$12.00 3

21144

中國工程師手冊

(3) 算　　學

汪胡楨

3C

2

厚生出版社

2044

中國工程師手冊總目

A. 基本手册

B. 土木手册

C. 水利手册

3 1772 8995 0

MG
012
2

中國工程師手册

基本手册

(汪胡楨主編)

第二編 算 學

〔汪胡楨〕

目 錄

厚 社

2044

第二編　算學

第一章　算術

第1節　數名

1. 命數法　普通所用者爲十進命數法。整數之最小者，命爲一，自一遞次增一命爲二，三，四，五，六，七，八，九，十。十即一之十倍，自十次第十倍之，命爲百，千，萬。自萬以上之命數法，古有上中下三等之異。徐岳數術記遺云：『黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉。十等者，億，兆，京，垓，秭，穰，溝，澗，正，載。三等者謂上中下也。其下數者十十變之，若言十萬曰億，十億曰兆，十兆曰京；中數者萬萬變之，若言萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京；上數者數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也。下數淺短，計事則不盡，上數宏廓，世不可用，故其傳業，惟有中數耳。』然今仍有採用下數者，且所用之中數，又與徐岳所記者異。蓋本自數理精蘊，以四位爲一節，係以萬變，非以萬萬變，即萬萬爲億，萬億爲兆，萬兆曰京是也，由是言之，以億兆等所記之數，不免有游移不確實之弊。民國二十年六月教育部通令，在記數名詞未確定前，將算學中有歧義之億兆等字暫取消，所有萬以上之數目即在萬以上累冠數字，如十萬，百萬，千萬，萬萬，十萬萬，百萬萬，……等。

世界通行之命數法，則以三位爲一節，至千而一易，故萬爲十千，百萬則另定一名爲 Million，十萬萬爲 Billion，萬萬萬爲 Trillion。現我國會計，統計，工程之記數，均已一律採用三位一節之制。

整數以下，亦以十進，以小數點區分之，曰小數。小數依次名爲

十分之幾，百分之幾，千分之幾，萬分之幾等。亦有順次名之曰分，厘，毫，絲，忽，微，纖，沙，塵，等者。凡整數帶有小數者，曰帶小數。

2. 阿拉伯數字　阿拉伯數字乃阿拉伯人傳出之數字，即 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 是也，今世界已通用之。

3. 羅馬數字　羅馬數字係以 $IVXLCDM$ 等字母及一橫畫組成。凡字母上冠以橫畫者，係指乘以千倍之意。各字母之意義如下：

$I=1$，$V=5$，$X=10$，$L=50$，$C=100$，$D=500$，$M=1000$，$\bar{L}=50,000$，$\bar{D}=500,000$。

凡在數字之前，並不置有較小之數字時，則以各字母代表之數相加作為所代表之數值，例如，$XX=20$，$VI=6$。凡在數字之前，置有較小之數字時，則應將該數減去之，例如，$IV=4$，$XL=40$，$CXLV=145$。茲再舉例如次：

$IX=9$，$XIII=13$，$XIV=14$，$LV=55$，$XLII=42$，$XCVI=96$，$MDCI=1601$，$\overline{IV}CCXL=4240$。

4. 錢穀數字　錢穀之數用本字則奸人得以盜改，故易之以壹貳叁肆伍陸柒捌玖拾佰仟等字。按明陸容菽園雜記謂此等字相傳始於明初刑部尚書開濟，然宋邊實崑山志已有之。今契約票據均用之，以防改竄。

5. 商碼　又稱號碼，舊時工商業記賬用之，為 〡 〢 〣 〤 〥 〦 〧 〨 〩 〇。

6. 十二進數　除十進外，尚有以11為底數之十一進數與12為底數之十二進數等。十二進數今世殘存者尚多，例如十二個為一打，十二打為羅，十二羅為大羅，十二溫司為一磅(英國金衡)，十二吋為一呎，十二時辰為一日，十二月為一年，英幣十二便士為一先令。因12可用2除盡二次，3，4，6各除盡一次，故有時覺其便利。

第2節　基本算法

7. 加法　加之符號為＋。相加之各數，均名為加數；相加之結果，名曰和。例如 $7+8=15$，7與8均為加數，15為和。

8. 減法　減之符號爲 −。減去之數名爲減數，被減之數名爲被減數。相減之結果名曰差。例如 $9-6=3$，9 爲被減數，6 爲減數，3 爲差。

9. 乘法　乘之符號爲 ×。用以相乘之數名爲乘數，被乘之數名爲被乘數，相乘之結果名爲積。例如 $4\times5=20$，4 爲被乘數，5 爲乘數，20 爲積。

10. 除法　除之符號爲爲 ÷。用以相除之數名爲除數，被除之數名爲被除數，相除之結果曰商，除而未盡之部分曰餘數。例如 $16\div5=3$ 餘 1。16 爲被除數，5 爲除數，3 爲商，1 爲餘數。

11. 倒數　以 1 爲被除數而以任何整數除之，其商即爲該整數之倒數。例如 $1\div8=.125$，則 0.125 爲 8 之倒數。倒數之算表見第一編表 5。凡遇除數有數位時，先由算表求其倒數，再以被除數乘之，可節省除法之工夫。

12. 百分數與千分數　凡任何數量之變化量可以發生百分之幾之變化表示之。將該數量除變化量，再乘以100，即得所求之百分數，其符號爲％。例如某商品之成本爲十六元，售價爲十八元，則利益爲二元，以百分法計之，則利益爲成本之 $\frac{2}{16}\times100=12.5\%$。同樣可求得千分數，其符號爲‰，萬分數，其符號爲‱。

13. 運算之次序　算式中倘 + − × ÷ 四種符號並見，則應先求 × 與 ÷ 之結果，然後求 + 與 − 之結果。倘 × 與 ÷ 相連，則應照其先後次序而運算。例如

$$3+10\div2\times4-1=3+5\times4-1=3+20-1=22。$$

14. 括弧　爲避免混淆起見，算式中可引用小括弧（ ），中括弧［ ］，大括弧｛ ｝及括線——，以分成段落。凡在同一括弧內或同一括線下之算式應先運算，然後合併之。例如

$$2\times\{[10\div(3-1)]+4\div\overline{3-1}\}=2\times\{5+4\div2\}=2\times7=14。$$

15. 因數　凡某數可由另一整數除盡者，則此另一整數即稱爲某整數之因數。凡整數祇可爲本數或 1 所除盡，而並無其他因數

者，名爲質數。凡整數之含有因數者名爲合數。

凡整數之能除盡另一整數者，則稱此整數爲另一整數之約數。將整數分成若干因數之方法名爲析因數法。

16. 階乘數　凡以某數與按一遞減之數，至一爲止，相乘而得之積名爲該數之階乘數。例如，$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\times2\times1$，即稱爲$n$之階乘數，其符號爲 $n!$（或作$\underline{n|}$）。

17. 最大公約數　若有二個或二個以上之整數，得以同一整數除盡者，此同一整數名爲公約數。最大之公約數，名爲最大公約數。

欲求兩數或兩數以上之最大公約數，可求出各數之質因數，然後將各數公有之質因數相乘。所得之積即屬最大公約數。

例：求 78，126 與 234 之最大公約數。

$$78=2\times3\times13$$
$$126=2\times3\times3\times7$$
$$234=2\times3\times3\times13$$

最大公約數$=2\times3=6$。

若欲求兩大數之最大公約數，可將較小之數除較大之數，命所得之餘數爲 A；乃以 A 爲除數，較小之數爲被除數，相除後得餘數 B；再以 B 爲除數，A 爲被除數，得餘數 C；如是輾轉相除至除盡爲止。除盡時之除數即屬此兩大數之最大公約數。

例：求 575 與 782 之最大公約數。

```
575)782(1
    575
    ---
A   207)575(2
        414
        ---
B       161)207(1
            161
            ---
C            46)161(3
                138
                ---
D                23)46(2
                    46   最大公約數=23
                    ==
```

18. 最小公倍數　若有一整數同時爲其他二個以上整數之倍

數者，則此整數爲其他諸整數之公倍數。公倍數中之最小者謂之最小公倍數。

凡分數之分母相同者，名爲同母分數。分數之分母相異者，名爲異母分數。異母分數相加減時，必須先求諸分母之最小公倍數，名爲公分母，通分後，然後加減之。

求最小公倍數，應先求各數之質因數，將重複最多之因數相乘，其積即爲最小公倍數。

例：求 7,30,48 之最小公倍數。

$$7=7$$

$$30=2\times3\times5$$

$$48=2\times2\times2\times2\times3$$

$$\text{最小公倍數}=7\times2\times2\times2\times2\times3\times5=1680$$

若兩數較大，則用 §17 之法求出其最大公約數，以最大公約數除兩數，得兩商。將兩商與最大公約數相乘，即爲最小公倍數。

例：求 575 與 782 之最小公倍數，由 §17，知最大公約數爲 23。又 $575\div23=25$，$782\div23=34$，故最小公倍數 $=23\times25\times34=19{,}550$。

19. 循環小數　分子不能爲分母所除盡者，化成爲小數時稱爲無盡小數。無盡小數每隔若干位其數字必重複一次，故無盡小數，同時又爲循環小數。循環小數中之循環部分稱爲節。表示循環小數時，可在節之首末兩數字上各記一點。此點名爲循環點。小數點之右邊直接有循環部分者名純循環小數；小數點之右邊隔一位或數位始有循環部分者名雜循環小數。

化純循環小數爲分數，可以循環節爲分子，而依節之位數連排若干 9 字爲分母。

例：$$0.\dot{8}2\dot{2}=\frac{822}{999}=\frac{274}{333}$$

化雜循環小數爲分數，可以小數第一位至循環節末位之數字減去不循環部分之數字作爲分子，再依循環節之位數，連排若干 9 字，不循環部分之位數連排若干 0 字作爲分母。

例：　$0.36\dot{5}4\dot{8}=\dfrac{36548-36}{99900}=\dfrac{36512}{99900}\fallingdotseq\dfrac{9128}{24975}$

20. 冪與根　同數相乘若干次所得之積名爲該數之冪，相乘之次數名爲指數，書於右上角。

例：　$3^2=9$；　$5^3=125$。

若某數可分成相等之因數若干個，則稱此因數爲某數之根。例如 $9=3\times3$，故 $\sqrt{9}=3$；$125=5\times5\times5$，故 $\sqrt[3]{125}=5$。

第 3 節　平方根與立方根

21. 開平方根法　其步驟如次：

(a) 以小數點爲始，將擬開平方根之數，每兩位撇開爲一段。

(b) 求最左第一段中最大之平方，將此平方減去，以餘數與第二段相連成爲被除數，記此平方之根爲所求平方根之首位。

(c) 用嘗試法求一最大之商，使所求平方根首位之 20 倍與此商之和乘以商數，所得之積等於或小於被除數。此商即爲所求平方根之第二位。如有餘數則與次段相連爲新被除數。

(d) 此法連續爲之，至各段數字用盡或所須平方根之位數滿足爲止。如遇新被除數無商可得時，則記此商爲 0，而逕將再次段與被除數相連。

(e) 小數點以上有若干段，則平方根中即有整數若干位。緊接小數點下每有 0 二位，則方根中即有 0 一位。

例：
```
              3'02.98'06'52 |17.406+
              1
           -----------
  27      | 202
          | 189
           -----------
   344      | 1398
            | 1376
          -------------
     34806  | 220652
            | 208836
             -----------
```

22. 開立方根法　其步驟如次：

(a) 以小數點爲始，將擬開立方根之數，每三位撇開爲一段。

(b) 求最左第一段中最大之立方，將此立方減去，以餘數與第二段

相連成爲被除數，記此立方之根爲所求立方根之首位。

(c) 用嘗試法求一最大之商，使首位平方之 300 倍，首位與商乘積之 30 倍再加商之平方，三者之和等於或小於被除數。此商即爲所求立方根之第二位。如有餘數則與次段相連成新被除數。

(d) 此法連續爲之，至各段數字用盡或所須立方根之位數滿足爲止。如遇餘數無商可得時，則記此商爲 0，而逕將次段與之相連。

(e) 小數點以上有若干段，則立方根中即有整數若干位。小數點以下每緊接 0 三位，則立方根中即有 0 一位。

例：

```
                       158'252.'632'929 | 54.09
              5²=      125
      300×5²=7500     |33252
     30×5×4=600       |
         4²    16     |
             8116     |32464
   300×540²=87480000 |788 632 929
    30×540×9=145800  |
         9²=      81 |
           87625881  |788 632 929
```

23. 平立方與平立方根表　求整數之平立方及平立方根可用第一編之表 4。求平立方以外之冪及平立方根以外之根宜用對數。

第 4 節　速算法

24. 有效數字與誤差　在工程計算中，所根據之數字每由量度而得，故僅有限位之有效數字方屬無誤。例如 3.840 一數，有效數字爲四位，其眞數當在 3.8395 與 3.83405 之間，又如 0.003840 一數，有效數字亦爲四位，其眞數當在 0.0038395 與 0.00383405 之間。在前例中之絕對誤差爲 0.001 以下，在後例中之絕對誤差爲 0.000001 以下。兩例之相對誤差均在 3840 分之一以下，兩例之近眞誤差爲 0.0005 與 0.0000005。即絕對誤差極限之半數是也。

相加或相減結果之絕對誤差不能超過原有各數絕對誤差之和。相乘或相除結果之相對誤差不能超過原有各數相對誤差之和。

如數字之尾有 0 位若干則爲明晰計，宜書如次例。

例：384000。若有效數字爲四位，則書作 3.840×10^5，如爲五位，則書作 3.8400×10^5。

在計算中，所根據之有效數字有若干位，則計算之結果亦列有效數字若干位。過多之位數不僅徒費工夫，且使人誤解其精確度。

25. 加法之速算　茲列方法如次：

(a) 許多數値相加時，先將同位數中其和爲 10 之諸數字先加，例如 3 與 7，2 與 8，1 與 2 與 7。

(b) 位數甚多之數相加時可將各數分成左右二部分別相加而求其和。

(c) 數尾爲 7，8，9 等數字者，可升爲十之倍數而後相加，再減去升數時所加之數。例如 $99+987=100+1000-1-13=1100-14=1086$。

(d) 諸數首數位相同僅尾數略異者，可將尾數相加而於結果中加入首數位之倍數。例如 $98312+98304+98335=98300\times3+12+4+35=294900+51=294951$。

26. 減法之速算　減法有英美法，意大利法（又稱奥大利法），反數法，可擇便用之。茲舉例以說明之：

例：求 $(43857+38643+43251+38756)-(38754+23154+26487+16934)$

（英美法）

$$\begin{array}{r}43857\\38643\\43251\\+38756\\\hline 164507\end{array}\qquad\begin{array}{r}38754\\23154\\26487\\+16934\\\hline 105329\end{array}\qquad\begin{array}{r}164507\\-105329\\\hline 59178\end{array}$$

（意大利法）

$$\begin{array}{r}43857\\38643\\43251\\+38756\\\hline 164507\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-\left\{\begin{array}{r}38754\\23154\\26487\\16934\end{array}\right.\\\hline 59178\end{array}\qquad\begin{array}{lll}4+4+7+4=19 & 19+X=27 & X=8\text{進}2\\2+5+5+8+3=23 & 23+X=30 & X=7\text{進}3\\3+7+1+4+9=24 & 24+X=25 & X=1\text{進}2\\2+8+3+6+6=25 & 25+X=34 & X=9\text{進}3\\3+3+2+2+1=11 & 11+X=16 & X=5\end{array}$$

(反數法)

	43857	
	38643	
	43251	
	38756	
T	61246	38754＝100000－61246 故書作 T 61246
T	76846	23154＝100000－76846 故書作 T 76846
T	73513	餘同
＋T	83066	
	59178	

27. 乘法之速算　有若干乘法可用速算方法，如下

(a) 乘數爲 11 時　祇須將乘被數每兩位相加即得其積。

例：　4385742×11。

$$\begin{array}{r} 4385742 \\ \hline 48243162 \end{array}$$

末位爲 2；右第二位爲 2＋4＝6；右第三位爲 4＋7＝11 故書 1 進 1；右第四位爲 1＋7＋5＝13 故書 3 進 1；右第五位爲 1＋5＋8＝14，故書 4 進 1；右第六位爲 1＋8＋3＝12 故書 2 進 1，右第七位爲 1＋3＋4＝8 故書 8；最左一位爲 4＋0＝4 故書 4。

(b) 乘數爲 22，33，44，55，66，等均可仿(a)爲之。

例；　478562×22。

$$\begin{array}{r} 478562 \\ 22 \\ \hline 10528364 \end{array}$$

右第一位爲 2×2＝4；右第二位(2＋6)×2＝16 書 6 進 1；右第三位爲 1＋(6＋5)×2＝23 書 3 進 2；右第四位爲 2＋(5＋8)×2＝28，書 8 進 2；右第五位爲 2＋(8＋7)×2＝32 書 2 進 3；右第六位爲 3＋(7＋4)×2＝25 書 5 進 2；右第七位爲 2＋(4＋0)×2＝10 故書 10。

(c) 乘數爲 111 時，祇須將被乘數每三位相加，即得其積

例：　43852×111。

$$\begin{array}{r} 43852 \\ 111 \\ \hline 4867572 \end{array}$$

積之末位爲 2＋0＋0＝2；右第二位爲 5＋2＋0＝7；第三位爲 8＋5＋2＝15 書 5 進 1；第四位爲 1＋3＋8＋5＝17 書 7 進 1；第五位爲 1＋4＋3＋8＝16 書 6 進 1；第六位爲 1＋0＋4＋3＝8；第七位爲 0＋0＋4＝4。

乘數爲 1111，11111，222，333，101，202 等均可依上法類推。

(d) 乘數之補數爲一簡單數時則以利用補數爲便。

例：　4385741×89＝4385741×(100－11)＝438574100－48243162

$=90330938$。

(e) 乘數如可分爲若干簡單數時則宜分批相乘而求其代數和。例如乘數 6623 可分爲 $6600+22+1$ 而乘之。

(f) 乘數如可分爲若干簡單之因數時，則宜用各因數依次相乘。例如 $2613=201\times 13$　則可以 201 乘之再乘 13。

(g) 應用平方表求得之。設求 A 與 B 之積。因 $AB=\frac{1}{4}\{(A+B)^2-(A-B)^2\}$ 故自平方表求得 $A+B$ 與 $A-B$ 之平方，求其差而除以 4 即得其積。

28. 除法之速算

(a) 應用除數之倒數與被除數相乘。

(b) 除數可分爲若干簡單因數時，則宜用各因數依次爲除數。

29. 除法之略算　例：$31416\div 23026$ 可演算如次

```
23026)31416(1
      23026
 2303) 8390(3
       6909
  230) 1481(6
       1380
   23)  101(4
         92
    2)    9(4
```

故商爲 1.3644

(c) 應用平方表及倒數表求得之。設求 $\frac{A}{B}$ 之商。因 $\frac{A}{B}=\frac{1}{4}\{(A+\frac{1}{B})^2-(A-\frac{1}{B})^2\}$。故自倒數表求得 $\frac{1}{B}$，再自平方表求得 $A+\frac{1}{B}$ 與 $A-\frac{1}{B}$ 之平方，求其差而除以 4 即得其積。

30. 開平方與開立方之速算　可應用對數表及方根表（表 4）以求得之。

第5節　檢誤法

31. 檢誤法　欲知算術之結果錯誤與否，一種方法爲用另一算法或另一次序加以複算，另一方法爲應用以下所述之方法。

(a) 以9除某數所得之餘數，與以9除某數中各數字之和所得之餘數相同。

(b) 若干數相加後，以9除得之餘數，與以9分別除各數所得各餘數之和，相差之數，若非9之倍數，則加法計算必有錯誤。

(c) 以9除被減數所得之餘數，與以9除減數與餘數所得二餘數之和，相差之數，若非9之倍數，則減法計算必有錯誤。

(d) 以9除被乘數與乘數所得二餘數之積，與以9除乘積所得之餘數，相差之數，若非9之倍數，則乘法計算必有錯誤。

(e) 設以除數 D 除被除數 P 而得商 Q 與餘數 R。若以9除 D 與 Q 所得二餘數之積與以9除 R 所得之餘數相加後，再以9除 P 所得之餘數相減，兩者之差若非9之倍數，則除法計算必有錯誤。

(f) 設將 A 開方後得方根 B 與餘數 C，則以9除 B 所得餘數之平方與以9除 C 所得之餘數相加後，再與以9除 A 所得之餘數相減，兩者之差，苟非9之倍數，則開方計算，必有錯誤。

第6節　珠　算

32. 算盤　珠算所用之算具曰算盤。其制以木爲框，隔以橫木曰梁；穿縱桿九檔或十一，十三，至數十檔亦可。梁上每檔穿木珠二（日本算盤祗穿一珠，我國曾有穿三珠者），梁下穿木珠五。梁上之珠，以一當五，梁下之珠以一當一。每檔均以十進。我國及日本商家多用之。輟耕錄已有算盤珠之喻，可知元代已有之矣。用時以拇指食指中指運珠，梁下珠撥上用拇指，撥下用食指，梁上珠撥上撥下均用中指。左右手均可運算，隨習慣而定。

33. 口訣　練習珠算須熟口訣，口訣中有若干術語之意義彙列於次：

上　即加上一數之謂，凡將算珠撥向梁者均爲上。

去　即減去一數之謂，凡將算珠自梁撥去者均爲去。

進一 卽在上一檔上一珠(梁下珠)之意,稱進二進三等仿此。

還一 卽在下一檔上一珠(梁下珠)之意,又作下加一。稱還二還三等仿此。

倍作 卽加倍之意,例如某檔之數,原爲三,今倍之爲六也。

添作 卽就某檔所列之數,添作某數之意。

無除 見被除數過小無法再除之意。

34. 加法口訣 卽上法歌或進法歌。

一上一	一下五去四	一去九進一
二上二	二下五去三	二去八進一
三上三	三下五去二	三去七進一
四上四	四下五去一	四去六進一
五上五		五去五進一
六上六	六上一去五進一	六去四進一
七上七	七上二去五進一	七去三進一
八上八	八上三去五進一	八去二進一
九上九	九上四去五進一	九去一進一

35. 減法口訣 卽退法歌。

一去一	一上四去五	一去十還九
二去二	二上三去五	二去十還八
三去三	三上二去五	三去十還七
四去四	四上一去五	四去十還六
五去五		五去十還五
六去六		六去十還四
七去七		七去十還三
八去八		八去十還二
九去九		九去十還一

36. 乘法 乘法所用口訣卽普通之九九口訣。乘法有留頭乘法與掉尾乘法之別。留頭乘者,以乘數之第二位與被乘數之末位相乘,次以乘數之第二第三……位依次與被乘數之末位相乘,最後始以乘數之首位與被乘數之末位相乘,乃除去被乘數之末位。乃以被除數之末二位視爲末位,仿上述步驟進行至被乘數各位乘盡爲止。掉尾乘法者,以乘數之各位自尾至首依次

與被乘數之末位相乘，末位乘畢則進一位相乘至全數乘畢爲止。

37. 除法　珠算中除數爲一位數者曰歸，用九歸口訣；除數爲多位數者曰歸除，用撞歸及九歸口訣。

九歸口訣：

(一歸)逢一進一　逢二進二　逢三進三　逢四進四　逢五進五
逢六進六　逢七進七　逢八進八　逢九進九　逢十進十
(二歸)二一添作五　逢二進一　逢四進二
逢六進三　逢八進四　逢十進五
(三歸)三一三十一　三二六十二　逢三進一　逢六進二　逢九進三
(四歸)四一二十二　四二添作五　四三七十二　逢四進一　逢八進二
(五歸)五一倍作二　五二倍作四　五三倍作六　五四倍作八　逢五進一
逢十進二
(六歸)六一下加四　六二三十二　六三添作五　六四六十四　六五八十二
逢六進一
(七歸)七一下加三　七二下加六　七三四十二　七四五十五　七五七十一
七六八十四　逢七進一
(八歸)八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五　八五六十二
八六七十四　八七八十六　逢八進一
(九歸)九一下加一　九二下加二　九三下加三　九四下加四　九五下加五
九六下加六　九七下加七　九八下加八　逢九進一

撞歸口訣：　遇某位被除數不能除時用之。

(一歸)見一無除作九一　無除退一下還一
見二無除作九二　無除退一下還二
見三無除作九三　無除退一下還三
見四無除作九四　無除退一下還四
見五無除作九五　無除退一下還五
見六無除作九六　無除退一下還六
見七無除作九七　無除退一下還七
見八無除作九八　無除退一下還八
見九無除作九九　無除退一下還九

加歸口訣即九九口訣，故不列。

第二章　代數

第1節　數

38. 數之類別　正數如 1, 2, 3；負數如 −1, −2, −3；整數一切正負整數及 0 均屬之；分數如 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{7}$；有理數，即一切可用兩整數所成之分數表示之者，如 $\frac{5}{7}$，$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$；無理數，即不能以兩整數之分數表示之者，如 $\sqrt{2}$，π；虛數，即負數之偶次方根，例如 $\sqrt{-1}$，$\sqrt[4]{-3}$，普通以 i 代表 $\sqrt{-1}$，惟電工中 i 代表電流，故恒以 j 代表 $\sqrt{-1}$；實數，一切非虛數均屬之；複數，爲實數與虛數合併而成，如 $2+3\sqrt{-1}$，$4-5i$。

數之絕對值爲祗計數值而不計正負號之謂，例如 −3 之絕對值爲 3，書作 $|-3|=3$。

第2節　基本運算法

39. 符號　代數所用符號與算術所用者相同，惟乘號每從省免，如 $2\times a\times b^2$ 即作 $2ab^2$。

括弧前爲正號者，化出時括弧內各項之符號不變，如 $3+(a-b)=3+a-b$；括弧前爲負號者化出時括弧內各項之符號正改爲負，負改爲正，例如 $3-(a-b)=3-a+b$。

40. 加與減　同項者可以加減，異項者不可加減，例如 $-2ax+4y-(c-5ax+3y)=3ax+y-c$。

41. 冪　a^n 表示 a 之 n 次冪，n 爲正數，負數，零，或分數均可。不書冪者其冪爲 1，例如 $a^1=a$。冪之規則如次：

$(+a)^n=\ +a^n$；

$(-a)^n=\ +a^n$（n 爲偶數）或 $(-a)^n=-a^n$（n 爲奇數）；

$(a^m)^n=a^{mn}$; $(ab)^n=a^nb^n$; $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$;

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$;

$a^0=1$; $0^a=0$; $0^0=$無定值;

$a^m\times a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。

42. 根　$a^{\frac{1}{n}}$表示a之n次根，n稱爲根指。正數之偶次實根爲正數或負數；正數之奇次實根爲正數；負數之奇次實根爲負數；負數之偶次根爲虛數或複數。根之規則如次：

$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$; $\sqrt[m]{a^m}=a$; $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$;

$\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$; $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$; $\sqrt[m]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a}}=a^{-\frac{1}{m}}$;

$\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n=a^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

$=a^{\frac{1}{mn}}$;

$\sqrt{a}=\pm|\sqrt{a}|$; $\sqrt[2n]{a}=\pm|\sqrt[2n]{a}|$; $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{-a}}$

$=\sqrt[n]{i\sqrt{a}}$。

關於根之近似數：

$\sqrt{a^2\pm b}\approx a\pm\frac{b}{2a}$; $\sqrt[3]{a^3\pm b}\approx a\pm\frac{b}{3a^2}$; $\sqrt[n]{a^n\pm b}\approx a\pm$

$\frac{b}{na^{n-1}}$　以上三式中之b必須遠較a爲小。

$\sqrt{a^2+b^2}\approx 0.960a+0.398b$，$a>b$。此式精密度恆在4％以內。

$\sqrt{a^2+b^2}\approx 0.9938a+0.703b+0.3567\frac{b^2}{a}$；$a>b$。此式較上式更屬精密。

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\approx 0.939a+0.389b+0.297c$；$a>b>c$。此式精密度恆在6%以內。

不能開方之整數稱爲根式，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$。根式之相乘可化成指數式而後運算。

例：$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{6}}\times 3^{\frac{2}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}}=(2^3\times 3^2)^{\frac{1}{6}}$

$=(8\times 9)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{72}$。

根式之相除可將分母化成有理數而運算。

例：$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{5-3}$

$=\frac{1}{2}(3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$與$\sqrt{a}-\sqrt{b}$之乘積爲$a-b$，係一有理數，故稱$\sqrt{a}+\sqrt{b}$與$\sqrt{a}-\sqrt{b}$互爲相配因數。

43. 虛數　虛數之單位爲 i，代表 $\sqrt{-1}$。關於虛數之規則如次：

$(-a)^{\frac{1}{n}}=ia^{\frac{1}{n}}$（$n$爲偶數）

$i^{-1}=-i$；$i^2=-1$；$i^3=-i$；$i^4=1$；$\frac{1}{i}=-i$；$i^{4n+m}=i^m$；$i^{4n+1}=+i$；

$i^{4n+2}=-1$；$i^{4n+3}=-i$；（以上各式中n,m爲正整數）

虛數與實數相連而成之數曰複數，如$a+ib$。關於虛數之規則如下：

$a+ib=0$ 則 $a=0$，$b=0$；若 $a+ib=c+id$；則 $a=c,b=d$；

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$；$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$；

$$\pm\sqrt{a\pm ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$a+ib=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$,

$\sin r=\dfrac{b}{r}$, $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$。

$\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$, $\cos\alpha-i\sin\alpha=e^{-i\alpha}$(歐勒定理)

$1:(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\alpha-i\sin\alpha$;

$(\cos x\pm i\sin x)(\cos y\pm i\sin y)=\cos(x+y)\pm i\sin(x+y)$;

$(\cos x\pm i\sin x):(\cos y\pm i\sin y)=\cos(x-y)\pm i\sin(x-y)$;

$$\sqrt[n]{a+ib}=|\sqrt[n]{r}|\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$, $k=0,1,2,\cdots n-1$ 之整數;

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{2k\pi i/n}$$

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}=e^{(2k+1)\pi i/n},$$

k=正整數。

44. 恒等式 凡兩式中之文字,不論代以何值,其結果必相等者曰恒等式,亦名恒等方程式。常用之恒等式如次:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

$(a+b)(x+y)=ax+by+bx+ay$;

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$;

$(a^n-b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ $(a\neq b)$;

$(a^n+b^n):(a+b)=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1}$ (n 爲奇數);

$(a^n-b^n):(a+b)=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}$ (n 爲偶數);

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^4-a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$;

$a^4+b^4=(a+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)$;

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+b^2)+6abc$;

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$;

$a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$。

45. 析因子法　將代數式分括爲兩個或兩個以上之因子，謂之析因子法。分成之因子必須爲整式，其文字必須不含方根。凡代數式中各項公有之單因子可先行析出，然後應用以下各法分解之：

(a) 與 §43 所列之恆等式相比較，以求得其因子，例如 $x^2y-4y^3=y(x^2-4y^2)=y(x+2y)(x-2y)$。

(b) 命 x^2+bx+c 形式之代數式等於 $(x+p)(x+q)$，如是 p 與 q 之和等於 b，p 與 q 之積等於 c。應用嘗試法以求 p 與 q。例如 x^2-x-6。因 $(-3)+(+2)=-1$，$(-3)\times(+2)=-6$，故 $p=-3$，$q=2$，而 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$。

(c) 用配方法求因子。例如 $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x-2x+2)$。

(d) ax^2+bx+c 之三項式可分成兩因子爲 $a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

(e) 命 $ax^2+bx+c=(px+m)(qx+n)$，則 $a=pq$，$b=pn+qm$，$c=mn$。此 p,q,m,n 四數可用嘗試法求得之。例如 $6x^2-25x+4$。因 $pq=6$，$mn=4$，故知 $p\times q$ 必爲 1×6 或 2×3，$m\times n$ 必爲 1×4 或 2×2 嘗試得因子爲 $(6x-1)(x-4)$

(f) 察出法。因 $f(x)=0$ 之一根若爲 r。則 $x-r$ 必爲代數式 $f(x)$ 之一因子。例如求 x^2-x-6 之因數。因察得 $x=3$，爲 $x^2-x-6=0$ 之一根，故用除法得另一根爲 $x+2$。卽 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$。

第3節　分式

46. 基本規則　以下各分式之分母均不能爲 0。

(符號)　$+\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{-b}=-\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{-b}$。

(加減)　$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{cd}$；$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$；$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{a}{d}=\dfrac{a(d\pm c)}{cd}$

若干分式相加減，應先通分母而後加減之。例如

$$\frac{a}{def}+\frac{b}{e^3g}-\frac{c}{df^2}=\frac{ae^2fg+bdf^2-ce^3g}{de^3f^2g}$$

(乘法)　$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$；$\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$。

(除法)　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$；$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\div c}{b\div c}$。

(冪與根)　$\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=\dfrac{b^{-n}}{a^{-n}}$，$n$ 爲整數或分數；

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

47. 分式之分解　凡分子之次數較低於分母者謂之眞分式；分子之次數較高於分母者，謂之假分式。假分式常可分解爲整式與眞分式之代數和，或稱帶分式。

欲將眞分式分解爲若干分式可按下列諸情形，作成恒等式，而後用比較法求得其係數。

(a) 分母可分解爲若干不等之一次因子之情形。

例：$\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{6x^2-x-1}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

故　$6x^2-x+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$。因此爲恒等式，故

命　$x=0$，可得$A=-1$；命$x=1$可得$B=3$；命$x=-1$，可得$C=4$。

$$\therefore\quad \frac{6x^2-x+1}{x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+1}$$

又法：因　$6x^2-x+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$，

故　$A+B+C=6;B-C=-1;-A=1$。照聯立方程式解得 $A=-1,B=3,C=4$，結果與上法相同。

(b) 分母可分解爲若干一次因子，而有數因子相重複之情形。

例：
$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

因得　$x+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$。

比較係數，得　$A=-1,B=1,C=-1,D=2$，故

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

(c) 分母中含有二次式之情形。

例：
$$\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}$$

因得　$5x^2-4x+16=A(x^2-x+1)^2+(Bx+C)(x-3)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-3)$。比較係數，得 A,B,C,D,E 之值，代入卽得。

第4節　比與比例

48. 比　在以下各式中 k 爲常數，名爲比率或係數：x,y,z 爲變數。比之符號爲$\propto$

若 $y=kx$，則y與x成正比，或$y\propto x$。

若 $y=\dfrac{k}{x}$，則y與x成反比，或 $y\propto\dfrac{1}{x}$。

若 $y=kxz$，則y與x及z成連比，或$y\propto xz$。

若 $y=k\dfrac{x}{z}$，則y與x成正比，與z成反比，或$y\propto\dfrac{x}{z}$。

49. 比例 關於比例之規則列次:

(a) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $ad=bc$; $\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{c}{d}\right)^n$。

(b) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{l}{f}=\frac{g}{h}$, 則 $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$。

(c) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$, 則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=$

$\frac{pa+qc+re+\cdots}{pb+qd+rf+\cdots}$

以上諸式中,p,q,r,m,n, 等均爲常數。又以上諸式如遇分母爲0時,均不適用。

第5節 不等式

50. 不等式之規則 下列諸式中各文字均爲正數,分母均不爲0。

(a) 若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$; $a-c>b+c$; $c-a<c-b$; $ac>bc$;

$-ca<-cb$; $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$; $b<a$。

(b) 若 $a-c>b$, 則 $a>b+c$。

(c) 若 $a>b, c>d$, 則 $a+c>b+d$; $ac>bd$;

但 $a-c$ 可較大於 $b-d$,等於 $b-d$,或小於 $b-d$,

又 $\frac{a}{c}$ 可較大於 $\frac{b}{d}$, 等於 $\frac{b}{d}$, 或小於 $\frac{b}{d}$。

(d) $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$; $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

(e) $\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$; $\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}>\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m$

第6節 方程式

51. 方程式　凡表示兩數或兩代數式之相等而以等號聯結之者，曰方程式。方程式有二種：(1)爲恒等式已述於 §44；(2)條件等式，即其中所含之文字，僅於某定值時始能相等之式，普通即稱方程式。凡方程式中含有一個或數個代表未知數之文字者，名代數方程式。方程式中未知數所表之值，名方程式之根。由方程式求根之手續謂之解方程式。解方程式時有重要之公理如次：若方程式兩邊加以同一之數，或減去同一之數，方程式之性質不變。若方程式之兩邊乘以同一之數或除以同一之數，除乘數或除數爲 0 以外，方程式之性質亦不變。職是之故，方程式中一邊之項可移至彼邊，祇須改變其正負符號可也。

方程式中未知數之最高次數爲一次者，名一次方程式，又稱直綫方程式。一次方程式祇有一根。例如$3x-6=0$，解之得 $x=2$。

52. 聯立一次方程式　兩個以上之方程式，其所含諸未知數之値能同時適合者則此一組之方程式，謂之聯立方程式。聯立方程式成立之條件爲(1)方程式之數等於未知數之數；(2)方程式均爲獨立性質，不相矛盾。其未知數之最高冪爲一次者，名聯立一次方程式。所含未知數之數爲二者稱二元，三數者稱三元，餘類推。聯立一次方程式之解法，普通有四：(1)加減消去法，(2)代入消去法，(3)比較消去法，(4)行列式法。

例：　$3x+5y=230$ (1)

　　　$5x+3y=250$ (2)

(加減消去法)　$3\times(1)-5\times(2)$，得 $16x=560$　$\therefore x=35$，代入(1)得 $y=25$。

(代入消去法)　由(2)得 $y=\dfrac{250-5x}{3}$，代入(1)，得 $3x+\dfrac{5(250-5x)}{3}=230$，$\therefore x=35$，代入(1)得 $y=25$。

(比較消去法)　由(1)得 $y=\dfrac{230-35}{5}$ 由(2)得 $y=\dfrac{250-5x}{3}$，故 $\dfrac{230-35}{5}=\dfrac{250-5x}{3}$，$\therefore x=35$，代入(1)得 $y=25$。

（行列式法） 參閱行列式節（第 7 節）。$x=\begin{vmatrix}230 & 5\\250 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & 5\\5 & 3\end{vmatrix}=\dfrac{690-1250}{9-25}$

$=35$, $y=\begin{vmatrix}3 & 230\\5 & 250\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & 5\\5 & 3\end{vmatrix}=\dfrac{750-1150}{9-25}=25$。

53. 二次方程式　方程式中未知數之最高次數爲二次者名二次方程式。一元二次方程式均有兩根，同時爲實數，或同時爲虛數。解二次方程式之普通方法有三，如次：(1)應用因子分解法，(2)應用配方法，(3)應用公式法。$ax^2+bx+c=0$ 之根之公式爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例： $x^2-12x+27=0$。

（應用因子分解法） $x^2-12x+27=(x-3)(x-9)=0$, $\therefore x=3, x=9$

（應用配方法） $x^2-12x+27=(x^2-12x+6^2)+27-36=(x-6)^2-9=(x-6)^2-3^2=(x-6-3)(x-6+3)=(x-9)(x-3)=0$,

$\therefore x=9$, $x=3$。

（應用公式法） $x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-4\times1\times27}}{2}=\dfrac{12\pm6}{2}=9$ 或 3。

54. 二次方程式之判別式　在§53中 $ax^2+bx+c=0$ 根之公式中，方根下 b^2-4ac 一數量名爲判別式。蓋 $b^2-4ac>0$，則兩根爲不相等之實數；若 $b^2-4ac<0$ 則兩根爲不相等之複數；若 $b^2-4ac=0$，則兩根爲相等之實數；$b^2-4ac>0$ 且爲完全平方則兩根爲不相等之有理數 $b^2-4ac>0$，而非爲完全平方，則兩根爲不相等之無理數。若 $b=0$，則兩根相等而正負相反，若 $c=0$，則兩根之一爲 0。

55. 聯立二次方程式　解聯立二次方程式之法分述如次：

(a) 兩方程式中之一爲一次方程式，宜用代入法。

例： $x+y=12$ (1)

$x^2+y^2=90$ (2)

由(1)得 $x=12-y$，代入(2)，得 $(12-y)^2+y^2=90$，因得 $y_1=3$，$y_2=9$。代同式(1)，得 $x_1=9$，與 $x_2=3$。故所得之根計有二組卽 $x_1=$

$9, y_1=3; x_2=3, y_2=9$。

(b) 兩方程式均爲二次時，並非全可解出，惟中有一式爲 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 之形狀者，則可解得其根如次例。

例：
$$2x^2-5xy+3y^2=0 \quad (1)$$
$$2x^2-y^2+x-y=15 \quad (2)$$

由式(1)求得 $x=y$ (3)或 $x=\frac{3}{2}y$ (4)。將(3),(2)聯立得根，二組即 $x_1=\sqrt{15},\ y_1=\sqrt{15};\ x_2=-\sqrt{15},\ y_2=-\sqrt{15}$。再將(4),(2)聯立，得根二組即 $x_3=3,\ y_3=2; x_4=-\frac{45}{14},\ y_4=-\frac{15}{7}$。

(c) 兩式之一或兩式合併後可分解爲因子者，可求解如次：

例：
$$x^2+xy=1 \quad (1)$$
$$xy+y^2=2 \quad (2)$$

$2\times(1)-(2)$得 $2x^2+xy-y^2=0$，即 $(2x-y)(x+y)=0$，故得 $2x=y$(3)，$x+y=0$(4)。將(3),(1)聯立，得 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ y_3=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$。再將(4),(1)聯立。因(1),(2)可書作

$$x(x+y)=1, \qquad y(x+y)=2$$

故 $x+y\neq0$，今由(4)得 $x+y=0$，故知(4)與(1),(2)相矛盾，而所求之根祗有兩組如上。

(d) 兩式相除可得一個一次方程式時，如次例。

例：
$$x^2+xy=1 \quad (1)$$
$$xy+y^2=2$$

(2)÷(1)得 $y/x=2$，即 $y=2x$，其餘方法與情形(c)相同。

56. 三次方程式　三次方程式又名立方方程式，即未知數之最高冪爲三次之方程式是也。一元三次方程式均有三根。此三根有時均爲實數，有時一根爲實數而二根爲複數。

57. 三次方程式之代數解法　將方程式書作下式：

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

命 $q=ac-b^2$, $r=\frac{1}{2}(3abc-a^2d)-b^3$, $S_1=(r+\sqrt{q^3+r^2})^{\frac{1}{3}}$,

$S_2=(r-\sqrt{q^3+r^2})^{\frac{1}{3}}$。

則其根爲　$x_1=[(S_1+S_2)-b]\div a$

$$x_2=\left[-\tfrac{1}{2}(S_1+S_2)+\frac{\sqrt{-3}}{2}(S_1-S_2)-b\right]\div a$$

$$x_3=\left[-\tfrac{1}{2}(S_1+S_2)-\frac{\sqrt{-3}}{2}(S_1-S_2)-b\right]\div a$$

若　$q^3+r^2>0$，則三根之一爲實數,餘二根爲複數;

$q^3+r^2=0$，則三根均爲實數,且至少有二根相等;

$q^3+r^2<0$，則三根均爲實數，但因複數之立方根無法求出,故代數解法爲不可能,而祇可用下述之(§58)三角解法。

例:　求解 $x^3+12x^2+45x+54=0$。

此處 $a=1$, $b=4$, $c=15$, $d=54$; 故 $q=-1$, $r=-1$, $q^3+r^2=0$, $s_1=s_2=-1$, $s_1+s_2=-2$, $s_1-s_2=0$。∴ $x_1=-6$, $x_2=x_3=-3$.

58. 三次方程式之三角解法　將三次方程式書作 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 之形式。命 $q=ac-b^2$, $r=\frac{1}{2}(3abc-a^2d)-b^3$ 於是其根爲

$$x_1=(y_1-b)\div a$$
$$x_2=(y_2-b)\div a$$
$$x_3=(y_3-b)\div a$$

而 y_1, y_2, y_3 之值則如次(在 $r>0$ 時用上方符號，$r<0$ 時用下方符號):——

(情形I):若 q 爲負數而 $q^3+r^2\leqq 0$;

$$y_1=\pm 2\sqrt{-q}\cos\left[\tfrac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]$$

$$y_2=\pm 2\sqrt{-q}\cos\left[\tfrac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}+\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$y_3=\pm 2\sqrt{-q}\cos\left[\tfrac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}+\frac{4\pi}{3}\right]$$

(情形II):若 q 爲負數,而 $q^3+r^2\geqq 0$;

$$y_1=\pm\ 2\sqrt{-q}\cosh\left[\tfrac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]$$

$$y_2=\mp\sqrt{-q}\cosh\left[\tfrac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]+$$

$$i\sqrt{-3q}\sinh\left[\tfrac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]$$

$$y_3=\mp\sqrt{-q}\cosh\left[\tfrac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]-$$

$$i\sqrt{-3q}\sinh\left[\tfrac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{-q^3}}\right]$$

(情形III):若 q 爲正數:

$$y_1=\pm\ 2\sqrt{q}\sinh\left[\tfrac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{q^3}}\right]$$

$$y_2=\mp\sqrt{q}\sinh\left[\tfrac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{q^3}}\right]+$$

$$i\sqrt{3q}\cosh\left[\tfrac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{q^3}}\right]$$

$$y_3=\mp\sqrt{q}\sinh\left[\tfrac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{q^3}}\right]-$$

$$i\sqrt{3q}\cosh\left[\tfrac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{\pm r}{\sqrt{q^3}}\right]$$

例:　$x^3+6x^2-9x-54=0$

此處 $a=1,\ b=2,\ c=-3,\ d=-54$,故 $q=-7,\ r=10,\ q^3+r^2=-243$。

應用情形 I,上方之符號,得 $y_1=2\sqrt{7}\cos\left[\tfrac{1}{3}\cos^{-1}\frac{10}{\sqrt{343}}\right]$

$=2\sqrt{7}\cos 19.1°=5$。

因得 $x_1=5-2=3$。其餘兩根可用同法解之。

59. 特種三次方程式之解法

(a) $x^3+qx+r=0$之實根

$$x=\left\{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{2}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

(注意)任何 $z^3+az^2+bz+c=0$ 形式之三次方程式中若以 $z=x-\frac{a}{3}$代入均可成爲 $x^3+qx+r=0$ 之形式。

(b) $x^3-1=0$ 之根

$$x_1=1;\quad x_{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

(c) 在 $x^3+qx\pm r=0$ 中,若 $q>0$, $r>0$ 則

$$x_1=\mp2\sqrt{\frac{q}{3}}\sinh\frac{\alpha}{3},\quad x_2=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\sinh\frac{\alpha}{3}+i\sqrt{q}\cosh\frac{\alpha}{3},$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\sinh\frac{\alpha}{3}-i\sqrt{q}\cosh\frac{\alpha}{3},\text{ 但 }\sinh\alpha=\frac{3\sqrt{3}\,r}{2q\sqrt{q}}。$$

(d) 在$x^3-qx\pm r=0$中,若 $q>0$, $r>0$, $\left(\frac{q}{3}\right)<\left(\frac{r}{2}\right)^2$; 則

$$x_1=\mp2\sqrt{\frac{q}{3}}\cosh\frac{\alpha}{3},\quad x_2=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\cosh\frac{\alpha}{3}+i\sqrt{q}\sinh\frac{\alpha}{3},$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\cosh\frac{\alpha}{3}-i\sqrt{q}\sinh\frac{\alpha}{3},\text{ 但 }\cosh\alpha=\frac{3\sqrt{3}\,r}{2q\sqrt{q}}。$$

(e) 在 $x^3-qx\pm r=0$ 中,若 $q>0$, $r>0$, $\left(\frac{q}{3}\right)^3>\left(\frac{r}{2}\right)^2$,則

$$x_1=\mp2\sqrt{\frac{q}{3}}\cos\frac{\alpha}{3};\quad x_2=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}\cos\left(60^\circ+\frac{\alpha}{3}\right);\text{ 但 }\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}\,r}{2q\sqrt{q}}。$$

(f) 在 $x^3-qx\pm r=0$ 中若 $q>0$，$r>0$，$\left(\frac{q}{3}\right)^3=\left(\frac{r}{2}\right)^2$，則

$$x_1=\mp 2\sqrt{\frac{q}{3}},\quad x_2=x_3=\pm\sqrt{\frac{q}{3}}$$

60. 四次方程式　一般方程式爲 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$。先求下列三次方程式之任一實根 y_1:

$$8y^3-4by^2+2(ac-4d)y-[c^2+d(a^2-4b)]=0$$

於是四次方程式之四根，可由下列兩個二次方程式求得之:

$$x^2+\left[\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+2y_1-b}\right]x+\left(y_1+\sqrt{y_1^2-d}\right)=0$$

$$x^2+\left[\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+2y_1-b}\right]x+\left(y_1-\sqrt{y_1^2-d}\right)=0$$

又一解法如下:設四次方程式爲 $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$。(1)

將 $z=x-\frac{a}{4}$ 代入，則化爲次之形式

$$x^4+px^2+qx+r=0\text{。}(2)$$

乃由次之三次方程式，$y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0$ (3) 求出 y_1, y_2, y_3 三根。於是式(2)之四根爲

$$x_1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3});\quad x_3=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3});$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3});\quad x_4=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3})\text{。}$$

爲核對計算之錯誤與否起見，可用 $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3}=-q$ 以驗之。

61. n 次方程式　命 $f(x)$ 爲 x 之 n 次函數，其中各項按次數之遞降而排列。於是 $f(x)=0$ 爲一 x 之 n 次方程式。關於 n 次方程式之基本定理如次:

(a) 若 $f(x)$ 爲 $x-r$ 所除，則其餘數爲 $f(r)$，即以 r 代入 $f(x)$ 中之 x 後所得之值也。此名餘數定理。

(b) 若 $f(x)$ 爲 $x-r$ 所除盡，則 $x-r$ 爲 $f(x)=0$ 之一根。因 n 次式有 n 個一次因子，故有 n 個根。

(c) 若 $f(x)=0$ 第一項之係數爲 1，則第二項之係數改變符號後，即等於各根之和；第三項之係數等於每兩根乘積之和；第三項之係數改變符號後，等於每三根乘積之和；餘類推。若 n 爲偶數，則最末項(即常數)等於各根之乘積；如爲奇數則改變符號後等於各根之積。

(d) 在 $f(x)=0$ 中，若每項之係數均爲整數，則一切整數根均爲最末項之因數。

(e) 若 n 次方程式第一項之係數爲 1，其他各項之係數均爲整數，則各根均非分數。

(f) 在 $f(x)=0$ 中，若以 $\dfrac{y}{m}$ 代入 x，則所成之方程式 $\varphi(y)=0$ 之各根均爲 $f(x)=0$ 相當各根之 m 倍。

(g) 在 $f(x)=0$ 中，若以 $-y$ 代入 x，則所成之方程式 $\varphi(y)=0$ 之各根均與 $f(x)=0$ 中相當各根之絕對值相等，而正負相反。

(h) 在 $f(x)=0$ 中，若以 $y+h$ 代入 x，則所成方程式 $\varphi(y)=0$ 之各根均較 $f(x)=0$ 中相當各根減少 h。

(i) 在 $f(x)$ 中若相連兩項之係數正負相反，則名符號變更一次。在 $f(x)=0$ 中正根之數不能超過 $f(x)$ 中符號變更之數；負根之數不能超過 $f(-x)$ 中符號變更之數。此名得卡忒[(2)]符號定律。

(j) 若兩實數 a 與 b 代入 $f(x)$ 中，得 $f(a)$ 與 $f(b)$。倘 $f(a)$ 與 $f(b)$ 符號相反，則在 $f(x)=0$ 中必有奇數個之根介處於 $x=a$，$x=b$ 之間。此名斯圖姆[(3)]定律。

62. 除法　在應用以上若干定理時，如用除法，可獲不少便利。如以 $x-r$ 除 $f(x)$ 可照次例所示之方法行之：

例：以 $x-2$ 除 $3x^3+4x^2-6x+5$。將左式之係數及符號寫出，置 $x-2$ 之 2 於右角；於係數下空一行處劃橫線；直對第一係數 3 字之下於橫線下書 3 字；以 2×3 得 6 書在第二係數 $+4$ 之下；相加得 10 書於橫線之下；10 與 2 相乘得 20 書於係數 -6 之下；相加得 14 書於橫線下，以 2 乘 14 得

$$\begin{array}{rrrr|l} 3+ & 4- & 6+ & 5 & \underline{\ 2\ } \\ & +\ 6+ & 20+ & 28 & \\ \hline 3+ & 10+ & 14+ & 33 & \end{array}$$

28 書於係數 $+5$ 之下；相加得 33。此 33 即爲餘數。又橫線下之 $3+10+14$ 實即 $3x^2+10x+14$ 乃兩式相除之商。如算式中缺少一項，則視其係數爲 0。

63. 虛根　若 $f(x)=0$ 各項之係數均爲實數，則此方程式茍有一虛根時，同時必另有一相配虛根。由定理 (i) 可察知虛根之存在與否。蓋若所有正負根之總數不等於方程式之次數，則其差額（如屬奇數必須加一）即表示至少有此數之虛根存在於其內。

64. 整數根　確定整數根之方法觀次例可以自明。

例：$x^3-x^4-9x^2+11x+6=0$。由定理(d)，知可能之整數根爲 ±1，±2，±3，±6。由定理(e)知分數根不能存在。由定理(i)知此方程式之正根不能超過二個，負根亦不能超過二個(但不能謂爲正負根各爲二個)。各根中有否無理根或虛根，則尙無法預知。將 $+1$，-1 代入知兩者均非此方程式之根。試以 $+2$，以除法爲之，餘數爲 0 故可知 x 之一根爲 $+2$；以 $x-2$ 除後之商爲 $x^3+x^2-7x-3=0$。

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -9 & +11 & +6 & \underline{\;2\;} \\ & +2 & +2 & -14 & -6 & \\ \hline 1 & +1 & -7 & -3 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 1 & +1 & -7 & -3 & \underline{-3} \\ & -3 & +6 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

再以 $+3$ 與 -3 試之，知 -3 爲其一根，而除過後之商爲 $x^2-2x-1=0$。乃用二次方程式解法求得兩根爲 $1\pm\sqrt{2}$。

65. 分數根　分數根之確定法可以次例說明之。

例：$36x^4-55x^2-35x-6=0$。由定理(d)知可能之整數根爲 ±1，±2，±3，±6。但代入後無一適合，故知整數根並不存在。由定理(e)知分數根有存在之可能。由定理(i)知正根之數不能多於一個，負根之數，不能多於三個(不能謂爲正根一個，負根三個)，無理根與虛根之存在與否尙未可知。應用定理(f)設法將原方程式加以改變，使定理(e)可以援用。即將 36(x^4 之係數)除各項，並將 $x=\dfrac{y}{m}$ 代入，並以 m^4 乘各項，因得 $y^4-\dfrac{55}{36}m^2y^2-\dfrac{35}{36}m^3y-\dfrac{1}{6}m^4=0$。乃命 $m=6$，使各項之係數全成整數，即 $y^4-55y^2-210y-216=0$。解此方程式得整數根爲 -2，

$-3, -4, 9$；故由定理(f)知原方程式之根爲$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$。

66. 無理根　求正號之無理根可以應用荷爾納[(4)]法則。茲依次例說明之。

例：$x^4-2x^3+4x^2-15x+14=0$。先用嘗試法得整數根$+2$。以$x-2$除之得$x^3+4x-7=0$。此式嘗試後知整數根已不存在，又由定理(e)知分數根亦不存在。由定理(i)知此式之正根與負根均不能多於一個。職是之故，可知此式必有虛根一對，而另一根則爲無理根。

任用直接代入法，圖解法，或除法，知$f(x)$之符號在$x=1$，與$x=2$時適相反。由定理(j)可知無理根存在於$x=1$，與$x=2$之間。用定理(g)將$x=y+1$代入，減小根之數值結果所得$\varphi(y)=0$之根遂介處於0與1之間。此項手續可用除法爲之。即以$x-1$除$f(x)$得一餘數，再以$x-1$除其商，再得一餘數，繼續爲之，至其商爲方程式之首位爲止。此餘數即爲$\varphi(y)=0$各項之係數。

$$\begin{array}{llll|l}
1 & +0 & +4 & -7 & \underline{1} \\
 & +1 & +1 & +5 & \\ \hline
1 & +1 & +5 & \multicolumn{1}{|l}{-2} & \\
 & +1 & +2 & & \\ \hline
1 & +2 & \multicolumn{1}{|l}{+7} & & \\
 & +1 & & & \\ \hline
1 & +3 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll|l}
1 & +3 & +7 & -2 & \underline{0.2} \\
 & -0.2 & +0.64 & +1.528 & \\ \hline
1 & +3.2 & +7.64 & \multicolumn{1}{|l}{-0.472} & \\
 & 0.2 & +0.68 & & \\ \hline
1 & +3.4 & \multicolumn{1}{|l}{+8.32} & & \\
 & +0.2 & & & \\ \hline
1 & +3.6 & & &
\end{array}$$

如是所得之新方程式爲$y^3+3y^2+7y-2=0$，其根在0與1之間。將$\varphi(0)$至$\varphi(1)$之一段曲線用較大之縮尺繪出，可知其根位於0.2與0.3之間。換言之，卽原方程式之根在1.2與1.3之間。

茲再將$\varphi(y)=0$之根減小0.2，得新方程式$\psi(z)=z^3+3.6z^2+8.32z-0.472=0$，其根位於0與0.1之間。卽原方程式$f(x)=0$之根在1.20與1.30之間。

再用繪製曲線法可知實根位於0.05與0.06間。因此時z^3與z^2之值已甚微小，故雖繪$8.32z-0.472=0$之直線已可知其實根所在之位置。由此可知$f(x)=0$之根位於1.25與1.26之間。用此方法繼續爲之，可求得此無理根至任何位小數矣。

如無理根爲負數，則$f(x)=0$之x，先以$-y$代入之，得$\varphi(y)$

$=0$;最後所得之無理根,加以負號即可。

67. 圖解法　凡欲求二次以上之方程式,或任何超越函數之實根,均可利用圖解方法。設所求解之方程式為 $f(x)=0$, 則將 $y=f(x)$ 之曲線繪出;此曲線與 x 軸相交點之橫坐標,即屬 $f(x)=0$ 之實根。又法將 $f(x)=0$ 之左側分成 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 兩函數之差, 則 $y=f_1(x)$, 與 $y=f_2(x)$ 曲線交點之橫坐標亦為 $f(x)=0$ 之實根。

第7節　行列式

68. 行列式之定義　n 次行列式為 n^2 個數目列成之方陣, 如次:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots\cdots & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \cdots\cdots & l_{n-1} \\ a_n & b_n & c_n & \cdots\cdots & l_n \end{vmatrix}$$

式中每一數目均名為元。$a_1b_2c_3\cdots l_n$ 所在之線名主對角線。式中任何縱線名為行;任何橫線名為列。n 次行列式可展開成 $n!$ 項之代數式。取 n 次行列式中任何元為準,除去該元所在之行與列, 所得者為一 $n-1$ 次之行列式,名曰子式。行列式展開之法為取第一行(或列)為準,將第一元與其子式相乘得積;將第二元與其子式相乘得積, 第三第四至該行(或列)最末之元均依次與其子式相乘得積。乃將奇數元之積相加之和減去偶數元之積相加之和。各子式之展開,依此類推。例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} -$$

$$a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

設除去任何元所在之行與列後所得之子式表以Δ_a，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\Delta_1-a_2\Delta_2+a_3\Delta_3-a_4\Delta_4$$

$$=c_1\Delta_1-c_2\Delta_2+c_3\Delta_3-c_4\Delta_4$$

$$=-d_1\Delta_1+d_2\Delta_2-d_3\Delta_3+d_4\Delta_4$$

(注意)前後$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$之值並非相同。

三次行列式有一容易記憶之展開法，即於行列式之後加字兩行，乃將自左上角至右下角三字之積相加，減去自左下角至右上角三字之積之和。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-$$

$$c_3a_2b_1。$$

但應注意者，應用此法祇可限於三次行列式，其他行列式均不適用。

69. 行列式之性質　行列式展開時如借助關於行列式性質之若干定理常可得甚多之便利。其最重要之定理如次：

定理I：行列式中若有下列情形之一時則此行列式之值即行消滅(化爲0)。

(a) 有兩行或兩列完全相同；

(b) 兩行或兩列中相當之各元有一定之比率；

(c) 兩行(或列)相當各元之差與另兩行(或列)相當各元之差有一定之比率；

(d) 行列式中有一行或一列之各元均爲 0。

定理 II: 有下列情形之一時，行列式之值不變:

(a) 全體行變爲列或列變爲行，其相互之次序並不變更；

(b) 任一行(或列)之各元加其他任一行(或列)之相當各元之同倍數。

定理III:行列式中任兩行(或列)相交換則其絕對值不變而正負相反。

定理 IV: 設一行(或列)之各元爲二項式，則此行列式可分成兩行列式之和，其式如下:

$$\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 V:行列式中一行(或列)之各元若乘以同一之數，則等於以該數乘此行列式。

定理 VI:行列式皆可化成一較高次數之行列式，如次:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理VII:同次行列式之積爲一同次之行列式，如次。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2 & a_1q_1+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2p_2 & b_1q_1+b_2q_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3 & a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 \\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3 & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3 & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3 \\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3 & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3 \end{vmatrix}$$

70. 應用行列式以解一次聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned}\right\} \text{則 } x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \text{但} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\} \text{先命} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=D,\ \text{並須 } D\neq 0$$

則

$$x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}:D,\quad y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}:D,\quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}:D$$

四元以上一次聯立方程式之解法仿此。以上各方程式之常數均須置在等號之右邊。

第8節 對 數

71. 對數之定義 甲數等於乙數之某冪時，則稱其冪之次數爲甲數以乙數爲底之對數，而甲數稱曰眞數，乙數稱曰對數底。例如 $y=b^x$，則 b 爲對數底，x 爲以 b 爲底 y 之對數，y 爲以 b 爲底 x 之反對數，y 爲眞數，其符號爲 $x=\log_b y$，或 $y=\log_b^{-1} x$。任何數均可爲對數之底，但通行者祇有以 10 爲底之常用對數，亦名布立格茲[(5)]對數；與以 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots=2.718281828459\cdots$ 爲底之自然對數，亦稱納披爾[(6)]對數，或雙曲線對數。凡對數符號下不書底數者如 log5，即屬以 10 爲底之通用對數。任何數之大於一者，其對數必爲正數，小於一者，其對數爲負數(祗須底數大於一)。例如 $100=10^2$，故 $\log 10=2$，$0.1=10^{-1}$，故 $\log 0.1=-1$。又因 $a^0=1$，故 $\log_a 1=0$；$10^0=1$，故 $\log 1=0$。換言之即 1 之對數均爲 0。

在通用對數中，任何數苟非 10 之整次冪，則其對數將爲純小

數，或帶小數。小數點以上謂之定位部分，小數點以下謂之定值部分。定值部分常爲正數，可由對數表求得之，定位部分爲正數，爲0，或爲負數，隨眞數之位數而定。

自然對數與常用對數間之關係如次：

$$\log_e n = \log n \div \log e$$
$$= \log n \div 0.4342944819\cdots$$
$$= \log n \times 2.3025850930\cdots$$
$$\log n = \log_e n \times 0.4342944819\cdots$$
$$= \log_e n \div 2.3025850930\cdots$$

72. 對數表　本書第一編所輯常用對數表計有六位對數表（表1）一種。如須更精密之對數表可查專書出版之七位表（Schrön; Bruhns; Vega-Bremiker）與八位表（Banschinger and Peters）本書第一編所輯自然對數見表8。

73. 對數表之用法

（常用對數）　茲以六位對數表爲例說明其用法。凡眞數有四位數字以下可直接由表中求得其定值部分。例如7415之對數，其定值部分爲.870111。

倘有數字四位以上，欲求其對數之定值部分，須用中介法爲之。例如21374之對數，查表知2137對數之定值部分爲.329805，在該行之右見差數爲203。故21374對數之定值部分爲.329805＋.000203×0.4＝.329805＋0.000081＝0.329886。

關於定位部分之確定法，有定律如下：（a）凡眞數大於1則定位部分爲正數，並較整數之位數少一。例如74.15對數之定位部分爲1，或其對數爲1.870111，同様$\log 741.5 = 2.870111$，$\log 7.415 = 0.870111$，$\log 7415 = 3.870111$。（b）凡眞數小於1，則定位部分爲負數，其絕對值較緊接於小數點下0位之數多一。例如$\log 0.2137 = \bar{1}.329805 = 9.329805 - 10$；$\log 0.00002137 = \bar{5}.329805 = 5.329805 - 10$。

（反對數）　如已知對數而欲求其眞數者，其手續與上法相反，故

謂之反對數。反對數可用對數表或特製之反對數表求之。例如對數 0.456 之眞數爲 2.858，對數 2.894 之眞數爲 783.4。

（餘對數） 遇兩對數相減，則可先求出減數之補數而與被減數相加。例如 $\log 741.5-\log 213.7=2.870111-2.329805=2.870111+(7.670195-10)=0.540306$。由此觀之，可知餘對數即倒數之對數。若某數爲 N，則倒數爲 $\frac{1}{N}$，其對數爲 $\log\frac{1}{N}=\log 1-\log N=0-\log N=\operatorname{colog} N$。此 $\operatorname{colog} N$ 爲 N 之餘對數之符號。

（自然對數） 由表 8 求得之。例如 $\log_e 4.89=1.58719$，$\log_e 489=6.19236$。凡較表列之數大十倍者，其對數須加 $\log_e 10$，例如 $\log_e 48.9=\log_e 4.89+\log_e 10=1.58719+2.30257=3.88978$。凡較表列之數小十倍者，其對數須減 $\log_e 10$，例如 $\log_e 0.489=\log_e 4.89-\log_e 10=1.58719-2.30257=1.58719+7.69743-10=9.28472-10$。凡眞數在 0.00 至 0.99 間之自然對數均屬負數，故於表列之對數下均須附 -10 於末尾。

74. 乘與除 數之乘除可按次之定律：

$$a\times b \qquad \log ab=\log a+\log b$$

$$a\div b \qquad \log(a\div b)=\log a-\log b=\log a+\operatorname{colog} b$$

換言之，即兩數（或諸數）相乘，可求出各數之對數而相加，再求對數總和之眞數；兩數相除可求出被除數之對數與除數之餘對數相加，再求其對數總和之眞數。

例： 68.31×0.2754；$68.31\div 0.2754$。其佈算如下：

$$\begin{array}{rl} & \log 68.31=1.834484 \\ + & \log 0.2754=9.439964-10 \\ \hline & \log x \quad 1.274448 \\ & x = 18.813 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \log 68.31=1.834484 \\ + & \operatorname{Colog} 0.2754=0.560036 \\ \hline & \log x =2.394520 \\ & x = 248.04 \end{array}$$

75. 冪與根 數之冪與根可按次之規律：

求 a^n 可由 $\log a^n=n\log a$ 得之；

求 $\sqrt[n]{a}$ 可由 $\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a$ 得之。

換言之，欲求 a 之 n 次冪，可將 a 之對數乘以 n，求其積之反對數；欲求 a 之 n 次根，可將 a 之對數除以 n，求其商之反對數。

例：　求 0.6831 之 1.53 次冪。

$1.53\times\log 0.6831=1.53(\bar{1}.834484)=\bar{1}.74671$。此數之反對數爲 0.55816。

故 $(0.6831)^{1.53}=0.56816$。

例：　求 $\sqrt[5]{0.6831}$。$\dfrac{1}{5}\log 0.6831=\dfrac{1}{5}\times\bar{1}.834481=\bar{1}.966897$。

其反對數爲 0.92661。故 $\sqrt[5]{0.6831}=0.92661$。

若干指數方程式可用對數求解。例如 $a^x=b$，即 $x\log a=\log b$，$\therefore\ x=\dfrac{\log b}{\log a}$。欲求 x 之值，可由 $\log x=\log\dfrac{\log b}{\log a}=\log(\log b)-\log(\log a)$ 得之。

76. 關於對數之公式：

$\log_b a=c$　則　$b^c=a$　（但 $a>1$，$b>1$）

$\log_b 0=-\infty$；$\log_b 1=0$；$\log_b b=1$；$\log_b\infty=\infty$

$\log_b(ac)=\log_b a+\log_b c$；$\log_b\dfrac{a}{c}=\log_b a-\log_b c$；

$\log_b\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{n}\log_b a$；$\log_b a^n=n\log_b a$；

$\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a=\log_a x\cdot\log_a b$；

$\log_a b\cdot\log_b a=1$

$\log 10^n=n$；$\log 10^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}$；$\log 10^{-n}=-n$；

$\log(a\cdot 10^n)=\log a+n$

$\log(a:10^n)=\log a-n$；$\log_e e^{\pm n}=\pm n$，

$\log_e(a\cdot 10^n)=\log_e a+\log_e(10^n)=\log_e a+n\log_e 10$

$\log_e(a:10^n)=\log_e a-\log_e(10^n)=\log a-n\log_e 10$

$\log_e 10\cdot\log_{10}e=1$。　$\log_e a^n=n\log_e a$

$\log_e 10=2.30259$。

第 9 節　　算尺與算機

77. 算尺 算尺係根據對數之理而製成，凡計算之無須十分精密者，用以乘除，乘冪，開方，至形便利。工程師所用者，以十吋尺居多，可讀三位數字。此外尚有五吋尺刻畫與十吋尺相同便於攜帶；二十吋尺可讀出數字三位至四位；螺線形算尺與筒形算尺可讀至四至五位數字；圓形算尺，其可讀數字位數之多寡隨其直徑之大小而異。

算尺因分畫之不同，又可分爲尋常孟哈姆[7]算尺，可用以乘除，開方。如附有對數及三角函數尺度者，並可用以求得對數及三角函數；雙面算尺，兩面均有尺度，且其上之游標係籠罩於全尺，對於繁複之計算運算較易，對於簡單之計算則反易纏誤；多相算尺，在活尺之中央多一尺度；「對數對數雙面算尺」可用以計算指數爲分數之乘冪與方根，亦可用以計算自然對數。圓形算尺之分度首尾相連，故活尺無左右移換之弊，但其分畫常須斜讀，乃其缺點也。此外如計算水管之流量，引擎之馬力，木料之尺度，視距測量，矢量，虛數，雙曲線函數等均有特製之算尺焉。又尋常算尺之游標上祇刻細線一道，如加刻兩道相距 l·g 1.341 則可用以換算馬力與仟瓦，常爲電工程師所採用。

78. 算尺之原理 算尺之主要部分爲定尺，活尺與游標三部分。茲以十吋普通算尺爲例而說明之，如圖 1，定尺上之 A 與 D 及

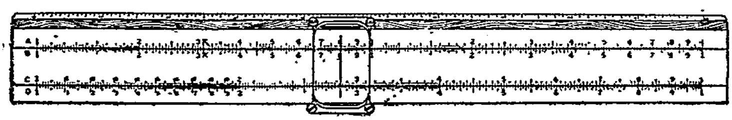


圖 1 算 尺

活尺上之 B 與 C 均刻對數尺度，即以左首起點 1 爲始，1 至 2 之距爲 log 2，1 至 3 之距爲 log 3，餘類推。CD 兩尺度之分劃相同，AB 之兩尺度之分劃亦同，惟 AB 尺度之縮尺僅爲 CD 尺度之縮尺之半。因尺度既按對數而刻，故將 C 活尺之距離加 D 定尺之距離，即屬兩對數相加，實即兩眞數之積也。如相減，實等於相除。A 尺上

所刻距離既爲 D 尺之半，故在 D 尺上之距離倘爲 $\log x$，則在 A 尺上應有 $2\log x$，D 尺上之眞數爲 x，則在 A 尺上應爲 x^2，故用 AD 兩尺可求任何數之平方。反之可由 A 尺上之數，由 D 尺讀得其平方根。

79. 算尺之用法　算尺上所註之數均無單位，例如其上 4.72 可視爲 4720 或 47.20 也。運算結果之爲幾位數當默計活尺向左或向右移動之次數而後定之。茲分述其用法如次：

(a) 乘法：　用 CD 尺。例如 250×32。設 C 尺之 1 於 D 尺之 2.5，移游標至 C 尺之 3.2，在 D 尺讀得 8。即其積爲 8000。

位數之定法：凡活尺左移者，其位數等於乘數位數之和；凡活尺向右移者，其位數等於乘數位數之和減一。此例乘數位數之和爲五，因活尺右移，故位數爲 $5-1=4$。

(b) 除法：　用 CD 尺。例如 $530\div38.4$。設游標於 D 尺之 5.3 處，移 C 尺之 3.84 至與游標相合，在 C 尺之 1 字處讀得 1.38，即所求之商爲 13.8。

位數之定法：凡活尺左移者，其位數等於被除數位數減除數位數之差；凡活尺右移者，其位數等於此差加一。本例被除數三位，除數二位，相差一位，因活尺右移故加一爲二位。

(c) 比例：　例如 $12:21=30:x$。此處 $x=\dfrac{21}{12}\times30$，故可設游標於 D 尺之 2.1，移 C 尺之 1.2 至游標，移游標至 C 尺之 3.0 得 $x=52.5$。

(d) 連乘數：　例如 $\dfrac{4\times5\times8}{3\times6}$。先作連乘 $4\times5\times8$，再除以 3×6，其結果爲 89。

(e) 平方：　用 AD 尺。例如求 425^2 之值。設游標於 D 之 4.25 在 A 尺讀得 1.81。即 181000 是也。又 $28^2=784$。

位數之定法：平方之位數等於原數之二倍。惟所得之平方數倘列在 A 尺之右半者應減一。

(f) 平方根：　用 AD 尺。例如求 $\sqrt{750}$。用游標於 A 尺之左半設 7.5，則在 D 尺讀得 2.74 即 $\sqrt{750}=27.4$。凡所擬開方之數須照算術開方法每兩位劃成一段，倘第一段爲一位數則用 A 尺之左半，倘爲兩位數，則用 A 尺之右半。段數若干則方根爲若干位。本例 750 可劃成

7'50'，第一段爲 7 乃一位數，故用 A 尺之左半，此數共兩段，故方根之位數爲 2。

(g) 開立方：　例如求 $\sqrt[3]{N}$。設游標於 A 尺之 N。將活尺移動至 B 尺在游標下之數字與 C 尺之 1 (或 10) 與 D 尺所準對之數字相同爲止。同一 N 可得三種立方根，應由還原方法以確定爲某一種。其位數應按算術方法定之。例如 $\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{80}=4.31$，$\sqrt[3]{800}=9.23$。

(h) 求正弦：　用背面之 S 尺及 B 尺。例如求 sin 38°，將 S 尺上之 38° 與尺背右首缺口中之黑線相對，於 A 尺之右尾 1 字處讀出 B 尺爲 617，卽 sin 38° = 0.617。又如求 sin 1°35'。設 S 尺之 1°35' 與尺背右首缺口中之黑線相對，於 A 尺之右尾 1 字處讀出 B 尺爲 276 卽 sin 1°35' = 0.0276。因正弦均爲小數，故讀出之數字上均冠以小數點，惟 B 尺讀數倘在左半段則應於小數點下加一 0 位。

(i) 求正切：　用背面之 T 尺及 C 尺。例如求 tan 12°40'。將 T 尺之 12° 40' 與尺背左首缺口中之黑線相對，於 D 尺之 1 字處見 C 尺讀數爲 225。因自 6° 至 45° 間正弦均爲小數，且大於 0.1，故讀數上應加小數點，卽 tan 12°40' = 0.225。

80. 算機　算機爲用機械方法以運算之機器。可分三類：一爲加法機，一爲印字加法機，一爲計算機。加法機上設有數目之鍵，按之即有相加總數顯示於機上。此機亦可用以作減法與乘法，略有經驗者，亦可用以作除法。印字加法機，機上有多數數字之鍵，設定一數後，搖轉其柄，則數字即印出於紙條之上。加減結果均能印出，便於檢查錯誤。計算機本爲便利乘除而設，但亦可以用以加減。其上有字鍵若干檔，每檔數字十個。按鍵設數，順搖其柄若干次即屬乘以若干，退搖若干次即等於除以若干，乘數或除數有數位者，亦可進位或退位。計算結果自能顯出於機上。如遇誤搖，則有鈴自振。亦有配電動機令其自搖者。凡工程上計算甚繁之處，用之頗見便利。

第 10 節　貫綫圖

81. 定義　貫線圖爲用特別之縮尺與排列法，繪出一羣曲線或直線，每線代表方程式中變數之一，然後置直線尺於其已知之變數

上，即可定出未知之變數。應用貫線圖可使計算工作爲之省便。貫線圖又名「諾謨圖」。

82. 三元方程式 設有三元方程式 $f(x,y,z)=0$；x,y，爲其變數。三元方程式之能否製成貫線圖隨方程式之形狀而定，茲將可製貫線圖之方程式形狀列次：(1) $f_1(x)=f_2(y)+f_3(z)$；(2) $f_1(x)=\dfrac{f_2(y)}{f_3(y)}$；(3) $f_1(x)f_4(z)+f_2(y)f_5(z)+f_3(z)=0$ (4) $\dfrac{f_4(z)}{F_1(x)}+\dfrac{f_5(z)}{F_2(y)}+f_3(z)=0$； (5) $f_2(y)+f_1(x)F_1(z)=F_2(z)$；

(6) $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}=0$。

83. 第一種三元方程式 $f_1(x)=f_2(y)+f_3(z)$。此式之貫線圖可用平行線三道造成之。設 $f_2(y')$ 與 $f_2(y'')$ 爲所欲顯示於貫線圖上之最大及最小數值。選擇 m_y 爲縮尺率，使 $m_y[f_2(y')-f_2(y'')]$ 適可繪足於紙上。繪此直線名曰 Y 線。於此線上按 y 之各種數值繪出 $f_2(y)$ 之各點。次於 Y 線以外任意距離 d 處繪一平行線稱爲 Z 線，選取 m_z 爲縮尺率照前法繪出相當於各 Z 值之 $f_3(z)$ 各點。再次，於距離 Y 線 $m_yd/(m_y+m_z)$ 處繪一平行線，名爲 X 線。命 z_0 與 y_0 爲 z 與 y 之任意值，由 Y 線上定出 $f_2(y_0)$ 點，由 Z 線定出 $f_3(z_0)$ 點，聯結此兩點，交 X 線於 x_0 乃自原方程式 $f_1(x)=f_2(y)+f_3(z)$ 中，將 $y=y_0, z=z_0$ 代入，求出 x_0 之值。用 $m_x=m_ym_z/(m_y+m_z)$ 爲 X 線之縮尺率，求出 $m_xf_1(x)$ 之各值，繪入 X 線，但 $f_1(x_0)$ 點須與 $f_2(y_0)$ 及 $f_3(z_0)$ 點在一直線上。至是貫線圖已成，苟以直線尺在 XYZ 三線上任連兩變數即可讀出第三變數之値矣。

例：求繪歐姆定律 $e=ri$ 之貫線圖。因此式可書成

$$\log e=\log r+\log i$$

故爲第一種三元方程式。設所須 r 之最大値爲 100 最小爲 10，故 $\log r$ 之最大値爲 2，最小値爲 1。若 R 線之長爲 10 吋(隨紙長而定)則可取縮尺率爲 $m_r(2-1)=10''$，或 $m_r=10$。將 $\log r$ 自 $\log 10$ 至 $\log 100$ 間之値繪於 R 線上，如圖 2 左邊所示者是也。

次繪平行線 I 與 R 線相距 6 吋（此距離隨紙闊而定），i 之最大值為 3 最小值為 1，故 $m_i(\log 3-\log 1)=10$，即 $m_i=20.96$。用此縮尺率繪自 $\log 1$ 至 $\log 3$ 之各值，如圖 2 右邊之 I 線。

再次，繪平行線 E 在 R 與 I 之間，與 R 相距 $m_r d/(m_r+m_i)=\frac{60}{30.96}=1.94$ 吋。取 r 與 i 之任意值，如 $r=50$ 歐姆，$i=2.5$ 安倍，聯成直線交 E 線於一點，此點按公式應為 $e=50\times2.5=125$ 伏脫。故定此點為 125 伏脫。E 線之縮尺率為 $m_e=m_r m_i/(m_r+m_i)=209.6/30.96=6.77$。故自 125 點起向上下用此縮尺率繪出 $\log e$ 之各數，如圖 2。

至此，貫線圖業已告成，用直線尺置於 e,i,r 三變數之任兩值可求得第三變數矣。

84. 第二種三元方程式 $f_1(x)=\frac{f_2(y)}{f_3(z)}$。此式之貫線圖可以 Z 形之三直線造成之故又名 Z 形貫線圖。繪 Y 與 Z 兩平行線於適當之距離，選定 m_y 與 m_z 縮尺率，與 §83 相同，惟最小之 $f_2(y)$ 與 $f_3(z)$ 值均應為 0。繪 $m_y f_2(y)$ 各值於 Y 線由下至上，繪 $m_z f_3(z)$ 各值由上至下。將 Y 與 Z 之零點，聯結為直線，作為 X 線。設此線之

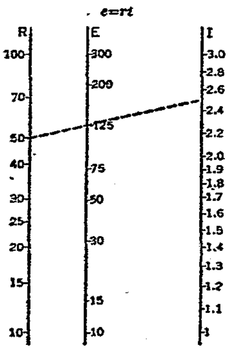


圖 2

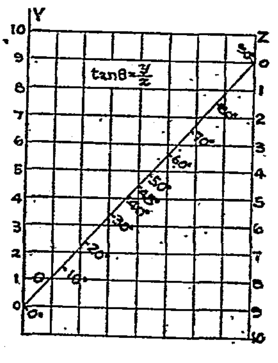


圖 3

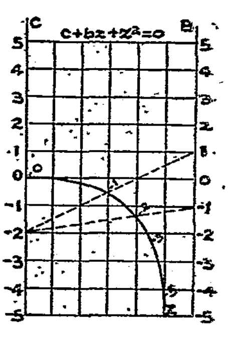


圖 4

長為 k。乃以 Z 線之 0 點作為 X 線之 0 點沿 X 線繪出 $km_z f_1(x)/[m_z+m_y f_1(x)]$ 之值。置直線尺於三變數之任二數上即可得第三變數之值。

第二種三元方程式如取對數，即可造成第一式，故亦可繪成三平行線之貫綫圖。

例：求作直角三角形中 $\tan\Theta = \dfrac{y}{z}$ 之貫線圖，其中 y 爲對邊，z 爲底邊。此例中 $\tan\Theta$ 相當於 $f_1(x)$，y 相當於 $f_2(y)$，z 相當於 $f_3(z)$。因此 Y 與 Z 兩線之尺度均甚均勻，如圖3。

85. 第三種三元方程式　$f_1(x)f_4(z)+f_2(y)f_5(z)+f_3(z)=0$
此項貫綫圖常爲兩直線與一曲線所組成。先繪兩平行綫，相距愈遠則愈佳。沿 X 線繪出 $m_xf_1(x)$，沿 Y 線繪出 $m_yf_2(y)$ 與前述者相同，兩 0 點相準對，如圖 4。乃繪兩直綫，一線經過兩 0 點而與 X 及 Y 線相正交，一綫與 X 及 Y 線相平行而處於其中央。此兩線爲臨時軸線，故命爲 U 與 V 綫。照平常方法繪出 $\varphi(u,v)$ 之曲線：

$$u=-k\frac{m_y f_4(z)-m_x f_5(z)}{m_y f_4(z)+m_x f_5(z)},\quad v=\frac{-m_x m_y f_3(z)}{m_y f_4(z)+m_x f_5(z)}.$$

其中 k 爲 X 與 V 之距離。在曲線上註出相當之 Z 值，則爲 Z 線。此曲線與 XY 兩直線即組成所須之貫線圖。因 m_x/m_y 之比率，與 Z 曲綫之影響甚巨，故恒須以不同之比率逐一嘗試，以期獲得最易閱讀之曲線。

例：求作 $c+bz+z^2=0$ 之貫線圖，使 b 與 c 在 -5 與 $+5$ 之範圍內，可解得 z 根。

將此式與第三種三元方程式相比較，可知 c,b,z 三數與標準式之 x,y,z 當相，c 與 $f_1(x)$ 相當，b 與 $f_2(y)$ 相當，z^2 與 $f_3(z)$ 相當，1 與 $f_4(z)$ 相當，z 與 $f_5(z)$ 相當。定 B 與 C 兩線之長爲十吋，則 $m_b=[5-(-5)]/10=1$，同樣 $m_c=1$。又命 $k=3$ 吋，則

$$u=-3\left[\frac{1-z}{1+z}\right],\quad v=\frac{-z^2}{1+z}$$

繪出 $\varphi(u,v)$ 之曲線於臨時軸線上，如圖 4。在 Z 線上註出相當之 Z 值即得所須之貫線圖。

86. 第四種三元方程式　$\dfrac{f_4(z)}{F_1(x)}+\dfrac{f_5(z)}{F_2(y)}+f_3(z)=0$

此與第三種方程式大致相同，僅$f_1(x)$已由$\frac{1}{F_1(x)}$替代，$f_2(x)$已由$\frac{1}{F_2(x)}$替代而已。其貫綫圖可由兩相交直綫與一曲綫組成之。

繪 X 水平綫與 Y 垂直綫，並以交點爲原點。選定縮尺率 m_x 與 m_y 並稱 $\frac{1}{m_x}$ 爲沿 X 綫之單位，$\frac{1}{m_y}$ 爲沿 Y 綫之單位。以下列坐標繪曲綫： $x=-f_4(x)/f_3(z)$， $y=-f_5(z)/f_3(z)$。
於曲綫上註出相當之 z 值，成爲 Z 綫。沿 X 綫以 $m_xF_1(x)$ 繪出各點，沿 Y 綫以 $m_yF_2(y)$繪出各點，即成 X 與 Y 綫。有此三綫即完成所需之貫綫圖。

例：將上例之 $c+bz+z^2=0$ 中，以 $x=\frac{1}{c}$，$y=\frac{1}{b}$ 代入，則得 $\frac{1}{x}+\frac{z}{y}+z^2=0$ 試製一貫線圖。

在此式中，$x=F_1(x)$，$y=F_2(y)$，$1=F_4(x)$，$z=f_5(z)$，$z^2=f_3(z)$。所得之貫線圖示於圖 5。

比較圖 4 與圖 5 後，可見兩圖互有優長之點。蓋 b,c 之值如在小範圍內則宜用圖4，如範圍較大則宜用圖5。是以作圖時宜審視變數之範圍以選定貫綫圖之形式也。

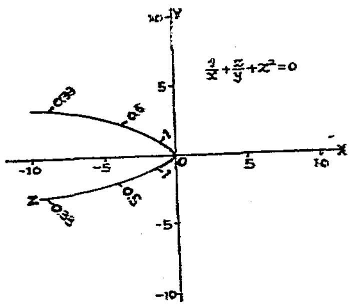


圖 5

87. 第五種三元方程式

$$f_2(y)+f_1(x)F_1(z)=F_2(z)$$

此式亦可自第三種化出，即除以 $f_5(z)$，而書 $F_1(z)$ 以代替 $\frac{f_4(z)}{f_5(z)}$，書 $F_2(z)$以代替$-f_3(z)/f_5(z)$。此式之貫綫圖爲一直綫與一圓弧及一曲綫所成。

在直角坐標內繪一 Z 曲綫，其橫坐標值爲 $F_1(z)$，縱坐標值爲

$F_2(z)$。縱橫坐標之縮尺不必相同以 z 之值適能在圖紙範圍內作合宜之分配爲度。在 Z 綫上註出相當之 z 值。

以垂直坐標軸爲 Y 綫，於其上繪出 $m_y f_2(y)$ 之點，m_y 應與縱坐標之縮尺相同。乃以原點爲中心，繪一圓弧，與水平坐標軸相交。以此交點爲始逆時針方向繪出各點，使每點與原點所成直綫之坡度適爲 $f_1(x)$，此圓弧即成爲 X 綫。此項貫綫圖有一特異之點即欲定 x, y, z 之聯立値時須貫綫二道而後可也。欲自已知之 x, y，値而定 z 值，須自 X 綫上繪直綫至原點，然後由 Y 綫作此綫之平行綫交 Z 綫。

例：求作　$y+x(10-z)=z^2$ 之貫線圖。

此處 $y=f_2(y)$，$x=f_1(x)$，$10-z=F_1(z)$，$z^2=F_2(z)$。所作之貫線圖示於圖 6。

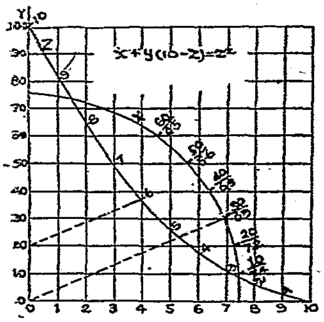


圖　6

88. 第六種三元方程式

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}=0$$

此爲三元方程式之一般式，就一般言，可以三道曲綫組成貫線圖。上述五程方程式祇爲此式之特別情形。凡方程式之不能化成第六種形式者，咸無法繪製貫線圖。方程式之能否化成此式祇可出諸嘗試並無一定規律可循也。

89. 四元貫線圖之第一法　此法係將四元方程式分作兩節，每節兩元使各等於一新變數。如是每節爲一三元方程式。乃按前數段所述方法繪成兩貫綫而以新變數爲公綫。至於四元中苟有三元爲已知數，即可藉新變數爲媒介以求得第四元。

例：
$$\frac{x}{y}=\frac{a+z}{a+t}$$

設新變數爲 u，則化成 $u=\dfrac{x}{y}$，$u=\dfrac{a+z}{a+t}$ 兩個三元方程式。按照

第二種三元方程式之法則各製一 Z 形貫線圖而以 U 爲公線。經第一貫線圖中 X 線上之 x 值及 Y 線上之 y 值作一直線可定出 U 線之 u 值。復由第二貫線圖中 U 線之 u 點繪直線至 T 線之 t 值即可定 Z 線上之 z 值，餘仿此。

90. 四元貫綫圖之第二法　將四元方程式之一元付以成系之數值使成一羣之三元方程式。然後繪成一羣之貫線圖。

例：　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{zt}{y}+z^2=0$。式中之 t 若以 1,2,3,4,……代之，則得一羣三元方程式，與前述之第四種相同。乃以同一之 X 及 Y 線繪成多數之 Z 曲線。

91. 比例貫綫圖　此爲四元貫綫圖之第三法。設方程式之形式爲　$\dfrac{f_1(x)}{f_2(y)}=\dfrac{f_3(z)}{f_4(t)}$

繪正交軸綫兩對，一爲 X,Y 綫，一爲 Z,Y 綫，使 Z 與 X 平行，Y 與 T 平行。沿 X 綫繪 $f_1(x)$，沿 Z 綫繪 $f_3(z)$，採用同一之縮尺率。又沿 Y 綫繪 $f_2(y)$，沿 T 綫繪 $f_4(t)$，採用另一之相同縮尺率。連 XY 綫上二點爲直綫，復於 ZT 綫間作此直綫之平行綫，則此兩平行綫與四軸之交點，即屬適合原方程式之聯立值。

另一比例貫綫圖之繪法適用於 $f_1(x)-f_2(y)=f_3(z)-f_4(t)$ 之形式。繪 X,Y,Z,T 四綫互相平行，並使 XY 兩綫之距離與 ZT 兩綫之距離相等。用同一之縮尺率，繪 $f_1(x)$ 於 X 綫，$f_2(y)$ 於 Y 綫，$f_3(Z)$ 於 Z 線，$f_4(t)$ 於 T 線。於是在 XZ 綫間聯一點綫，同時於 YT 綫間作此綫之平行綫，即可得適合原方程式之聯立值。

第 11 節　級數

92. 級數　大小各數，按一定規律，循序排列者，曰級數，其各數曰項，合各項而加之曰和。項數有限者曰有限級數，項數無限者曰無限級數。項數增至無限而其和近於一定值者曰歛級數，項數增至無限而其和亦無限大者曰發級數。項數增至無限，其和非爲無限

大，亦不近於一定值者曰不定級數，或中性級數或動搖級數。

93. 二項定理　依照二項定理可將二項式之乘冪展開為級數，如次：

$$(a\pm b)^n=a^n\pm na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2\pm$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$

$$(\pm1)^{r-1}\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}+\cdots\cdots$$

n 為正整數，則展開式為有限級數，共有 $n+1$ 項，末項為 b^n，祗須 a 與 b 為有限值，展開式與原式必完全相等。但如 n 為分數或負數，則展開式為無限級數；僅在 $|b|<|a|$ 時為斂級數；故祗有 a,b 之關係合於此條件時，展開式與原式可以完全相等。

係數 n，$\frac{n(n-1)}{2!}$，……等名為二項係數。為簡便計 $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 每書作 $\binom{n}{r}$，即第 $r+1$ 項之係數是也。例如 $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ 為第四項之係數。如 n 為正整數則自首項順數自 r 項之係數與自末項逆數至第 r 項之係數完全相同。

n 為正整數時各項之係數可以下表定之。此表首末兩項係數

$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

均為 1，中央諸項係數均等於低一次二項式相連兩係數之和，例如 $n=2$，係數為 1,2,1 而 $n=3$，則係數為 1,1+2,2+1,1 即 1,3,3,1 是也。餘類推。

二項乘冪式 $(a\pm b)^n$ 可書作 $a^n\left(1\pm\frac{b}{a}\right)^n$ 或作 $a^n(1\pm x)^n$ 之形式而展開之（此處 $x=\frac{b}{a}$）。以下所列各級數，均適用於 n 爲正整數之時，但 n 爲負數或分數而 x 之絕對值小於 1 時，亦適用之：

$$(1\pm x)^n=1\pm nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4\pm\cdots$$

$$(1\pm x)^{-1}=\frac{1}{1\pm x}=1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp x^5+\mp\cdots$$

$$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1\pm x}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2\pm\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4$$
$$\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5-\cdots$$
$$=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\pm\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4\pm\frac{7}{256}x^5-\frac{21}{1024}x^6+\cdots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1\pm x}}=1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$
$$=1\mp\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\mp\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4\mp\frac{63}{256}x^5$$
$$+\frac{231}{1024}x^6\pm\cdots$$

$$(1\pm x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1\pm x}=1\pm\frac{1}{3}x-\frac{2}{3\cdot 6}x^2\mp\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4$$
$$=1\pm\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x^2\pm\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4\pm\frac{22}{729}x^5-\frac{154}{6561}x^6\pm\cdots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{1\pm x}}=1\mp\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2\mp\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3$$
$$+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4\mp\cdots$$

$$=1\mp\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2\mp\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4\mp\frac{91}{729}x^5$$
$$+\frac{728}{6561}x^6\mp\cdots$$

$$(1\pm x)^{\frac{p}{q}}=1\mp\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}x^2\pm\frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3+\cdots$$

$$(1\mp x)^{-\frac{p}{q}}=1\mp\frac{p}{q}x+\frac{p(p+q)}{q\cdot 2q}x^2\mp\frac{p(p+q)(p+2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3+\cdots$$

94. 等差級數　級數中每相連兩項之差爲定數者（名公差）爲等差級數或算術級數。命級數之公差爲 d，項數爲 n，首項爲 a，末項爲 l，級數之和爲 S，則

$$l=a+(n-1)d,\quad S=\frac{n}{2}(a+l)。$$

算術平均數者（又稱等差中項）即在兩數之間插入一數，使三數成一算術級數之謂。如兩數爲 m 與 n，則算術平均數爲 $\frac{m+n}{2}$。

例：　求級數 $3+5+7+\cdots$ 至十項之和。此處 $n=10$，$a=3$，$d=2$，故 $l=3+(10-1)\times 2=21$。$S=\frac{10}{2}(3+21)=120$。

95. 等比級數　級數中每相連兩項之比率爲定數者（名公比）爲等比級數，或幾何級數。命公比爲 r，項數爲 n，首項爲 a，末項爲 l，級數之和爲 S，則

$$l=ar^{n-1};S=(rl-a)/(r-1)=a(1-r^n)/(1-r)$$

幾何平均數者（又稱等比中項），即在兩數之間插入一數，使三數成一幾何級數之謂。如兩數爲 m 與 n，則幾何平均數爲 $\sqrt{mn}$

例：　求級數 $3+6+12+\cdots$ 至 6 項之和。此處 $n=6$，$a=3$，$r=2$，故 $l=3\times 2^{6-1}=96$，$S=3(1-2^6)/(1-2)=189$。

若 $|r|<1$，則項數愈近無限大（∞），其和愈近於 $\frac{a}{1-r}$

例：　求級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 之和。此處 $a=\frac{1}{2}$，$r=\frac{1}{2}$，故

n 愈近於 ∞，則 s 愈近於 $\frac{1}{2}/(1-\frac{1}{2})=1$。

96. 調和級數　凡級數中每相連兩項之倒數間有一定之差者爲調和級數。設首項爲 $\frac{1}{a}$，公差爲 d，則第二項爲 $\frac{1}{a+d}$，第三項爲 $\frac{1}{a+2d}$，第 n 項爲 $\frac{1}{a+(n-1)d}$。設三數爲調和級數，則中間數爲他兩數之調和中項。設 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{b}$，爲調和級數，則 $x=2ab/(a+b)$ 或 $\frac{1}{x}=(a+b)/2ab$。

各種中項之關係如次：設 A 爲兩數之算術中項，G 爲幾何中項，H 爲調和中項，則 $G^2=AH$。

97. 彈積　圓球形之彈堆疊爲立體幾何形而計算其中之彈數，謂之彈積。

(a) 求堆成三角錐體彈積所用之彈數：頂層所用彈數爲 1，第二層爲 $1+2$，第三層爲 $1+2+3$，餘類推。由是設共有 n 層，則彈數爲 $1,3,6,10,15\cdots$ 共 n 項之和。

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

(b) 求堆成底爲正方形之角錐體之彈數：各層之彈數爲 $1^2,2^2,3^2,4^2\cdots\cdots$ 故

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

(c) 設底爲矩形，其頂層置彈 P 個，求其彈數：各層之彈爲 $p,2(p+1),3(p+2),4(p+3)\cdots\cdots$ 故

$$S_n=\frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

98. 其他代數級數之和。

$$1+2+3+4\cdots+(n-1)+n=n(n+1)/2$$

$$p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(q-1)+q=(p+q)(q-p+1)/2$$

$$2+4+6+8+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$$

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=n^2(n+1)^2/4$$

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+(n-1)^4+n^4=$$

$$\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n-1}=(1-x^n)/(1-x)$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+2+3+4+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$$

第12節 排列與組合

99. 排列 從 n 個相異之物內,每次取 r 個作種種次序而排列之,謂之由 n 物取 r 個之排列。此排列所取之物雖同於彼排列,但次序有異者,不得謂之同排列。排列之種數以 ${}_nP_r$ 表之。

自 n 個相異之物內,每次取 r 個之排列數:

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

以下爲排列之特別情形。

$${}_nP_1=n$$

$${}_nP_n=n!$$

若 n 個物內有 n_1 個爲同式,n_2 個爲另一同式, n_3 個又爲另一同式,等等,則每次取 n 個之排列數爲:

$${}_nP_n=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}$$

若 n 個不同之物繞一圓周而排列之，其不同之排列數爲 $(n-1)!$。在 n 個不同之字母中取 r 個排列之，每次可取重複之字母，則其排列總數爲 n^r 個。

100. 組合　由 n 個相異之物內，不問其次序如何，但選出 r 個不同之物而爲一組，此法謂之由 n 個物每次取 r 個之組合。由 n 個物取 r 個之組合之數，恒以 ${}_nC_r$ 表之。

若 n 個物各各不同，則

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(r+1)}{(n-r)!}=\frac{{}_nP_{n-r}}{(n-r)!}={}_nC_{n-r}$$

以下爲排列之特別情形：

${}_nC_1=n$;

${}_nC_n=1$。

在 n 個不同之物中每次任取幾個之組合數爲

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n-1$

${}_nC_r$ 之最大值：n 爲偶數，則 $r=\frac{n}{2}$ 時，其 ${}_nC_r$ 之值爲最大；

n 爲奇數，則 $r=\frac{1}{2}(n\pm1)$ 時，其 ${}_nC_r$ 之值爲最大。

若有物兩羣，一爲 m 個，一爲 n 個，各不相同，若由第一羣 m 個中每次取 r 個，由第二羣 n 個中每次取 s 個，則 $r+s$ 個之組合數爲：

$${}_mC_r\cdot{}_nC_s=\frac{m!n!}{r!s!(m-r)!(n-s)!}。$$

組合之恒等式：

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$;

${}_{m+n}C_r={}_mC_r+{}_mC_{r-1}\cdot{}_nC_1+{}_mC_{r-2}+\cdots+{}_mC_1\cdot{}_nC_{r-1}+{}_mC_r$

第13節　或然率

101. 或然率　設有一事，成功 a 次，失敗 b 次，乃取其適中之數，謂成功乃 $\frac{a}{a+b}$，失敗乃 $\frac{b}{a+b}$。因此適中數乃或然而非確定，故稱或然率。$a>b$，或然率大於 $\frac{1}{2}$，爲有利，$a=b$，或然率等於 $\frac{1}{2}$，爲利害參半。$a<b$，或然率小於 $\frac{1}{2}$，爲有害。

一事之必定或功者，其成功之或然率爲 1，必定失敗者，其成功之或然率爲 0。在其他情形下，成功之或然率爲一正純分數。

設一事成功之或然率爲 p，則失敗之或然率爲 $1-p$。設獲得資財 M 之或然率爲 p，則此希望之價値爲 $M.p$。

多數事件中發生之任何事件與其他事件無關者謂之獨立；反之則爲相關。若多數事件發生後，在某種情形下，其他事件不能發生，則謂之相斥。例如取球於袋，每次取後仍放回袋中，則爲獨立，不放回時，則爲相關。擲一骰於案，得 2 者不能兼得 3，此爲相斥。

若兩羣獨立事件之成功或然率分別爲 m 與 n，則兩事同時成功之或然率爲 mn。若兩羣均爲相斥事件，則兩事同時成功之或然率爲 $m+n$。例如一副撲克牌計 52 張，其中 J 字牌有 4 張，紅心之牌有 13 張，故取獲 J 牌之或然率爲 $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$，取獲紅心之或然率爲 $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$。但取獲紅心之牌與 J 牌爲獨立事件，故取獲紅心之 J 牌或然率爲 $\frac{1}{13}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{52}$。又撲克牌中 A 牌亦有13張，故取獲之或然率亦爲 $\frac{1}{13}$。如在撲克牌中取牌一張則得 A 者不能兼得 J，是爲相斥事件。在撲克牌中取得 A 牌或 J 牌之或然率爲

$\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{26}$。

設一事件成功之或然率爲 p，則在 n 次考驗中，可以發生連續

成功 r 次之或然率為 ${}_nC_r\cdot p^r(1-p)^{n-r}$。例如投一骰子，在五次中恰得二次么點之或然率，為 ${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=625/3888$。

第14節　投資算學

102. 利息　在一定期間內因借用本金而支付之報酬名為利息。在單位時間內(如一年)利息與本金之比率謂之利率。年利率恒以百分數計，月利率恒以千分數計，日利率恒以萬分數計。例如年利六厘即 6%，月利八厘，即 8‰，日利四分，即 4‱。

上海錢業計算利息係以日計，名為拆息，又名莊息(註一)，外埠有稱為市拆者，即國幣千元之日息也。最高為七分(註二)，即每千元每日七角，最低為白借，即不出利息之謂。

103. 單利　借用本金無論經歷若干時間，前期之利不加入後期之本者，謂之單利。設本金為 P，利率為 i，時間為 t 個單位，利息為 I，本利和為 A，則

$$I=Pit,$$

$$A=P+I=P(1+it)$$

銀行所定利率為年利，其不足一年者則以日計。一年日數作 365 日者曰實息，一年日數略作 360 日者曰便息。設年利率為 i，日數為 d 日，(計算日數首尾祇算一日)。則

$$\text{實息}\quad I_e=Pi\frac{d}{365}$$

$$\text{便息}\quad I=Pi\frac{d}{360}$$

計算便息可以本金與日數相乘而以下列常數除之：

(註一)廢兩改元以前名銀拆，廢兩改元後名洋拆，改用法幣後，始名拆息。

(註二)民國 31 年五月錢業拆息至一角五分，為非常現象。

年利率 4%	除數 9000
5%	7200
6%	6000
8%	4500
9%	4000
10%	3600
12%	3000

104. 複利　某期間之利息於其期之末算入本金，以爲次期之本

表1　複利表$(1+i)^n$

年數 n	利率 i							
	2%	3%	3½%	4%	4½%	5%	6%	7%
1	1.02000	1.03000	1.03500	1.04000	1.04500	1.05000	1.06000	1.07000
2	1.04040	1.06090	1.07123	1.08160	1.09203	1.10250	1.12360	1.14490
3	1.06121	1.09273	1.10872	1.12486	1.14117	1.15763	1.19102	1.22504
4	1.08243	1.12551	1.14752	1.16986	1.19252	1.21551	1.26248	1.31080
5	1.10408	1.15927	1.18769	1.21665	1.24618	1.27628	1.33823	1.40255
6	1.12616	1.19405	1.22926	1.26532	1.30226	1.34010	1.41852	1.50073
7	1.14869	1.22987	1.27228	1.31593	1.36086	1.40710	1.50363	1.60578
8	1.17166	1.26677	1.31681	1.36857	1.42210	1.47746	1.59385	1.71819
9	1.19509	1.30477	1.36290	1.42331	1.48610	1.55133	1.68948	1.83846
10	1.21899	1.34392	1.41060	1.48024	1.55297	1.62889	1.79085	1.96715
11	1.24337	1.38423	1.45997	1.53945	1.62285	1.71034	1.89830	2.10485
12	1.26824	1.42576	1.51107	1.60103	1.69588	1.79586	2.01220	2.25219
13	1.29361	1.46853	1.56396	1.66507	1.77220	1.88565	2.13293	2.40985
14	1.31948	1.51259	1.61870	1.73168	1.85194	1.97993	2.26090	2.57853
15	1.34587	1.55797	1.67535	1.80094	1.93528	2.07893	2.39656	2.75903
16	1.37279	1.60471	1.73399	1.87298	2.02237	2.18287	2.54035	2.95216
17	1.40024	1.65285	1.79468	1.94790	2.11338	2.29202	2.69277	3.15882
18	1.42825	1.70243	1.85749	2.02582	2.20848	2.40662	2.85434	3.37993
19	1.45681	1.75351	1.92250	2.10685	2.30786	2.52695	3.02560	3.61653
20	1.48595	1.80611	1.98979	2.19112	2.41171	2.65330	3.20714	3.86968
21	1.51567	1.86029	2.05943	2.27876	2.52024	2.78596	3.39957	4.14057
22	1.54598	1.91610	2.13151	2.36991	2.63365	2.92523	3.60354	4.43041
23	1.57690	1.97358	2.20611	2.46471	2.75217	3.07152	3.81976	4.74054
24	1.60844	2.03279	2.28332	2.56330	2.87602	3.22510	4.04894	5.07237
25	1.64061	2.09378	2.36324	2.66583	3.00544	3.38635	4.29188	5.42744
26	1.67342	2.15659	2.44595	2.77246	3.14068	3.55567	4.54939	5.80736
27	1.70689	2.22129	2.53156	2.88336	3.28201	3.73346	4.82224	6.21388
28	1.74103	2.28792	2.62016	2.99870	3.42970	3.92013	5.11170	6.64885
29	1.77585	2.35656	2.71187	3.11864	3.58406	4.11614	5.41840	7.11427
30	1.81134	2.42726	2.80672	3.24339	3.74532	4.32194	5.74351	7.61227
31	1.84759	2.50008	2.90501	3.37312	3.91386	4.53804	6.08812	8.14513
32	1.88454	2.57508	3.00670	3.50805	4.05998	4.76494	6.45340	8.71529
33	1.92224	2.65233	3.11193	3.64837	4.27403	5.00319	6.84061	9.32535
34	1.96068	2.73190	3.22085	3.79430	4.46637	5.25335	7.25115	9.97813
35	1.99989	2.81386	3.33358	3.94608	4.66735	5.51600	7.68611	10.6766
36	2.03989	2.89827	3.45025	4.10392	4.87738	5.79182	8.14728	11.4240
37	2.08069	2.98518	3.57101	4.26806	5.09686	6.08141	8.63611	12.2236
38	2.12230	3.07478	3.69599	4.43880	5.32618	6.38548	9.15428	13.0793
39	2.16475	3.16702	3.82535	4.61635	5.56590	6.70475	9.70354	13.9943
40	2.20801	3.26203	3.95924	4.80100	5.81637	7.03999	10.2855	14.9745
41	2.25221	3.35989	4.09781	4.99306	6.07811	7.39199	10.9029	16.0227
42	2.29725	3.46069	4.24124	5.19276	6.35162	7.76159	11.5571	17.1443
43	2.34320	3.56451	4.38968	5.40047	6.63744	8.14967	12.2505	18.3444
44	2.39006	3.67144	4.54332	5.61649	6.93613	8.55715	12.9855	19.6285
45	2.43786	3.78159	4.70233	5.84115	7.24826	8.98504	13.7647	21.0025
46	2.48662	3.89503	4.86692	6.07480	7.57443	9.43426	14.5905	22.4727
47	2.53635	4.01188	5.03726	6.31779	7.91528	9.90597	15.4660	24.0458
48	2.58708	4.13224	5.21356	6.57050	8.27146	10.4013	16.3939	25.7290
49	2.63882	4.25621	5.39604	6.83330	8.64368	10.9213	17.3775	27.5300
50	2.69160	4.38389	5.58491	7.10665	9.03265	11.4674	18.4202	29.4571

金，次期之利息，又於其期之末算入本金，以爲第三期之本金，依次類推。如是計算之利息謂之複利。命 P 爲本金，I 爲利息，i 爲年利率，n 爲年數，S 爲本利和，若複利每年一次，則

$$A=P(1+i)^n, \quad P=\frac{A}{(1+i)^n}$$

或 $$\log A=\log P+n\log(1+i)$$

如複利一年 m 次，則

$$A=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

關於用複利以計算本利之和，可檢查附表 1。此表之期間祗列至 50 年爲止，如超過此數，可分年數爲 k 與 l 兩者之和，即應用次式之理，由年數爲 k 與 l 之複利而求其積。

$$A=P(1+i)^{k+l}=P(1+i)^k(1+i)^l$$

欲計算本利和增至本金若干倍所須之年數(略數)可以下列各數爲被除數，利率爲除數而求其商：

1.5 倍	0.42
2 倍	0.72
2.5 倍	0.95
3 倍	1.12
4 倍	1.44

105. 貼現　商人以未到期之票據向銀行兌換現款，由銀行預先扣除買進日至到期日之利息者曰貼現。不滿一年之零日利息恒按單利計算名單貼現，滿年之利息恒按複利計算名複貼現。一年期之貼現數與票據到期價值之比率曰貼現率。命票據到期日之價值爲 A，票據之現值爲 P，貼現日至到期日之時間爲 t (年爲單位) 或 d (日爲單位)，年利率爲 i，利息爲 I，貼現率爲 k。則

$$I=Pi\frac{d}{365}\text{(單貼現)};$$

$$I=P\{(1+i)^n-1\}\quad\text{(複貼現)};$$

$$A=P+I;\quad P=A-I;\quad I=A-P;$$

$$k=\frac{i}{1+i};\quad i=\frac{k}{1-k}$$

106. 名率與實率　複利計算時所稱利率，如「6%，複利期一季」此 6 %爲名率；實率者年終時所得利息與歲首時所投本金之比率也。除複利期爲一年一次外，名率與實率不同。設實率爲 i，名率爲 j，複利期一年中有 m 次，則

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

複利期與複利率相異時，欲知孰爲優惠，須比較其實率而知之。

設名率爲 6%，則在各種複利期之實率如次：

$m=$	1	2	3	4	12	52	365
複利次數=	一年一次	半年一次	四月一次	三月一次	一月一次	一星期一次	一日一次
$i=$	.06000	.06090	.06136	.06168	.06180	.06180	.06183

107. 名實率之限度　以一元投資之本利和爲 $S=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$；

若 m 之值增至 ∞ 時，則本利和爲

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=e^j$$

此處之 e 即自然對數之底。由此觀之，可知如將利息時時刻刻作爲本金，所得之利息，並非 ∞，而是有限的。

因 $i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$，故 i 之限度爲 e^j-1。

108. 平均之到期　設有若干票據，其到期價值分別爲 S_1, S_2, S_3 ---S_r，其到期時間分別爲 $n_1, n_2, n_3 \cdots n_r$ 年。平均到期之時間爲 T。若假定年利率爲 i，以複利計之：

$$T=\frac{\log\sum_{k=1}^{r}S_k-\log\sum_{k=1}^{r}\frac{S_k}{(1+r)^{n_k}}}{\log(1+i)}$$

若到期時間均甚小，則近似數如下。

$$T \approx \frac{\sum_{k=1}^{r} n_k S_k}{\sum_{k=1}^{r} S_k}$$

109. 年金　年金（以稱期金為尤妥）為一定之連續期間之連續付欵也。除特別規定外，每次所付欵額均相等。年金可分為定期年金，與無定年金二種。凡付欵期間有一定之長短者曰定期年金，例如整存另付，每期可支取若干欵項之類；無一定之長短者，曰無定年金，如養老金以死亡為終止付欵期是也。

年金之現值等於歷次連續付欵之現值之和，換言之，即年金在年金期限開始時之價值，俗稱整存零付。年金之總值即在年金期限終了時歷次付欵及其利息之和，俗稱零存整付。年金之現值如以複利積累至年金期限之末即得該年金之總值。反之貼現若干年後年金之總值即得年金之現值。

設以 i 為利率，年金之付欵週期等於複利期，年金之期限為 n 個複利期，每週期付欵一元，則以 $A_{\overline{n}|} @ i$ 代表此年金之現值，(即整存零付) 而以 $S_{\overline{n}|} @ i$ 代表其總值(零存整付)。則得

$$A_{\overline{n}|} @ i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$S_{\overline{n}|} @ i = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

若每次付欵為 R，則年金總值 S，與年金現值 A 如次：

$$S = \frac{R[(1+i)^n-1]}{i}; \quad R = \frac{S}{S_{\overline{n}|}} = \frac{Si}{(1+i)^n-1};$$

$$A = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}; \quad R = \frac{A}{A_{\overline{n}|}} = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$= \frac{A}{S_{\overline{n}|}} + Ai。$$

$$n = \frac{\log(Si+R)-\log R}{\log(1+i)}$$

表2　年金總值表$[(1+i)^n-1]/i$

年數 n	利率 i 2%	3%	3½%	4%	4½%	5%	6%	7%
1	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
2	2 02000	2.03000	2.03500	2.04000	2.04500	2.05000	2.06000	2.07000
3	3.06040	3.09090	3.10623	3.12160	3.13703	3.15250	3.18360	3.21490
4	4.12161	4.18363	4 21495	4.24646	4.27820	4.31012	4 37462	4.43994
5	5.20404	5 30913	5.36247	5.41632	5.47072	5.52563	5.63710	5.75074
6	6.30812	6.46840	6.55016	6.63297	6.71690	6.80191	6.97533	7.15329
7	7.43428	7.66245	7.77942	7.89829	8.01916	8.14201	8 39385	8.65402
8	8.58297	8 89232	9.05170	9.21423	9.38002	9.54911	9.89748	10 2598
9	9.75463	10.1591	10.3685	10 5828	10.6021	11 0266	11.4913	11.9780
10	10.9497	11.4639	11 7313	12.0061	12.2882	12.5779	13.1808	13.8165
11	12.1687	12.8078	13.1419	13.4863	13.8412	14.2068	14.9716	15.7837
12	13.4121	14.1920	14.6019	15 0258	15.4640	15 9171	16.8700	17.8885
13	14 6803	15 6178	16.1129	16.6268	17.1599	17.7130	18.8822	20.1407
14	15 9739	17.0863	17.6769	18.2919	18.9321	19.5986	21.0151	22 5505
15	17.2934	18.5989	19.2956	20.0236	20.7840	21.5786	23.2760	25.1291
16	18.6393	20 1569	20 9709	21.8245	22.7193	23 6576	25.6725	27.6881
17	20.0121	21.7616	22 7049	23.6975	24.7417	25.8405	28.2129	30.6403
18	21 4123	23.4144	24 4996	25.6454	26.8551	28 1326	30.9057	33.9991
19	22 8406	25 1168	26.3571	27.6712	29.0638	30.5389	33.7601	37.3790
20	24.2974	26.8703	28 2795	29.7780	31 3714	33.0660	36.7857	40.9956
21	25.7833	28 6765	30.2693	31 9691	33.7831	35.7193	39.9927	44.8652
22	27.2990	30.5368	32 3297	34.2479	36.3034	38.5052	43 3923	49.0058
23	28 8450	32 4529	34.4603	36.6178	38 9370	41 4305	46.9960	53.4362
24	30 4219	34.4265	36 6663	39.0825	41.6892	44.5020	50 8157	58.1767
25	32 0303	36.4592	38.9497	41.6458	44.5652	47.7271	54.8647	63.2491
26	33.6709	38.5530	41 3129	44 3116	47.5706	51.1134	59.1565	68.6766
27	35 3443	40.7096	43 7589	47.0841	50 7113	56.6691	63.7060	74.4839
28	37 0513	42.9309	46 2904	49 9674	51 6933	60.4025	68.5262	80.6978
29	38.7923	45.2188	48 9106	53.9661	57.4230	64 3226	73.6400	87.3466
30	40 5682	47 5753	51.6224	56.0847	61 0071	66.4389	79.0564	94.4610
31	42 3796	50.0026	54 4291	59.3281	64 7524	70 7608	84 8019	103.073
32	44.2272	52.5026	57 3341	62.7012	69 6663	75 2989	90.8900	110.218
33	46.1117	55.0777	60.3408	66.2093	72 7563	80.0638	97.3434	118.934
34	48.0340	57.7300	63.4528	69.8576	77.0303	85 0670	104.184	128.259
35	49.9947	60.4619	66.6736	73.6519	81.4967	90 3203	111.435	138 237
36	51 9945	63.2758	70 0072	77 5980	86.1641	95 8364	119 121	148.914
37	54.0344	66.1740	73.4574	81.7019	91 0414	101 628	127.269	160.338
38	56.1351	69.1592	77.0284	85.9700	96 1383	107.710	135.905	172.561
39	58 2374	72 2340	80.7244	90 4088	101.464	114 095	145.059	185.641
40	60.4023	75.4010	84.5498	95 0251	107 030	120.800	154.762	199.636
41	62 6103	78.6630	88 5090	99.8261	112 846	127.840	165.048	214.611
42	64.8625	82 0229	92.6069	104.819	118 924	135.232	175.950	230.633
43	67.1598	85.4536	96.8481	110.012	125 276	142.994	187 508	247 778
44	69.5030	89.0481	101.238	115.412	131.914	151.143	199.758	266.122
45	71.8930	92 7195	105.781	121.029	138.850	159.700	212.743	285 750
46	74.3309	96 5012	110 483	126 870	146 098	168.685	226.509	306.753
47	76.8176	100.396	115 350	132.945	153.672	178.119	241.099	329.226
48	79.3540	104.408	120 387	139.263	161.588	188.025	256.565	353.271
49	81.9411	108.540	125 601	145 833	169.859	198.426	272 959	379 000
50	84 5800	112 796	130.997	152.666	178.503	209.348	290.337	406.530

表3　年金現值表$[1-(1+i)^{-n}]/i$

年數	利率 i 2%	3%	3½%	4%	4½%	5%	6%	7%
5	$4.7134	$4.5796	$4 5150	$4.4518	$4 3899	$4.3294	$4 2124	$4.1002
10	8.9824	8.5301	8.3165	8.1109	7 9127	7.7217	7.3602	7 0236
15	12 849	11.938	11.517	11 118	10.739	10.380	9.7123	9.1079
20	16 351	14.877	14.212	13.590	13 008	12 462	11 470	10 594
25	19.524	17.413	16.482	15 622	14.828	14.094	12.783	11.654
30	22 396	19.600	18.392	17.292	16 289	15 372	13.765	12 409
35	24.999	21.487	20.000	18.664	17.461	16.374	14.498	12.948
40	27.355	23.115	21.355	19 793	18 401	17.159	15.046	13.332
45	29.490	24.519	22.495	20.720	19.156	17.774	15.456	13.606
50	31.424	25.730	23.456	21.482	19.762	18 256	15.762	13.801
60	34.761	27.676	24.988	22.623	20 638	18.929	16.161	14.039
70	37.499	29.123	26 000	23.395	21.202	19 343	16.385	14.160
80	39.745	30.201	26.749	23 915	21 565	19.596	16.509	14.222
90	41.587	31.002	27 279	24 267	21 799	19.752	16.579	14.253
100	43.098	31.599	27.655	24 505	21.949	19 848	16.613	14.269

年金總值表見附表2,年金現值表見附表3。

例: (零存整取)每年存款100元,年利率6%,每年復利一次,問20年期滿可得本利和若干? 解: $S=\frac{R[(1+i)^n-1]}{i}=\frac{100[(1+0.06)^{20}-1]}{0.06}$

$=3678.57$ 元,由表2亦可直接得此數。

(整存零取)問一次存款若干元,則次年起每年可支款100元至20年爲止。(年利6%每年復利一次)。按每年支款100元至20年止之本利和爲3678.57元,此款之現值爲$\frac{3678.56}{(1+i)^n}=1147.0$元即一次應存之數。此數亦可由表3得之。

110. 終身年金　因人之壽命不一,故此項年金爲無定年金。如欲加以計算,必須自人壽保險公司之人壽經驗表中,求得某年齡時之生存率與死亡率(即十萬同年人中生存數與死亡數)而後可。設在 x 歲之生存數爲 l_x,則生存之或然率爲$\frac{l_{x+1}}{l_x}$; 在 x 歲時再活 n 年之或然率爲$\frac{l_{x+n}}{l_x}$。

若某人現年 x 歲,如彼能再活 n 年則可獲得 S 元,利率爲 i 則此項希望之現值爲$\frac{l_{x+n}}{l_x}S(1+i)^{-n}$。設希望獲得一元之現值以 ${}_nE_x$ 記之, $\frac{l_{x+n}}{l_x}$以 ${}_np_x$ 記之,又命$(1+i)^{-1}=v$

$${}_nE_x=\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n={}_np_x\cdot v^n$$

若某人現年x歲,自 $x+m$ 年起可獲得養老金每年一元至死亡爲止。設此項年金之現值爲 a_{x+m},則

$$a_{x+m}=\sum_{n=m}^{95-x}{}_nE_x$$

因人壽經驗表中人壽之上限爲95,故此項年金計至95爲止。

111. 折舊　折舊者乃實體資產如機器房屋之類因使用而損耗

之部分也。近代企業，均預測折舊之大小，而先籌劃一定之基金，以爲他日置換損耗基金之用。此種基金謂之置換基金，或稱折舊基金。每期分派於此基金之數額，謂之置換費。折舊基金常用之於本企業之活動事業，而不另投資於外界市場，故基金之大小，祇須於簿記上載其價值，而視爲一企業之活動費用。

如無特別規定，則常假定置換費於每年之末分撥。設以 C 代表資產之成本，L 爲此種資產在 n 年末之殘值，故置換成本當等於資產成本與殘值之差，即 $W=C-L$。設 F 爲任何時期折舊基金之總值，B 爲資產之簿記價值，則 $B=C-F$。折舊之計算法有三，茲分述之：

(a) 直線法：即分年撥存置換費而不計算利息之法。設每年之置換費爲 R 則

$$R=\frac{W}{n}$$

在 k 年之末：　$F=kR$；故 $B=C-kR$。

(b) 減債基金法：在此方法下，每年之置換費係以特定之利率 i，迭年積累，使到達資產之壽命年限後，即等於置換成本，其公式如下：

$$R=\frac{W}{s_{\overline{n|}}}=\frac{Wi}{(1+i)^n-1}$$

(c) 常數百分法：資產之簿記價值每年遞減一定之百分率者，謂之常數百分法。設 r 爲遞減之百分率，n 爲資產之適用期，則第一年之減值爲 Cr；第一年末之簿記價值爲 $C-Cr$ 或 $C(1-r)$。同理每年末之簿記價值恒爲該年歲首價值與 $1-r$ 之乘積。在 n 年末之簿記價值爲 $(1-r)^n$ 與 C 之乘積．故殘值爲

$$L=C(1-r)^n；\ 1-r=\sqrt[n]{\frac{L}{C}}$$

簿記價值 B 在 k 年之末爲

$$B_k = C(1-r)^k \text{ 或 } B_k = (1-r)B_{k-1}$$

在此種計算法之下，任何年末之置換費等於其前一年中所減之簿記價值。如置換費之分撥，不計利息時，則於 n 年末之總值為置換成本。

112. 資本折化成本(註)　所謂資本折化成本者乃指一資產之原值與未來無窮期之置換費之現值之和。例如某機器之原值為\$3000，15 年之末必須置換一次，設利率為 5%，殘值為 \$500，求資本折化成本。按原值減去殘值為置換成本，故置換成本為\$2500。於每年末支付一次，故 $k=15$。如是資本折化成本 $=3000+\frac{2500}{.05}\times\frac{1}{S_{\overline{14}|}\ @\ 5\%}=\$5317.12$。由是觀之，資本折化成本之公式如次：

$$K = C + \frac{W}{i(S_{\overline{n}|}\ @\ i)}$$

113. 工程經濟之比較　為研究工程之經濟起見，一切工程可分為兩大類。第一類建築物之工料尺度與該工程之收益無關者，例如效用相同之兩種設計，所不同者僅其成本，壽命，與作業費而已。第二類建築物之工料尺度係與收益有關，例如水力發電廠之管道，工料尺度一經改變，則電力之產量即隨之而異是也。關於第一類工程之經濟比較，係以其投資年費之多寡為關鍵。命成本為 C，每年置換費為 R，作業費為 O，壽命為 n 年，利率為 i，則 $R=\frac{C}{(1+i)^n-1}$

$$\text{年費} = Ci + O + \frac{C}{(1+i)^n - 1}$$

凡由上式算得之年費最寡者即屬最經濟之工程。

第二類工程除投資利息，作業費與置換費外，尚須加算收益之

(註)此名詞在英文中稱為 Capitalization, Capitalized Cost 或 Capitalized value, 楊培琫君譯之為總基本金，附此備考。

損失。設因此項工程而損失之每年生產量爲 b，每單位生產量之價值爲 k，則

$$年費=Ci+O+\frac{C}{(1+i)^n-1}+bk$$

凡由上式算得之年費最寡者即屬最經濟之工程。

114. 債券之價值 債券爲一種債務之契約，如政府發行之公債，企業發行之公司債，即其例也。債券到期時所可收回之金額，以 C 代表之，債券之面額以 F 代表之($C=F$ 或 $C>F$)。債券於一定時期付給一定百分比之利息謂之債息，以 D 代表之，其債息率 $\frac{D}{F}$ 以 r 代表之，債券之期限以 n 代表之。投資人所出之債券價格以 P 代表之，投資人自定之利率，以 i 代表之。故

債券價値 $=C$ 之現値＋債息所組成之年金之現値

或 $$P=\frac{C}{(1+i)^n}+D\,(A_{\overline{n}|}\ @\ i)$$

如投資之複利週期爲一年而債息則一年付給 p 次，則

$$P=\frac{C}{(1+i)^n}+pD(A_{\overline{n}|}^{p}\ @\ i)$$

如債券尙有抽籤還本之希望，命其中籤之或然率爲 q 則債券價格尙應增加 qF。(或 qC)。

115. 超貼法 超貼法亦爲計算債券價値之一法。設某債券\$1000，利率 6 %，每半年付息一次，於 20 年末照面額兌換，投資率爲 5%。則一千元投資利息爲每期爲 \$25，而債息爲 \$30，相差 \$5，故投資人須爲超値之購買，即其價値爲 $1000+(A_{\overline{40}|}@ .025)\times5=$ \$1125.51。又此例中如投資利率爲 7 %，則利息爲 \$35 元超過債券 \$5，故投資人應爲貼値之購買，即 $1000-(A_{\overline{40}|}@0.035)\times5=$ \$893.22。故一般之超貼公式爲

$$P=F+(A_{\overline{n}|}\ @\ i)(Fr-Fi)。$$

式中 P＝債券價値；F＝面値；r＝債率；i＝投資利息。

第三章 幾何學

第1節 幾何概念

116. 定義 幾何學者就宇宙間可以視覺及觸覺認識諸物體研究其所佔空間部分之形象大小位置之學問也。幾何學分爲平面幾何學與立體幾何學。

有位置而無大小者曰點；有長而無廣狹厚薄者曰線；任置綫之一部分與他部分，祗須兩點相重，而全部相合者曰直線；有位置，長，廣，而無厚者曰表面；表面上任聯兩點爲直線恒在其面上者曰平面；以面爲界，有位置，長，寬，厚，於空間佔有限之部分者曰立體；立體之以平面爲界者曰多面體。

117. 平面角 自一點引兩直線曰角，又稱平面角，其兩直線謂角之兩邊，此一點曰頂點，亦曰角頂；角之兩邊成一直線者曰平角，平角之半曰直角；小於直角者曰銳角；大於直角者曰鈍角。

角之大小以兩邊張開之大小定之。固定其一邊，而依角頂旋轉其另一邊，則角之大小，即自 0 漸增至一周天。周天之$\frac{1}{360}$之角曰度，六十分之一度曰分，六十分之一分曰秒。度分秒以 $^{\circ}\ '\ ''$ 記之。一直角等於 90°，一平角等於 180°。兩角之和爲 90° 者稱互爲餘角，兩角之和爲 180° 者稱互爲補角。

繪一圓，取圓弧之長等於半徑，則此圓弧所張之中心角亦可作爲角之單位，名曰弧度。一弧度等於$\frac{360}{2\pi}$度$=57.295779513^{\circ}$，而一度$=0.017453293$弧度。

118. 多邊形 凡以三直線以上圍成之平面形曰多邊形或稱平面直線形。多邊形從其邊數而分三角形(Triangle)，四邊形(Quadrilateral)，五邊形(Pentagon)，六邊形(hexagon)，七邊形(heptagon)，八邊形(octagon)，九邊形(enneagon or nonagon)，十

邊形(decagon)，十二邊形(dodecagon)等。

三角形之兩邊相等者曰二等邊三角形；三邊相等者曰正三角形。

四邊形之每兩邊均不相平行者曰不等邊四邊形；有兩邊平行者曰梯形；每兩邊均平行者曰平行四邊形。平行四邊形相鄰兩邊不等而無直角者曰偏菱形；四邊相等而無直角者曰菱形；鄰近邊不等而有直角者曰矩形；矩形之四邊相等者曰正方形。

兩多邊形相當之角均相等者爲相似多邊形；多邊形各邊或各角相等者名正多邊形，例如正三角形，與正方形。

第2節　三角形之性質

119.一般三角形　三角形三角之和等於 $180°$。$<XAB$(圖7)爲ΔABC之外角,等於其相對兩內角之和(即$<XAB=<B+<C$)三角形頂點對邊中點所聯之直綫曰中線；三中線相交於一點 G,此點名爲重心；重心位於中綫靠邊之三等分點，例如 $DG=\frac{1}{3}AD$。三角形三角之二等分線(圖8)交於一點 M，此點與三邊之距離相等，名爲內切圓心，或內心。角之二等分線將對邊分成兩段，其比與角之兩邊之比相等(例 $AE/EC=AB/BC$)。由三角形之頂點作垂直線至對邊，名爲三角形之高。三個高相交於一點名曰垂心。三角形三邊中點所立垂直線，名爲垂直二等分線，相交於一點 O(圖9)，與三頂點距離相等，此點名爲外切圓心，或外心。三角形最長之邊對最大之角，反之亦然。三角形兩邊中點聯成之直線平行於第三邊，其長等於第三邊之半。若兩三角形之三角分別相等，則爲相似之三角形，其相當之邊長成比例。

120.直角投影　在圖10與11中，AE 爲 AB 在 AC 上之直角投影，因 BE 垂直於 AC。三角形銳角對邊之平方等於兩鄰邊平方之和減鄰邊與另一鄰邊在其上之直角投影之積之兩倍。如圖 10，$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AE$。三角形鈍角對邊之平方等於兩鄰邊平方之和加鄰邊與另一鄰邊在其上之直角投影之積之兩倍。如圖11，$a^2=$

$b^2+c^2+2b\cdot AE$。

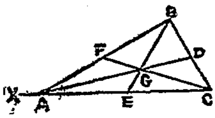


圖7

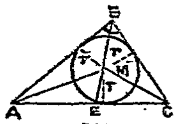


圖8

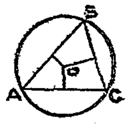


圖9

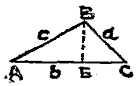


圖10

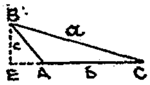


圖11

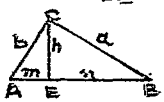


圖12

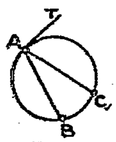


圖13

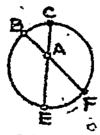


圖 14

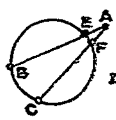


圖15

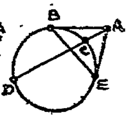


圖16

121，直角三角形　在圖 12 中，命 h 為自直角頂點 C 作至斜邊 c 之高。則 $\angle A+\angle B=90°$，$c^2=a^2+b^2$，$h^2=mn$；$b^2=cm$；$c^2=cn$；自 C 所作中線之長為 $c/2$。

122. 二等邊三角形　等邊與等角相對。由等邊相交之頂點作直線至底邊之中點，此直線等分頂角，並與底邊垂直。

第3節　平面曲線形

123. 定義　曲線之一段曰弧，聯弧之兩端為直線曰弦。曲向弦外之弧與弦合成之平面形曰弓形。角之兩邊與曲線相交，則所截之弧謂為角所張。兩曲線相遇於一點，密切無間者曰相切。若兩相切曲線之一為直線者，則稱此直線為曲線之切線。

124. 圓　圓為一曲線所圍成之平面形，此曲線上之一切點與其內之中心點距離相等。以圓之中心點為角頂所張之角為圓心角。自中心至圓周上任一點所聯之綫分曰半徑。兩半徑與所張之弧圍成之平面形曰扇形。與圓周交於兩點之直綫曰割線，在圓周兩交點間

之割線部分曰弦。平行兩割線所割之弧相等。一直線僅會圓周於一點曰切線，切線與切點所引半徑相垂直。若半徑與弦相垂直，則此半徑即平分此弦與此弦所張之弧。若兩圓相切，則兩圓中心聯成之直線經過切點，若兩圓相交，則兩圓中心聯成之直線即平分並垂直此公弦。如圖 14，兩割線相交於圓內，則 $AC \times AE = AB \times AF$。在圖 15 中，兩割線相交於圓外，則 $AB \times AE = AC \times AF$。如圖 16，$AD \times AC = \overline{AB^2} = \overline{AE^2}$，又 $\angle ABE = \angle AEB$。

125. 角之量算　圓弧與所張之圓心角成正比，故圓弧之長可以圓心角之度數計之；全圓周之長為 360°。兩弦所夾之圓周角等於兩弦所夾圓弧之半。如圖 13，$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。直徑所張之圓周角為直角。切線與自切點所作之弦所夾之角等於弦所割之弧。如圖 13，$\angle BAT = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCA}$。兩弦相交於圓內，其所夾之角等於所割圓弧之和之半，如圖 14，$\angle BAC$（或 $\angle EAF$）$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EF})$，$\angle BAE$（或 $\angle CAF$）$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{CF})$。兩割線，或兩切線，或一切線與一割線，相交於圓外時，所夾之角等於所割圓弧之差之半。如圖 15，$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{EF}$。又如圖 16，$\angle BAE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDE} - \overset{\frown}{BCE})$，$\angle BAD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC})$。

126. 其他平面曲線　在本章第 7 節所示其他平面曲線將於解析幾何章中討論之。

第 4 節　立體角

127. 二面角　二平面相交所夾之角曰二面角。如圖 17 所示，$P\text{-}BD\text{-}Q$ 為一二面角，二平面為二面角之面，其交線為二面角之稜。在稜上一點於兩面內各作垂直線，此兩垂線所夾平面角之大小，即作為二面角之大小，如

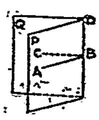


圖17

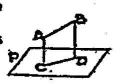


圖18

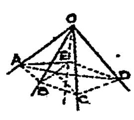


圖19

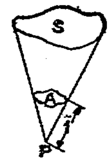


圖20

$\angle ABC$(圖 17)。若此平面角爲直角，則稱爲直二面角。由一斜交或平行於某平面之直線，祗能作某平面之垂直平面一個。其交點 CD(圖 18)名爲 AB 線在 P 平面之直角投影。一直線與一平面之夾角即屬直線與直線之直角投影間之夾角。此角爲直線與平面間所能成之角之最小者。

128. 多面角　相交於一點之三平面或多平面所夾之角爲多面角。如圖 19，$O\text{-}ABCDE$ 爲一多面角，各面之交線如 OA，OB等名稜；兩稜所成之平面曰面，交點 O 曰角頂。兩稜所夾之角如 AOB，BOC 等名面角。三平面所成之多面角曰三面角，四平面所成者曰四面角，等等。

129. 立體角　稱述會於一點之表面所夾之角曰立體角，不論其表面爲平面或曲面均可。多面角僅爲立體角之一特別情形。圖 20 示以 p 爲角頂之立體角，爲表面 s 所夾成。係以 p 爲球心，用單位半徑作球面，與表面 s 相交，則在 s 範圍內之球面部分 A，即屬計算立體角大小之標準。立體角之單位名立弧度，乃球面積等於半徑平方之球心立體角。圍繞一點之全部立體角等於 4π 立弧度。

130. 球面角　球面上兩大圓弧(經過球心之平面所截之圓)相交而成之角曰球面角。球面角可由其頂點引兩大圓弧之切線間之角度測度之；此角等於兩大圓平面所成之二面角。若兩大圓平面互相垂直，則稱此角爲直球面角。

第 5 節　多面體

131. 多面體　由多數平面所圍成之立體形曰多面體。若相對兩面(底面)爲全等多邊形而其相當邊互相平行，其餘之面(側面)各爲平行四邊形之多面體謂之角柱。底面爲三角形之角柱曰三角柱，爲四邊形之角柱曰四角柱等等。底面爲矩形之角柱曰矩形角柱。側面垂直於底面之角柱曰正角柱。底面爲平行四邊形之角柱曰平行六面體，若同時側面與底面垂直者曰正平行六面體。正平行六面體之底面爲矩形者曰直角矩形平行六面體。六面均爲正方形者

曰立方體。角柱爲斜交於底面之平面所截，則位於截面與底面間之一部分，曰截角柱。截面之切割各側面而與側面垂直者曰正截面。

132. 三角傍面臺　以在平行面上之二多邊形爲底面以三角形或梯形爲側面，側面與底面之一有共有之邊，而其頂點或對邊則與另一底面相共，如是所成之多面體曰三角傍面臺。

133. 角錐　以一多邊形爲底，而以有同一頂點之諸三角形爲側面之多面體曰角錐。兩面之交線謂之側稜，各側稜相交於頂點。角錐因其底面爲三角形四邊形五邊形等等而稱之爲三角錐，四角錐，五角錐等等。角錐之底爲正多邊形且其中心與頂點所引底平面之足相合者曰正角錐。以平行於底面之平面截去角錐之頂，所餘部分曰截頭角錐。若截面不與底面相平行，則成斜截頭角錐。

134. 正多面體　多面體之各面若爲全同之正多邊形，且各多面角均相等者曰正多面體。正多面體祇有五種，即正四面體，立方體，正八面體，正十二面體，正二十面體是也。

135. 四面體　有四面體之多面體謂之四面體。四面體可視爲三角錐，四面之任一面均可視爲底面。在四面之外切圓心各立垂直綫交於一點。此點與角頂距離相等，謂之外切球心。由每角頂至對面之重心各聯中綫，交於一點，即爲四面體之重心。此重心處於所聯中綫之四分之三處（自角頂量起）。自每角頂向對面各作垂直綫，相交於一點名爲四面體之垂心。四面體六個二面角所作六個二等分面相交於一點，此點與各面之距離相等，名內切球心。

第6節　曲面之立體形

136. 柱　一直綫沿一定曲綫而動且常與一不在曲綫之平面上之直綫平行，所生之曲面曰柱面。此動直綫曰母綫，定曲綫曰準綫。在任何位置之動直綫謂之柱面之基綫。柱面與不平行於基綫之兩平行平面所成之立體形曰柱。平行平面爲柱面所範圍者曰底面。底面所夾之柱面，曰側面。

底面爲圓之柱曰圓柱。基線與底面垂直之柱曰直柱。柱爲不平行於底面之平面所截，則位於截面與底面間之一部分之柱曰截頭柱。柱之各基線均爲垂直於基線之平面所截，此截面曰直截面。

137. 錐　一直線之一端常與一定之平面曲綫相切，另一端則通過曲綫所在平面外之一點，如是直綫移動所生之面謂之錐面。錐面與截錐面之平面間之立體，謂之錐。生錐面之動直線謂之錐面之母線。母綫所過之一點謂之頂點；母綫所過之曲綫謂之準綫；母綫在任意位置之直綫曰錐面之基綫。若準綫爲圓則爲圓錐。頂點與底面中心所聯之綫曰圓錐之軸。軸垂直於底面之圓錐曰直圓錐，不垂直者曰斜圓錐。錐在底面與平行於底面之截面間部分曰截頭錐。

138. 球　球乃曲面所包圍之立體，面上各點均與球內一點之距離相等。此曲面謂之球面，一點謂之中心，距離謂之半徑。平面與球之截面均爲圓，截面經過中心者爲大圓，否則爲小圓。大小圓中心所立截面之垂直綫交球面於圓之兩極，此兩極間之直綫爲球之直徑。經過球面兩點，除兩極外，祇可作大圓一個。此兩點間在球面上最短之距離即經過兩點之大圓之劣弧（小於半圓周之弧曰劣弧）。兩球相交，其交綫爲一圓，此一圓垂直於兩球中心所聯之直綫，且此圓之中心位於此直綫上。

139. 球分　球分爲球之一部分，由圓之扇形以過其中心之任意直徑爲軸，旋轉而生之立體。球之一半曰半球。

140. 球盤　二平行平面間所夾球體之一部分曰球盤，二平面所作之截面爲球盤之底面。底面之一亦可爲球之切面，斯時之球盤祇有一底面。兩平面所夾球面之一部分曰球帶。以廣義言之，凡任何旋轉所成之立體，苟爲垂直於軸之兩平行平面所截之一部分，均可稱爲盤。

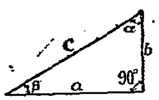
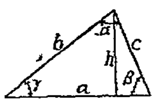
141. 球面多邊形　凡球面上用大圓之弧三道以上所成之多邊形謂之球面多邊形。三邊者曰球面三角形。球面三角形三角之和大於兩直角；而小於六直角。

第7節　量度法

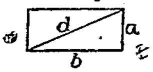
142. 量度法　量度法專論綫面體之長度，面積，與體積。為醒目起見，將關於常見之幾何形與幾何體量度之公式列成一覽表。計算時可自第一編表6查出關於 π 之常數。

143. 平面直綫形　下表中之符號說明如次：

直綫 $a,b,c\cdots$；角 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$；高 h；邊 s；對角綫 $d_1d_1\cdots$；周 p；內切圓半徑 r；外切圓半徑 R；面積 A。

1. 直角三角形 	有一角為 90° $p=a+b+c;\ c^2=a^2+b^2$ $A=\frac{ab}{2}=\frac{a^2}{2}\tan\beta=\frac{c^2}{4}\sin 2\beta$ $=\frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$
2. 一般三角形（附三等邊三角形） 	一般三角形 $p=a+b+c$. 命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{4rs}$ $A=\frac{ah}{2}=\frac{ab}{2}\sin\gamma=\frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta}$ $=rs=\frac{abc}{4R}$ 至 c 邊中線之長 $=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ γ 角二等分線之長 $=\frac{\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}}{a+b}$ 三等邊三角形($a=b=c=s,\alpha=\beta=\gamma=60°$) $p=3s;\ r=\frac{s}{2\sqrt{3}};\ R=\frac{s}{\sqrt{3}}=2r;$ $h=\frac{s\sqrt{3}}{2};\ s=\frac{2h}{\sqrt{3}};\ A=\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$

3. 矩形(附正方形)



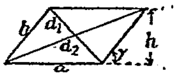
矩形：

$p=2(a+b)$; $d=\sqrt{a^2+b^2}$; $A=ab$.

正方形($a=b=s$)

$p=4s$; $d=s\sqrt{2}$; $s=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$; $A=s^2=\dfrac{d^2}{2}$

4. 一般平行四邊形(偏菱形)(附菱形)



一般平行四邊形(偏菱形)：

$p=2(a+b)$; $d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$;

$d_2=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}$;

$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$;

$A'=ah=ab\sin\gamma$

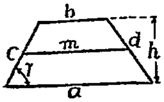
菱形($a=b=s$)：

$p=4s$; $d_1=2s\sin\dfrac{\gamma}{2}$; $d_2=2s\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

$d_1^2+d_2^2=4s^2$; $d_1d_2=2s^2\sin\gamma$;

$A=sh=s^2\sin\gamma=\dfrac{d_1d_2}{2}$

5. 一般梯形(附二等邊梯形)



命不平行邊中點所連之直線長$=m$。

則$m=\dfrac{a+b}{2}$

一般梯形：

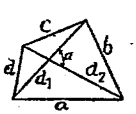
$p=a+b+c+d$; $A=\dfrac{(a+b)h}{2}=mh$

二等邊梯形($d=c$)：

$A=\dfrac{(a+b)h}{2}=mh=\dfrac{(a+b)c\sin r}{2}=$

$(a-c\cos\gamma)c\sin\gamma=(b+c\cos\gamma)c\sin\gamma$.

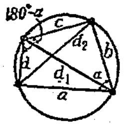
6. 一般四邊形（卽不等邊四邊形）



$A=a+b+c+d$

$A=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha=$對角線所分兩三角形面積之和。

7. 內切四邊形



四邊形對角之和為 180°

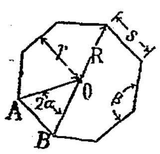
$ac+bd=d_1d_2$

命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=\frac{p}{2}$，$a$ 與 b 邊之夾角為 α

$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

$\quad=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha.$

8. 正多邊形



命 n=邊數

中心角 $=2\alpha=\frac{2\pi}{n}$ 弧度；

頂角 $=\beta=\frac{(n-2)}{n}\pi$ 弧度

$p=ns$；$s=2r\tan\alpha=2R\sin\alpha$；

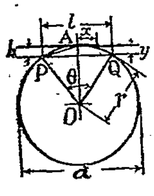
$r=\frac{s}{2}\cot\alpha$；$R=\frac{s}{2}\csc\alpha$；

$A=\frac{nsr}{2}=nr^2\tan\alpha=\frac{nR^2}{2}\sin 2\alpha$

$\quad=\frac{ns^2}{4}\cot\alpha$ = 每邊與中心所成三角形之和（例如 ΔAOB）

144. 平面曲線形　下表中之符號說明如次：直線 $a,b,c\cdots$；半徑 r；直徑 d；周長 p；圓周 c；中心角以弧度計，θ；弧 s；s 弧之弦 l；半 s 弧之弦 l'；矢高 h；面積 A。

1. 圓與圓弧



圓：

$d=2r$；$c=2\pi r=\pi d$；$A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{c^2}{4\pi}$

圓弧

命 $\widehat{PAQ}=s$；弦 $pA=l'$，則

$s=r\theta=\frac{d\theta}{2}$；$s\approx\frac{8l'-l}{3}$（此式為華芬[8]略式，$\theta$ 甚小時誤差殊微，$\theta=120°$時，誤差約四百分之一，$\theta=180°$ 時，誤差小於 1.25%）

$$l=2\sqrt{2hr-h^2}=2r\sin\frac{\Theta}{2};$$

$$r=\frac{s}{\Theta}=\frac{4h^2+l^2}{8h}=\frac{l}{2\sin\frac{\Theta}{2}};$$

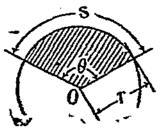
$h=r\mp\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$ ($\Theta\leqq180°$用一號；$\Theta\geqq180°$用+號) $=r\left(1-\cos\frac{\Theta}{2}\right)=$

$$r\operatorname{versin}\frac{\Theta}{2}=2r\sin^2\frac{\Theta}{4}=\frac{l}{2}\tan\frac{\Theta}{4}=r+y-\sqrt{r^2-x^2}$$

$$y=h-r+\sqrt{r^2-x^2}$$

---

2. 扇形及半圓



扇形：

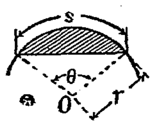
$$A=\frac{\Theta r^2}{2}=\frac{sr}{2}$$

半圓：

$$A=\frac{\pi r^2}{2}$$

---

3. 弓形



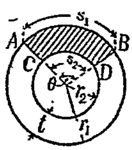
$$A=\frac{r^2}{2}(\Theta-\sin\Theta)$$

$=\frac{1}{2}[sr\mp l(r-h)]$ (若$h\leqq r$用一號；$h\geqq r$用+號)

$A=\frac{2lh}{3}$或$\frac{h}{15}(8l'+6l)$ (均係略式，如h比r甚微，誤差殊小；如$h=\frac{r}{4}$，第一式之誤差約3.5%，後式小於1.0%)

---

4. 環形與玦形



環形

$$A=\pi(r_1^2-r_2^2)=\pi(r_1+r_2)(r_1-r_2)$$

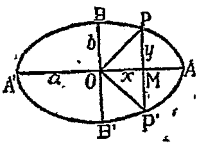
$=\frac{t}{2}$(大圓周+小圓周)

玦形($ABDC$)

$$A=\frac{\Theta}{2}(r_1^2-r_2^2)=\frac{\Theta}{2}(r_1+r_2)(r_1-r_2)$$

$$=\frac{t}{2}(s_1+s_2)$$

5. 橢圓



$$p=\pi(a+b)\left(1+\frac{R^2}{4}+\frac{R^4}{64}+\frac{R^6}{256}+\cdots\right),\text{此處 } R=\frac{a-b}{a+b}。$$

$$p=\pi(a+b)\frac{64-3R^4}{64-16R^2}\ (\text{略式})$$

$A=\pi ab$； AOB 部分面積 $=\dfrac{\pi ab}{4}$；

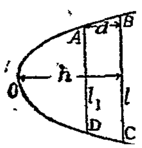
AOP 部分之面積 $=\dfrac{ab}{2}\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$；

POB 部分之面積 $=\dfrac{ab}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$；

$BPP'B'$部分之面積 $=xy+ab\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$；

$PAP'P$部分之面積 $=-xy+ab\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$；

6 拋物線



$$\widehat{BOC}=s=\tfrac{1}{2}\sqrt{l^2+16h^2}+\frac{l^2}{8h}\log_e\frac{4h+\sqrt{l^2+16h^2}}{l}$$

命 $R=\dfrac{h}{l}$，則

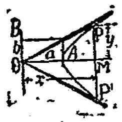
$$s=l\left(1+\frac{8R^2}{3}-\frac{32R^4}{5}+\cdots\right)\ (\text{略式})$$

$$d=\frac{h}{l^2}(l^2-l_1^2);\ l_1=l\sqrt{\frac{h-d}{h}};\ h=\frac{dl^2}{l^2-l_1^2}$$

BOC 部分之$A=\dfrac{2hl}{3}$；

$ABCD$ 部分之 $A=\dfrac{2}{3}d\left(\dfrac{l^3-l_1^3}{l^2-l_1^2}\right)$

7. 雙曲線



$$OPAP\,O\text{ 之 }A=ab\log_e\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

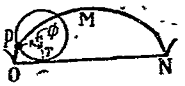
$$=ab\cosh^{-1}\frac{x}{a};$$

PAP′ 之 $A=xy-ab\log_e\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=$

$$xy-ab\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

---

8. 旋輪線

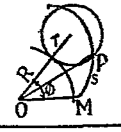


$\widehat{OP}=s=4r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$; $\widehat{OMN}=8r$;

OMN 之下 $A=3\pi r^2$

---

9. 外旋輪線



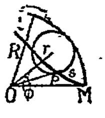
$\widehat{MP}=s=\frac{4r}{R}(R+r)\left(1-\cos\frac{R\varphi}{2r}\right)$;

MOP 之面積 $=A=\frac{r}{2R}(R+r)\cdot$

$(R+2r)\left(\frac{R\varphi}{r}-\sin\frac{R\varphi}{r}\right)$。

---

10. 內旋輪線



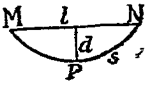
$\widehat{MP}=s=\frac{4r}{R}(R-r)\left(1-\cos\frac{R\varphi}{2r}\right)$;

MOP 之面積 $=A=\frac{r}{2R}(R-r)\cdot$

$(R-2r)\left(\frac{R\varphi}{r}-\sin\frac{R\varphi}{r}\right)$

---

11. 懸鏈線

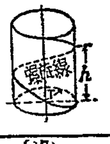


若 d 比較 l 爲小,則

$\widehat{MPN}=s=l\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2d}{l}\right)^2\right]$

---

12. 螺旋線

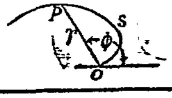


命螺旋線之長爲 s;線圈之半徑爲 r(即圓柱之半徑);每旋轉一次之進程≒螺距$=h$;旋轉之數$=n$,則

$$s=n\sqrt{(2\pi r)^2+h^2}$$

---

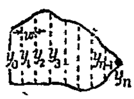
13. 阿基密提[17]螺線



命 $a=\frac{r}{\varphi}$, 則

$\widehat{OP}=s=\frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\log_e\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]$

14. 不整形



用 $n+1$ 縱平行線分全面積爲 n 部分，n 爲一整數，各縱線之長爲 $y_0, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n$，相距爲 w。全面積可用下列諸略式求得之，(以疏密爲序)。n 愈大，則結果愈臻精密。

梯形公式；$A=w\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right]$；

丟朗德[8]公式；$A=w\left[0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})+y_2+y_3+\cdots+y_{n-2}\right]$；

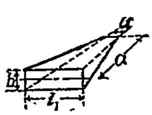
西姆普松[9]公式：$A=\frac{w}{3}\left[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})\right]$；$n$ 必須爲偶數

韋得爾[0]公式：$A=\frac{3w}{10}\left[5(y_1+y_5)+6y_3+y_0+y_2+y_4+y_6\right]$ n 祗等於 6

145. 平面立體形　下表中之符號說明如次：

直線 $a, b, c, \cdots$；高 h；斜高 s；底面之周長 p_b 或 p_B；正截面之周長 p_r；底面之面積 A_b 或 A_B；正截面之面積 A_r；諸側面之全面積 Al；各面之全面積 At；體積 V。

1. 楔形與正三角柱



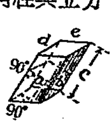
楔形：

$$V=\frac{ab}{6}(2l_1+l_2)$$

正三角柱($l_2=l_1=l$)

$$V=\frac{abl}{2}$$

2. 矩形角柱與立方



矩形角柱：

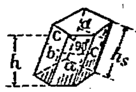
$A_l=2c(a+b)$；$A_t=2(ac+bc+de)$；

$V=A_r c=abc$

立方：$(a=b=c)$

$A_t=6a^2$；$V=a^3$；對角線之長$=a\sqrt{3}$

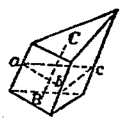
3. 一般角柱



$A_l = h\cdot p_b = s p_r = s\,(a+b+c+\cdots+n)$;

$V = h\cdot A_b = sA_r.$

4. 截頭角柱



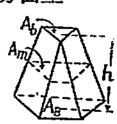
一般截頭角柱：

$V = A_r\times$(BC 之長，B 與 C 爲底面之重心)

截頭三角柱：

$$V = \frac{A_r}{3}(a+b+c).$$

5. 三角傍面臺



命中央截面之面積爲 A_m,

$$V = \frac{h}{6}(A_B + A_b + 4A_m).$$

6. 正角錐與截頭正角錐

正角錐

$A_l = \frac{s p_B}{2}$;　$V = \frac{hA_B}{3}$

截頭正角錐：

$A_l = \frac{s}{2}(p_B + p_b)$;　$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}).$

7. 一般角錐與截頭角錐

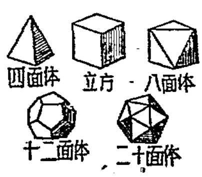
一般角錐：

$$V = \frac{h\cdot A_B}{3}$$

截頭角錐：

$$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}).$$

8. 正多面體



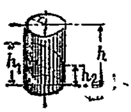
命邊長 $=a$，內切球之半徑爲 r，則

$r = \frac{3V}{A_t}$。A_t 與 V 之值見下表

面數	面之形式	全面積 A_t	體積 V
4	等邊三角形	$1.7321a^2$	$0.1179a^3$
6	正方形	$6.0000a^2$	$1.0000a^3$
8	等邊三角形	$3.4641a^2$	$0.4714a^3$
12	正五邊形	$20.6457a^2$	$7.6631a^3$
20	正三角形	$8.6603a^2$	$2.1817a^3$

146. 曲面立體形　下表中之符號說明如次:
直綫 $a,b,c,\cdots$;高 $h_1,h_2\cdots$; 斜高 s;半徑 r; 底面之周長 p_b,正截面之周長 p_r;角度以弧度計,φ;弧 s;弓形之弦 l,矢高 h; 底面之面積 A_b 或 A_B,正截面之面積,A_r; 凸面之總面積 A_l;全面積 A_t;體積 V。

1. 正圓柱與截頭正圓柱



正圓柱:

$A_l=2\pi rh$; $A_t=2\pi r(r+h)$;

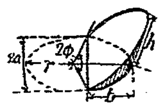
$V=\pi r^2h$

截頭正圓柱:

$A_l=\pi r(h_1+h_2)$; $A_t=\pi r\left[h_1+h_2+r+\sqrt{r^2+\left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^2}\right]$;

$V=\frac{\pi r^2}{2}(h_1+h_2)$。

2. 蹄狀體



$A_l=\frac{2rh}{b}[a+(b-r)\varphi]$;

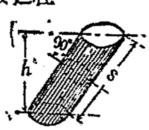
$V=\frac{h}{3b}[a(3r^2-a^2)+3r^2(b-r)\varphi]$

$=\frac{hr^3}{b}\left[\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}-\varphi\cos\varphi\right]$。

底面爲半圓之蹄形:($a=b=r$)

$A_l=2rh$; $V=\frac{2r^2h}{3}$。

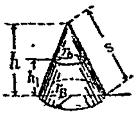
3. 一般之柱



$A_l=p_b\cdot h=p_r\cdot s$;

$V=A_b\cdot h=A_r\cdot s$

4. 正圓錐與截頭正圓錐



正圓錐:

$A_l=\pi r_B s=\pi r_B\sqrt{r_B^2+h^2}$;

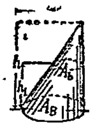
$A_t=\pi r_B(r_B+s)$; $V=\frac{\pi r_B^2h}{3}$。

截頭正圓錐:

$s=\sqrt{h_1^2+(r_B-r_b)^2}$; $A_l=\pi s(r_B+r_b)$;

$V=\frac{\pi h_1}{3}(r_B^2+r_b^2+r_Br_b)$.

5. 一般圓錐與截頭圓錐



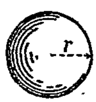
一般圓錐:

$V=\frac{A_Bh}{3}$.

一般截頭圓錐:

$V=\frac{h_1}{3}(A_B+A_b+\sqrt{A_BA_b})$.

6. 球



命直徑爲 d,

$A_t=4\pi r^2=\pi d^2=3.14159265d^2$;

$V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{\pi d^3}{6}=0.52359878d^3$.

7. 球分與半球

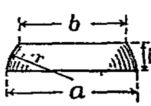
球分:

$A_t=\frac{\pi r}{2}(4h+l)$; $V=\frac{2\pi r^2h}{3}$.

半球: $(h=\frac{l}{2}=r)$

$A_t=3\pi r^2$; $V=\frac{2\pi r^3}{3}$.

8. 球帶與球盤



兩平行平面間之球帶

$A_l=2\pi rh$; $A_t=\frac{\pi}{4}(8rh+a^2+b^2)$。

一平面所割之球帶(即 $b=o$):

$A_l=2\pi rh=\frac{\pi}{4}(4h^2+a^2)$;

$A_t=\frac{\pi}{4}(8rh+a^2)=\frac{\pi}{2}(2h^2+a^2)$.

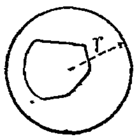
兩底面之球盤:

$V=\frac{\pi h}{24}(3a^2+3b^2+4h^2)$。

一底面之球盤($b=o$)

$V=\frac{\pi h}{24}(3a^2+4h^2)=\pi h^2(r-\frac{h}{3})$。

9. 球面多邊形與球面三角形



球面多邊形：

命角之和，以弧度計$=\Theta$，邊數$=n$.

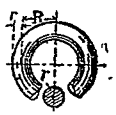
$$A=[\Theta-(n-2)\pi]r^2$$

此處$[\Theta-(n-2)\pi]$一值爲球面餘度

球面三角形$(n=3)$：

$$A=(\Theta-\pi)r^2$$

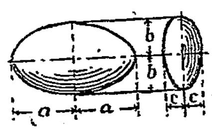
10. 環體



$$A_t=4\pi^2Rr;$$

$$V=2\pi^2Rr^2.$$

11. 橢圓曲面與長球面扁球面



橢圓曲面：

$$V=\frac{4}{3}\pi abc$$

長球面：

命$c=b$，及$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$。

$$A_t=2\pi b^2+2\pi ab\frac{\sin^{-1}e}{e};\ V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

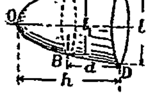
扁球面：

命$c=a$，及$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$。

$$A_t=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\log_e\left(\frac{1+e}{1-e}\right);$$

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b。$$

12. 拋物線曲面



DOC割分之$A_t=\frac{2\pi l}{3h^2}\left[\left(\frac{l^2}{16}+h^2\right)^{3/2}-\left(\frac{l}{4}\right)^3\right]$。

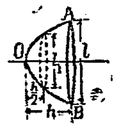
變底面之割分：

ABCD割分之$V=\frac{\pi d}{8}(l^2+l_1^2)$。

單底面之割分：

DOC 割分之 $V=\dfrac{\pi h l^2}{8}$。

13. 雙曲線曲面



AOB 割分之 $V=\dfrac{\pi h}{24}(l^2+4l_1{}^2)$。

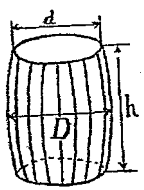
14. 旋轉面與旋轉體

命曲線或曲面重心 G 至軸之垂直距離爲 r。曲線與面不可將軸切割，則

旋轉面之面積 $=A_l=2\pi r\cdot s$

旋轉體之體積 $=V=2\pi r\cdot A$

15. 桶形

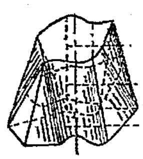


$V\approx\dfrac{1}{12}\pi h(2D^2+d^2)$（假設製桶之木片彎成圓弧形）

$V=\dfrac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Dd+\dfrac{3}{4}d^2\right)$（假設製桶之木片彎成拋物線形）

對於裝盛未滿時之體積可用本表下欄之公式但略數爲 $G=0.0034n^2k$，其中 G 爲體積以美加侖計，n 爲平均直徑以吋計，h 爲裝盛高度亦以吋計。

16. 不整之立體



求不整立體之體積可用下述之略算方法：

(a) 將立體割成角柱，柱等而求其總體積。

(b) 將立體之半側面割成三角形，曲線修改爲直線，曲面修改爲平面然後將每三角形之面積與其深度相乘，乘積之和卽等於體積。

(c) 如有兩面平行，則將側面修成平面，視作三角倂面台而計算之。

(d) 浸入液體內面量其所佔之體積（非數學方法）。

第四章　三角術

第1節　三角函數

147. 定義　如圖21，α 爲 ox 軸與半徑 op 間之夾角，以度或弧度爲單位。由 x, y, r 三數量中任何二數量之比率即可確定 α 角之大小。故此項比率爲角之函數。兹將函數之名稱與定義列次：

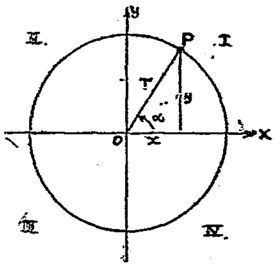


圖　21

$$\alpha\text{角之正弦}=\frac{y}{r}=\sin\alpha$$

$$\alpha\text{角之餘弦}=\frac{x}{r}=\cos\alpha$$

$$\alpha\text{角之正切}=\frac{y}{x}=\tan\alpha$$

$$\alpha\text{角之餘切}=\frac{x}{y}=\cot\alpha$$

$$\alpha\text{角之正割}=\frac{r}{x}=\sec\alpha$$

$$\alpha\text{角之餘割}=\frac{r}{y}=\csc\alpha$$

$$\alpha\text{角之正矢}=\frac{r-x}{r}=\operatorname{vers}\alpha=1-\cos\alpha$$

$$\alpha\text{角之餘矢}=\frac{r-y}{r}=\operatorname{covers}\alpha=1-\sin\alpha$$

$$\alpha\text{角之半矢}=\frac{r-x}{2r}=\operatorname{hav}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{vers}\alpha$$

前六函數爲常用函數，後三函數，用者甚罕。

148. 數值之正負　α 角(圖 21)若按反時針方向而量度謂爲正角,若按順時針方向而量度謂之負角。又 x 爲 op 在 X 軸上之投影如在 Y 軸之右爲正值,在其左者爲負值; y 爲 op 在 Y 軸之投影,在 X 軸以上者爲正,在其下者爲負。因此之故, α 角在象限 I 內, x,y 均爲正值;在象限 II 內, x 負而 y 正;在象限 III 內, x,y 均爲負值;在象限 IV 內, x 正而 y 負。各函數之值乃亦隨之而正負不等, 如次表:

象　限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

149. 三角函數之值　三角函數之值均周而復始, 有一定之週期。sin, cos, sec, csc 四函數均以 2π 弧度爲一週期, tan, cot 均以 π 弧度爲一週期。例如在圖 22 中,設 n 爲正整數,則

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha+\pi n)=\tan\alpha$$

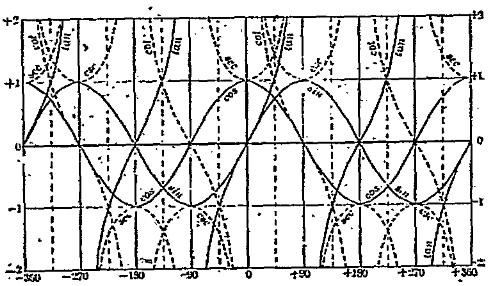


圖　22

在各象限內之三角函數均可化成第一象限內之三角函數，餘角及補角之函數，亦可化成本角之函數，如次表

	$-\alpha$	$90°\pm\alpha$	$180°\pm\alpha$	$270°\pm\alpha$	$360°\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$+\sec\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$+\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

若干角度之三角函數之數值列次：

$\sin0°=0$；$\cos0°=1$；$\tan0°=0°$。$\sin15°=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$；$\cos15°=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$；

$\tan15°=2-\sqrt{3}$。$\sin18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$；$\cos18°=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$；$\tan18°=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$。$\sin30°=\dfrac{1}{2}$；$\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。$\sin36°=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$；$\cos36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$；$\tan36°=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$；$\sin45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\tan45°=1$。$\sin54°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$；$\cos54°=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$；

$\tan54°=\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$。$\sin60°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\cos60°=\dfrac{1}{2}$，$\tan60°=\sqrt{3}$。

$\sin72°=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$；$\cos72°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$；$\tan72°=5+2\sqrt{5}$。

$\sin90°=1$；$\cos90°=0$；$\tan90°=\infty$。

自第一編表 3 可查得角度每隔 1′之 sin,cos,tan 與 cot. 函數

之眞數至七位小數；三角函數之對數表見第一編之表 2。

150. 反函數　符號 $\sin^{-1}x$，意即正弦爲 x 之角，名爲 x 之反正弦。同理 $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$, $\operatorname{vers}^{-1}x$，亦表示由函數值所求之角。惟 $\operatorname{vers}^{-1}x$ 之意，爲表示某角 α 之 $1-\cos\alpha$ 値爲 x 是也。三角正函數祗可得一單純之數值，例如 $\sin 30°=\frac{1}{2}$，但其反函數則不然，因 $\sin\frac{1}{2}=30°, 150°$……均可。

151. 三角函數之關係

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$$
$$=\frac{1}{\csc\alpha}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sec\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha}=\sqrt{\sec^2\alpha-1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$$

$$\cot\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$$
$$=\sqrt{\csc^2\alpha-1}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$$
$$=\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}=\sqrt{1+\cot^2\alpha}$$
$$+\frac{\sec^2\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; $\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$; $\cot\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha=1/\tan\alpha$; $\sec^2=1+\tan^2\alpha$

152. 兩角和差之三角函數。

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=(\tan\alpha\pm\tan\beta)/(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$

$\cot(\alpha\pm\beta)=(\cos\beta\cos\alpha\mp1)/(\cot\beta\pm\cot\alpha)$

若 x 甚小，如在 3° 或 4° 以下，則可用下列簡式，化出之 α 應以弧度計 ($1°=0.01745$ 弧度)

$\sin\alpha\approx\alpha$, $\cos\alpha\approx1$, $\tan\alpha\approx\alpha$

$\sin(\alpha\pm x)\approx\sin\alpha\pm x\cos\alpha$, $\cos(\alpha\pm x)\approx\cos\alpha\mp x\sin\alpha$.

153. 半角之三角函數

$\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$

$\cos\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$

$\tan\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)}=(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$
$=\sin\alpha/(1+\cos\alpha)$

$\cot\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{(1+\cos\alpha)/(1-\cos\alpha)}=(1+\cos\alpha)/\sin\alpha$
$=\sin\alpha/(1-\cos\alpha)$

154. 倍角之函數

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$

$\cot2\alpha=(\cot^2\alpha-1)/2\cot\alpha$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\sin4\alpha=8\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha$

$\cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

$$\sin n\alpha=n.\cos\alpha\left\{\sin\alpha-\frac{n^2-2^2}{2!}\sin^3\alpha+\frac{(n^2-2^2)(n^2-4)}{5!}\right.$$
$$\left.\sin^5\alpha-\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{7!}\sin^7\alpha+\cdots\right\}$$，n 爲偶數

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\alpha + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\alpha - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{7!}\sin^7\alpha + \cdots;\ n\text{ 爲奇數}$$

$$\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\alpha + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4\alpha - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6\alpha + \cdots;\ n\text{ 爲偶數}$$

$$\cos n\alpha = \cos\alpha\left\{1 - \frac{n^2-1}{2!}\sin^2\alpha + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\alpha - \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{6!}\sin^6\alpha + \cdots\right\},\ n\text{ 爲奇數}$$

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \cdots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \cdots\text{。}$$

155. 函數之乘積與乘冪

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$

$\tan\alpha\cot\beta = \sin\alpha\csc\alpha = \cos\alpha\sec\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$;

$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$; $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$

156. 函數之和與差

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ \cot\alpha-\cot\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

157. 反三角函數之關係　在以下諸公式中，關於週期常數均已删去。

$$\sin^{-1}x=-\sin^{-1}(-x)=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\csc^{-1}\frac{1}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos^{-1}x=\pi-\cos^{-1}(-x)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x=\frac{1}{2}\cos^{-1}(2x^2-1)$$

$$=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{x}\quad \csc^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan^{-1}x=-\tan^{-1}(-x)=\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cot^{-1}\frac{1}{x}=\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}=\csc^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x};\quad \sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x};\quad \csc^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$$

$$\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$$

$$\sin^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\sin^{-1}\{xy\pm\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}=$$

$$\cos^{-1}\{y\sqrt{1+x^2}\mp x\sqrt{1-y^2}\}$$

$$\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

$$\tan^{-1}x\pm\cot^{-1}y=\tan^{-1}\frac{xy\pm1}{y\mp x}=\cot^{-1}\frac{y\mp x}{yx\pm1}$$

第2節　平面三角形之分解

158 平面三角形角與邊之關係　命 a,b,c, 爲三角形之三邊；α,β,γ 分別爲此三邊之對角；A = 三角形之面積；$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。r = 內切圓之半徑。

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\text{(正弦定律)}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\text{ (餘弦定律)}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\quad\text{(正切定律)}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta;\ b=c\cos\alpha+a\cos\gamma;\ c=a\cos\beta+b\cos\alpha$$

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{bc}A;\quad \sin\beta=\frac{2}{ca}A;\quad \sin\gamma=\frac{2}{ab}A。$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};\ \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};\quad \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}};$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

159. 不等邊三角形之分解

(a) 已知三邊 a,b,c。有兩法如次，如欲利用對數，宜取第一法：

1. $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};\ A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=rs$；$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$；$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b}$；$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$。

2\. $\cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$；　$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；

$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，　$r=180^\circ-(\alpha+\beta)$

(b) 已知 a,b 與 α

$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$(若 $a>b$, $\beta<\frac{\pi}{2}$ 祇有一值；若 $b>a$, β 有二值。即 β_1 與 $\beta_2=180^\circ-\beta_1$)；$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$；$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$；

$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$。

(c) 已知 a,與 α,β

$b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$；$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$；$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$；$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

(d) 已知 a,b 與 γ. 有三法如次，如欲利用對數，宜取第一法：

1\.　$\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\gamma$；$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=90^\circ-\frac{1}{2}\gamma$；

$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$，$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2\.　$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$；$\sin\alpha=\frac{a\sin\gamma}{c}$；

$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)$

3\.　$\tan\alpha=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}$；$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)$；$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$

160\. 直角三角形之分解　命 $\gamma=90^\circ$，c 爲斜邊。已知兩邊或一邊一銳角。

$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}=b\tan\alpha=c\sin\alpha$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c-a)(c+a)}=\frac{a}{\tan\alpha}=c\cos\alpha$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\alpha=\sin^{-1}\frac{a}{c}=\cos^{-1}\frac{b}{c}=\tan^{-1}\frac{a}{b};\ \beta=90°-\alpha$$

$$A=\frac{ab}{2}=\frac{a^2}{2\tan\alpha}=\frac{b^2\tan\alpha}{2}=\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}。$$

第3節 球面三角術

161. 引言 命 O 爲球之中心；a,b,c 爲球面三角形之三邊；α,β,γ 分別爲以上三邊之對角。各邊均以其球心所張之角量計之。命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\sigma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$，球面餘度 $E=\alpha+\beta+\gamma-180°$。以下各公式通常祗在各邊及各角小於 180° 時方可適用。每一合於此條件之球面三角形恒同時有一極三角形，其三邊爲 $180°-\alpha$，$134°-\beta$，$180°-\gamma$，其三角爲 $180°-a$，$180°-b$，$180°-c$。

162. 一般公式

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}\text{(正弦定律)}$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha\text{(餘弦定律)}$$

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a\text{(餘弦定律)}$$

$$\cos a\sin b=\sin a\cos b\cos\gamma+\sin c\cos\alpha$$

$$\cot a\sin b=\sin\gamma\cot\alpha+\cos\gamma\cos b$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\sin\gamma\cos a-\sin\alpha\cos\beta\cos c$$

$$\cot\alpha\sin\beta=\sin c\cot a-\cos c\cos\beta$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}};\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}};\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

$$\tan\frac{E}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{(s-a)}{2}\tan\frac{(s-b)}{2}\tan\frac{(s-c)}{2}};$$

$$\cot\frac{E}{2}=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\tan\frac{c}{2};$$

$$\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\tan\frac{c}{}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cot\frac{\gamma}{2};$$

$$\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{c}{2}=\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{c}{2}=\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$$

163. 直角球面三角形　命 $\gamma=90°$，c 爲斜邊。

$$\cos c=\cos a\cos b=\cot\alpha\cot\beta;\ \cos a=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta};\ \cos b=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha=\frac{\sin a}{\sin c};\ \cos\alpha=\frac{\tan b}{\tan c};\ \tan\alpha=\frac{\tan a}{\tan b}。$$

第4節　雙曲線三角術

164. 雙曲線角　雙曲線角之定義與圓弧角相似，惟其角係以一等邊雙曲線爲準。茲以圖 23 與 24 說明雙曲線與圓弧角間之關係。蓋圓弧角係以 s/r 之比而量計之角，此項比率又等於 $2A/r^2$，其中之 A 爲 α 角與圓弧 s 間扇形之面積(圖 23)。在雙曲線中，半徑 ϱ 並非定值，僅其微分雙曲線角 $d\theta$ 係以 ds/ϱ 之比而測計（圖 24)。是以 $\theta=\int ds/\varrho=2A/a^2$，其中之 A 爲圖 24 內畫有平行細綫之部分。若 s 與 ϱ 之長用同一單位量得，則其雙曲線角之單位爲雙曲線弧度。

165. 雙曲線函數　雙曲線函數與圓弧度之函數相似亦屬兩種長度之比率，且用相類之名稱，如次(圖24)

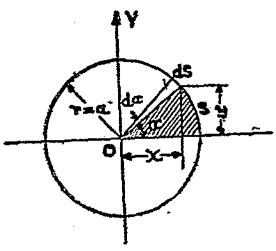


圖　23

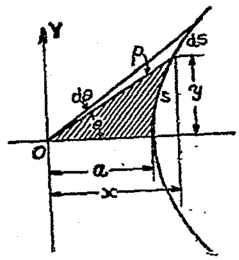


圖　24

θ 之雙曲線正弦 $=\dfrac{y}{a}=\sinh\theta$

θ 之雙曲線餘弦 $=\dfrac{x}{a}=\cosh\theta$

θ 之雙曲線正切 $=\dfrac{y}{x}=\tanh\theta$

θ 之雙曲線餘切 $=\dfrac{x}{y}=\coth\theta$

θ 之雙曲線正割 $=\dfrac{a}{x}=\operatorname{sech}\theta$

θ 之雙曲線餘割 $=\dfrac{a}{y}=\operatorname{csch}\theta$

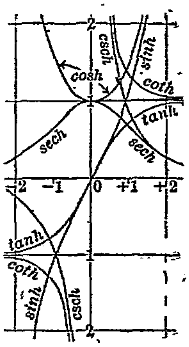


圖　25

166. 雙曲線函數之値　雙曲線函數之値可以其相等之指數函數計算之，雙曲線函數値之變化情形可閱圖 25。第一編表 7 爲每隔 0.1 弧度之雙曲線函數及其對數。雙曲線函數與指數函數之關係如次：

$$\sinh\Theta=\frac{e^{\Theta}-e^{-\Theta}}{2};\quad \cosh\Theta=\frac{e^{\Theta}+e^{-\Theta}}{2};$$

$$\tanh\Theta=\frac{e^{\Theta}-e^{-\Theta}}{e^{\Theta}+e^{-\Theta}}$$

若 Θ 甚微，則 $\sinh\Theta\approx\Theta$, $\cosh\Theta\approx1$, $\tanh\Theta\approx\Theta$; 如 Θ 之値甚巨，則 $\sinh\Theta\approx\cosh\Theta$, $\tanh\Theta\approx\coth\Theta\approx1$。

167. 基本恒等式

$$\operatorname{csch}\Theta=\frac{1}{\sinh\Theta};\quad \operatorname{sech}\Theta=\frac{1}{\cosh\Theta};\quad \coth\Theta=\frac{1}{\tanh\Theta}$$

$$\cosh^2\Theta-\sinh^2\Theta=1;\operatorname{sech}^2\Theta=1-\tanh^2\Theta;\operatorname{csch}^2\Theta=\coth^2\Theta-1$$

$$\cosh\Theta+\sinh\Theta=e^{\Theta};\ \cosh\Theta-\sinh\Theta=e^{-\Theta}$$

$$\sinh(-\Theta)=-\sinh\Theta;\ \cosh(-\Theta)=\cosh\Theta$$

$$\tanh(-\Theta)=-\tanh\Theta;\ \coth(-\Theta)=-\coth\Theta$$

$$\sinh(\Theta_1\pm\Theta_2)=\sinh\Theta_1\cosh\Theta_2\pm\cosh\Theta_1\sinh\Theta_2$$

$$\cosh(\Theta_1\pm\Theta_2)=\cosh\Theta_1\cosh\Theta_2\pm\sinh\Theta_1\ \mathrm{sihn}\,\Theta_2$$

$$\tanh(\Theta_1\pm\Theta_2)=\frac{\tanh\Theta_1\pm\tanh\Theta_2}{1\pm\tanh\Theta_1\tanh\Theta_2};$$

$$\coth(\Theta_1\pm\Theta_2)=\frac{1\pm\coth\Theta_1\coth\Theta_2}{\coth\Theta_1\pm\coth\Theta_2}$$

$$\sinh2\Theta=2\sinh\Theta\cosh\Theta=\frac{2\tanh\Theta}{1-\tanh^2\Theta}$$

$$\cosh2\Theta=\sinh^2\Theta+\cosh^2\Theta=1+2\sinh^2\Theta=2\cosh^2\Theta-1$$

$$=\frac{1+\tanh^2\Theta}{1-\tanh^2\Theta}$$

$$\tanh2\Theta=\frac{2\tanh\Theta}{1+\tanh^2\Theta};\quad \coth2\Theta=\frac{1+\coth^2\Theta}{2\coth\Theta}$$

$$\sinh\frac{\theta}{2}=\sqrt{(\cosh\theta-1)/2};\ \cosh\frac{\theta}{2}=\sqrt{(\cosh\theta+1)/2}$$

$$\tanh\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{\cosh\theta-1}{\cosh\theta+1}}=\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta+1}=\frac{\cosh\theta-1}{\sinh\theta}$$

$$\sinh\theta_1\pm\sinh\theta_2=2\sinh\frac{(\theta_1\pm\theta_2)}{2}\cosh\frac{(\theta_1\mp\theta_2)}{2}$$

$$\cosh\theta_1+\cosh\theta_2=2\cosh\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}\cosh\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

$$\cosh\theta_1-\cosh\theta_2=2\sinh\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}\sinh\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

$$\tanh\theta_1\pm\tanh\theta_2=\frac{\sinh(\theta_1\pm\theta_2)}{\cosh\theta_1\cosh\theta_2}$$

$$(\cosh\theta\pm\sinh\theta)^n=\cosh n\theta\pm\sinh n\theta$$

168. 反雙曲線函數　若已知某角之雙曲線正弦函數爲 u。則此角可書作 $\sinh^{-1}u$。反雙曲線函數之角，以雙曲線弧度爲單位可以次式計算之：

$$\sinh^{-1}u=\log_e(u+\sqrt{u^2+1});\ \cosh^{-1}u=\log_e(u+\sqrt{u^2-1})$$

$$\tanh^{-1}u=\tfrac{1}{2}\log_e\frac{1+u}{1-u};\ \coth^{-1}u=\tfrac{1}{2}\log_e\frac{u+1}{u-1}$$

第 5 節　虛角與複角函數

169. 雙曲線函數與圓周函數之關係　比較雙曲線函數與圓周函數之指數等值後，即可成立以下諸恒等式，其中 $i=\sqrt{-1}$

$\sin\alpha=-i\sinh i\alpha$	$\sinh\beta=-i\sin i\beta$
$\cos\alpha=\cosh i\alpha$	$\cosh\beta=\cos i\beta$
$\tan\alpha=-i\tanh i\alpha$	$\tanh\beta=-i\tan i\beta$
$\cot\alpha=i\coth i\alpha$	$\coth\beta=i\cot i\beta$
$\sec\alpha=\operatorname{sech} i\alpha$	$\operatorname{sech}\beta=\sec i\beta$
$\csc\alpha=i\operatorname{csch} i\alpha$	$\operatorname{csch}\beta=i\csc i\beta$

170. 反函數間之關係

$\sin^{-1}A=-i\sinh^{-1}iA$　　　$\sinh^{-1}B=-i\sin^{-1}iB$

$\cos^{-1}A=-i\cosh^{-1}A$　　$\cosh^{-1}B=i\cos^{-1}B$

$\tan^{-1}A=-i\tanh^{-1}iA$　　$\tanh^{-1}B=-i\tan^{-1}iB$

$\cot^{-1}A=-i\coth^{-1}iA$　　$\coth^{-1}B=i\cot^{-1}iB$

$\sec^{-1}A=-i\,\mathrm{sech}^{-1}A$　　$\mathrm{sech}^{-1}B=i\sec^{-1}B$

$\csc^{-1}A=i\,\mathrm{csch}^{-1}iA$　　$\mathrm{csch}^{-1}B=i\csc^{-1}iB$

171. 複角之函數　在複數符號 $c=a+ib=|c|(\cos\Theta+i\sin\Theta)=|c|e^{i\Theta}$ 中，$|c|=\sqrt{a^2+b^2}$，$i=\sqrt{-1}$，$\Theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$。$|c|e^{i\Theta}$ 恒書作 $c\angle\Theta$。

$\log_e|c|\ e^{i\Theta}=\log|c|+i(\Theta+2k\pi)$，其值多至無限。惟其主要值爲 $\log_e|c|+i\Theta$。以下爲若干恒等式：

$$\log_e 1=o;\ \log_e(-1)=i\pi;\ \log_e i=i\frac{\pi}{2};\ \log_e(-i)=i\frac{3\pi}{2}$$

$$(\cos\Theta\pm i\sin\Theta)^n=\cos n\Theta\pm i\sin n\Theta;$$

$$\sqrt[n]{\cos\Theta\pm i\sin\Theta}=\cos\frac{\Theta+2\pi k}{n}\pm i\sin\frac{\Theta+2\pi k}{2}$$

複角之用途常在電路問題中遇之，蓋電路問題中若干函數恒以複數表示之也。

$$\sin(\alpha\pm i\beta)=\sin\alpha\cosh\beta\pm i\cos\alpha\sinh\beta$$
$$=\sqrt{\cosh^2\beta-\cos^2\alpha}\cdot e^{\pm i\Theta}$$

其中 $\Theta=\tan^{-1}\cot\alpha\tanh\beta$.

$$\cos(\alpha\pm i\beta)=\cos\alpha\cosh\beta\mp i\sin\alpha\sinh\beta$$
$$=\sqrt{\cosh^2\beta-\sin^2\alpha}\cdot e^{\pm i\Theta}$$

其中 $\Theta=\tan^{-1}\tan\alpha\tanh\beta$.

$$\sinh(\alpha\pm i\beta)=\sinh\alpha\cos\beta\pm i\cosh\alpha\sin\beta$$
$$=\sqrt{\sinh^2\alpha+\sin^2\beta}\cdot e^{\pm i\Theta}=\sqrt{\cosh^2\alpha-\cos^2\beta}\cdot e^{\pm i\Theta}$$

其中 $\Theta=\tan^{-1}\coth\alpha\tan\beta$.

$$\cosh(\alpha\pm i\beta)=\cosh\alpha\cos\beta\pm i\sinh\alpha\sin\beta$$

$$=\sqrt{\sinh^2\alpha+\cos^2\beta}\cdot e^{\pm i\Theta}=\sqrt{\cosh^2\alpha-\sin^2\beta}\cdot e^{\pm i\Theta}$$

其中 $\Theta=\tan^{-1}\tanh\alpha\tan\beta$.

$$\tan(\alpha\pm i\beta)=\frac{\sin 2\alpha\pm i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta};$$

$$\tanh(\alpha\pm i\beta)=\frac{\sinh 2\alpha\pm i\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha+\cos 2\beta}$$

雙曲線正弦與餘弦均以 $2\pi i$ 為週期；雙曲線正切與餘切均以 πi 為週期。

$$\sinh(\alpha+2k\pi i)=\sinh\alpha;\quad \cosh(\alpha+2k\pi i)=\cosh\alpha$$

$$\tanh(\alpha+k\pi i)=\tanh\alpha;\quad \coth(\alpha+k\pi i)=\coth\alpha$$

172. 複數之反函數

$$\sin^{-1}(A\pm iB)=\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}-\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\pm i\cosh^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}+\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\cos^{-1}(A\pm iB)=\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}-\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\mp i\cosh^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}+\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\tan^{-1}(A\pm iB)=\left[\frac{\pi-\tan^{-1}\dfrac{A}{\pm B-1}+\tan^{-1}\dfrac{A}{\pm B+1}}{2}\right]$$

$$\pm i\tfrac{1}{4}\log_e\frac{A^2+(1\pm B)^2}{A^2+(1\mp B)^2}$$

$$\sinh^{-1}(A\pm iB)=\cosh^{-1}\left[\frac{\sqrt{A^2+(1+B)^2}+\sqrt{A^2+(1-B)^2}}{2}\right]$$

$$\pm i\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{A^2+(1+B)^2}-\sqrt{A^2+(1-B)^2}}{2}\right]$$

$$\cosh^{-1}(A\pm iB)=\cosh^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}+\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\pm i\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{B^2+(1+A)^2}-\sqrt{B^2+(1-A)^2}}{2}\right]$$

$$\tanh^{-1}(A\pm iB)=\tfrac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2A}{1+A^2+B^2}+i\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\pm 2B}{1-A^2-B^2}$$

第五章　平面解析幾何學

第1節　點與線

173. 坐標　任意點 P 在平面內之位置，可以其對於互相正交

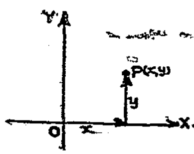


圖　26

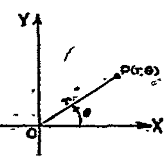


圖　27

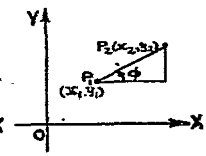


圖　28

之兩軸 OX,OY 之距離與方向確定之。如圖26，x 與 y 名為 P 點之直角坐標。位於 OY 之右方及 OX 之上方者為正，其反方向者為負。O 點謂之原點，OX 謂之橫軸或 X 軸，OY 謂之縱軸或 Y 軸。

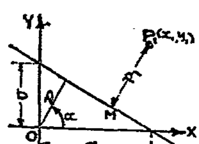


圖　29

P 點之位置亦可由其對 O 點之距離 r 及 OP 與 OX 之夾角 θ 以確定之（圖27），此 r,θ 名 P 點之極坐標。r 名矢量，θ 名矢角。

同一綫上各點坐標間之函數關係即屬該線之方程式，由此方程式可以顯明綫之性質。

在平面上 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2)$ 兩點間之距離為（閱圖28）

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

直線 P_1P_2 之坡度之定義為該線與X軸所成角 φ 之正切函數，

設坡度爲 m，則

$$m=\tan\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

若以極坐標表示之，則兩點之距離爲

$$s=\sqrt{r_1^2+r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

174. 直線之方程式　在直角坐標中，直線爲一一次兩元方程式，如次：

$$Ax+By+C=0$$

其中 A,B,C 爲常數。

直線方程式亦可書作次之形式：

$$y=mx+b$$

其中 m 爲直線之坡度，b 爲直線在 Y 軸之割分，如圖 29。

經過定點 (x_1,y_1) 及坡度爲 m 之直線方程式爲

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

經過兩定點 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 之直線方程式爲

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

若直線與 x 軸之割分爲 a，在 Y 軸之割分爲 b，則其方程式爲(圖 29)：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

如已知直線與原點之距離 p (圖 29)，及自 o 至直線所作垂直線 OP 與 OX 之夾角 α，則其方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=o$$

如將 $Ax+By+C=o$ 之各項以 $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ 除之，則得

$\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ (C 爲正數用負號，C 爲負數用正號)則 $\left|\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ 即爲原點至直線

之垂直距離

$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$即爲此垂直線與 X 軸夾角之餘弦

$\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$即爲此垂直線與 X 軸夾角之正弦。

若　$C=o$，此直線即通過原點，其方程式之形式爲 $Ax+By=o$，

或　$y=mx$

若　$A=o$，直線即平行於 X 軸，其方程式之形式爲 $By+C=o$

或　$y=b$

若　$B=o$，此直線即平行於 Y 軸，其方程式之形式爲 $Ax+C=o$

或　$x=a$

175. 點與直線之距離　設定點爲(x_1,y_1)定直線爲 $Ax+By+c=o$，則點與直線之距離 p_1（如圖 29）爲

$p_1=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$（$C$ 爲正數用負號，C 爲負數用正號，C 爲 0 則所用符號與 B 相同。）

176. 平行線　經過定點(x_1,y_1)所作 $Ax+By+C=o$ 之平行線方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=o$$

若　$m_1=m_2$ 則以下兩直線相平行，

$$y=m_1x+b_1,\qquad y=m_2x+b_2$$

177. 垂直綫　若 $m_1\cdot m_2=-1$ 或 $m_1=-\frac{1}{m_2}$ 則以下兩直綫相垂直　$y=m_1x+b_1,\qquad y=m_2x+b_2$

如 $AA_1+BB_1=0$，則以下兩直綫相垂直：

$$A_1x+B_1y+c_1=o,\qquad Ax+By+C=o.$$

經過定點(x_1,y_1)而與 $Ax+By+C=o$ 相垂直之直線方程式爲　$B(x-x_1)-A(y-y_1)=o$

178. 相交之直線　若 $Ax+By+C=o$ 與 $A_1x+B_1y+c_1=o$ 爲

相交之兩直線，則一切經過其交點之直綫方程式爲

$(Ax+By+C)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$，（$\lambda$ 爲任意常數）

三直線 $Ax+By+C=o$，$A_1x+B_1y+C_1=o$，$A_2x+B_2y+C_2=o$ 相交於一點之條件爲

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$$

179. 兩直綫之夾角　設兩直線爲 $A_1x+B_1y+C_1=o$，$A_2x+B_2y+C_2=o$，則其夾角 Θ 可由次式求得之：

$$\sin\Theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}},$$

$$\cos\Theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}},\ \tan\Theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

若兩直綫之方程式爲 $y=m_1x+b_1$，$y=m_2x+b_2$，則其夾角 Θ 爲

$$\sin\Theta=\frac{m_2-m_1}{\sqrt{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}},\ \cos\Theta=\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}},$$

$$\tan\Theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

第2節　坐標之轉換

180. 極坐標與直角坐標之轉換　若一定點 P 之直角坐標爲 (x,y)，極坐標爲 (r,Θ)，則

$x=r\cos\Theta$；$y=r\sin\Theta$；$x^2+y^2=r^2$；$x+iy=re^{i\Theta}$；$x-iy=re^{-i\Theta}$

181. 直角坐標原點之變更　假定原坐標軸之原點爲 0，新坐標軸之原定爲 o'，坐標軸之方向不變。若 P 點對於原坐標軸之坐標爲 (x,y)，對於新坐標軸之坐標爲 (x',y')，而 o' 點對於原坐標軸之坐標爲 (h,k) 則新舊坐標之關係如次：

$$x=x'+h$$

$$y=y'+k$$

182. 直角坐標軸之旋轉　設直角坐標之原點不動，而旋轉 Θ 角，則

$$x=x'\cos\Theta-y'\sin\Theta$$

$$y=x'\sin\Theta+y'\cos\Theta$$

183. 直角坐標軸之旋轉與原點之變更　若直角坐標軸旋轉 Θ 角，同時其原點變更位置至 (h,k) 點（對於原坐標軸之坐標），則

$$x=x'\cos\Theta-y'\sin\Theta+h$$

$$y=x'\sin\Theta+y'\cos\Theta+k$$

第3節　圓錐曲線

184. 圓錐曲綫　圓錐曲綫為平面截圓錐時截口之曲線，又在平面內任意點與定點與定直線距離之比為常數時之軌跡，曰圓錐曲線。定點稱為焦點，定直線稱準線，常數比稱離心率。其類有三：(1)離心率等於一為拋物線，亦即截面與圓錐之斜高相平行時之截口曲綫；(2)離心率大於一為雙曲綫，亦即截面與圓錐底面間之角，大於圓錐底角時之截口曲線，(3)離心率小於一為橢圓，亦即截面與圓錐底面間之角，小於圓錐底角時之截口曲線。若截面與圓錐之底面相平行，則其截口曲線為一圓。

185. 圓　圓之方程式為

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

其中 (x_0,y_0) 為圓之中心，r 為半徑。若以原點為圓之中心，則 $x_0=0$，$y_0=0$，其方程式為

$$x^2+y^2=r^2$$

若 $P_1(x_1,y_1)$ 為方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=o$ 之圓周上一點，則經過此點之切線方程式為

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=o$$

186. 橢圓　橢圓之方程式為

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

其中(x_0,y_0)為中心，a為長徑之半，b為短徑之半。

如以橢圓之長徑為 X 軸，短徑為 Y 軸，則其方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

如圖 30，中心$(x_0,y_0)=(o,o)$；焦點F_1為$(-ae,o)$，F_2為(ae,o)；$e^2=\frac{(F_1P)^2}{(MP)^2}=1-\frac{b^2}{a^2}<1$；準線為直線 $x=-\frac{a}{e}$，與 $x=\frac{a}{e}$。經過焦點之弦 LL' 名為通徑，其長為$\frac{2b^2}{a}=2a(1-e^2)$。若P為橢圓周之一點，則 $F_1P=a-ex$，$F_2P=a+ex$，$F_1P+F_2P=2a$（常數）。是以用一點移動於平面內，其與平面內二定點距離之和為定數時，則此點之軌跡為橢圓，此二定點謂之焦點。

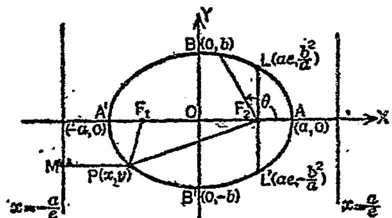


圖　30

長短半徑為 a 與 b 時，橢圓之面積為 πab

經過橢圓周(x_1,y_1)點之切線方程式為

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

坡度為 m 之橢圓切線方程式為

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

經過橢圓周(x_1,y_1)點之法線方程式為

$$(x-x_1)\frac{y_1}{b^2}-(y-y_1)\frac{x_1}{a^2}=o$$

凡通過橢圓中心之直線，而兩端止於曲線者均在為直徑。若有兩直徑其坡度分別為 m，與 m'，而 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ 則凡與一直徑相平行之弦必為他一直徑所等分，此兩直徑名為共軛直徑。

橢圓方程式亦可書作

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

又一般二次二元方程式 $ax^2+by^2+2gx+2fy+c=o$ 如表示橢圓，其條件為

a, b 與 $\left(\frac{g^2}{a}+\frac{f^2}{b}-c\right)$ 之符號相同。

橢圓如以 F_2 為極點，F_2A 為極坐標之軸，則其方程式為

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\Theta}$$

其參數方程式為

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi$$

187. 雙曲線　雙曲線之方程式為

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

其中 (x_0,y_0) 為中心，$AA'=2a$ (如圖 31)為橫軸，$BB'=2b$ 為共軛軸。在此圖中 (x_0,y_0) 為 (o,o)。$e^2=\frac{(F_1P)^2}{(PM)^2}=1+\frac{b^2}{a^2}>1$；焦點 F_1 之坐標為 $(-ae,o)$，F_2 之坐標為 (ae,o)；準線方程式為 $x=-\frac{a}{e}$；$x=\frac{a}{e}$。

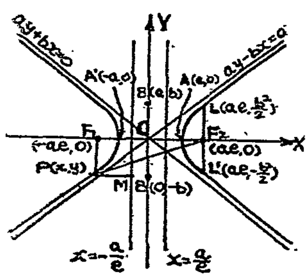


圖　31

過通F點之弦 LL' 謂之通徑，其長為 $\frac{2b^2}{a}$。若 P 為曲線上之一點，則 $F_1P=ex-a$；$F_2P=ex+a$；而 $|F_2P-F_1P|=2a$ 而為一常數。是以用一點移動於平面內，其與平面內二定點距離之差為一常數時，則此點之軌跡為雙曲線，此二定點謂之焦點。

經過雙曲線上一點 (x_1,y_1) 之切線方程式為

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

坡度爲 m 之切線方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

經過雙曲線上一點(x_1,y_1)之法線爲

$$a^2y_1(x-x_1)+b^2x_1(y-y_1)=0$$

188. 共軛雙曲線　兩雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

時，稱爲共軛雙曲線，一雙曲線之橫軸即爲他雙曲線之共軛軸。

若經過中心 o 之兩直線 $y=mx$, $y=m_1x$, 而 $mm_1=\frac{b^2}{a^2}$時，則此兩直線稱爲共軛直徑。凡與一直徑平行之弦必爲他直徑所等分。如以一對共軛直徑爲坐標軸(斜交坐標軸)，而以 $2a$ 與 $2b$ 爲長短直徑之雙曲線方程式爲

$$\frac{x'^2}{a_1^2}-\frac{y'^2}{b_1^2}=1$$

189. 漸近線　$y=\frac{b}{a}x$ 與 $y=-\frac{b}{a}x$ 二直線名爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之漸近線。漸近線爲雙曲線之切線，其與曲線之切點距離中心在無限遠處。如雙曲線以兩漸近線爲斜交坐標軸，則雙曲線之方程式化爲

$$4x'y'=a^2+b^2$$

若 $a=b$, 則兩漸近線互相垂直，化爲 $y=x$, $y=-x$；同時雙曲線之方程式化爲

$$x^2-y^2=a^2$$

此種雙曲線名爲直角雙曲線或等邊雙曲線。

190 拋物線　如圖 32，拋物線之方程式爲

$$y^2=4ax$$

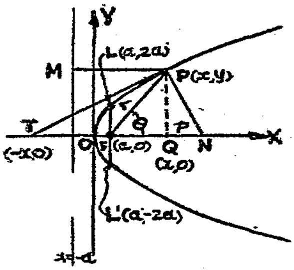


圖 32

OX 謂之拋物線之軸，F 位於軸上，名爲焦點，其坐標爲 (a,o)；離心率 $e=\frac{FP}{PM}=1$；準線方程式爲 $x=-a$。經過 F 點之弦 LL' 爲通徑，其長等於 $4a$。

經過拋物綫 $y^2=4ax$ 上 (x_1,y_1) 點之切綫方程式爲

$$yy_1-2a(x+x_1)$$

坡度爲 m 之切綫方程式爲

$$y=mx+\frac{a}{m}$$

經過 (x_1,y_1) 點之法綫方程式爲

$$2a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$$

凡與拋物綫之軸相平行之直綫謂之直徑。凡與直徑一端所作切綫相平行之弦均爲此直徑所等分。

若經過拋物綫上 (x_1,y_1) 點之切綫爲 P_1T，則 $TQ=2x_1$ 爲次切綫，$QN=2a$（常數）爲次法綫（$P_1N\perp P_1T$）。

若二次方程式之形式爲 $y^2+2gx+2fy+c=0$，且 $g\neq o$，則爲一拋物綫，其軸與 x 軸相平行。若二次方程式之形式爲 $x^2+2gx+2fy+c=o$，而 $f\neq o$，亦爲一拋物綫，其軸與 Y 軸相平行。

拋物綫之極方程式（F 爲極點，FO 爲極坐標軸）爲

$$r=\frac{p}{1-\cos\Theta}$$

其中 p 爲通徑之長之半（$p=2a$，圖 32）

如以通徑兩端所作切綫爲斜交坐標軸，則拋物綫之方程式爲

$$x^{\frac{1}{2}}\pm y^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{2}}$$

其中 b 爲原點至切點之距離。

191. 圓錐曲綫之一般方程式　次爲圓錐曲綫之一般方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

命　$D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$；　$d=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$

則圓錐曲綫可按次列情形而分類：

1. 在$D=o$，$d=o$時爲兩平行直綫
2. 在$D=o$，$d\neq o$時爲兩相交直綫
3. 在$D\neq o$，$d=o$時爲一拋物綫
4. 在$D\neq o$，$d>o$時爲一橢圓
5. 在$D\neq o$，$d<o$時爲一雙曲綫

命$A+B=a+b$，$AB=ab-h^2=d$，$A-B$與h之符號相同，又命$c'=D/d$；則圓錐曲線之以其軸爲坐標軸之方程式爲

$$\frac{x^2}{-\frac{c'}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{c'}{B}}=1$$

欲求圓錐曲線之中心(x_0,y_0)可解次列方程式得之：

$$ax_0+hy_0+g=o$$
$$hx_0+by_0+f=o$$

若欲將圓錐曲線一般方程式中xy一項消滅，可將坐標軸旋轉Θ角，Θ之值如次：

$$\tan 2\Theta=\frac{2h}{a-b}$$

第4節　平面曲線之一般性質

192. 平面曲線　若平面上一點(x,y)之x與y各爲一變數t(參數)之連續函數，例如$x=x(t)$，$y=y(t)$，則由此兩式消去t後，得一陰函數$F(x,y)=0$或一陽函數$y=f(x)$。此項函數均表示一種平面曲線。

此曲線上任一點所作切線與X軸所成角τ可由次之關係得之。

$$\sin\tau=\frac{dy}{ds},\ \cos\tau=\frac{dx}{ds},\ tan\,\tau=\frac{dy}{dx}=y'$$

其中 ds 爲微細之弧長， 即 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'}\,dx>0$

在極坐標系中，$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\Theta^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2+r^2}\cdot d\Theta$

由圖33，可見 $\sin\psi=\frac{rd\Theta}{ds}$, $\cos\psi=\frac{dr}{ds}$, $\tan\psi=\frac{rd\Theta}{dr}$

193. 切線與法線　在曲線 $F(x,y)=0$ 上 (x_1,y_1) 點切線之方程式爲

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_1,y=y_1}(x-x_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_1,y=y_1}(y-y_1)=0$$

或簡書 $y_1-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$

在 (x_1,y_1) 點法線之方程式爲

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_1,y=y_1}(x-x_1)-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_1,y=y_1}(y-y_1)=0$$

或簡書 $y-y_1=-\frac{dx}{dy}(x-x_1)$

194. 曲度半徑　曲線上任意點 (x,y) 之曲度半徑爲

$$\varrho=\frac{ds}{d\tau}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

ϱ 之倒數 $\frac{1}{\varrho}$ 名爲曲線在 (x,y) 點之曲度。

設作一半徑爲 ϱ 之圓與曲線相切於 (x,y) 點，則此圓之中心謂之曲線之曲度中心。設曲度中心之坐標爲 (x_0,y_0) 則此坐標可由下式求得之

$$x_0=x-\varrho\frac{dy}{ds}=x-y'\frac{[1+y'^2]}{y''}$$

$$y_0 = y + \rho\frac{dx}{ds} = y + \frac{[1+y'^2]}{y''}$$

195. 漸縮線與漸開線　聯結一曲線之曲度中心所成之曲線謂之該曲線之漸縮線，而原曲線則稱爲漸縮線之漸開線。如圖 34，設

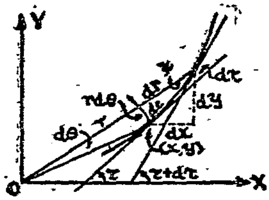


圖　33

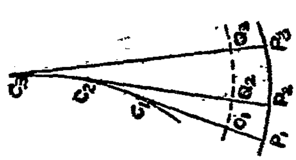
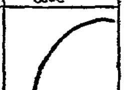
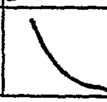
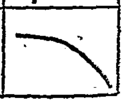


圖　34

$P_1P_2P_3$ 爲一曲線，P_1 點之曲度中心爲 C_1，P_2 點之曲度中心爲 C_2，P_3點之曲度中心爲 C_3，則所成 $C_1C_2C_3$ 曲線爲 $P_1P_2P_3$ 曲線之漸縮線。P_1 點之曲度半徑 P_1C_1 與漸縮線相切於 C_1 點，其餘仿此。若於 C_3 點繫一絲線，其長爲 C_3P_3，一端倚漸縮線而轉，則他端即繪成 $P_1P_2P_3$ 線，故謂 $P_1P_2P_3$ 爲 $C_1C_2C_3$ 之漸開線。若所繫線長祇爲 C_3Q_3 則當其倚漸縮線而轉時繪成 $Q_1Q_2Q_3$ 線，亦屬 $C_1C_2C_3$ 線之漸開線。一曲線之漸縮線雖祇一線，而漸開線則無限。

欲求一曲線 $F(x,y)=0$ 之漸縮線方程式可由 §166 中曲度中心之坐標式與 $F(x,y)=0$ 中消去 x,y；在所得方程式中 x_1y_1 改爲 x,y，即得所求之方程式。

196. 線之曲向　由曲線 $F(x,y)=0$ 中之 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 可察知曲線之走向與凹凸形狀。蓋 $\frac{dy}{dx}$ 若爲正數，則曲線愈向右行而愈高，反之則愈向右行而愈低。如 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲正數，則凹向上方，反之則凹向下方。茲列表如次：

	$\frac{d^2y}{dx^2}+$	$\frac{d^2y}{dx^2}-$
$\frac{dy}{dx}+$		
$\frac{dy}{dx}-$		

197. 包絡線　曲線方程式中所含常數名為參數，例如 $y=4x+2$ 中之 4 與 2 即為參數。如此方程式書作 $y=mx+2$ 則因 m 可為任意值，故表示無限數之直線，此處之 m 既有變數性質故名為變參數。因方程式中變參數之數值之變化可繪成一羣之曲線，謂之曲線羣。普通所成之曲線羣恒與一曲線相交或相切，此曲線謂之曲線羣之包絡線。若 $f(x,y,a)=o$ 為一曲線羣，則包絡線之方程式可由 $f(x,y,a)=o$ 與 $\partial f(x,y,a)/\partial a=o$ 兩式消去變參數 a 而得之。

198. 單獨點　若曲線中，同時

$$F(x,y)=o,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=o$$

則此曲線即有一曲折點。又命

$$D=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

則 $D>o$ 時，此曲線有一複疊點，在該點可作二實切線

$D=o$ 時，此曲線有一歧點，在該點所作兩切線相疊合為一。

$D<o$ 時，此曲線有一孤立點，在該點無實切線可作。

第5節　超越曲線

199. 旋輪線與長短輻旋輪線　圓在直線上旋轉時圓周上一定點 P 所經之軌跡曰旋輪線，如圖 35. 旋輪線之參數方程式為

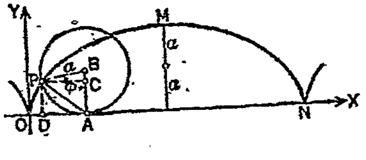


圖　35

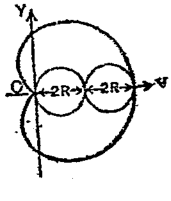


圖　36

$$x=OD=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=DP=a(1-\cos\varphi)$$

在直角坐標系之方程式為

$$x=a\cos^{-1}\frac{(a-y)}{a}\pm\sqrt{(2a-y)y}$$

旋輪線一節之長爲 $S=8a$，其面積爲 $A=3\pi a^2$

圓在直線上旋轉時，半徑上一定點所經之軌跡爲長短輻旋輪線。如此點與圓中心之距離 $b<a$，則成爲內點旋輪線，如 $b>a$，則成爲外點旋輪線。旋輪線與長短輻旋輪線之一般公式爲

$$x=a\varphi-b\sin\varphi,\quad y=b(1-\cos\varphi)$$

如 $a=b$ 則成旋輪線，$a<b$，成爲內點旋輪線，$a>b$，成爲外點旋輪線。

200. 圓外旋輪線與圓內旋輪線　半徑 r 之圓在半徑 R 之圓周外旋轉時，其圓周上一定點所循之軌跡謂之外旋輪線。若在圓內旋轉，則其圓周上一定點所循之軌跡謂之內旋輪線。

外旋輪線之方程式爲

$$x=(R+r)\cos\varphi-r\cos\frac{R+r}{r}\varphi$$

$$y=(R+r)\sin\varphi-r\sin\frac{R+r}{r}\varphi$$

若 $R=r$，則名爲心臟線如圖 36。其方程式爲

$$(x^2+y^2-2Rx)^2=4R^2(x^2+y^2)$$

如以極坐標表示之，則爲

$$r=2R(1+\cos\theta)$$

內旋輪綫之方程式爲

$$x=(R-r)\cos\varphi+r\cos\frac{R-r}{r}\varphi$$

$$y=(R-r)\sin\varphi-r\sin\frac{R-r}{r}\varphi$$

若 $r=\frac{1}{4}R$，則內圓每在外圓內旋轉一次，其自身旋轉四次故成一四葉之曲綫名爲四葉綫，其方程式爲

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$$

201. 圓外長短輻旋輪綫　若一圓在另一圓外旋轉時，則其半徑上與中心相距 b 之點所循之軌跡謂之圓外長短輻旋輪綫其方程式如次：

$$x=(R+r)\cos\varphi-b\cos\frac{R+r}{r}\varphi$$

$$y=(R+r)\sin\varphi-b\sin\frac{R+r}{r}\varphi$$

若一圓在另一圓內旋轉時，則其半徑上與中心相距 b 之點所循之軌跡謂之圓內長短輻旋輪綫其方程式為：

$$x=(R-r)\cos\varphi+b\cos\frac{R-r}{r}\varphi$$

$$y=(R-r)\sin\varphi-b\sin\frac{R-r}{r}\varphi$$

若 $R=2r$，則此圓內長短輻旋輪線均成為一橢圓。

202. 圓之漸開綫　設有圍繞於圓周之繩持其一端逐漸放開則繩端所成之曲綫謂之圓之漸開綫(圖 37)。當其初自 A 點放開至 B

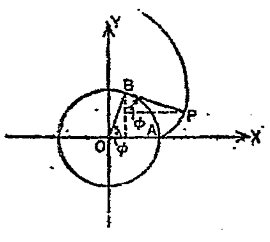


圖　37

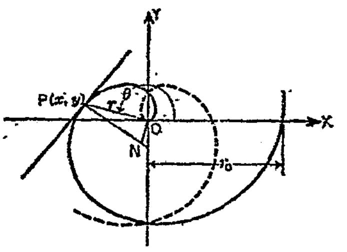


圖　38

點，繩端所成之一段曲綫為 AP，已解放之繩為 BP，BP 與圓相切於 B 點而 $BP=\widehat{BA}=r\varphi$。其對偶方程式為

$$\left.\begin{aligned}x&=R\cos\varphi+R\varphi\sin\varphi\\ y&=R\sin\varphi-R\varphi\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$

203. 阿基密提螺綫　設有一點 P 與原點 O 之距離隨矢半徑

OP 與 X 軸之夾角而作正比例之增加，則 P 點所循軌跡為一阿基密提螺綫，(圖 38)。此 P 點又可視為以均勻速度在一直綫上運動，而同時此直綫以均勻速率依一定點而旋轉。其方程式為

$$r=a\Theta$$

其中 $a=ON$(一常數)，名為極之次法綫。

OP 旋轉一周之時，OP 之長變為 $r_0=2\pi a$，旋轉 $\frac{1}{n}$ 周之時，

其長為 $r=r_0/n$。曲綫 OP 之長為

$$s=\frac{1}{2}a\left[\Theta\sqrt{1+\Theta^2}+\sinh^{-1}\Theta\right]$$

若旋轉多次以後，

$$S\approx\frac{1}{2}a\Theta^2$$

204. 雙曲綫螺綫　雙曲綫螺綫之方程式為

$$r\Theta=a$$

其中 $OT=-a$(常數)，名為極之次切綫(圖 39)。若 $\Theta\to\infty$，則 $r\to o$。故原點為漸近點，曲綫在此圍繞無限周數，但終無實在達到原點之時。

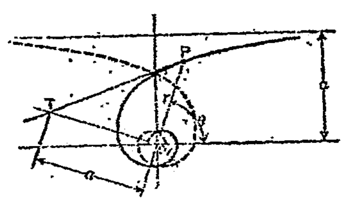


圖　39

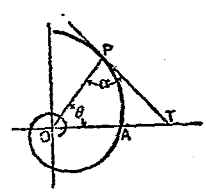


圖　40

若 $\Theta\to o$，$r\to\infty$。故與極坐標軸平行而相距 a 之直綫為此曲綫之漸近綫。

205. 對數或等角螺綫　對數或等角螺綫為與動成徑定角之曲綫(圖 40)。其極坐標方程式為

$$r=ae^{m\Theta}\quad(m>o)$$

對於 $\Theta=o$，$r=oA=a$；$m=\cot\alpha$，α 為一常定之角。

因 $\theta\to\infty$，$r\to o$ 故原點爲漸近點，雖 θ 逐漸減退，但此曲綫永無達到原點之時。

206. 雙紐綫　若平面內一點 P 與兩定點 F_1,及 F_2,之距離 r_1 與 r_2 之乘積爲一常數，則此 P 點所循之軌跡爲一雙紐綫（圖 41），命 $r_1^2r_2^2=c^4$，則雙紐綫之方程式爲

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0$$

在極坐標時之方程式爲

$$r^2=2c^2\cos 2\theta$$

F_1 之坐標爲(c,o)，F_2 之坐標爲$(-c,o)$。

207. 懸鏈綫　若以重量均勻之鏈持其兩端而聽其懸垂則成懸鏈綫(圖 42)。其方程式爲

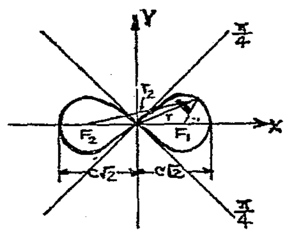


圖　41

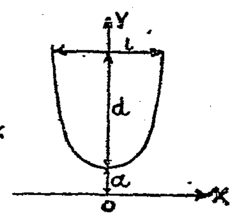


圖　42

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

如 l 比較 d 甚巨則曲綫之長約爲 $l\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2d}{l}\right)^2\right]$。

第六章　立體解析幾何學

第1節　點線與面

208. 空間坐標　用互相垂直交於一點之三平面爲坐標軸，任

何點 P 之位置即以該點與三平面之垂直距離 x,y,z 定之。如圖43，P 點與 ZY,XZ,XY 之垂直距離分別為 x,y,z，故書 P 為 $P(x,y,z)$。

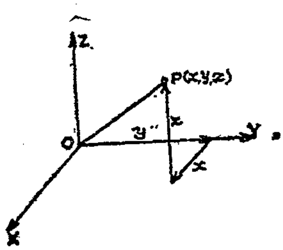


圖　43

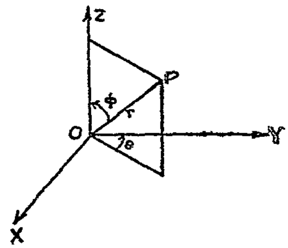


圖　44

空間之點亦可由該點與一定點之距離及方向定之。如圖44，P 點與原點 o 之距離為 r，而 r 之方向則由 θ 及 φ 角定之。此 r,θ,φ 三數名為 P 點之球坐標或極坐標，r 名為 P 點之動徑，θ 與 φ 名為 P 點之變角。

209. 兩點間之距離　空間兩點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 間之距離 S 如下：

$$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

命 P_1P_2 直線與 X,Y,Z 軸之夾角為 α,β,γ，則稱此三角為 P_1P_2 直線之方向角。方向角之值如下：

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{s},\ \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{s},\ \cos r=\frac{z_2-z_1}{s}$$

又　$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

此三個餘弦函數名為 P_1P_2 之方向餘弦

210. 兩直線之夾角　如兩直線之方向角為 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$，及 $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 則其夾角 θ 如下

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

若 $\cos\theta=o$，$\theta=90°$，兩直線即互相垂直。

211. 空間之直線　空間之直線可用次之一次方程式表示之

$$\left.\begin{aligned} y&=m_1x+b_1 \\ z&=m_2x+b_2 \end{aligned}\right\}$$

若此直線通過 $P_1\ (x_1,y_1,z_1)$ 點，而有方向角 α,β,γ 則

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}$$

而
$$m_1=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\ m_2=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

通過兩點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之直線

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

212. 平面之方程式　平面可以次方程式表示之：

$$Ax+By+Cz+D=o$$

其中 A,B,C,D，爲常數。

$Ax+By+D=o$　　爲平行於 z 軸之平面

$Ax+Cz+D=o$　　爲平行於 y 軸之平面

$By+Cz+D=o$　　爲平行於 x 軸之平面

$Ax+By+Cz=o$　　爲通過原點之平面

經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 三點之平面爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=o$$

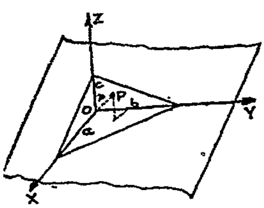


圖　45

一平面若與 X,Y,Z 三軸相交（圖45），其割分分別爲 a,b,c，則其方程式如下：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

如圖45，設 OP 爲自原點所作某平面之垂直線，其長爲 p，其方向角爲 α,β,γ，則

某平面之方程式爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=o$$

此名平面之垂直線型之方程式，欲化一般平面方程式 $Ax+By+Cz+D=o$ 爲垂直線型之方程式，可以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 除各項，除數之符號應與 D 之符號相反。

自 P_1 點至 $Ax+By+Cz+D=o$ 平面之垂直距離爲

$$PP_1=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

分母之符號應與 D 之符號相反。

自 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 點所作垂直於 $Ax+By+Cz+D=o$ 平面之直線方程式爲

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

213. 平行之平面　兩平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=o$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=o$ 如互相平行，則必須

$$A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2$$

經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 點所作平行於 $Ax+By+Cz+D=o$ 平面之平面方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=o$$

214. 兩平面之二面角　兩平面 $Ax+By+Cz+D=o$ 與 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=o$ 間之二面角 θ 爲

$$\cos\theta=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

若 $AA_1+BB_1+CC_1=o$ 則兩平面互相垂直。

215. 兩平面之交線　設 λ,μ,ν 爲兩平面 $Ax+By+Cz+D=o$ 與 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=o$ 之交線之方向角，則

$$\lambda:\mu:\nu=\begin{vmatrix}B&C\\B_1&C_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C&A\\C_1&A_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A&B\\A_1&B_1\end{vmatrix}$$

187. 四點在一平面　四點 $P_k(x_k,y_k,z_k)(k=1,2,3,4)$ 位於一

平面之條件爲

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = o$$

216. 四平面交於一點　四平面 $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = o$, ($k = 1,2,3,4$)相交於一點之條件爲

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = o$$

第2節　坐標之轉換

217. 原點之變更　命 P 點對於原軸之坐標爲 x,y,z,對於新軸之坐標爲 x',y',z'。設原軸平行移位 x_0,y_0,z_0 則

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'$$

218. 軸之旋轉　此爲原點不動,坐標軸旋轉若干角度之情形。命三新軸 x',y',z' 對於原軸 x 之夾角之餘弦爲 λ_1,μ_1,ν_1; 三新軸對於原軸 y 之夾角之餘弦爲 λ_2,μ_2,ν_2; 三新軸對於原軸 z 之夾角之餘弦爲 λ_3,μ_3,ν_3;則

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \nu_1 z' & \qquad x' &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \\ y &= \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \nu_2 z' & y' &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z \\ z &= \lambda_3 x' + \mu_3 y' + \nu_3 z' & z' &= \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z \end{aligned}$$

以下爲各餘弦間之關係:

$$\begin{aligned} &(1)\ \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1 & \qquad &(3)\ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = o \\ &\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1 & &\lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 = o \\ &\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = 1 & &\lambda_3\lambda_1 + \mu_3\mu_1 + \nu_3\nu_1 = o \\ &(2)\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 & &(4)\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = o \\ &\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1 & &\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 = o \\ &\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 & &\nu_1\lambda_1 + \nu_2\lambda_2 + \nu_3\lambda_3 = o \end{aligned}$$

(5) $\lambda_1=\mu_2\nu_3-\nu_2\mu_3$
$\mu_1=\nu_2\lambda_3-\lambda_2\nu_3$
$\nu_1=\lambda_2\mu_3-\mu_2\lambda_3$

(6) $\lambda_2=\nu_1\mu_3-\mu_1\nu_3$
$\mu_2=\lambda_1\nu_3-\nu_1\lambda_3$
$\nu_2=\mu_1\lambda_3-\lambda_1\mu_2$

(7) $\lambda_3=\mu_1\nu_2-\nu_1\mu_2$
$\mu_3=\nu_1\lambda_2-\lambda_1\nu_2$
$\nu_3=\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2$

(8) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}=1$

若欲將坐標軸旋轉並變更原點則將本段與上段兩步手續相繼行之可也。

219. 球坐標或極坐標　設某點之直角坐標爲 x,y,z；極坐標爲 r,Θ,φ 則

$$x=r\sin\varphi\sin\Theta,\ \ y=r\sin\varphi\cos\Theta,\ \ z=r\cos\varphi$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\ \ \Theta=\tan^{-1}\frac{x}{y},\ \ \varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

第3節　二次曲面

220. 一般方程式　二次曲面之一般方程式爲

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=o$$

其中 a_{ik} 爲常數，而 $a_{ik}=a_{ki}$，例如 $a_{12}=a_{21}$ 等等。

命

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

又命 $I\equiv a_{11}+a_{22}+a_{33}$，$J\equiv a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}^2-a_{13}^2-a_{12}^2$。$I$ 與 J 在坐標轉換時並不變化。以下所列爲二次曲線之分類法，祇須 D,d,J 等爲實數，即不致退化爲平面內之曲線。

橢圓曲面 $D<o,d>o,J>o$

雙葉雙曲線曲面 $D<o$；Id 與 J 符號相反

單葉雙曲線曲面 $D>o$，Id 與 J 符號相反

錐 $D=o$，$d\neq o$，Id 與 J 符號相反

橢圓拋物線曲面 $D<o,\ d=o,\ J>o$

雙曲拋物線曲面 $D>o,\ d=o,\ J<o$

柱 $D=o,\ d=o$

221. 橢圓曲面與雙曲線曲面　設以二次曲面之中心爲原點，其主要軸線爲直角坐標軸，則

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 爲一橢圓曲面(圖 46)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 爲一單葉雙曲線曲面(圖 47)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 爲一雙葉雙曲線曲面(圖 48)}$$

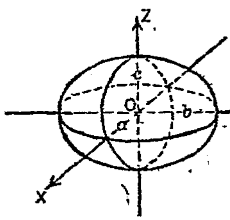


圖 46

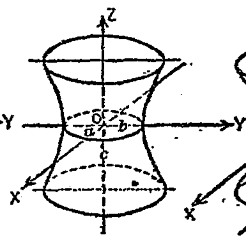


圖 47

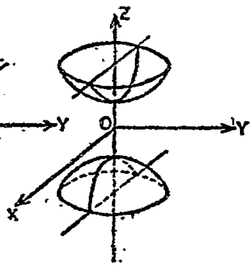


圖 48

其中 a,b,c 爲半軸

半軸之長可由次式求之

$$a^2=-\frac{D}{\lambda_1 d},\quad b^2=-\frac{D}{\lambda_2 d},\quad c^2=-\frac{D}{\lambda_3 d}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 爲次列三次方程式之三根：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=o$$

222. 錐　方程式 $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gxz+2fyz=o$ 爲一以原點爲頂點之錐，若由原點以外距離 c 處作一平行於 OZ 之平

面割截錐之截口爲一以 $2a$ 與 $2b$ 爲長短徑之橢圓則錐之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=o$$

若 $a=b$, 則截面爲圓形,而此錐亦爲旋轉圓錐。

223. 球 球之一般方程式爲

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=o$$

其半徑爲 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$

而中心位置爲 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2},\ -\frac{c}{2}\right)$

若以 (x_0,y_0,z_0) 爲中心, r 爲半徑,則球之方程式爲

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

若 $x_0=o,\ y_0=o,\ z_0=o$, 則球之方程式爲

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

224. 拋物線曲面 如圖 49, 橢圓拋物線曲面之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$$

若 $a=b$, 則方程式化爲次之形式:

$$x^2+y^2=2cz$$

(爲一旋轉拋物線曲面)

雙曲拋物線曲面之方程式(圖50)爲

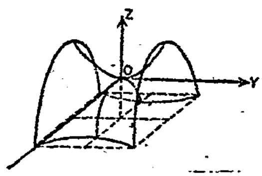


圖 50

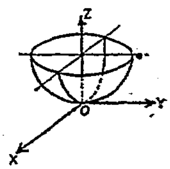


圖 49

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$$

225. 柱 與坐標面 XOY, YOZ, 或 XOZ 垂直之柱方程式與其在該坐標面內截面之方程式相同。故

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y^2 = 4ax$$

為母線平行於 OZ 軸之橢圓柱，雙曲線柱，拋物線柱之方程式。

226. 切面　二次曲面

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}zy + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

在(x_1,y_1,z_1)點之切面方程式為

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}(x-x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}(y-y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}(z-z_1) = 0$$

例：求雙曲線曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 上(x_1,y_1,z_1)點之切面。

因 $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = \dfrac{2x_1}{a^2}$，$\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = \dfrac{2y_1}{b^2}$，$\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = \dfrac{-2z_1}{c^2}$，

代入切面方程式得　$\dfrac{2x_1(x-x_1)}{a^2} + \dfrac{2y_1(y-y_1)}{b^2} - \dfrac{2z_1(z-z_1)}{c^2} = 0$

即　$\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - \dfrac{zz_1}{c^2} - 1 = 0$

227. 法線　經曲面上一點 P_1，而與該點所作切面相垂直之線謂之曲面在 P_1 點之法線。

曲面 $F(x,y,z) = 0$ 在 $P_1(x_1,y_1,z_1)$點之法線方程式為

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}} = \frac{y-y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}} = \frac{z-z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=x_1,y=y_1,z=z_1}}$$

228. 曲面之推想　苟有三元二次方程式而欲推知其曲面之形狀，可假定其中一變數為常數，而察看其餘兩變數所成之方程式為何種平面曲線，然後依次以各種數值代入於視作常數之變數，即可推知曲面之形狀。

例如有一方程式為

$$x^2 + 4y^2 = 4(z+4)$$

今先視 z 爲常數，則知所餘兩變數構成一橢圓方程式，可知此曲面與垂直於 Z-軸之一切平面相交，其交線爲一橢圓。若依次以 0,1,2,3 等代作 Z 可得次表

Z	截口之方程式
0	$x^2+4y^2=16$
1	$x^2+4y^2=20$
2	$x^2+4y^2=24$
-1	$x^2+4y^2=12$
-2	$x^2+4y^2=8$
-3	$x^2+4y^2=4$
-4	$x^2+4y^2=0$
-5	$x^2+4y^2=-4$

由此可知此曲線在 Z 爲正數時則 Z 之數愈大，其橢圓亦愈大，反之若 Z 爲負數，則截面愈低，其橢圓亦愈小，至 $Z=-4$ 處縮小爲一點，至 $Z=-4$ 以下，則變成虛數，卽已無實截面可得。

如再以 x 或 y 視作常數，則可見其截面爲一拋物線。仿上法爲之可知曲面之形狀爲一橢圓　物線曲面，頂點爲 $(0,0,-4)$ 而以 Z 軸爲中軸。

人 地 名 表

1. Italy　2. Decarte;　3. Sturm;
4. Horner;　5. Briggs;　6. Napier;
7. Mannheim;　8. Durand;　9. Simpson;
10. Weddle

算學編索引

★★★ 中國工程師手冊 ★★★

版權所有
翻印必究

◆ 著作人　　見本書封面

◆ 主編者　　汪胡楨

◆ 印刷所及經售處　　中國科學圖書儀器公司
上海福煦路 649 號

◆ 發行人　　汪容盦

◆ 發行所　　厚生出版社
上海巨籟達路 820 衖 39 號
電話　79157

實價[redacted]