - 3rr$, il donne auſſi $\frac{1}{3} p = rr - \frac{1}{3} bb$, dont le cube eſt $\frac{1}{27} p^3 = r^6 - r^4bb + \frac{1}{3} rrb^4 - \frac{1}{27} b^6$. D'ailleurs le produit $\ldots q$ des trois racines ſuppoſées $x \pm r + \sqrt{-bb} = 0$,

$x \pm r - \sqrt{-bb} = 0$, $x \mp 2r = 0$, qui eſt $= \mp 2r^3 \mp 2rbb$, dans les cas rendant $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rbb$, rend auſſi dans tous les cas $\frac{1}{2}q = r^3 + rbb$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = r^6 + 2r^4bb + rrb^4$. Donc en ce cas-ci de $b < r\sqrt{3}$, l'on aura $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = r^6 + 2r^4bb + rrb^4 - r^6 + r^4bb - \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6 = 3r^4bb + \frac{2}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6$ poſitif, par conſequent $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

III. Donc toute équation cubique $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, qui a des racines imaginaires, a toujours (Art. 1.) $px = 0$, ou $+px$ poſitif, ou tout à la fois $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, quel que ſoit le ſigne de $q$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Cela étant, puiſque ſuivant les Th. 1, 2. cette équation auroit toujours $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou avec $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, quel que ſoit auſſi le ſigne de $q$; il ſuit

1°. Qu'une équation de quelqu'une des quatre formes compriſes $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \ldots \mp q = 0$, a toujours deux racines imaginaires avec une ſeule réelle.

2°. Qu'une équation de quelqu'une des deux formes $x^3 \times - px \mp q = 0$, a toujours auſſi deux racines imaginaires avec une réelle lorſqu'elle a $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

3°. Que les trois racines d'une équation de quelqu'une des mêmes formes compriſes $x^3 \times - px \mp q = 0$, ſont toutes réelles, lorſque cette équation a $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$; & que les deux moindres de ces trois racines réelles ſont inégales entre elles dans le cas de $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, & égales entre elles dans celui de $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

SCHOLIE. Il eſt à remarquer que lorſque l'équation $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$ a $-q$ qui eſt le produit de ſes trois racines; elle en a deux fauſſes & une vraye égale à la ſomme des fauſſes; & ſi elle a $+q$, elle a au contraire deux racines vrayes & une fauſſe, égale à leur ſomme, cela quand les deux qui ſont enſemble vrayes ou fauſſes (ce ſont toujours les deux moindres) ſeroient imaginaires; auquel cas $-q$ marqueroit que la troiſiéme racine (qui ſeroit réelle) ſeroit vraye, & $+q$ la marqueroit fauſſe: joignez à cela la conſideration du ſigne de $p$ dont $+p$ donne deux imaginaires, & $-p$ trois réelles, ſi, &c.

## *DES EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.*

### THEORÊME I.

*En toute équation cubique* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *de ſecond terme évanoüi, & de trois racines réelles, je dis que quel que ſoit le ſigne de ſon quatriéme terme* $q$,

I. *Le troiſiéme terme ſera toujours* $-px$ *négatif, quelles que ſoient auſſi les valeurs de* $p$, $q$.

II. *Qu'elle aura toujours* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines inégales entre elles.*

III. *Et toujours* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ *dans le cas d'égalité entre ſes deux moindres racines.*

DEMONST. Soient $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, & $x \mp 2r = 0$, les trois racines réelles de cette équation $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, la troiſiéme eſt égale à la ſomme des deux autres, ainſi que l'évanoüiſſement du ſecond terme de l'équation le requiert : lequel évanoüiſſement exigeant auſſi que ces deux autres racines $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, ſoient toutes deux négatives ou fauſſes lorſque la troiſiéme eſt poſitive ou vraye, & au contraire toutes deux poſitives ou vrayes, lorſque cette troiſiéme eſt négative ou fauſſe ; exige de plus $r > b$.

PART. I. Cela poſé, ſi l'on multiplie ces trois racines entre elles, il en réſultera l'équation cubique
$$\begin{array}{l} x^3 \times -3rrx \mp 2r^3 = 0, \\ \phantom{x^3 \times} -bbx \mp 2rbb \end{array}$$
qui comparée terme à terme avec la propoſée $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, ſuppoſée de mêmes racines qu'elle, donnera pour ici $-3rr - bb = -p$, & $\mp 2r^3 \pm 2rbb = \mp q$ ; ce qui y déterminera cette équation propoſée à $x^3 \times -px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme eſt $-px$ négatif, quelles que ſoient la valeur & le ſigne — ou + de ſon quatriéme terme $q$. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Puiſque (*Part. I.*) $-p = -3rr - bb$, & $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$ ; l'on aura ici $\frac{1}{3} p = rr + \frac{1}{3} bb$, dont le cube eſt $\frac{1}{27} p^3 = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6$ ; & l'on aura auſſi $\frac{1}{2} q = r^3 - rbb$, de qui le quarré eſt $\frac{1}{4} qq = r^6 - 2r^4 bb + rrb^4$. Donc $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6 - r^6 + 2r^4 bb - rrb^4 = 3r^4 bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$. Or venant de voir que le cas d'inégalité entre les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines réelles de l'égalité propoſée, exige $b$ réel; & que l'évanoüiſſement du ſecond terme de cette égalité exige de plus $b$ moindre que $r$: il eſt viſible que lorſque les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, que la réalité de toutes trois détermine (*Part. I.*) à $x^3 \times - px \mp q = 0$, ſont inégales entre elles; la quantité $3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$ ſera poſitive, & conſéquemment auſſi $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$. Donc en ce cas d'inégalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée, cette égalité aura non-ſeulement ſon troiſiéme terme $= - px$ négatif ſuivant la Part. 1. mais encore $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Si preſentement on ſuppoſe que les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines réelles de l'égalité propoſée, ſont égales entre elles; cette égalité exigeant $b = 0$, l'équation $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = 3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$ trouvée dans la précedente Part. 2. ſe reduira à $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = 0$, d'où réſulte $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. Donc en cas d'égalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'équation propoſée $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, que la réalité de toutes ces trois racines détermine (*Part.* 1.) à $x^3 \times - px \mp q = 0$; cette équation aura non-ſeulement ſon troiſiéme terme $= - px$ négatif; mais encore $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

COROL. 1. La premiere Partie fait voir qu'aucune équation cubique dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont le troiſiéme eſt $+ px$ affirmatif; n'a toutes ſes racines réelles; & qu'ainſi elle n'en a pour lors jamais qu'une réelle avec deux imaginaires qui vont toujours deux à deux.

COROL. 2. De plus quand même une équation cubique, de ſecond terme évanoüi, auroit ſon troiſiéme $- px$ négatif, tel que l'exige la Part. 1. lorſque toutes les racines en ſont réelles; les Parties 2, 3. font auſſi voir que cette équation ne laiſſeroit pas de n'avoir encore qu'une racine réelle avec deux imaginaires, ſi elle avoit $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

THEORÊME II.

## THEORÊME II.

*En toute équation cubique* $x^3 \times \ldots p x \ldots q = 0$, *de ſecond terme évanoüi, & qui a des racines imaginaires.*

I. *Le troiſiéme terme eſt toujours* $+ px$ *poſitif, quel que ſoit le ſigne de la valeur quatriéme* q.

II. *Ou* $\ldots px = 0$, *quel que ſoit encore le ſigne & la valeur de* q.

III. *Ou enfin* $- px$ *négatif, mais ſeulement lorſque* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, *quel que ſoit auſſi le ſigne de* q.

DEMONST. Soient $x \pm r + \sqrt{-cc} = 0$, $x \pm r - \sqrt{cc} = 0$, les deux racines imaginaires de cette équation $x^3 \times .. px .. q = 0$, $x \mp 2r = 0$, la réelle égale à leur ſomme. Ces trois racines multipliées entre elles donneront l'équation cubique

$$\begin{array}{l} x^3 \times + ccx \mp 2r^3 = 0, \\ \qquad - 3rrx \mp 2rcc \end{array}$$

qui comparée terme à terme avec la propoſée $x^3 \times .. px .. q = 0$, donnera pour ici $\ldots\, p = cc - 3rr$, & $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$, Donc

PART. I. Lorſqu'on aura $cc > 3rr$, ou $c > rr3$, l'on aura $+ p = cc - 3rr$ poſitive ; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une réelle, à $x^3 \times + px \mp q$, de troiſiéme terme poſitif, quels que ſoient les valeurs de $p$, $q$, & les ſignes de $q$. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Lorſqu'on aura $cc = 3rr$, ou $c = rr3$, l'on aura $\ldots p = cc - 3rr = 0$ ; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une racine réelle, à $x^3 \times \times \mp q = 0$, quels que ſoient le ſigne & la valeur de $q$. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Enfin lorſqu'on aura $cc < 3rr$, ou $c < rr3$, l'on aura $- p = cc - 3rr$ négative ; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une réelle, à $x^3 \times - px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme eſt à la verité négatif comme (Th. 1. Part. 1.) dans les équations cubiques de trois racines réelles ; mais avec cette difference que celles-là ont toujours (Th. 1. Part. 1, 2.) $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ ; & que celle-ci au contraire a toujours $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Pour le voir retournons aux équations $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$, $- p = cc - 3rr$, dont la premiere a été trouvée ci-deſſous les cas précedens, & dont la ſeconde vient de l'être pour celui-ci de $c < rr3$ : la premiere donnera $\frac{1}{2}q = r^3 + rcc$, de qui le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = r^6 + 2r^4cc + rrc^4$ ; & la ſeconde donnera $\frac{1}{3}p = rr - \frac{1}{3}cc$, de qui le cube eſt $\frac{1}{27}p^3 = r^6 - r^4cc + \frac{1}{3}rrc^4 - \frac{1}{27}c^6$. Donc $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = r^6 + 2r^4cc + rrc^4 - r^6 + r^4cc - \frac{1}{3}rrc^4 + \frac{1}{27}c^6 = 3r^4cc + \frac{2}{3}rrc^4 + \frac{1}{27}c^6$ poſitif ; par conſequent $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ étant pareillement poſitif, l'on aura ici $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Donc l'équation propoſée de deux racines imaginaires n'aura point de troiſiéme terme $-px$ négatif qu'avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Il ſuit de ce Th. 2. & des Coroll. du Th. 1. que quel que fût le ſigne du quatriéme terme $q$ d'une équation cubique $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, ſecond terme évanoüi, & quelques auſſi les valeurs de ſes quantitez $p$, $q$ ; elle n'aura jamais qu'une ſeule racine réelle avec deux imaginaires, tant qu'elle aura ſon troiſiéme terme $+px$ poſitif, ou nul, ou enfin négatif $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ : au contraire que cette équation aura toujours toutes ſes racines réelles, ſi elle a ſon troiſiéme terme $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou avec $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. De là on voit que dans les formules ſuivantes d'équations cubiques chacune de ſecond terme évanoüi, quelles que ſoient les valeurs de ſes quantitez $p$, $q$, & quel que ſoit le ſigne de la derniere $q$,

1°. Les équations compriſes dans les formules $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \times \mp q = 0$, auront toujours de cela ſeul, deux racines imaginaires avec une réelle.

2°. Les équations compriſes dans la formule $x^3 \times - px \mp q = 0$, auront auſſi deux racines imaginaires avec une ſeule réelle, non pas à la verité toujours & abſolument ; mais ſeulement quand elles auront $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ : dans lequel cas aucune de ces équations ne ſera exemte de racines imaginaires.

3°. Au contraire ces équations compriſes dans la formule $x^3 \times - px \mp q = 0$, auront toujours toutes leurs racines réelles tant qu'elles auront $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 = \frac{3}{4}qq$ : Celles de ces équations qui ſeront dans le premier de ces deux cas, auront toujours leurs trois racines réelles toutes inégales entre elles ; & celles qui ſeront dans le ſecond, auront toujours égales entre elles les deux moindres de leurs trois racines réelles. Tout cela ſuit des parties 2, 3. du Th. 1.

*Voilà juſqu'ici pour diſcerner les racines tant réelles, qu'imaginaires d'une équation cubique quelconque dont le ſecond terme eſt évanoüi. Voici preſentement les racines tant vrayes que fauſſes.*

Le Theorême qui l'enſeigne eſt la propoſition 59. des cahiers de l'Algebre Latine.

*Voici ce morceau de l'Algebre Latine de M. Varignon tel qu'on l'a trouvé à la ſuite de ceci dans l'exemplaire de l'Analyſe démontrée qu'avoit M. Varignon.*

## PROPOSITIO 57.

*Æquatio cubica quævis* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *ſecundo termino carens, ſi tres ſuas radices habeat omnes reales; tùm quodcunque ſit in ea ſignum quantitatis* q.

1°. *Habebit ea ſemper ſuum terminum ſecundum* $-px$ *negativum, quicunque ſint in ea valores quantitatum* p, q.

2°. *Præterea ipſi ſemper erit* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, *quando ea duas ſuarum radicum minores habebit inæquales inter ſe.*

3°. *At verò ſi duæ radices ejus minores ſint invicem æquales, tùm ea ſemper habebit* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONSTR. *Sint* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, & $x \mp 2r = 0$, *tres radices reales æquationis propoſitæ* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *quarum duæ minores* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, *ambæ veræ ſi major* $x \mp 2r = 0$ *ſit falſa, vel ambæ falſæ ſi hæc ſit vera, huic eidem ſimul æquales eſſe debent ut earumdem trium radicum valores ſimul conſtituant ſummam* $= 0$, *quà affectus ſecundus æquationis propoſitæ terminus deficiat; ſi quidem in ea deficere ponitur. Adde quod cùm ad hoc illæ duæ minores ejuſdem æquationis radices debeant eſſe vel ambæ veræ vel ambæ falſæ, nec id permittat* $b >$, *nec* $b = r$; *eædem idcircò duæ radices minores* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, *debent habere* $b < r$, *quæ quantitas* b *realis eſſe debet ſi hæ duæ radices ſint inæquales inter ſe, vel nullæ ſi æquales.*

*Pars prima.* 1°. *Si tres hæ radices multiplicentur inter ſe, component æquationem*

$$x^3 \times \begin{array}{l} -3rrx \mp 2r^3 \\ -bbx \pm 2rbb \end{array} = 0,$$

*cujus termini ſinguli æquati reſpondentibus ſingulis propoſitæ* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *eamdem (hyp.) radicem dabunt* $\ldots\ldots px = -3rrx - bbx$, $\ldots\ldots q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$, *ſeu* $-px = -3rrx - 2bbx$, $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$; *atque hinc iſta generalis æquatio* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *hoc in caſu trium radicum ejus realium determinabitur ad* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *cujus tertius terminus eſt* $-px$ *negativus, quicunque ſint in ea valores quantitatem* p, q, *& ſignum hujus quarti termini* q. Quod erat 1°. demonſtrandum.

*Pars* $2^a$. *Si quidem* (*part.*) *eſt* $-p = -3rr - bb$, & $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$; *eſt etiam* $\frac{1}{3}p = rr + \frac{1}{3}bb$, *cujus cubus eſt* $\frac{1}{27}p^3 = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6$; & $\frac{1}{2}q = r^3 - rbb$, *cujus quadratum eſt* $\frac{1}{4}qq = r^6 - 2r^4bb + rrb^4$. *Ergo* $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6 - r^6 + 2r^4bb - rrb^4 = 3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$ *quæ quantitas eſt poſitiva; ſi quidem ſuperius conſtat* b *realem eſſe in caſu præſenti inæqualium inter ſe duarum radicum minorum. Ergo etiam hic eſt poſitiva quantitas* $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$; *ac proinde hoc in caſu radicum omnium realium, & duarum minorum & inæqualium inter ſe, ſemper eſt* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Quod erat 2°. demonſtrandum.

*Pars* $3^a$. *Jam cùm caſus alter duarum minorum radicum æqualium inter ſe reddat* $b = 0$, *reddit etiam* $3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4 = 0$. *Ergo cùm modo* (*part.* 3.) *fuerit inventum* $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = 3r^4bb + \frac{1}{27}b^6 - \frac{2}{3}rrb^4$, *hoc in præſenti caſu duarum minorum radicum æqualium erit* $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = 0$; *ac proinde* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{qq}$. Quod erat 3°. demonſtrandum.

COROL. I. *Ex parte primâ ſequitur æquationis cubicæ ſecundo termino carenti radices non omnes eſſe reales ſi tertium habeat affirmativum* $+px$; *adeoque unicum & tunc ipſi realem cum duabus imaginariis, quæ binæ ſemper procedunt.*

COROL. *Præterea licet æquatio cubica ſecundo termino carens, tertium terminum habeat negativum* $-px$, *qualem exigit* (*part.*) *ex partibus ſecunda & tertia, ſequitur duas nihilominus ipſi etiam eſſe radices imaginarias cum unica reali ſi habeat* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

## THEOREMA 58.

*Si æquatio cubica* $x^3\,x \ldots px \ldots q = 0$, *ſecundo termino carens, radices habeat imaginarias, nimirum duas cum una reali, quicunque ſint valor & ſignum quarti ejus termini, ſemper habebit tertium terminum.*

1°. *Vel affirmativum* $+px$.

2°. *Vel nullum* $\ldots px = 0$.

3°. *Vel negativum* $-px$ *cum* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. *Sint* $x \pm r + \sqrt{-cc} = 0$, $x \pm r - \sqrt{-cc} = 0$, *imaginariæ duæ radices æquationis propoſitæ* $x^3\,x \,..\, px \,..\, q = 0$, *cujus tertia realis ſit* $x \mp 2r = 0$, *æqualis iſtarum ſummæ. Jam ex tribus his radicibus per invicem multiplicatis componetur æquatio* $x^3\,x \begin{array}{l} + ccx \mp 2r^3 \\ - 3rrx \mp 2rcc \end{array} = 0$, *cujus termini ſinguli æquati* *reſpondentibus ſingulis propoſitæ* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *earumdem (hyp.) radicem, dabunt* $\ldots px = + ccx - 3rrx$, & $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$. *Ergo ubi erit* $cc > 3rr$, *vel* $c = r\sqrt{3}$.

*Pars prima. In æquatione propoſita* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *ſtatim hæc tertium habebit terminum poſitivum* $+ px = ccx - 3rrx$, *qui eam tunc determinabit ad* $x^3 \times + px \mp q = 0$, *termini tertii poſitivi, quicunque ſint valor & ſignum quarti* q.

*Pars* 2ª. *Si æquatio ita generalis* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *habeat* $cc = 3rr$, *vel* $c = r\sqrt{3}$, *tùm tertius terminus ejus erit* $\ldots px = ccx - 3rrx = 0$, *ſive nullus; atque ita aut reducetur ea ad* $x^3 \times \mp q = 0$, *quicunque ſint etiam valor & ſignum quarti ejuſdem termini* q. Quod erat 2°. demonſtrandum.

*Pars* 3ª. *Tandem ſi in iſtà æquatione generali fuerit* $cc < 3rr$, *vel* $c < r\sqrt{3}$, *tùm terminus ejus tertius erit negativus* $- px = cc - 3rr$; *atque ita tunc evadet ea* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *tertii termini hac lege negativi ut in ea ſit* $c < r\sqrt{3}$. Quod erat 3°. demonſtrandum.

COROL. *Ex hoc & ex precedenti Theoremate fluit juxta ejus Corol.* 1, 3. *æquationem cubicam ſecundo termino carentem, quodcunque quarti ſit ſignum, radices duas imaginarias cum unicâ reali ſemper habere, quando tertius terminus ejus eſt poſitivus ſeu affirmativus, vel nullus, vel denique negativus cum* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$: *è contra reales eam ſemper habere radices omnes, quando tertius terminus ejus negativus eſt abſque* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. *Atque hinc patet in formis ſubſequentibus omnium æquationum cubicarum ſecundo termino carentium*

1°. *In unâquaque formarum* $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \mp q = 0$, *duas eſſe radices imaginarias cum unica reali; ac etiam in iis quæ ſunt formæ* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *cum habet* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

2°. *E contra in æquationibus hujus formæ* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *habentibus* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, *vel* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$, *radices omnes ſemper erunt reales, quarum duæ minores erunt æquales vel inæquales inter ſe, prout ipſis erit* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, *vel* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

## PROPOSITIO 59.

*Æquatio cubica generalis* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *ſecundo termino carens, convertetur in ſpecialem* $x^3 \times \ldots px - q = 0$, *ſi duas habeat radices falſas cum unà verà; at ſi duas habeat veras cum unà falſà, convertetur in* $x^3 \times \ldots px + q = 0$. *Viciſſim æquatio* $x^3 \times \ldots px - q = 0$, *duas ſemper habet radices falſas cum unà verà; è contra æquatio* $x^3 \times \ldots p + q = 0$, *duas ſemper habet radices veras cum unà falſa.*

*d iij*

DEMONST. *Ex obſervat.* 4. *cap.* 2. *conſtat ultimum ac totaliter notum cujuſlibet æquationis terminum, ipſum eſſe productum ex valoribus omnium ejuſdem radicum multiplicatis per invicem; atque adeò æquationis cubicæ* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *terminum quartum* q *pariter eſſe productum ex omnibus valoribus trium radicum quibus hæc conſtat æquatio; cujus cùm ſecundus terminus deficiat, ſumma vel differentia trium iſtorum valorum (juxtà eamdem obſervat.* 4. *cap.* 2.) *debet eſſe* = 0 : *atque ità non modo eorum duo ſimul æquales eſſe debent tertio* ....

---

# LIVRE VII. *pag.* 383.

## PROBLÊME II.

### EXEMPLE I.

LA premiere équation $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, laquelle ſe réduit à $0 = 0$, en y ſuppoſant $a = n$, donc cette équation eſt diviſible par $a - n = 0$.

La ſeconde, $3aab + nnb = - na$, ce qui rend $b = - \frac{1}{4}$ dans la ſeconde équation, & ainſi des autres.

La troiſiéme, $3aac + nnc = - 3abb - nb$.

La quatriéme, $+ 3aad + nnd = - 6abc - b^3 - nc + 1$.

La 5^e^. $nne + 3aae = - 3bbc - 3acc - nd - 6abd$.

### POUR LA SECONDE PUISSANCE. *Page* 413.

### *Avis à donner au R. P.* REYNEAU.

ETANT tombé par hazard, Mon Reverend Pere, ſur la page 413. du Tome I. de votre Analyſe démontrée, il m'a pris envie de chercher la démonſtration que vous avez omiſe de la pratique que vous y donnez pour trouver une ſuite égale à $\frac{1}{\overline{a+b}^2} = \frac{1}{aa+2ab+bb}$ : Vous dites qu'il faut 1°. diviſer $ab + bb$ par $aa + ab$, ce qui donne $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$; 2°. diviſer 1 par $\overline{aa+ab} + \overline{ab+bb}$, en ne conſiderant ce diviſeur que comme fait des deux parties qui ſont ici barrées pour les diſtinguer : De cette maniere vous dites que l'on aura $\frac{1}{aa+ab} - \frac{b}{a^3+a^2b} + \frac{bb}{a^4+a^3b} - \frac{b^3}{a^5+a^4b} + \frac{b^4}{a^6+a^5b}$ — &c. $= \frac{1}{\overline{a+b}^2}$. Prenez garde, cela n'eſt vrai que lorſque $b$ eſt moindre que $a$; car lorſqu'il eſt plus grand, la ſomme de cette ſuite devient infinie, étant $= \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}}$, &c. $= \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1 - \frac{b}{a}} \times \overline{1 + \frac{bb}{aa} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^8}{a^8}}$ + &c. en progreſſion geometrique dont la ſomme eſt viſiblement infinie lorſque $b$ eſt plus grand que $a$, & conſequemment infiniment plus grande que la fraction propoſée $\frac{1}{\overline{a+b}^2}$.

Il eſt vrai que cette ſuite eſt égale à cette fraction lorſque $b$ eſt moindre que $a$: car alors elle eſt $= \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1-\frac{b}{a}} \times \frac{1}{1-\frac{bb}{aa}} = \frac{1}{aa+ab} \times \frac{a-b}{a} \times \frac{aa}{aa-bb} = \frac{1}{a+b} \times \frac{a-b}{aa-bb} = \frac{1}{a+b} \times \frac{1}{a+b} = \frac{1}{\overline{a+b}^2}$ qui eſt la fraction propoſée.

Mais quand $b$ eſt plus grand que $a$, 1°. ce n'eſt pas $ab+bb$ qu'il faut diviſer par $aa+ab$ pour avoir $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$, mais $aa+ab$ par $ab+bb$ pour avoir $\frac{aa+ab}{ab+bb} = \frac{a}{b}$. Il ne faut pas non plus diviſer 1 par $\overline{aa+ab}+\overline{ab+bb}$, mais par $\overline{ab+bb}+\overline{aa+ab}$, en ſorte que la diviſion ſe commence par la plus grande partie $aa+bb$ du diviſeur, (choſe à obſerver dans toutes les diviſions qu'on veut pouſſer en ſuites infinies). En ce cas ſi vous prenez $x = aa+ab$, & $y = ab+bb$, vous aurez $\frac{1}{y+x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \frac{x^3}{y^4} -$ &c. $= \frac{1}{y} \times 1 - \frac{x}{y} + \frac{xx}{yy} - \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4} -$ &c. $= \frac{1}{ab+bb} \times 1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4} -$ &c. $= \frac{1}{ab+bb} - \frac{a}{ab^2+b^3} + \frac{a^2}{ab^3+b^4} - \frac{a^3}{ab^4+b^5} + \frac{a^4}{ab^5+b^6} -$ &c. $= \frac{1}{\overline{a+b}^2}$. Car cette ſuite eſt viſiblement $= \frac{1}{ab+bb} \times \overline{1-\frac{a}{b}} \times \overline{1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^8}{b^8}+}$ &c. (dans ce cas de $b > a$) $= \frac{1}{ab+bb} \times \frac{b-a}{b} \times \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b-a}{ab^2+b^3} \times \frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b} \times \frac{b-a}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b} \times \frac{1}{b+a} = \frac{1}{\overline{a+b}^2}$ qui eſt la fraction propoſée.

Les ſuites que vous trouvez (pag. 414, 415, &c.) pour les puiſſances troiſiémes, quatriémes, &c. auſſi bien que les partitions que vous faites de ces ſuites en d'autres, ſont ſujettes aux mêmes inconveniens ou exceptions.

Quant à l'uſage que vous faites pour le même ſujet (p. 418.) de la formule $\overline{a+b}|^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \times a^{n-2}b^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \times a^{n-3}b^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} \times a^{n-4}b^4 +$ &c. il ne vaut de même que pour le cas où $a$ eſt plus grand que $b$. Quant à celui où $b$ ſeroit plus grand que $a$, il faudroit ſe ſervir de la formule $\overline{b+a}|^n = b^n + \frac{n}{1} b^{n-1}a + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \times b^{n-2}a^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \times b^{n-3}a^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} \times b^{n-4}a^4 +$ &c. en rendant ici, comme là, $n$ négative.

Voila ce que le hazard m'a offert, vous en ferez tel uſage qu'il vous plaira, pourvû que vous me faſſiez la juſtice de me croire toujours avec beaucoup d'eſtime & d'attachement pour vous,

MON REVEREND PERE,

Votre très-humble & très-obéiſſant
ſerviteur, VARIGNON.

## LIVRE VII. *page* 413. *ligne* 8.

Et *ab* + *bb* pour la ſeconde : comme qui diviſeroit 1 par $x + y$ en prenant $x = aa + ab$, & $y = ab + bb$; & conſequemment $\frac{y}{x} = \frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$. Une telle diviſion donneroit $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4} + \frac{y^4}{x^5} -$ &c. $= \frac{1}{x} \times 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4} -$ &c. $= \frac{1}{aa+ab} \times 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} -$ &c. = à la diviſion ou au quotient de l'Auteur. Mais $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} +$ &c. $= 1 - \frac{b}{a} \times 1 + \frac{bb}{aa} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^8}{a^8} +$ &c. progreſſion geometrique dont la ſomme (ſi $b < a$) ſera $\overline{1 - \frac{b}{a}} \times \frac{1}{1 - \frac{bb}{aa}} = \overline{1 - \frac{b}{a}} \times \frac{aa}{aa-bb} = \frac{a-b}{a} \times \frac{aa}{aa-bb} = \frac{a}{a+b}$. Donc la ſuite trouvée ſera $\frac{1}{aa+ab} \times 1 - \overline{\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3}} +$ &c. $= \frac{1}{aa+ab} \times \frac{a}{a+b} = \frac{a}{\overline{aa+ab} \times \overline{a+b}} = \frac{1}{\overline{a+b} \times a+b} = \frac{1}{\overline{a+b}^{2}}$; ce qui étoit la fraction propoſée : ſuppoſé, dis-je, que $b < a$; mais ſi $b > a$, la ſerie $1 + \frac{bb}{aa} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^6} +$ &c. auroit la ſomme infinie, & par conſequent auſſi celle de l'Auteur. En ce cas de $b > a$ il faudroit 1°. diviſer $aa + ab$ par $ab + bb$, ce qui donneroit $\frac{aa+ab}{ab+bb} = \frac{a}{b}$; 2°. 1 par $y + x$, ce qui donneroit $\frac{1}{y+x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \frac{x^3}{y^4} = \frac{1}{y} \times \overline{1 - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{yy} - \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4} - \&c.} = \frac{1}{ab+bb} \times \overline{1 - \frac{a}{a} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} + \&c.} = \frac{1}{ab+bb} \times \overline{1 - \frac{a}{b}} \times \overline{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^6}{b^6} + \&c.}$ $= \frac{1}{ab+bb} \times \frac{b-a}{b} \times \frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{b-a}{ab^2+b^3} \times \frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{b-a}{\overline{b+a} \times \overline{b^2-a^2}} = \frac{1}{\overline{b+a} \times b+a} = \frac{1}{\overline{a+b}^2}$ fraction propoſée.

## LIVRE VII. *page* 429. *ligne* 21.

$\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$, laquelle donnant $\frac{1+y}{dy} - \frac{1}{dx} = 0$, & conſequemment $\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1} = dx$, eſt à la logarithmique.

## *Tome II. page* 913. *troiſiéme Addition. ligne* 31.

*Ils ſont parcourus*, cette conſequence n'eſt pas juſte : il faut *elles ſont parcourues* au lieu de *ils ſont parcourus*. Mais en ſuppoſant que ces deux arcs ſont les deux derniers en *A*, les viteſſes en ce point *A* avec leſquelles elles ſont parcourues, étant celles avec leſquelles les arcs entiers (dont elles ſont les élemens) ſont parcourues, ces arcs ſeront auſſi comme ces viteſſes entieres, & conſequemment $\frac{s}{\sqrt{x}}$ un raport conſtant. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Fin des Remarques de Monſieur Varignon.*

Fig. 1.

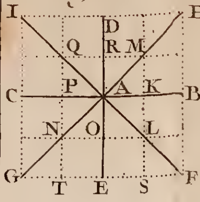


Fig. 2.

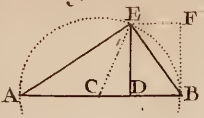


Fig. 3

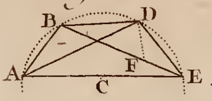


Fig. 4.

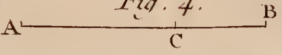


Fig. 5.

Fig. 6.

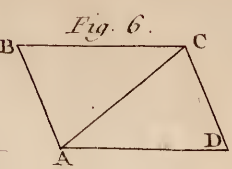


Fig. 7.

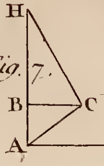


Fig. 8.

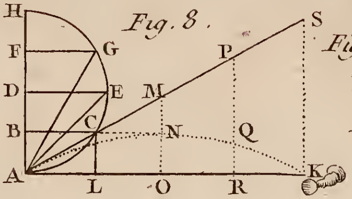


Fig. 9.

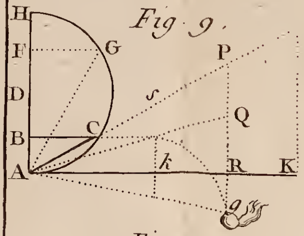


Fig. 10.

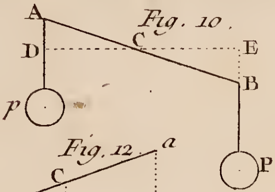


Fig. 11.

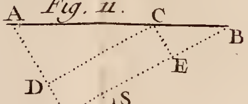


Fig. 12.

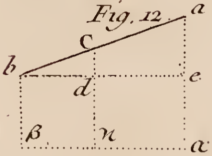


Fig. 13.

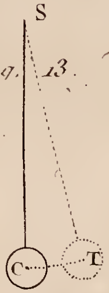


Fig. 14.

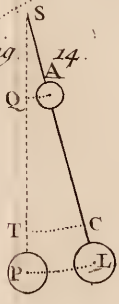


Fig. 15.

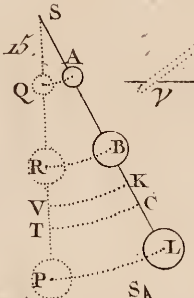


Fig. 16.

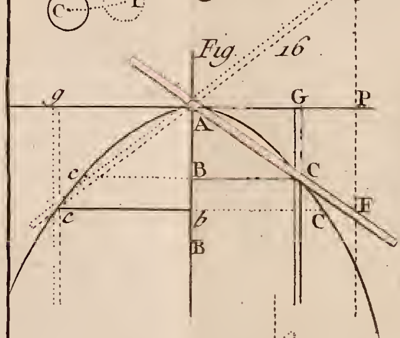


Fig. 17.

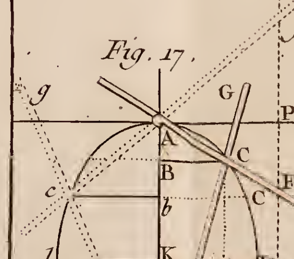


Fig. 18.

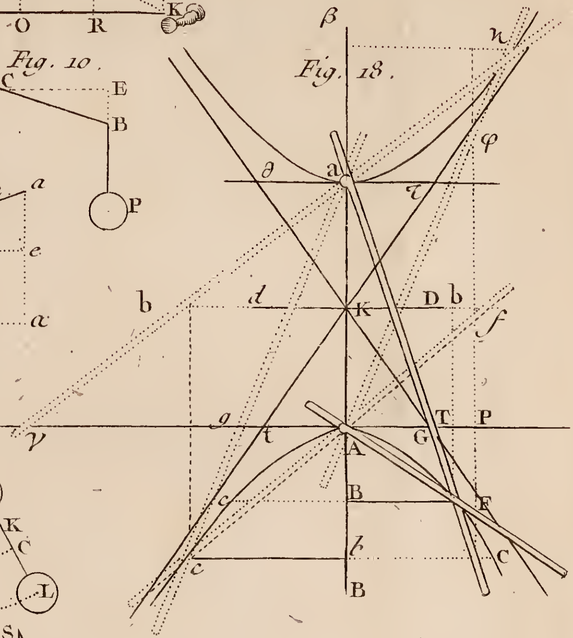


Fig. 20.

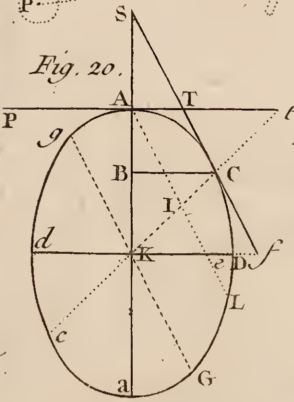


Fig. 21.

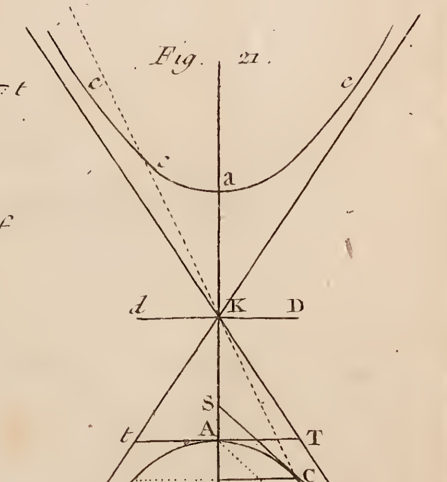
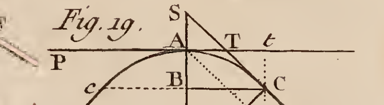


Fig. 19.



Lattré Sculp.

Fig. 22.

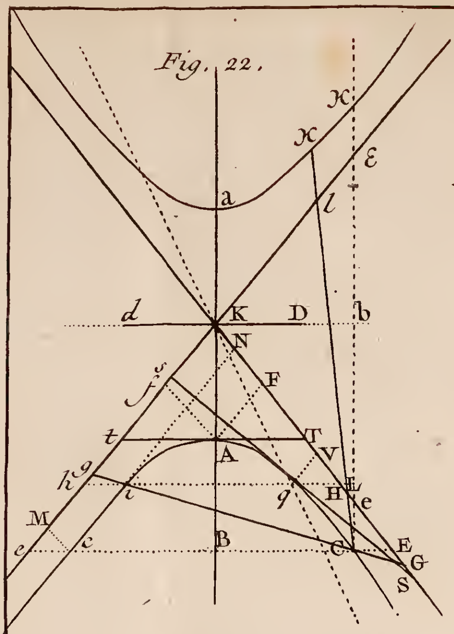


Fig. 23.

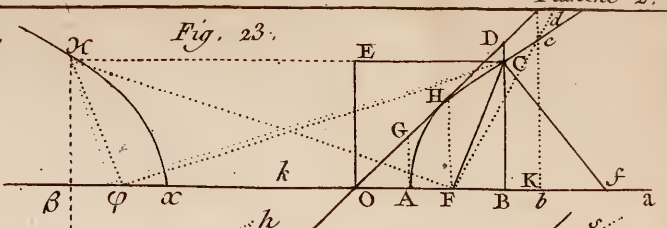


Fig. 24.

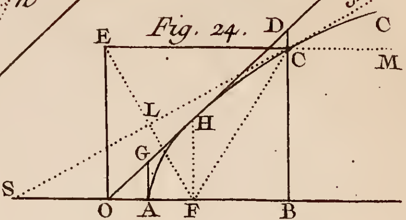


Fig. 25.

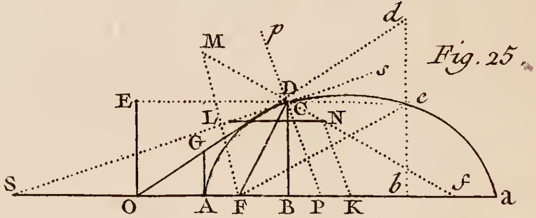


Fig. 26.

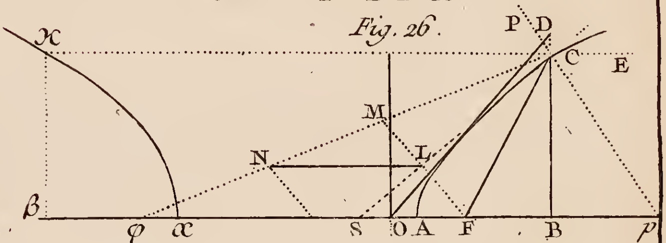


Fig. 27.

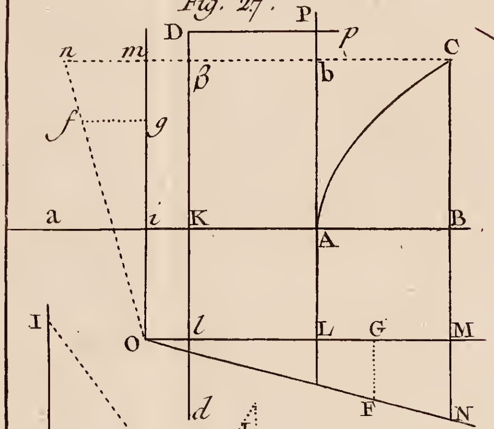


Fig. 28.

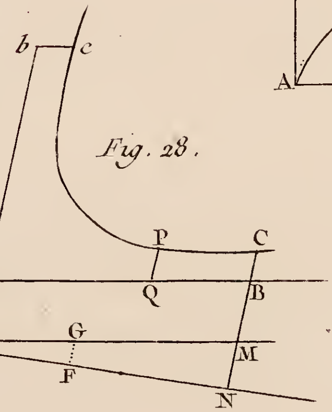


Fig. 29.

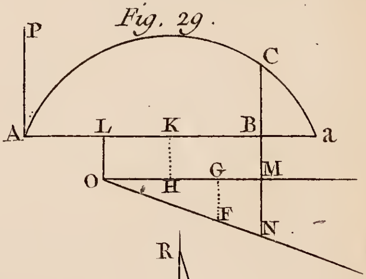


Fig. 30.

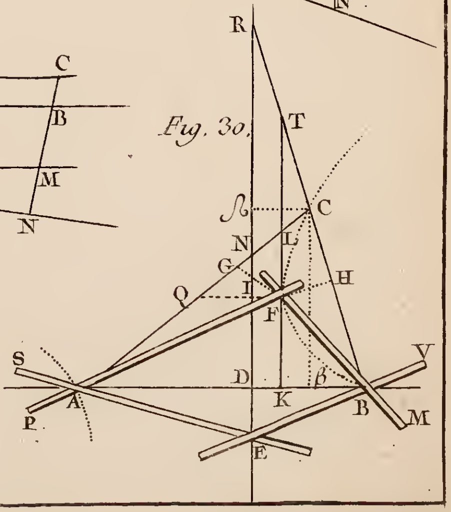
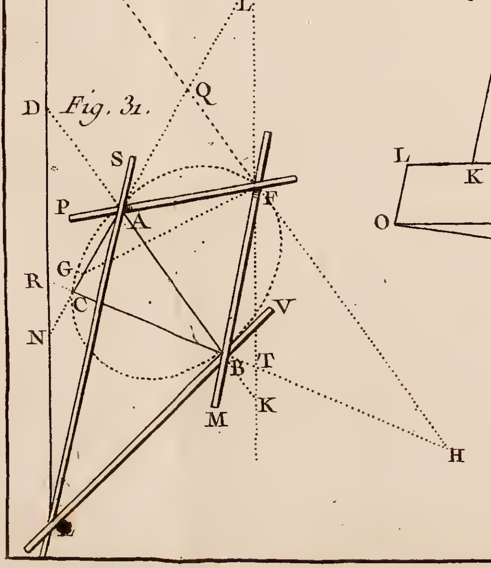


Fig. 31.



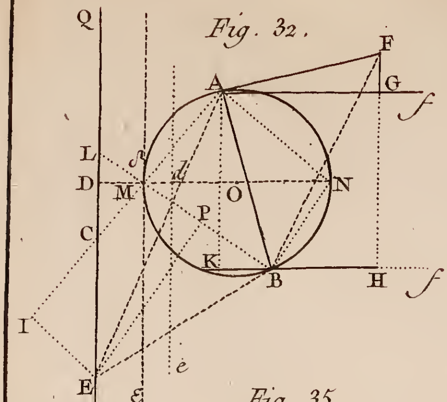


Fig. 32.

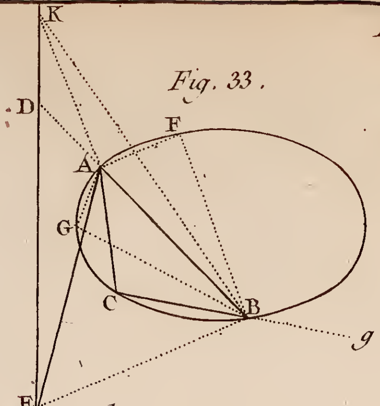


Fig. 33.

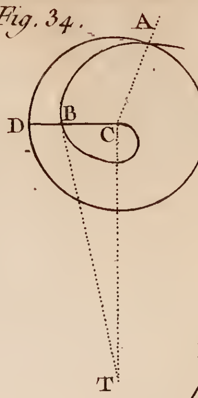


Fig. 34.

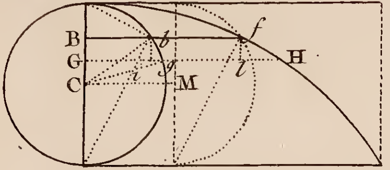


Fig. 35.

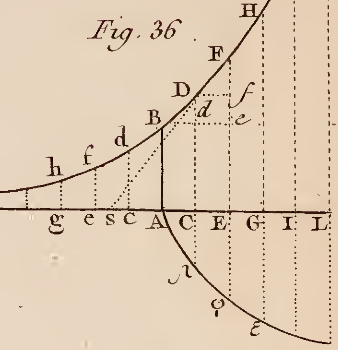


Fig. 36.

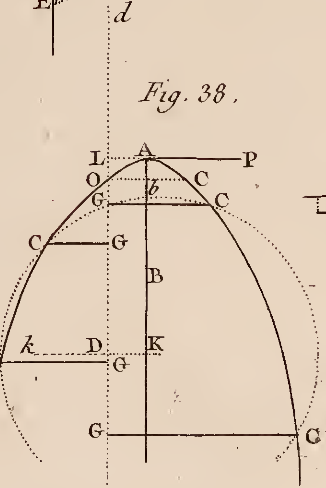


Fig. 38.

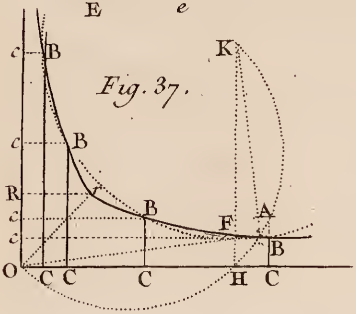


Fig. 37.

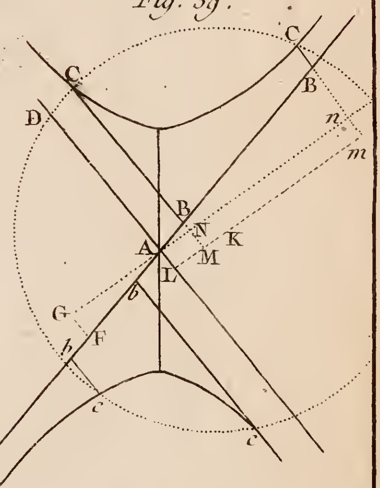


Fig. 39.

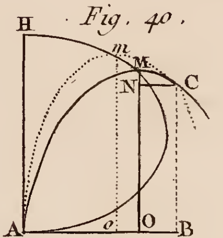


Fig. 40.

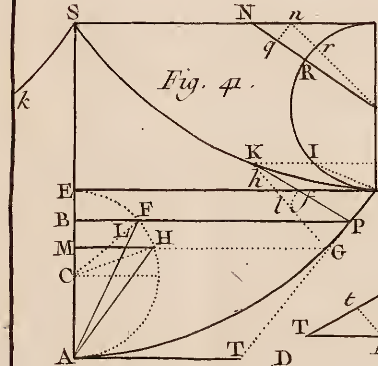


Fig. 41.

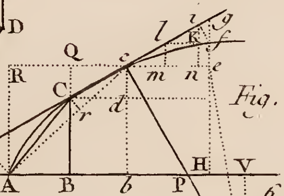


Fig. 42.

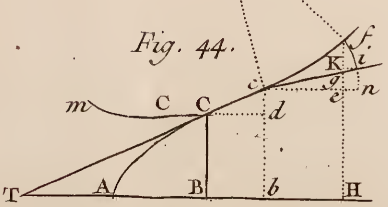


Fig. 44.

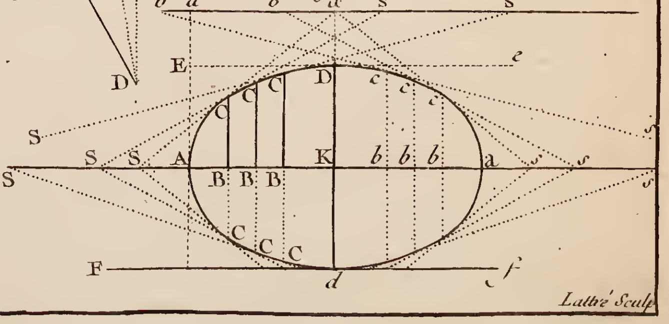
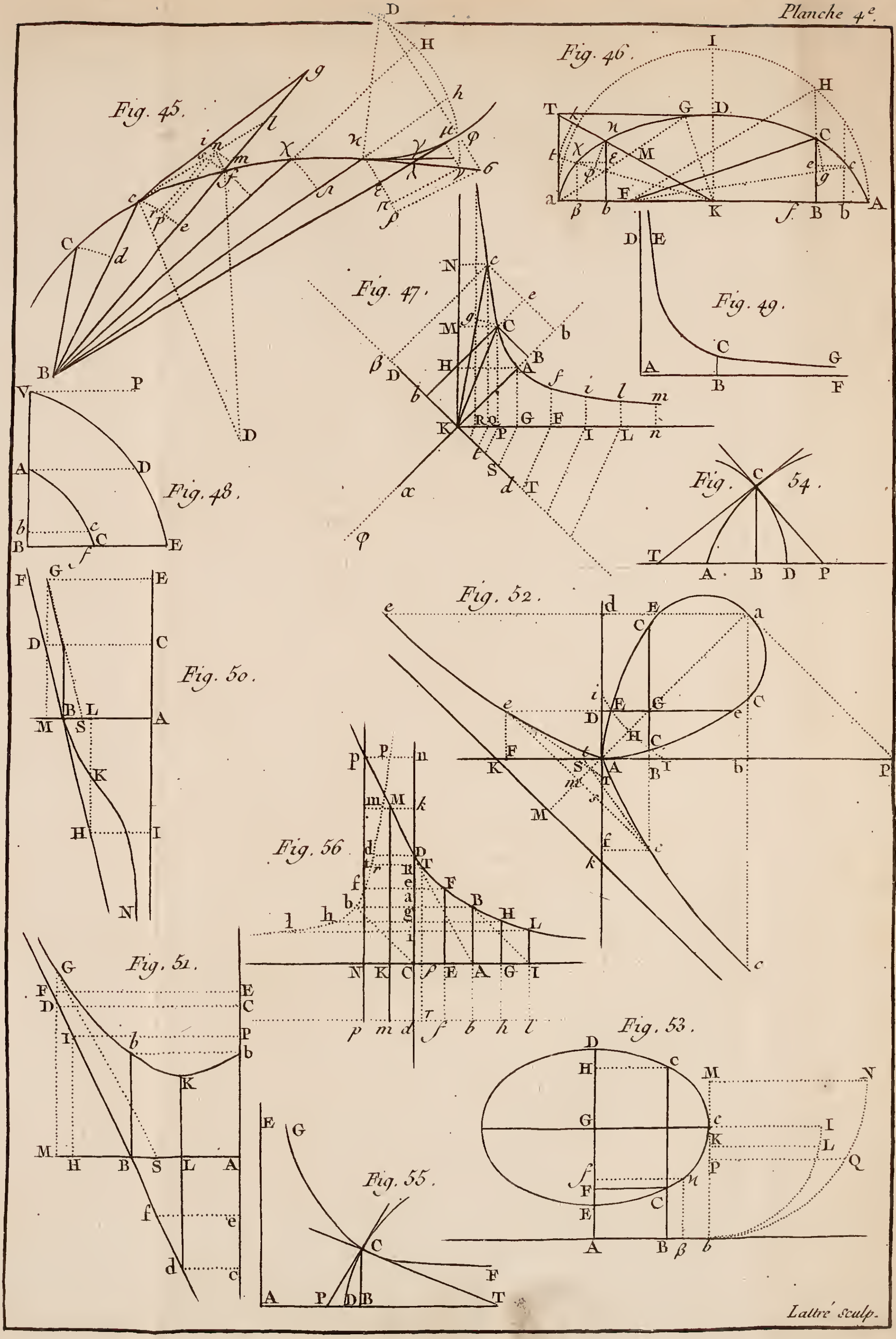


Fig. 43.

Lattré Sculp.

Planche 4e.



Lattré sculp.

Fig. 60.

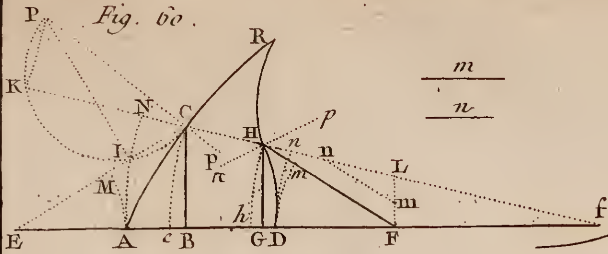


Fig. 57.

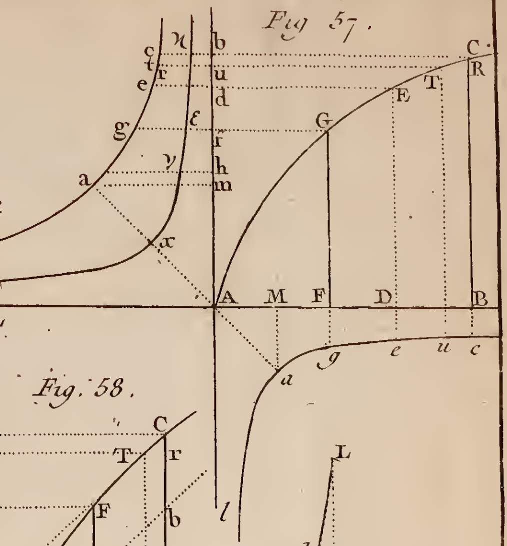


Fig. 59.

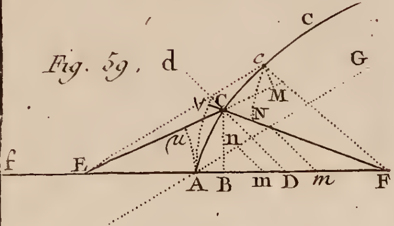


Fig. 58.

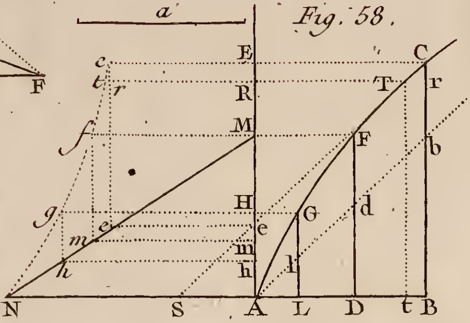


Fig. 62.

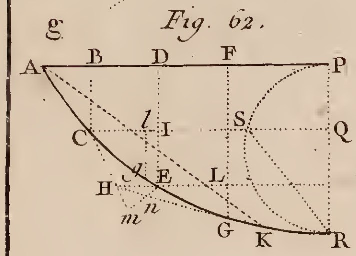


Fig. 61.

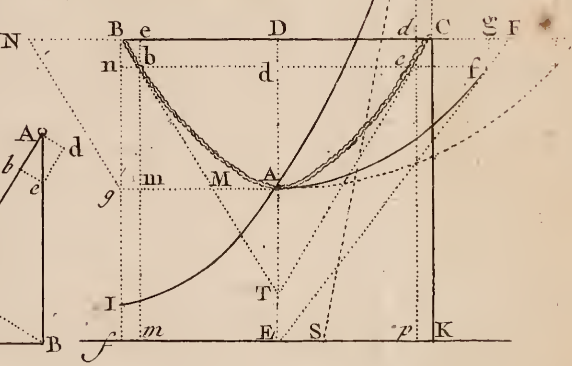
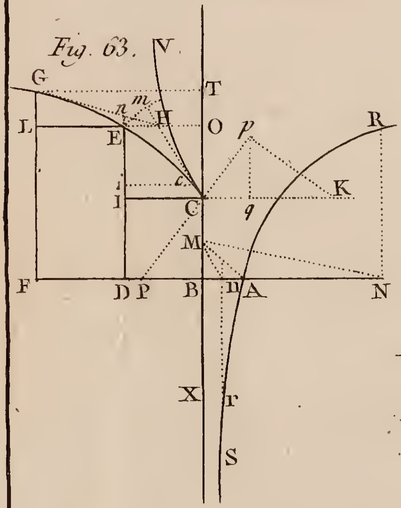


Fig. 63.



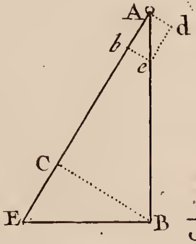


Fig. 64.

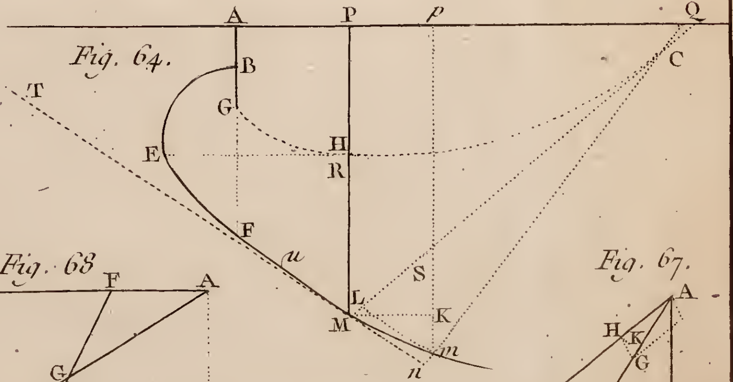


Fig. 65.

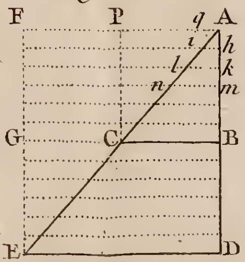


Fig. 68

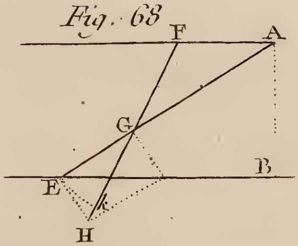


Fig. 67.