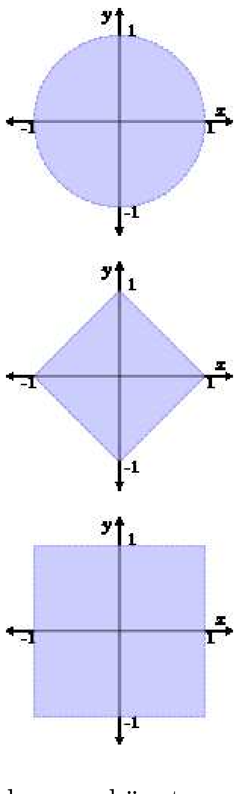
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 52

Auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt es sehr viele verschiedene Normen, allerdings hängen sehr viele wichtige Begriffe wie die Konvergenz einer Folge, die Kompaktheit einer Teilmenge, die Stetigkeit einer Abbildung gar nicht von der Norm ab, sondern nur von der Topologie. Daher kann man sich häufig eine für das Problem besonders angemessene Norm frei wählen und sich dadurch viel Arbeit sparen. In dieser Vorlesung besprechen wir die topologischen Grundlagen für diesen Zugang, wobei wir weitgehend auf Beweise verzichten, die sich in einem Anhang finden. In den nächsten beiden Vorlesungen werden wir diese Methoden insbesondere auf das Konvergenzverhalten von Potenzen einer Matrix anwenden.

Teilmengen in einem metrischen Raum



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Norm bzw. Metrik ab.

Definition 52.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $\epsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Es ist

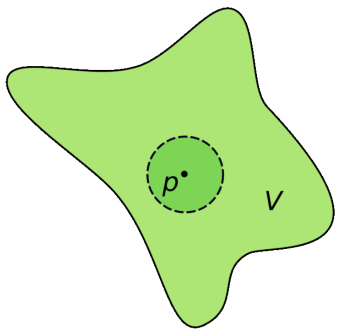
$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

die *abgeschlossene ϵ-Kugel* um x.

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Norm. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $U(x, \epsilon)$ einfach das beidseitig offene Intervall $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ und $B(x, \epsilon)$ ist einfach das beidseitig abgeschlossene Intervall $[x-\epsilon, x+\epsilon]$.



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin gleich mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

Definition 52.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen* (in (M, d)), wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U$$

existiert.

Definition 52.3. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $M \setminus A$ offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist nicht das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge. Offene Bälle sind in der Tat offen und abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen, siehe Aufgabe 52.1 und Aufgabe 51.2.

Lemma 52.4. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.*

(2) *Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung*

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

(3) *Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt*

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

Beweis. Siehe Aufgabe 52.3. □

Die offenen Mengen in einem metrischen Raum bilden somit eine Topologie im Sinne der folgenden Definition.

Definition 52.5. Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Menge X zusammen mit einer Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X, die folgende strukturelle Bedingungen erfüllt (die Teilmengen $U \subseteq X$, die zu $\mathcal{T}$ gehören, nennt man *offene Mengen*).

(1) Die leere Menge und die ganze Menge X sind offen (d.h. gehören zu $\mathcal{T}$).
(2) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist wieder offen, d.h. mit $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$.
(3) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen, d.h. mit $U_i \in \mathcal{T}$ für jedes $i \in I$ (zu einer beliebigen Indexmenge I) ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Äquivalente Normen

Definition 52.6. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei Normen $|| - ||_1$ und $|| - ||_2$ heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie, also die gleichen offenen Mengen definieren.

Beispiel 52.7. Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die euklidische Norm, die Summennorm und die Maximumsnorm äquivalent. Sei dazu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, wobei ohne Einschränkung x_1 betragsmäßig der größte Eintrag sei. Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} ||x||_{\max} &= |x_1| \\ &= \sqrt{x_1^2} \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{nx_1^2} = \sqrt{n}\,|x_1| = \sqrt{n}\,||x||_{\max}$$

und diese ergeben im Wesentlichen die Äquivalenz von euklidischer Norm und Maximumsnorm.

Wir werden später sehen, dass auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum zwei Normen stets äquivalent sind. Dies bedarf einiger Vorbereitungen, die insbesondere den Begriff der Kompaktheit betreffen.

Kompaktheit

Definition 52.8. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ eines metrischen Raumes M heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl b mit

$$d(x,y) \leq b \text{ für alle } x,y \in T$$

gibt.

Definition 52.9. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Die Beschränktheit und damit nach der vorstehenden Definition auch die Kompaktheit hängt wesentlich von der gewählten Metrik ab. Es ist wichtig, auch einen Kompaktheitsbegriff zu besitzen, der rein topologisch ist.

Definition 52.10. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge } I$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ derart gibt, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Der folgende Satz heißt *Satz von Heine-Borel.*

Satz 52.11. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, wobei der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik versehen sei. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *T ist überdeckungskompakt.*
2. *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T besitzt einen Häufungspunkt in T.*
3. *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T besitzt eine in T konvergente Teilfolge.*
4. *T ist abgeschlossen und beschränkt.*

Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum M durch den Abstand im Definitionsraum L kontrollierbar ist. Sei $x \in L$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte $x' \in L$, die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ nahe an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Definition 52.12. Seien (L, d_1) und (M, d_2) metrische Räume,

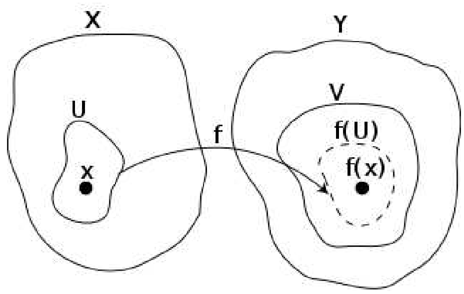
$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und $x \in L$. Die Abbildung f heißt *stetig in* x, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x für jedes $x \in L$ ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion $T \subseteq M$ einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben.



Satz 52.13. *Es sei*

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig in jedem Punkt $x \in L$.*
(2) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*
(4) *Für jede offene Menge $V \subseteq M$ ist auch das Urbild $f^{-1}(V)$ offen.*

Die Eigenschaft (4) zeigt, dass es sich bei der Stetigkeit um eine rein topologische Eigenschaft handelt.

Lineare stetige Abbildungen

Eine lineare Abbildung ist im Allgemeinen nicht stetig. Allerdings gibt es eine relativ einfache Charakterisierung der Stetigkeit einer linearen Abbildung, man muss nämlich nur die Stetigkeit im Nullpunkt überprüfen. Weiter unten ergibt sich, dass diese Eigenschaft bei endlichdimensionalen Vektorräumen stets erfüllt ist.

Satz 52.14. *Es seien V und W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaft äquivalent.

(1) *φ ist stetig.*
(2) *φ ist stetig im Nullpunkt.*
(3) *Die Menge*
$$\{\varphi(v) \mid v \in V, \, || v || = 1\}$$
ist beschränkt.

Beweis. Von (1) nach (2) ist klar. Von (2) nach (3). Es gibt insbesondere für $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ derart, dass aus

$$|| v || \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|| \varphi(v) || \leq 1$$

folgt. Aus

$$|| v || \leq 1$$

folgt dann wegen der skalaren Verträglichkeit

$$|| \varphi(v) || \leq \frac{1}{\delta}.$$

Von (3) nach (1). Sei C eine obere Schranke für die Norm der Werte auf der Einssphäre. Sei $v \in V$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(v), \varphi(w)) &= || \varphi(v) - \varphi(w) || \\ &= || \varphi(v - w) || \end{aligned}$$

$$= \; ||v-w|| \cdot ||\varphi\left(\frac{(v-w)}{||v-w||}\right)||$$
$$\leq \; ||v-w|| \cdot C.$$

Zu $\epsilon > 0$ kann man also

$$\delta := \epsilon / C$$

wählen. □

Äquivalenz von Normen

LEMMA 52.15. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es seien $||-||_1$ und $||-||_2$ Normen auf V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die beiden Normen sind äquivalent.*
(2) *Die Identität*
$$V \longrightarrow V$$
ist stetig, unabhängig davon, ob man V links mit der ersten und rechts mit der zweiten Norm versieht oder umgekehrt.
(3) *Die $||-||_1$-Einheitskugel ist beschränkt in der $||-||_2$-Norm und umgekehrt.*
(4) *Es gibt reelle Zahlen a, b mit*
$$||v||_2 \leq a \, ||v||_1$$
und
$$||v||_1 \leq b \, ||v||_2$$
für alle $v \in V$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich aus Satz 52.13, die Äquivalenz von (2) und (3) aus Satz 52.14. Die Eigenschaften (3) und (4) sind aufgrund der skalaren Verträglichkeit der Normen äquivalent. □

SATZ 52.16. *Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 52.15. Die Norm und die Topologie hängen nur von dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ab, wir können also

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

annehmen. Zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n \in V$ gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

mit $e_i \mapsto v_i$. Da unter dem Isomorphismus φ durch

$$||u||' := ||\varphi(u)||$$

eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird, können wir direkt $V = \mathbb{R}^n$ annehmen. Wir vergleichen nun eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm bzw. der euklidischen Norm, von denen wir nach Beispiel 52.7 schon wissen, dass sie untereinander äquivalent sind. Es sei $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Wegen

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|a_i e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot \|e_i\| \\ &\leq n \cdot \max\left(\|e_i\|, i = 1, \ldots, n\right) \|v\|_{\max} \end{aligned}$$

sind hinreichend kleine $\|-\|_{\max}$-offene Bälle in $\|-\|$-offenen Bällen enthalten. Die Topologie zur Maximumsnorm ist also mindestens so fein wie die Topologie zu jeder anderen Norm. Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir die Identität

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei die Topologie links durch die euklidische (bzw. Maximumsnorm) und rechts durch die Norm gegeben sei. Diese Abbildung ist nach der bisherigen Überlegung stetig. Die euklidische Einheitssphäre S links ist kompakt und nach Satz Anhang B.12 ist S bezüglich der Norm $\|-\|$ ebenfalls überdeckungskompakt. Diese nennen wir S'. Da $\mathbb{R}^n$ mit jeder Norm ein Hausdorff-Raum ist, ist S' wegen Aufgabe 53.21 insbesondere abgeschlossen. Da der Nullpunkt nicht zu S' gehört, gibt es ein

$$\delta > 0$$

mit

$$U(0, \delta) \cap S' = \emptyset$$

(der offene Ball in der $\|-\|$-Topologie). Für $v \neq 0$ ist wegen $\frac{v}{\|v\|_{\text{euk}}} \in S = S'$ also

$$\|\frac{v}{\|v\|_{\text{euk}}}\| \geq \delta$$

und somit

$$\|v\|_{\text{euk}} \leq \frac{1}{\delta} \|v\| .$$

□

Satz 52.17. *Es seien V und W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Es sei V endlichdimensional. Dann ist φ stetig.

Beweis. Da das Bild der Abbildung ebenfalls ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, können wir annehmen, dass beide Räume endlichdimensional sind. Ferner können wir annehmen, dass $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ ist und nach Satz 52.16 können wir annehmen, dass beidseitig die Maximumsnorm vorliegt. Es sei a der maximale Betrag der Einträge in der beschreibenden Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ von φ bezüglich der Standardbasen. Für $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|| v ||_{\max} \leq 1$$

ist dann

$$|| \varphi(v) ||_{\max} = || \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j \end{pmatrix} ||_{\max} = \max \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right|, i = 1, \ldots, m \right) \leq na.$$

Daher folgt die Stetigkeit aus Satz 52.14. $\square$

Abbildungsverzeichnis