

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 15

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 15.1. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgaben

AUFGABE 15.2. Bestimme eine Basis zum Orthogonalraum zu $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$.

AUFGABE 15.3. Es sei V ein K -Vektorraum mit Dualraum V^* . Zeige, dass der Orthogonalraum $U^\perp \subseteq V^*$ zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ und der Orthogonalraum $F^\perp \subseteq V$ zu einem Untervektorraum $F \subseteq V^*$ Untervektorräume sind.

AUFGABE 15.4. Es sei

$$U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

ein Untervektorraum eines K -Vektorraumes. Zeige

$$U^\perp = \{f \in V^* \mid f(u_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, r\}.$$

AUFGABE 15.5.*

Es sei V ein K -Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige im Dualraum V^* die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

AUFGABE 15.6. Es sei V ein K -Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

Zeige

$$V^* = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$$

und dass die Einschränkung der dualen Abbildung

$$V^* \longrightarrow V_1^*$$

auf V_2^\perp ein Isomorphismus ist.

AUFGABE 15.7.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es Linearformen L_1, \dots, L_r auf V mit

$$U = \bigcap_{i=1}^r \text{kern } L_i$$

gibt.

b) Man folgere, dass jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ der Kern einer linearen Abbildung ist und dass jeder Untervektorraum des K^n der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist.

AUFGABE 15.8. Beschreibe den Raum der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen mit Linearformen.

AUFGABE 15.9. Es sei K ein Körper.

a) Es sei L eine $\ell \times m$ -Matrix und N eine $n \times p$ -Matrix. Zeige, dass

$$\{M \mid M \in \text{Mat}_{m \times n}(K), L \circ M \circ N = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ ist.

b) Es sei V ein n -dimensionaler und W ein m -dimensionaler K -Vektorraum und $U \subseteq V$ und $T \subseteq W$ Untervektorräume. Beschreibe den Untervektorraum

$$\{\varphi \in \text{Hom}_K(V, W) \mid \varphi(U) \subseteq T\}$$

mit Hilfe von geeigneten Basen und Teil a).

AUFGABE 15.10. Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^2$$

und

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^2.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 2×2 -Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W .

AUFGABE 15.11.*

Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^3.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3 -Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W .

AUFGABE 15.12. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit einer Basis v_1, \dots, v_n von V und einer Basis w_1, \dots, w_m von W . Zeige, dass

$$v_i^* w_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

eine Basis des Homomorphismenraumes $\text{Hom}_K(V, W)$ ist.

AUFGABE 15.13. Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi: K^3 \longrightarrow K^2$$

im Sinne von Lemma 15.9 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

AUFGABE 15.14. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K -Vektorräumen V und W und es sei

$$\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige

$$\text{rang } \varphi = \text{rang } \varphi^*.$$

AUFGABE 15.15. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K -Vektorräumen V und W und es sei

$$\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung.

a) Zeige, dass für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ die Beziehung

$$\varphi^{*-1}(S^\perp) = (\varphi(S))^\perp$$

gilt.

b) Zeige, dass für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ die Beziehung

$$\varphi^*(T^\perp) = (\varphi^{-1}(T))^\perp$$

gilt.

AUFGABE 15.16. Es sei

$$V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

die abzählbar direkte Summe von \mathbb{R} mit sich selbst mit der Basis e_n , $n \in \mathbb{N}$. Es seien p_k , $k \in \mathbb{N}$, die Projektionen

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto a_k.$$

a) Zeige, dass

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

eine Linearform auf V ist, die keine Linearkombination der Projektionen ist.

b) Zeige, dass die natürliche Abbildung von V in sein Bidual V^{**} nicht surjektiv ist.

AUFGABE 15.17.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeige, dass die Abbildung

$$\text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*), \varphi \longmapsto \varphi^*,$$

die einer linearen Abbildung ihre duale Abbildung zuordnet, linear ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 15.18. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum der Dimension n , und $f_1, \dots, f_r \in V^*$ und

$$F = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subseteq V^*.$$

Zeige, dass diese Linearformen genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\dim(F^\perp) = n - r$$

ist.

AUFGABE 15.19. (6 (4+1+1) Punkte)

Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^3.$$

- a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3 -Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.
- b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.
- c) Bestimme die Dimension von W .

AUFGABE 15.20. (3 Punkte)

Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi: K^4 \longrightarrow K^3$$

im Sinne von Lemma 15.9 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

AUFGABE 15.21. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum mit Dualraum V^* und Bidual V^{**} . Es sei $F \subseteq V^*$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die beiden Orthogonalräume $F^\perp \subseteq V$ (im Sinne von Definition 15.2) und $F^\perp \subseteq V^{**}$ (im Sinne von Definition 15.1) über die natürliche Identifizierung von Raum und Bidual gleich sind.