**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2015/2016**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## Vorlesung 29

### Affine Räume

Untervektorräume eines Vektorraums enthalten stets die 0. Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$, die nicht durch den Nullpunkt verläuft, ist also kein Untervektorraum. Dennoch handelt es sich um ein „lineares Objekt“, das im Rahmen der linearen Algebra studiert werden soll.

Definition 29.1. Es sei $V$ ein Vektorraum. Unter einem *affinen Unterraum* von $V$ versteht man (die leere Menge oder) eine Teilmenge der Form

$$P + U = \{P + u \mid u \in U\},$$

wobei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $P \in V$ ein Vektor ist.

Den Punkt $P$ nennt man auch den *Aufpunkt* und den Untervektorraum $U$ den *Translationsraum* oder *Verschiebungsraum* oder *Parallelvektorraum* oder einfach den zugrunde liegenden Untervektorraum. Die Punkte im affinen Raum stellt man sich als *Ortspunkte*, die Punkte aus $U$ als Verschiebungsvektoren vor. Man kann sich darüber streiten, ob man die leere Menge als affinen (Unter)raum gelten lassen möchte, die folgende Bemerkung, die Definition 29.4 und Lemma 30.1 sprechen aber dafür.

Bemerkung 29.2. Die Lösungsmenge zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem in $n$ Variablen ist ein affiner Unterraum von $K^n$, und zwar ist der zugrunde liegende Vektorraum der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen Gleichungssystem.

Beispiel 29.3. Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

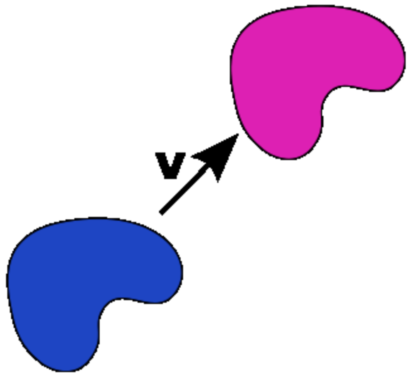
zwischen $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ und einem Element $Q \in W$ ist das Urbild zu $Q$ (die Faser zu $Q$)

$$\varphi^{-1}(Q) = \{P \in V \mid \varphi(P) = Q\}$$

ein affiner Unterraum von $V$. Im nichtleeren Fall kann man jeden Punkt $P_0 \in V$ mit

$$\varphi(P_0) = Q$$

als Aufpunkt verwenden. Der Verschiebungsraum ist dann gerade der Kern von $\varphi$. Durch eine lineare Abbildung wird $V$ zerlegt in eine geschichtete Familie von zueinander parallelen[1] affinen Unterräumen.




Die Wirkungsweise einer Parallelverschiebung in der Ebene auf eine Teilmenge.

Eine weitere Überlegung führt zu einem weiteren abstrakten Begriff. Den Anschauungsraum kann man mit Koordinaten versehen und dadurch mit dem $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Dabei muss man insbesondere willkürlich einen Punkt des Raumes als 0 auszeichnen. Der natürliche Anschauungsraum besitzt keine natürliche Null und auch keine natürliche Addition von Punkten. Dennoch ist der Anschauungsraum mit einem Vektorraum eng verbunden, nämlich dem Vektorraum aller (Parallel-)*Verschiebungen* des Raumes. Eine solche Verschiebung ist eine elementargeometrische Konstruktion, bei der jeder Punkt des Raumes um einen bestimmten Richtungsvektor verschoben wird. Eine solche Verschiebung ist durch jeden Punkt zusammen mit seinem Bildpunkt festgelegt. Die Menge all dieser Verschiebungen bildet einen Vektorraum, wobei die Addition durch Hintereinanderausführung der Verschiebungen gegeben ist. Die Nullverschiebung ist die Identität. Wenn man einen Punkt $P$ des Raumes fixiert, so ergibt sich eine Bijektion zwischen dem Raum und dem Vektorraum der Verschiebungen, indem man den Verschiebungsvektor an $P$ anlegt. Eine solche Fixierung nennt man auch *Wahl eines Ursprungs*.

Definition 29.4. Ein *affiner Raum* über einem $K$-Vektorraum $V$ ist eine Menge $E$ zusammen mit einer Abbildung

$$V \times E \longrightarrow E,\ (v,P) \longmapsto P+v,$$

die den drei Bedingungen

(1) $P+0=P$ für alle $P \in E$,
(2) $(P+v)+w=P+(v+w)$ für alle $v,w \in V$ und $P \in E$,
(3) Zu je zwei Punkten $P,Q \in E$ gibt es genau einen Vektor $v \in V$ mit $Q=P+v$,

[1] Affine Unterräume heißen parallel, wenn zwischen den zugehörigen Untervektorräumen eine Inklusion besteht.

genügt.

Diese Addition nennt man *affine Addition* oder *Translation*. Der zu zwei Punkten $P, Q \in E$ eindeutig bestimmte *Translationsvektor* (oder *Verschiebungsvektor* oder *Verbindungsvektor*) wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet. Es gelten die Regeln

(1) $\overrightarrow{PP} = 0$ für $P \in E$.
(2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ für $P, Q \in E$.
(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ für $P, Q, R \in E$,

wobei dies Identitäten im Vektorraum $V$ sind, siehe Aufgabe 29.8.

Die Gesamtabbildung

$$+ \colon V \times E \longrightarrow E$$

kann man unter verschiedenen Aspekten betrachten. Zu jedem Punkt $P \in E$ ist die Abbildung

$$V \longrightarrow E,\, v \longmapsto P + v,$$

eine Bijektion zwischen dem zugrunde liegenden Vektorraum und dem affinen Raum. Diese Bijektion ist aber nicht kanonisch, da sie von dem gewählten Punkt abhängt. Jeder Vektor $v \in V$ definiert die Abbildung

$$E \longrightarrow E,\, P \longmapsto P + v,$$

die die *Translation* oder *Verschiebung* auf $E$ um den Vektor $v$ heißt. Die Abbildung

$$E \times E \longrightarrow V,\, (P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ},$$

ordnet einem Punktepaar ihren (eindeutig bestimmten) Verbindungsvektor zu. Statt $\overrightarrow{PQ}$ schreibt man manchmal auch $Q - P$.

Jeder Vektorraum $V$ ist auch ein affiner Raum über sich selbst mit der Vektorraumaddition als Addition. Ein affiner Unterraum $P + U \subseteq V$ im Sinne von Definition 29.1 ist ein affiner Raum über $U$.

Beispiel 29.5. Die homogene lineare Gleichung

$$7x - 3y + 4z = 0$$

hat den Lösungsraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

und die inhomogene lineare Gleichung

$$7x - 3y + 4z = 2$$

hat die Lösungsmenge

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die affine Addition ist die Abbildung

$$U \times E \longrightarrow E,\ (u, P) \longmapsto (u + P),$$

die einem Paar bestehend aus einer Lösung der homogenen Gleichung und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ihre Summe zuordnet, die eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Zu zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist die Differenz eine Lösung der homogenen Gleichung. Zu

$$u = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung. Die beiden Lösungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ werden durch den Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ineinander überführt.

## Affine Basen

Für die folgenden Begriffe darf man für die Indexmenge $I$ stets eine endliche Menge nehmen. Im nichtendlichen Fall ist ein Koeffiziententupel so zu interpretieren, dass mit endlich vielen Ausnahmen alle Einträge gleich 0 sind.

Definition 29.6. Eine Familie von Punkten $P_i \in E$, $i \in I$, in einem affinen Raum $E$ über einem $K$-Vektorraum $V$ heißt eine *affine Basis* von $E$, wenn zu einem $i_0 \in I$ die Vektorfamilie

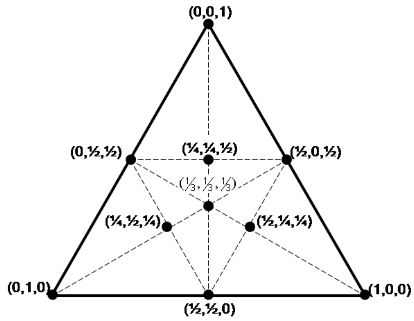
$$\overrightarrow{P_{i_0}P_i},\ i \in I \setminus \{i_0\},$$

eine Basis von $V$ ist.

Wegen

$$\overrightarrow{P_{i_0}P_i} = \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_1}} + \overrightarrow{P_{i_1}P_i} = -\overrightarrow{P_{i_1}P_{i_0}} + \overrightarrow{P_{i_1}P_i}$$

kann man die Basisvektoren $\overrightarrow{P_{i_0}P_i}$ zum Ursprungspunkt $P_{i_0}$ als Linearkombination durch die Vektoren zu einem beliebigen anderen Ursprungspunkt $P_{i_1}$ der Familie ausdrücken. Daher ist die Eigenschaft, eine affine Basis zu sein, unabhängig von dem gewählten $P_{i_0}$.




Die baryzentrischen Koordinaten in der Ebene, wobei die affinen Basispunkte die Eckpunkte eines Dreiecks bilden.

Definition 29.7. Zu einer Familie $P_i$, $i \in I$, von Punkten in einem affinen Raum $E$ und einem Zahltupel $a_i$, $i \in I$, mit

$$\sum_{i \in I} a_i = 1$$

(bei unendlichem $I$ ist dies so zu verstehen, dass nur endlich viele der $a_i$ von 0 verschieden sein können) heißt die Summe $\sum_{i \in I} a_i P_i$ *baryzentrische Kombination* der $P_i$. Der zugehörige Punkt in $E$ ist durch

$$\sum_{i \in I} a_i P_i = Q + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i}$$

gegeben.

Lemma 29.8. *Zu einer Familie $P_i$, $i \in I$, von Punkten in einem affinen Raum $E$ ist durch eine baryzentrische Kombination*

$$\sum_{i \in I} a_i P_i$$

*ein eindeutiger Punkt in $E$ definiert.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 29.12. □

Satz 29.9. *Es sei $P_i$, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum $E$ über dem $K$-Vektorraum $V$. Dann gibt es für jeden Punkt $P \in E$ eine eindeutige baryzentrische Darstellung*

$$P = \sum_{i \in I} a_i P_i.$$

*Beweis.* Sei $i_0 \in I$ fixiert. Es gibt dann in $V$ eine eindeutige Darstellung

$$\overrightarrow{P_{i_0}P} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i}.$$

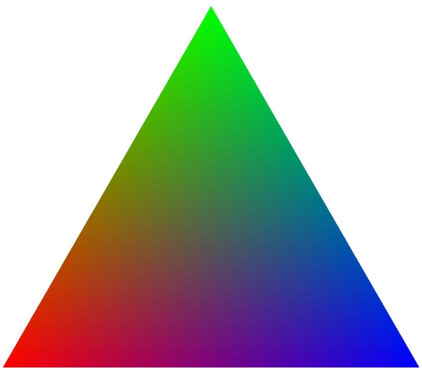
Wir setzen

$$a_{i_0} := 1 - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i .$$

Dann ist $\sum_{i \in I} a_i = 1$ und

$$\begin{aligned} P &= P_{i_0} + \overrightarrow{P_{i_0}P} \\ &= P_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} \\ &= P_{i_0} + a_{i_0}\overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0}} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} \\ &= P_{i_0} + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i}. \end{aligned}$$

Es gibt also eine solche eindeutige Darstellung mit $P_{i_0}$ als Ursprung. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die $a_i$, $i \neq i_0$, durch die eindeutig bestimmten Koeffizienten der Vektorraumbasis festgelegt sind und dass $a_{i_0}$ durch die baryzentrische Bedingung festgelegt ist. □



Die Farben bei additiver Farbmischung mit den Primärfarben Rot, Blau und Grün (dies entspricht den drei Zapfen im menschlichen Auge). Da es für das Auge nur auf das Mischverhältnis der drei Farben ankommt, kann man sich auf Linearkombinationen $(r, g, b)$ mit $r + g + b = 1$ (und nichtnegativen Koeffizienten) beschränken. Farben werden also durch baryzentrische Koordinaten beschrieben, dadurch spart man eine Dimension.

Definition 29.10. Es sei $P_i$, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum $E$ über dem $K$-Vektorraum $V$. Dann nennt man die zu einem Punkt $P \in E$ eindeutig bestimmten Zahlen

$$(a_i, i \in I) \text{ mit } \sum_{i \in I} a_i = 1$$

mit

$$P = \sum_{i \in I} a_i P_i$$

die *baryzentrischen Koordinaten* von $P$.

Beispiel 29.11. Es sei $P_i$, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum $E$ über dem $K$-Vektorraum $V$. Dann besitzt der Punkt $P_j$ ($j \in I$) die baryzentrischen Koordinaten $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, wobei die 1 an der $j$-ten Stelle steht (und $I$ als endlich und geordnet angenommen wird).

Definition 29.12. Es sei $E$ ein affiner Raum mit einer affinen Basis

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1} .$$

Dann nennt man $n$ die *Dimension* von $E$.

Damit ist die Dimension von einem nichtleeren affinen Raum gleich der Dimension des zugrunde liegenden Translationsraumes. Dies zeigt zugleich, dass diese Zahl wohldefiniert ist. Der leere affine Raum erhält die Dimension $-1$.

## Affine Unterräume

Definition 29.13. Es sei $E$ ein affiner Raum über dem $K$-Vektorraum $V$. Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt *affiner Unterraum*, wenn

$$F = P + U$$

ist, mit einem Punkt $P \in E$ und einem $K$-Untervektorraum $U \subseteq V$.

Diese Definition deckt sich mit der eingangs erwähnten Definition von affinen Unterräumen in einem Vektorraum.

Lemma 29.14. *Es sei $E$ ein affiner Raum über dem $K$-Vektorraum $V$. Für eine Teilmenge $F \subseteq E$ sind äquivalent.*

(1) *$F$ ist ein affiner Unterraum von $E$.*
(2) *Zu $P_1, \ldots, P_n \in F$ und Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ist auch $\sum_{i=1}^n a_i P_i \in F$.*
(3) *Mit je zwei Punkten $P, Q \in F$ und $r, s \in K$ mit $r + s = 1$ ist auch $rP + sQ \in F$.*

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei $F = P + U$ mit $P \in F$ und einem Untervektorraum $U \subseteq V$. Dann ist $P_i = P + u_i$ mit einem $u_i \in U$. Nach Definition einer baryzentrischen Kombination ist

$$\sum_{i=1}^n a_i P_i = P + \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{PP_i} = P + \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

ein Element von $F$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Dies ist eine Abschwächung.

(3) $\Rightarrow$ (1). Wir wählen einen Punkt $P \in F$ und betrachten

$$U := \left\{ \overrightarrow{PQ} | \, Q \in F \right\} \subseteq V.$$

Es ist $0 \in U$. Zu $Q, Q' \in F$ gehören nach Voraussetzung auch $-P + 2Q$ und $-P + 2Q'$ zu $F$. Damit gehört wiederum auch

$$\frac{1}{2}(-P + 2Q) + \frac{1}{2}(-P + 2Q') = -P + Q + Q'$$

zu $F$, wobei die Gleichheit auf Aufgabe 29.15 beruht. Dieser Punkt ist aber gleich

$$P - \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'} = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'},$$

so dass $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'}$ zu $U$ gehört. Somit ist $U$ abgeschlossen unter der Vektoraddition. Sei $Q \in F$ und $s \in K$. Dann gehört nach Voraussetzung auch

$$(1 - s)P + sQ = P + s\overrightarrow{PQ}$$

zu $F$ und damit gehört $s\overrightarrow{PQ}$ zu $U$. Also ist $F = P + U$ mit einem Untervektorraum $U$. $\square$

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Translation illustration.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf gemeinfrei, Lizenz = 2

Quelle = Barycentric coordinates 1.png , Autor = Benutzer Gandalf61 auf en.wikipedia, Lizenz = GFDL 5

Quelle = Barycentric RGB.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 6