Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

AUFGABE 13.1. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x .$$
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} .$$
(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 .$$

AUFGABE 13.2. Zeige, dass in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ des Kosinus hyperbolicus die Koeffizienten c_n für ungerades n gleich 0 sind.

AUFGABE 13.3.*

Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

AUFGABE 13.4. Beweise die Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen, also

a)
$$\sinh(x+y) \,=\, \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$
b)
$$\cosh(x+y) \,=\, \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

AUFGABE 13.5. Zeige, dass der Tangens hyperbolicus die Abschätzungen
$$-1 \leq \tanh x \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
erfüllt.

Aufgabe 13.6. Es sei

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$$

ein Polynom. Zeige, dass P genau dann eine ungerade Funktion definiert, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes ist.

Aufgabe 13.7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f, ob f eine gerade Funktion ist?

Aufgabe 13.8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f, ob f eine ungerade Funktion ist?

Aufgabe 13.9. Zeige, dass die Summe von zwei geraden Funktionen wieder gerade und die Summe von zwei ungeraden Funktionen wieder ungerade ist. Kann man etwas über die Summe von einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion aussagen?

Aufgabe 13.10. Zeige, dass das Produkt von zwei geraden Funktionen wieder gerade, das Produkt von zwei ungeraden Funktionen gerade und das Produkt von einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade ist.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass es genau eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die sowohl gerade als auch ungerade ist.

Aufgabe 13.12. Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als $f = g + h$ mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Aufgabe 13.13. Welche Punkte kennen Sie auf dem rationalen Einheitskreis

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}?$$

Aufgabe 13.14. Beschreibe die obere Hälfte des Einheitskreises und die untere Hälfte des Einheitskreises als den Graphen einer Funktion.

Aufgabe 13.15. Wir betrachten den rationalen Einheitskreis

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und die Gerade

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x + y = 0\}.$$

(1) Bestimme die Schnittpunkte $E \cap G$.
(2) Wie sieht es aus, wenn man statt $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nimmt?
(3) Kann man einen Kreis erst dann verstehen, wenn man die reellen Zahlen verstanden hat?
(4) Welche Beziehung besteht zum Zwischenwertsatz?

Aufgabe 13.16. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $2y - 3x + 1 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2,2)$ und den Radius 5 gegeben ist.

Aufgabe 13.17.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1,1)$ und $(4,-2)$ verläuft.

Aufgabe 13.18.*

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2, wobei K_1 den Mittelpunkt $(3,4)$ und den Radius 6 und K_2 den Mittelpunkt $(-8,1)$ und den Radius 7 besitzt.

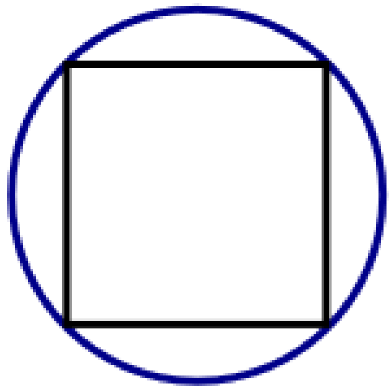
Aufgabe 13.19. Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a,b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M,P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

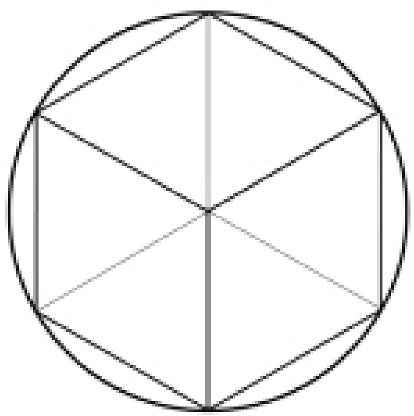
Aufgabe 13.20.*

Wir betrachten einen Kreis (mit Radius 1) und darin eingeschriebene regelmäßige n-Ecke.



(1)

In den Kreis sei ein Quadrat eingeschrieben. Bestimme dessen Flächeninhalt und dessen Umfang.



(2)

In den Kreis sei ein regelmäßiges 6-Eck eingeschrieben. Bestimme dessen Flächeninhalt und dessen Umfang.

(3) Der Flächeninhalt eines eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist eine Approximation für den Flächeninhalt des Kreises und der Umfang eines solchen n-Ecks ist eine Approximation für den Umfang des Kreises. Welche Approximationen sind besser?

Aufgabe 13.21.*

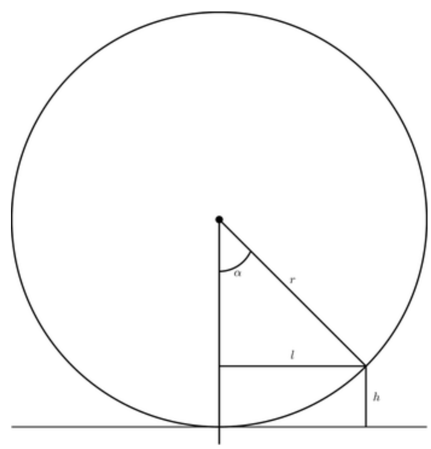
Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem nichtausgearteten Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

AUFGABE 13.22. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

AUFGABE 13.23.*



Frau Dr. Eisenbeis möchte für ihre Neffen Richy und Franky eine Fahrrad-Sprungrampe basteln. Die Steigung soll entlang eines Kreissegmentes der Länge (alle Angaben in Meter) $\ell = 1,2$ verlaufen und eine Sprunghöhe von $h = 0,2$ erreichen (siehe Bild). Welche (implizite) Bedingung muss der Winkel α erfüllen (die Bedingung muss so sein, dass sie mit einer Intervallhalbierung gelöst werden könnte, diese muss aber nicht durchgeführt werden)?

AUFGABE 13.24. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

AUFGABE 13.25. Berechne

$$\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5\right)^2 .$$

Was fällt dabei auf und wie kann man es erklären?

AUFGABE 13.26. Zeige $-1 \leq \sin x \leq 1$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.27.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 13.28.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

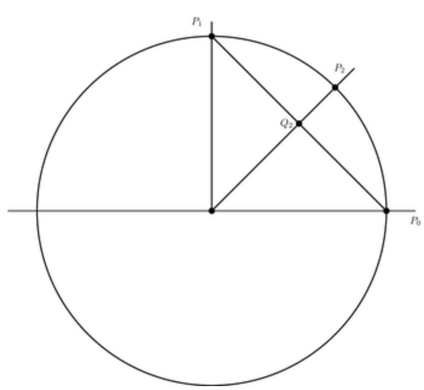
Aufgabe 13.29. (3 Punkte)

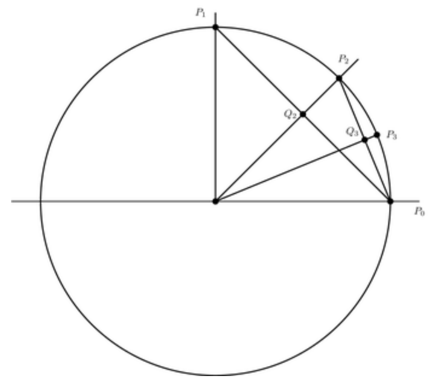
Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 13.30. (3 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $3y - 4x + 2 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2, 5)$ und den Radius 7 gegeben ist.

Aufgabe 13.31. (6 Punkte)





Wir betrachten den Einheitskreis, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Wir setzen $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und definieren rekursiv die Folge P_n (in der Ebene) durch

$$Q_n = \frac{1}{2}(P_0 + P_{n-1})$$

(d.h. Q_n ist der Halbierungspunkt der Strecke zwischen P_0 und P_{n-1}) und P_n ist der Durchstoßungspunkt der Halbgeraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Q_n mit dem Kreisbogen. Wir betrachten die Längen $d_n = d(P_0, P_n)$ als eine Approximation der Länge des Kreisbogens zwischen P_0 und P_n und somit

$$x_n = 2^n d_n$$

als eine Approximation der Länge des halben Kreisbogens (also von π). Da in der Berechnung der Punkte P_n und der Längen d_n Quadratwurzeln (Satz des Pythagoras) auftreten, können diese nur mit einem bestimmten Fehler durch rationale Zahlen approximiert werden.

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das eine Folge y_n von Approximationen ($n \geq 1$) für x_n berechnet und ausdruckt. Bei der Berechnung von y_n sollen alle Quadratwurzeln, die in die Berechnung von x_n irgendwo eingehen, mit n Schritten mit dem Heronverfahren zum Startwert 1 berechnet werden. Das Programm soll also zunehmend bessere Approximationen für die vorhergehenden Hilfspunkte verwenden, die Berechnung von y_n erfordert, dass man stets neue, bessere Approximationen für $P_2, \ldots, P_n$ bestimmt.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die rationale Zahlen enthalten können.

• Die natürlichen Zahlen liegen in einer Datenbank bereit (diese müssen also nicht erzeugt werden).

• Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann die rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division durch eine Zahl $\neq 0$) ausführen und das Ergebnis in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.

• Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.

Das Programm soll unendlich laufen und die Approximationen $y_1, y_2, y_3, ...$ ausgeben.

(Es ist $y_1 = 3$ und $y_2 = \frac{58540996}{19126309} = 3,060757619...$. Es wird nicht behauptet, dass die Folge y_n wirklich gegen π konvergiert).

Aufgabe 13.32. (5 Punkte)

Beweise das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

für den Sinus unter Bezug auf die definierenden Potenzreihen.

Aufgabe 13.33. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{5\sin^3 n - 6n^4 + 13n^2 + (\sin n)(\cos(n^2))}{7n^4 - 5n^3 + n^2 \sin^2(n^3) - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 13.34. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

Abbildungsverzeichnis