初中標準算學

代數

下冊

上海中學生書局發行

初中標準算學

周佛海題

初中標準算學教本敍

我們編輯這一套初中標準算學教本的動機，是很簡單的。

當二十一年教育部於試行暫行課程標準期滿，正式頒佈新課程標準以後，所有已往的教科書，差不多都不能合用了。初中算學一科當然也不能例外。二十二年江蘇省教育廳要劃一教材，充實內容，更依照課程標準，訂發各科教學進度表與各校，以資遵守。但以初中算學一科言，其進度表所列頗為嚴整完備，於是各校的算學教師要求一册能與此相吻合的課本，益不可得。卽勉強以往昔的課本來遷就充數，則教學時，因次序不得不予以變更，材料不得不予以增損，弄得教者學者雙方都感受極大的困難。所以我們為謀教師們施教和學生們學習便利以增進教學的效率起見，特依照新課程標準及蘇教廳最近修訂之算學教學進度表來編成這一套算學教本。

在我們編輯的當兒，也曾顧慮到一般不須遵照蘇教廳進度表的學校採用本書的問題，並且有過很深切的討論。查

算學一科的標準，旣由教育部規定頒發，各校自當遵守，現在我們以部頒新課程標準為經，蘇教廳的進度表為緯，各地學校各有其地方情形及學生程度，本書編輯時，特預留伸縮地步，一般學校採用本書，祇有量的問題而絕無質的問題；故對於教材方面，可聽教者之自由伸縮而無困難的。

這一套教本：算術、代數、幾何、各兩册，數値三角一册，計共七本，足供初中算學科三年之用。

茲將此教本編輯上的要點略舉如下：

1. 注重實驗方法，以引起教學雙方的興趣。
2. 以日常生活之所需為教材中心，而資實用。
3. 練習題選擇甚嚴而量亦特多，以便學生多所演習，俾達熟能生巧的目的。
4. 本書編制均由淺入深，以作進修之準備。
5. 自算術至數値三角，雖分科編制，而其中教材互相自有聯絡，兼收混合之效。
6. 本書教材，兼顧及地方情形及學生程度，預留伸縮地步而減少教學上的困難。

除上述六點外，其餘要點分別詳載於各教本之前。

當我們編輯的時候，參考過不少中外的教科書，其中優良教材，曾經我們教授過而收效甚著的，採入不少。但我們

不敢掠美，特書此誌謝！

我們教授算學，差不多都有十餘年的經驗，編輯是書，總希望牠能於初中算學教育上有少許貢獻，然終愧學識淺薄，不妥之處及誤植的地方，務請諸位算學教師們，於採用之後，隨加指正，以便改正，不勝感盼之至！　廿三年夏

附：　部頒新課程標準初中算學時間支配表

學期／時數／學程	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
代數及算術	4	4				
代數			3	3	2	2
幾何及數值三角			2	2	3	3

蘇教廳初中算學進度表中時間支配表

學期／時數／學程	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
算術	4	2				
代數		2	2	2	2	2
幾何及數值三角			3	3	3	3

編輯大意

1。本書完全根據教育部廿二年頒佈最新課程標準（初中算學科）及江蘇省教育廳最近修訂之初中算學科代數學教學進度表而編輯，適合初中之用。

2.本書與編者所編之算術緊相銜接，凡讀完算術或祇讀完算術上册者，採用本書，教學兩方面均毫無困難。

3.本書常由數字數之原理推演到文字數再推而至於代數式，這種由漸而入的方法俾讀者容易了解。

4.本書有許多方法當解釋時，常與算術參照，俾讀者旣可複習算術，又可看出算術與代數的關係。

5.本書於方程式之應用，解釋設例特詳，俾讀者明瞭代數學與人生實用問題之關係。

6.本書對於簡易圖解方程式法，頗爲詳盡，俾讀者明瞭數理之研究可借助於形象，作爲高等數學之準備。

7.本書對於初學不易了解之負數、虛數等均用極淺的言語，作詳細的解釋，以求減少初學的困難。

8.本書對於對數，詳細解釋，務使學者明瞭其原理及應用，

俾此種運算上最有用的工具,得切於實用。

9.本書練習題材甚多,由淺而深,務使讀者多得練習機會收熟能生巧之效。

10.本書如有不妥及誤植之處,務請採用諸先生指正爲盼!

編者識

江蘇省教育廳修訂初中算學科教學進度表

第一學年第二學期"代數"教學進度表

週次	教學進度	備註
1,2	文字數 1.代數學之目的 2.符號之使用 3.變語言爲代數式 4.加法定律,文字數加法 5.減法定律,文字數減法 6.乘法定律,文字數乘法	
3,4	1.除法定律,文字數除法 2.括弧計算 3.式之計算 4.求函數之値	第四週最後一小時舉行臨時試驗
5,6	簡易方程式 1.恆等式與方程式 2.等量公理 3.解方程式之步驟 4.算術解題與代數解題之比較	
7,8	1.方程式之根　2.根之覆驗 正負數 1.負數之需要　2.正負數之實例	在授完簡易方程式舉行臨時試驗
9 10	1.正負數加法　2.正負數減法 3.正負數乘法　4.正負數除法	
11 12	整式四則 1.代數式　2.獨項式加法 3.多項式加法　4.加法驗算 5.獨項式減法　6.多項式減法 7.減法驗算	第十一週第一時舉行臨時試驗
13 14	1.獨項式乘獨項式 2.獨項式乘多項式 3.多項式乘多項式 4.乘法驗算	
15 16	1.獨項式除獨項式 2.獨項式除多項式	第十五週第一時舉行臨時試驗
17 18	1.多項式除多項式 2.除法驗算	

第二學年第一學期"代數"教學進度表

週次	教學進度	備註
1,2	一元一次方程式 1.一元一次方程式之解法 2.一元一次方程式應用問題 (運動問題,槓桿問題,時鐘問題,工程問題)	
3,4	1.一元一次方程式應用問題 (混合問題,其他問題) 特別積與商 1.$(a+b)^2$　2.$(a-b)^2$ 3.$(a+b)(a-b)$　4.$(x+a)(x+b)$	授完一元一次方程式舉行臨時試驗
5,6	1.$(a+b)^3$　2.$(a-b)^3$ 3.$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$　4.$\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}$ 5.$\frac{a^2-b^2}{a+b}$　6.$\frac{a^2-b^2}{a-b}$ 7.$\frac{a^3+b^3}{a+b}$　8.$\frac{a^3-b^3}{a-b}$	第六週最後一小時舉行臨時試驗
7,8	因子分解法 1.公有因子 2.分類後見公有因子 3.全完平方三項式 4.兩數平方之較	
9 10	1.兩數立方之和及較 2.二次三項式	第十週最後一小時舉行臨時試驗
11 12	公約式與公倍式 1.最高公約式之求法 2.最低公倍式之求法	
13 14	分式四則 1.分式定律,約分通分 2.分式加減法　3.分式乘法	第十三週第一時舉行臨時試驗
15 16	1.分數除法　2.繁分式之化法 簡易分式方程式 1.簡易分式方程式之解法	授完分式四則後舉行臨時試驗
17 18	1.分式方程式應用問題 2.文字方程式	

第二學年第二學期"代數"教學進度表

週次	教學進度	備註
1,2	比及比例 1.比之定義,比之兩項 2.比之定律 3.比例定義,比例第四項,比例中項	
3,4	1.比例定律 變數法 1.正變 2.反變	授完比及比例後舉行臨時試驗
5,6	1.合變 2.變數問題 函數及其變跡 1.點之坐標	
7,8	1.正變函數之變跡 2.一次函數之變跡 3.統計圖表	第八週最後一小時舉行臨時試驗
9 10	聯立一次方程式 1.加減消去法 2.代入消去法 3.解二元一次聯立方程式公式	
11 12	1.用圖解二元一次聯立方程式 2.聯立分式方程式之解法 3.特別聯立分式方程式	第十二週最後一小時舉行臨時試驗
13 14	1.聯立方程式應用問題 2.三元一次聯立方程式之解法 3.三元一次聯立方程式應用問題	
15 16	乘方及開方 1.乘方 2.代數式之平方根 3.數之平方根	第十六週最後一小時舉行臨時試驗
17 18	1.代數式之立方根 2.數之立方根	

第三學年第一學期"代數"教學進度表

週次	教學進度	備註
1,2	根式 1.不盡根 2.根式之化法 3.根式之加減法 4.根式之乘除法	
3,4	1.有理化因子 一元二次方程式 1.用因子分解法解一元二次方程式	授完根式舉行臨時試驗
5,6	1.用配方法解一元二次方程式 2.解一元二次方程式之公式	
7,8	1.一元二次方程式之應用問題	最後一時舉行臨時試驗
9 10	二次函數之變跡 1.反變函數之變跡 2.抛物線 3.圓 4.橢圓 5.雙曲線 6.兩曲線之相交	
11 12	二元二次聯立方程式 1.一式爲一次,一式爲二次 2.兩式均爲x^2y^2之一次式	第十一週第一小時舉行臨時試驗
13 14	1.等次式 2.對稱式 3.應用問題	第十四週最後一小時舉行臨時試驗
15 16	指數定律之推廣 1.分指數 2.零指數 3.負指數 4.各種關於指數之計算題	
17 18	根式方程式 1.根式方程式之解法 2.增根	

第三學年第二學期"代數"教學進度表

週次	教學進度	備註
1,2	虛數及雜數 1.虛數之來源 2.虛數之單位 3.虛數之乘方 4.虛數之加減 5.虛數之乘除 6.雜數 7.雜數定律	
3,4	1.雜數之加減 2.雜數之乘除 不等式	在授完虛數及雜數後舉行臨時試驗
5,6	一元二次方程式根之性質 1.根之判別式 2.用圖解說明根之性質	
7,8	1.根與係數之關係 對數 1.對數之定義	根與係數之關係授完舉行臨時試驗
9,10	1.對數之性質 2.常用對數	
11 12	1.對數表之用法	第十一週第一時舉行臨時試驗
13 14	1.用對數計算 2.複利	第十四週最後一時舉行臨時試驗
15 16	級數 1.等差級數 2.等差級數之末項及總數 3.等差中項	
17 18	1.等比級數 2.等比級數之末項及總和 3.等比中項	第十八週舉行升學指導

代數 下册

目錄

(有*號者可從略)

第十三章

聯立一次方程式

127.聯立一次方程式

方程式中所含的未知數,固不限於一個,但是一個方程式中,如果所含的未知數,不止一個的,那麼他們的根,恆是不定。例如方程式

$3x+y=7$,　　x, y,同是未知數,就 x 解之。

$x=\frac{7-y}{3}$　這式中若以任何數代y,必能求得適於方程式的 x 的值,所以 y 爲任何值,必能適合這方程式。

假使　y 的值爲$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$

那麼 x 的值爲 $\frac{10}{3}$ 3, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, ……

就是 x,y 的對應值,可以多至無限,若就 y 解之,結果也是如此。像這類的方程式,他的根是沒有一定的,叫做不定方程式,若 x 和 y 更有他種關係,那麼 x, y 的對應值,就有限止了,例如更有一方程式

$2x+5y=-4$ x, y, 同是未知數, 就 x 解之

$$x=\frac{-(4+5y)}{2}$$

假使 y 的值爲 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$

那麼 x 的值爲 $\frac{11}{2}, 3, \frac{1}{2}, -2, -\frac{9}{2}, -7, -\frac{19}{2},$

從上面的結果,我們看到只有 $x=3, y=-2$, 這一組對應值,是同時適合於兩個方程式。這 $x=3$, $y=-2$ 就是這兩個方程式的根,所以第一方程式的根,得由第二方程式決定。同時第二方程式的根,得由第一方程式決定。因知方程式含有兩個未知數的,必須要用兩個方程式決定他們的根,這樣的兩個方程式,叫做聯立方程式。

含二個未知數的聯立方程式,叫做二元聯立方程式。含三個未知數的聯立方程式,叫做三元聯立方程式,餘類推。

128. 聯立方程式的解法

聯立方程式不能如一次方程式的易於求解，因爲在每個方程式中，各有兩個或多個未知數，不知其一，自然難知其他，若利用適當手續，消去一個未知數，那末其他一個未知數，可用一次方程式解法求得，也可利用公式或圖解去求他們的根，現在把各種解法，分述於下。

129. 加減消去法

例一；　解聯立方程式

$$\begin{cases} x+2y=5 \cdots\cdots(1) \\ 5x-2y=1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　二式相加得

$$6x=6$$

故　$x=1$

以 x 的值代入(1)式，得

$$1+2y=5$$

即　$2y=5-1=4$

故　$y=2$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

例二；　解聯立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y-19=0 \cdots\cdots(1) \\ 4x-7y-6=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解: 因$4=2\times2$, $3=1\times3$, 他們的最小公倍數爲$2\times2\times3=12$, 故以 4 乘第一方程式, 3 乘第二方程式,得

$$12x+8y-76=0 \cdots\cdots(1')$$

$$12x-21y-18=0 \cdots(2')$$

$(1')-(2')$ 得　$29y-58=0$

即　$29y=58$

故　$y=2$

以 y 的值代入(1)式得

$$3x+2\times2-19=0$$

即　$3x=15$

故　$x=5$

$$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

由上二例,得加減消去法解聯立方程式的規則如下:

(1) 用適當的數 m 乘(1)式的兩邊,又用適當的數 n 乘(2)式的兩邊,使這兩

式中X的係數的絕對數相等,或y的係數的絕對數相等。

(2) 絕對數相同的係數,如加減符號不同,就用兩式相加法以消滅一個未知數,如加減符號相同,就用兩式相減法以消滅一個未知數。

(3) 解上所得方程式,求得一個未知數的值。

(4) 把所得一個未知數的值,代入原方程式中的任何一式,就得其他一個未知數的值。

(5) 用求得的各個未知數的值,代入原設兩個方程式,驗其是否都能相合。

注意一　上述適當的乘數,宜用數值最小的,故欲消去某元,可先求其各係數的L.C M.,而用各係數依次去除,其所得的商,即爲消去這元最小最適宜的乘數。

注意二　解聯立方程式,所得未知數的值,欲知

其有無錯誤,須將這等數值代入原設兩個方程式,以驗其是否都合,不可僅僅代入一個方程式,因解法手續雖有錯誤,所得的值往往仍能適合一個方程式,但若同時代入他一方程式,那末立可發見錯誤了。

習題　六八

試用加減消去法解下列各聯立方程式:

1 $\begin{cases} 3x+4y=14 \\ 7x-2y=10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+3y=8 \\ \frac{1}{2}x-5y=11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 12x+14y=11 \\ 18x-6y=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 24x-10y=6 \\ 45x-20y=11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-3y-2=0 \\ 2x-y-10=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 11x+5y=1 \\ x-2y=5 \end{cases}$

7. $\begin{cases}5x+7y=31\\2x+3y=13\end{cases}$

8. $\begin{cases}3x+5y=22\\7x-4y=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}17x+6y=29\\23x-9y=5\end{cases}$

10. $\begin{cases}2(x+3)+(y+5)=17\\3(x-1)+4(y+2)=19\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5y}{4}=3\\\dfrac{7x}{4}-\dfrac{5y}{3}=\dfrac{43}{3}\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{6x+7y}{2}=22\\\dfrac{55y-2x}{5}=20\end{cases}$

130. 代入消去法

例一： 解聯立方程式：

$$\begin{cases}x+3y=9\cdots\cdots(1)\\5x+3y=21\cdots\quad(2)\end{cases}$$

解： 由(1)式得　$x=9-3y\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

以(3)式中 x 的值代入(2)式得

$$5(9-3y)+3y=21$$

解之得 $y=2$

以 y 的值代入(3)式得

$$x=3$$

$$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

例二: 解聯立方程式:

$$\begin{cases} 3x-5y=13 \cdots\cdots(1) \\ 4x-7y=17 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解: 由(2)式得 $4x=17+7y$

即 $x=\dfrac{17+7y}{4} \cdots\cdots(3)$

以(3)式中 x 的值代入(1)式得

$$3\left(\frac{17+7y}{4}\right)-5y=13$$

解之得 $y=1$

以 y 的值代入(3)式得

$$x=6$$

$$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

由上二例得代入消去法解聯立方程式的規

則如下:

(1) 變兩方程式中的一個方程式,使欲去的未知數列在等號的一邊,且使其係數爲 1, 作爲(3)式。

(2) 以(3)式的值,代入他方程式,解之,就得一個未知數的值。

(3) 把所得一個未知數的值,代入(3)式,就得其他一個未知數的值。

(4) 用求得各個未知數的值,代入原設兩個方程式,驗其是否都能相合。

注意 本解法的程序中,第二步應特別注意,就是由(1)式變的(3)式,務須代入(2)式,以消去一個未知數,若仍代入(1)式,那麼就得 $0=0$, 而 x, y, 同時消去,不能求得 x 和 y 的值了。

習題 六九

試用代入消去法解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} 4x+3y=29 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 6x-3y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+6y=8 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 38x-y=74 \\ 42x-27y=30 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 17x+5y=144 \\ 7x-10y+1=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-4y+17=0 \\ 8x-5y=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+3y=7 \\ \dfrac{4x-2}{5}=3y-4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3x}{10}+5y=13 \\ 2x-\dfrac{4-7y}{2}=25 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{5x-3y}{3}+\dfrac{7x-5y}{11}=4 \\ \dfrac{15y-3x}{7}+\dfrac{7v-3x}{5}=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{6}-\dfrac{x+3y}{4}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x-y}{6}-\dfrac{3x+y}{4}=\dfrac{5y}{4} \end{cases}$

11. $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \\ a(x-y)+b(x+y)=1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}(y-2)-\dfrac{1}{4}(x-3)=\dfrac{11}{12} \\ x-\dfrac{1}{2}(y-1)-\dfrac{1}{3}(x-2)=1 \end{cases}$

131. 比較消去法

例一:　解聯立方程式:

$$\begin{cases} x-3y=1\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{3x}{4}+y=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　由(1)式得　$y=\dfrac{x-1}{3}\cdots\cdots(1')$

由(2)式得　$y=4-\dfrac{3x}{4}\cdots\cdots(2')$

比較(1')(2)兩式得

$$\frac{x+1}{3}=4-\frac{3x}{4}$$

兩邊各以12乘之得

$$4(x-1)=48-9x$$

解之得 $x=4$

以 x 的值代入(1')式得

$$y=1$$

$$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

例二: 解聯立方程式

$$\begin{cases} y=2x+1 \cdots\cdots(1) \\ x=2y-17 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 由(1)式得 $x=\dfrac{y-1}{2} \cdots\cdots(1')$

由(2)式得 $x=2y-17 \cdots\cdots(2')$

比較(1'),(2')兩式得

$$\frac{y-1}{2}=2y-17$$

兩邊各以 2 乘之得

$$y-1=4y-34$$

解之得 $y=11$

以 y 的值代入(2')式得

$$x=5$$

$$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=11 \end{cases}$$

由上二例得比較消去法解聯立方程式的規則如下:

(1) 變兩方程式,使欲去的未知數,各列在等號的一邊,且使其係數爲 1,作爲(1')(2')兩式。

(2) 用等號聯結(1')(2')兩式的等值,解之,就得一個未知數的值。

(3) 把所得一個未知數的值,代入(1')(2'兩式中的任何一式,就得其他一個)未知數的值。

(4) 用求得的各個未知數的值,代入原設兩個方程式,驗其是否都能相合。

習題　七〇

試用比較消去法解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} 5x+2y=80 \\ 2x+3y=65 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x-9y=13 \\ 3x+2y=-12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 18x-15y=4 \\ 22x+9y=14 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x-20y=17 \\ 5x+20y=19 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 45x+7y=8 \\ 25x-14y=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 125x-45y=2 \\ 25x+75y=6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3}-\dfrac{y}{3}=-1 \\ \dfrac{1}{2}(2x-10)+\dfrac{1}{9}y=3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=9 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}(y+1)=1 \\ \dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{3}{4}(y-1)=9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2}y=16\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}y=16\dfrac{1}{6} \end{cases}$

11. $\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(y+4)=1\\ 2x-\frac{1}{2}(4y-6)=7\end{cases}$

12. $\begin{cases}(x-3)(y+4)=(x-1)(y+3)\\ x(y+8)=y(x-10)+22\end{cases}$

132.不定方程式

前面已經說過一個二元一次方程式的根,可以多至無限,就是他的根是不定的,叫做不定方程式。在聯立方程式,也有不定的,舉例如下:

例: 解聯立方程式

$$\begin{cases}3x+6y=15\cdots\cdots(1)\\ x+2y=5\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解 用 3 乘第(2)式得

$$3x+6y=15\cdots\cdots(3)$$

(1)(3)兩式相減,得

$$0=0$$

就是上面的求法,不能適用,因為(2)式用 3 乘或(1)式用 3 除;結果兩式都相同,所以(1)(2)兩式,實在是表同一關係,二個式只和一式相當。換句話說凡是其中任一式的解,都是他一式的解,就是(1)式

的 x, y 的值,必適於(2)式,但是適於(1)式的 x, y 的值,可以多至無限,故 x, y 任爲何值,必適合這聯立方程式,所以他的根是不定的,像這類的方程式,叫做不定方程式,或叫同值方程式。

133. 矛盾方程式

解聯立方程式時,不能有解的方程式,叫做矛盾方程式。

一例: 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x-2y=8 \cdots\cdots(1) \\ 3x-6y=5 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 用 3 除(2)式得

$$x-2y=\frac{5}{3} \cdots \quad (3)$$

(1)(3)兩式相減得

$$0=\frac{19}{3}$$

這式不合理,所以原式不能解。

因爲 x, y 任爲何值, $x-2y$ 決不能忽爲 8,忽爲 $\frac{5}{3}$,故 x, y 決沒有同時適於(1)(3)兩式的值,但是(3)式就是(2)式的變形,故 x, y 決沒有適於(1)(2)兩式的值,即(1)(2)兩式不能聯立,像這類的方程式,叫做矛盾方程式。

134. 解二元一次聯立方程式的公式

聯立二元一次方程式整理後,常得下面的形式:

$$ax+by=c\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y=c'\cdots\cdots(2)$$

用 b' 乘(1)式的兩邊,用 b 乘(2)式的兩邊,然後兩式相減,得

$$ab'x-a'bx=b'c-bc'$$

解之得　$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$

用 a' 乘(1)式的兩邊,用 a 乘(2)式的兩邊,然後兩式相減,得

$$a'by-ab'y=a'c-ac'$$

解之得　$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

因得二元一次聯立方程式的根的公式如下

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$$

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

注意　若 $ab'-a'b=0$,　$b'c-bc'\neq 0$,則(1)式不能有解,這就是矛盾方程式。

若 $ab'-a'b=0$,　$b'c-bc'=0$,則(1)式有無窮數的

解,這就是不定方程式。

例一: 解聯立方程式

$$\begin{cases} 3x-3y=1 \cdots\cdots(1) \\ 2x+y=6 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 和公式對照,得

$a=3,\quad b=-3,\quad c=1,$

$a'=2,\quad b'=1,\quad c'=6,$

$$\therefore\quad x=\frac{1\times1-(-3)\times6}{3\times1-2\times(-3)}=\frac{1+18}{3+6}=\frac{19}{9}=2\frac{1}{9}$$

$$y=\frac{3\times6-2\times1}{3\times1-2\times(-3)}=\frac{18-2}{3+6}=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$$

例二: 解聯立方程式

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=r+s \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{s}=p+q \cdots\cdots(2)$$

解 和公式對照,得

$a=\frac{1}{p},\quad a=\frac{1}{q},\quad c=r+s$

$a'=\frac{1}{r},\quad b'=\frac{1}{s},\quad c'=p+q$

$$\therefore\quad x=\frac{\frac{1}{s}(r+s)-\frac{1}{q}(p+q)}{\frac{1}{p}\times\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\times\frac{1}{q}}=pr$$

$$y=\frac{\frac{1}{p}(p+q)-\frac{1}{r}(r+s)}{\frac{1}{p}\times\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\times\frac{1}{q}}=qs$$

習題　七一

試用公式解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases}5x+2y=0\\x+y=4\end{cases}$

2. $\begin{cases}5x-2y=x+y-1\\8x+3y=x-3\end{cases}$

3. $\begin{cases}8x=2y+6\\3y=2x-2\end{cases}$

4. $\begin{cases}\frac{1}{3}x=y+5\\\frac{1}{3}y=x+5\end{cases}$

5. $\begin{cases}(a+h)x+(b-h)y=c\\(b+k)x+(a-k)y=c\end{cases}$

6. $\begin{cases}ax=by\\bx+ay=c\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{3x}{a}+\dfrac{2y}{b}=3\\[2mm] \dfrac{9x}{a}+\dfrac{6y}{b}=3\end{cases}$

8. $\begin{cases}a(x+y)-b(x-y)=a^2-b^2\\ a(x-y)+b(x+y)=2ab\end{cases}$

9. $\begin{cases}(x+y)^2=(x-y)^2+2x(2y+1)\\ (x-4)x=x^2+4y-1\end{cases}$

10. $\begin{cases}(x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)=-2\\ (x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)=32\end{cases}$

135. 用行列式解二元一次聯立方程式

在代數裏,我們有這樣形式的式子 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$,四個數寫在四角上成一個方形,而兩邊各畫一條直綫他的意思就是

將左上角的數乘右下角的數的積,減去右上角的數乘左下角的數的積。

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

這種形式的式子,叫做行列式,像上節中的公式,我們可以寫成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

從這兩項中,可以看出下列的規則:

(1) 分母都是照(1)(2)兩式中的 x 和 y 的係數排列,至於分子,可以想成由分母變來的。

(2) 求 x 的時候,只要將(1)(2)兩式中的已知數去代替分母中的 x 的係數的一行。

(3) 求 y 的時候,只要將(1)(2)兩式中的已知數去代替分母中的 y 的係數的一行。

注意　這種寫法,極便記憶,最便利的地方,就是這種記法,能推到三元或多元的一次聯立方程式,同

剛才所說的情形完全一致.

例一: 解聯立方程式

$$\begin{cases}5x+2y=36 \cdots\cdots(1)\\3x-5y=\ 3\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}36 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}}=\frac{36\times(-5)-2\times3}{5\times(-5)-2\times3}=\frac{-180-6}{-25-6}=\frac{-186}{-31}=6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 36\\3 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}}=\frac{5\times3-36\times3}{5\times(-5)-2\times3}=\frac{15-108}{-25-6}=\frac{-93}{-31}=3$$

例二: 解聯立方程式

$$\begin{cases}3x-2y=1\cdots\cdots(1)\\5x=4y-1\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解　這兩個方程式可寫爲

$$3x-2y=1$$

$$5x-4y=-1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\-1 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{vmatrix}}=\frac{1\times(-4)-(-2)\times(-1)}{3\times(-4)-(-2)\times5}=\frac{-4-2}{-12+10}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{vmatrix}}=\frac{3\times(-1)-1\times5}{3\times(-4)-(-2)\times5}=\frac{-3-5}{-12+10}$$

$$=\frac{-8}{-2}=4$$

習題　七二

試用行列法解下列各聯立方程式

1. $\begin{cases}5x-2y=21\\x-y=6\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x+9y=56\\6x+5y=50\end{cases}$

3. $\begin{cases}15x+4y=3\\10x-7y=31\end{cases}$

4. $\begin{cases}9x-15y=30\\14x+25y=385\end{cases}$

5. $\begin{cases}11x+4y=56\\5x-6y=2\end{cases}$

6. $\begin{cases}17x-6y=43\\13x-9y=2\end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x-11y=-33 \\ 8x+9y=60 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{8}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+x=15 \\ \dfrac{x-y}{5}+y=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}$

136. 用圖解二元一次聯立方程式

二元一次方程式,含 x, y 兩未知數。若已知 x 的值,那麼 y 得一相應值,和以前所述函數,實際一樣,不過形式稍異,如 $2x+y=9$, 移項可寫做

$y=9-2x$, 這和 $f(x)=9-2x$ 完全一樣意義,僅僅 $f(x)$ 的符號換了一個 y。由此可知二元一次方程式,可以寫成函數式,只把 y 換成 $f(x)$。所以若將縱坐標軸代表 y,便可把方程式畫出。

例一: 圖解 $\begin{cases} 5x+2y=36 \cdots\cdots(1) \\ 3x-5y=3 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解 先把(1)式寫作 $y=\frac{36-5x}{2}$,

即 $y=18-\frac{5}{2}x$

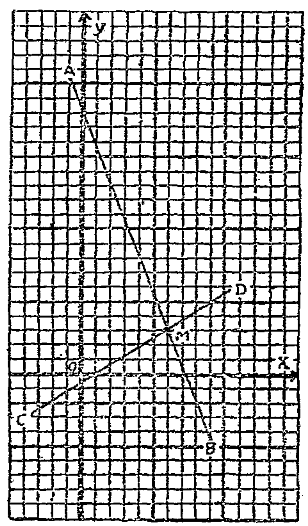
任意與 x 一值,算出 y 的相應值,列一表

x	0	2	3	4	5	6	......
y	18	13	10.5	8	5.5	3	......

再把(2)式寫作 $y=\frac{3x-3}{5}$,照樣列成一表

x	1	2	3	4	......
y	0	0.6	1.5	1.8	......

照各組數值畫點,聯成AB,CD兩直線如下圖



AB 直線為(1)式的圖。

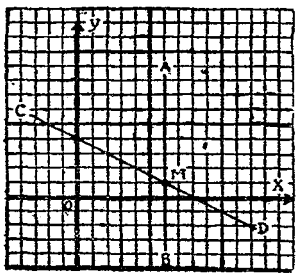
CD 直綫為(2)式的圖。

例二: 圖解 $\begin{cases} x-6=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x+2y=8 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

解 (1) $x=6$

(2) 寫作 $y=\dfrac{8-x}{2}$

x	0	1	2	3	4	……
y	4	$3\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	2	……



AB 爲(1)式的圖,式中不含 y,卽 y 的値在此式爲無限制,任意 y 値均與 $x=6$ 相應。

A B 爲一與縱軸平行之線

C D 直線爲(2)式的圖。

二元一次方程式,有無數對適合的值,前面已經說過,所以表方程式的直線,可以無限長;線上每一點都代表一對未知數的值,但因爲兩根直線只有一個交點,這交點M在 A B 線上,也在 C D 線上所以他的坐標適合(1)式,也適合(2)式,這就是聯立二元一次方程式的根。

看例一,兩直線的交點是M(6,3),同(1)(2)兩方程

式的根 $x=6, y=3$, 正相符合。

看例二兩直線的交點是 $M(6,1)$, 同 (1)(2) 兩方程式的根 $x=6, y=1$, 也相符合。

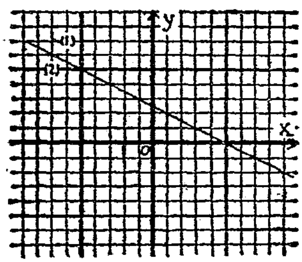
因得圖解二元一次方程式的規則如下:

在同一坐標軸中,作兩方程式的圖,所得兩直線的交點,橫坐標表示根裏 x 的值,縱坐標表示根裏 y 的值。

例三 圖解不定方程式

$$\begin{cases} 3x+6y=15 & \cdots (1) \\ x+2y=5 & \cdots (2) \end{cases}$$

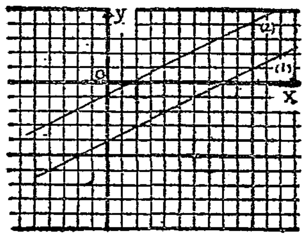
解 照上法得下圖:



例四: 圖解矛盾方程式

$$\begin{cases} x-2y=8 & \cdots\cdots (1) \\ 3x-6y=5 & \cdots (2) \end{cases}$$

解　照上法得下圖:



由三,四兩例,得圖解不定方程式和矛盾方程式的定理如下:

不定方程式的圖解,兩直線相合。

矛盾方程式的圖解,兩直線平行。

習題　七三

試用圖解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x-3=3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ x-3y=10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y+2x=12 \\ 5x+y=42 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y=2x-10 \\ x=2y-4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+4y-34=0 \\ x-7y+1=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{3}+y=\frac{3}{2} \\ \frac{x}{12}-\frac{y}{7}=\frac{5}{14} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\frac{y}{2}+11 \\ y=\frac{x}{5}+5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} p-q=8 \\ 3p-4q=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2a-8=-b \\ 3a+4b=7 \end{cases}$

137. 聯立分式方程式的解法

欲解聯立分式方程式,先將諸方程式化爲整方程式,然後再解。

例一: 解聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-3}=\dfrac{y+4}{y+7} \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{x+5}{x+2}=\dfrac{y-1}{y-2} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解　用 $(x-3)(y+7)$ 乘(1)式兩端得

$(x-4)(y+7)=(y+4)(x-3)$

化簡得　$3x-y=16 \cdots\cdots (3)$

用 $(x+2)(y-2)$ 乘(2)式兩端得

$(x+5)(y-2)=(y-1)(x+2)$

化簡得　$-x+3y=8 \cdots\cdots (4)$

再由(3)(4)兩式照整方程式解

用 3 乘(4)式再和(3)式相加得

$$8y=40$$

故　$y=5$

代入(4)式得　$x=7$

$$\therefore \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$$

驗算　(1) $\dfrac{7-4}{7-3}=\dfrac{5+4}{5+7}$，$\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{12}$，$\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$。

(2) $\dfrac{7+5}{7+2}=\dfrac{5-1}{5-2}$，$\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$。

例二:　解聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=\dfrac{36}{x^2-y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{-18}{(2x-y)(x-3y)} \cdots (2) \end{cases}$$

解　用 x^2-y^2 乘(1)式的兩端得

$$4(x+y)+6(x-y)=36$$

化簡得　$5x-y=18 \cdots\cdots (3)$

用 $(2x-y)(x-3y)$ 乘(2)式的兩端得

$$3(x-3y)-2(2x-y)=-18$$

化簡得　$x+7y=18 \cdots\cdots (4)$

再由(3)(4)兩式照整方程式解

用 7 乘(3)式再和(4)式相加得

$$36x=144$$

故　$x=4$

代入(3)式得 $y=2$

$$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

驗算　(1) $\dfrac{4}{4-2}+\dfrac{6}{4+2}=\dfrac{36}{4^2-2^2}$, $\dfrac{4}{2}+\dfrac{6}{6}=\dfrac{36}{12}$,

$2+1=3$, $3=3$

(2) $\dfrac{3}{2\times4-2}-\dfrac{2}{4-3\times2}=\dfrac{-18}{(2\times4-2)(4-3\times2)}$,

$$\frac{3}{6}-\frac{2}{-2}=\frac{-18}{6\times(-2)},\quad \frac{1}{2}+1=\frac{-18}{-12},$$

$$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

注意　各分式的L. C. M.中,含有未知數,故當其乘時,必先假定這L. C. M.不等於0,若求得的根,代入程式中,和假定抵觸,那麼這解法全歸無效,不得不方用下面的解法,就是:

(1) 將各分式各項,都移到方程式的左端。

(2) 將各式左端,化簡使各成最簡分式 $\frac{P}{Q}$。

(3) 將P等於0,卽得兩個整方程式。

(4) 用聯立整方程式解法求根。

例三: 解聯立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{2}{5y+4}\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{2}{7y-6}\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解　化(1)式

$$\frac{1}{3x+1}-\frac{2}{5y+4}=0$$

$$\frac{5y+4-2(3x+1)}{(3x+1)(5y+4)}=0$$

$$\frac{5y-6x+2}{(3x+1)(5y+4)}=0$$

$$5y-6x+2=0\cdots\cdots(3)$$

化(2)式

$$\frac{1}{4x-3}-\frac{2}{7y-6}=0$$

$$\frac{7y-6-2(4x-3)}{(4x-3)(7y-6)}=0$$

$$\frac{7y-8x}{(4x-3)(7y-6)}=0$$

$$7y-8x=0\cdots\cdots(4)$$

聯立(3)(4)兩式解之,得

$$x=7$$

$$y=8$$

習題　七四

解下列各聯立分方程式

1. $\begin{cases}\dfrac{x+3y}{x-y}=8\\[2ex]\dfrac{7y-13}{3y-5}=4\end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{4-2y}=\dfrac{4}{3} \\ x+y=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{y-1}=0 \\ \dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{7}{2y+13}=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{y+4}=\dfrac{x-3}{y+7} \\ \dfrac{x+2}{y-2}=\dfrac{x+5}{y-1} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c} \\ \dfrac{y+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1}-\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{6}{y} \\ x-y=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+3y+13}{4x+5y-25}=3 \\ \dfrac{8x+y+6}{5x+3y-23}=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{5y}{3y-4x} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{6x}{4y-5x} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{xy}{ax+by}=\dfrac{a}{b} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{5x-1}=\dfrac{3y+7}{5y+6} \\ \dfrac{3x-1}{x+5}=\dfrac{6y-5}{2y+3} \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+\dfrac{5}{y}+11=0 \\ 4x-\dfrac{3}{y}-\dfrac{21}{2}=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{3y+5}=\dfrac{x+1}{y-1} \\ \dfrac{3x-2}{y+1}=\dfrac{3x-1}{y-1}-\dfrac{2}{(y-1)(y+1)} \end{cases}$

138.特別聯立分式方程式的解法

例一: 解聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=-1 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=9 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　令$\dfrac{1}{x}=u$

$$\frac{1}{y}=v$$

那麼(1)式變成 $4u+3v=-1\cdots\cdots(3)$

(2)式變成 $3u-v=9\cdots\cdots(4)$

聯立(3)(4)兩式解之得

$$13u=26$$

故 $u=2$

代入(4)式得 $v=-3$

即 $\frac{1}{x}=2$

$$\frac{1}{y}=-3$$

$$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

驗算: (1) $\frac{4}{\frac{1}{2}}+\frac{3}{-\frac{1}{3}}=-1,\quad 8-9=-1,\quad -1=-1$。

(2) $\frac{3}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{-\frac{1}{3}}=9,\quad 6+3=9,\quad 9=9$。

例二: 解聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{7}\cdots\cdots(1) \\ \frac{3}{x}-\frac{8}{y}=2\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 用 3 乘(1)式得

$$\frac{12}{x}+\frac{18}{y}=\frac{6}{7}\cdots\cdots(3)$$

用 4 乘(2)式得

$$\frac{12}{x}-\frac{32}{y}=8\cdots\cdots(4)$$

(3)－(4)得

$$\frac{50}{y}=\frac{-50}{7}$$

$$\frac{1}{y}=-\frac{1}{7}$$

故 $y=-7$

代入(3)式得 $x=3\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{cases} x=3\frac{1}{2} \\ y=-7 \end{cases}$$

驗算: (1) $\dfrac{4}{\frac{7}{2}}+\dfrac{6}{-7}=\dfrac{2}{7}$ $\quad \dfrac{8}{7}-\dfrac{6}{7}=\dfrac{2}{7}$ $\quad \dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}$

(2) $\dfrac{3}{\frac{7}{2}}-\dfrac{8}{-7}=2$ $\quad \dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{7}=2$ $\quad \dfrac{14}{7}=2$ $\quad 2=2$

例三: 解聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=4\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{5}{x-1}+\dfrac{4}{y-1}=3\cdots\quad(2) \end{cases}$$

解 用 2 乘(1)得

$$\frac{6}{x-1}-\frac{4}{y-1}=8\cdots\quad(3)$$

(2)(3)兩式相加得

$$\frac{11}{x-1}=11$$

$$\frac{1}{x-1}=1$$

$$1=x-1$$

故 $x=2$

將 $\frac{1}{x-1}$ 代入(1)式得

$$3-\frac{2}{y-1}=4,$$

$$\frac{-2}{y-1}=1$$

$$y-1=-2$$

故 $y=-1$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

驗算 (1) $\frac{3}{2-1}-\frac{2}{-1-1}=4,\quad \frac{3}{1}-\frac{2}{-2}=4,$

$3+1=4,\quad 4=4$。

(2) $\frac{5}{2-1}+\frac{4}{-1-1}=3,\quad \frac{5}{1}+\frac{4}{-2}=3,$

$5-2=3,\quad 3=3$。

例四 解聯立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{1}{m}\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{xy}{cy+dx}=\dfrac{1}{n}\quad\cdots(2)\end{cases}$$

解 (1)(2)兩式各用倒數

$$\frac{ay+bx}{xy}=m$$

$$\frac{cy+dx}{xy}=n$$

卽 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m\cdots\cdots(3)$

$$\frac{c}{x}+\frac{d}{y}=n\cdots\cdots(4)$$

令 $\dfrac{1}{x}=u$

$$\frac{1}{y}=v$$

那麼(3)式可寫作 $au+bv=m\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)式可寫作 $cu+dv=n\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

聯立(5)(6)兩式解之,得

$$u=\frac{dm-bn}{ad-bc}$$

$$v=\frac{an-cm}{ad-bc}$$

即 $\frac{1}{x}=\frac{dm-bn}{ad-bc}$ $\therefore x=\frac{ad-bc}{dm-bn}$

$\frac{1}{y}=\frac{an-cm}{ad-bc}$ $\therefore y=\frac{ad-bc}{an-cm}$

驗算 (1)

$$\frac{\left(\frac{ad-bc}{dm-bn}\right)\times\left(\frac{ad-bc}{an-cm}\right)}{a\left(\frac{ad-bc}{an-cm}\right)+b\left(\frac{ad-bc}{dm-bn}\right)}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{\frac{(ad-bc)^2}{(an-cm)\ (dm-bn)}}{(ad-bc)\left\{\left(\frac{a}{an-cm}\right)+\left(\frac{b}{dm-bn}\right)\right\}}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{\frac{ad-bc}{(an-cm)\ (dm-bn)}}{\frac{a}{an-cm}+\frac{b}{dm-bn}}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{\frac{ad-bc}{(an-cm)(dm-bn)}}{\frac{a(dm-bn)+b(an-cm)}{(an-cm)(dm-bn)}}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{ad-bc}{a(dm-bn)+b(an-cm)}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{ad-bc}{adm-abn+abn-bcm}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{ad-bc}{(ad-bc)m}=\frac{1}{m},\qquad \frac{1}{m}=\frac{1}{m}$$

(2) $$\frac{\left(\frac{ad-bc}{dm-bn}\right)\times\left(\frac{ad-bc}{an-cm}\right)}{c\left(\frac{ad-bc}{an-cm}\right)+d\left(\frac{ad-bc}{dm-bn}\right)}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{\frac{(ad-bc)^2}{(an-cm)(dm-bn)}}{(ad-bc)\left\{\left(\frac{c}{an-cm}\right)+\left(\frac{d}{dm-bn}\right)\right\}}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{\frac{ad-bc}{(an-cm)(dm-bn)}}{\frac{c}{an-cm}+\frac{d}{dm-bn}}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{\frac{ad-bc}{(an-cm)(dm-bn)}}{\frac{c(dm-bn)+d(an-cm)}{(an-cm)(dm-bn)}}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{ad-bc}{c(dm-bn)+d(an-cm)}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{ad-bc}{cdm-bcn+adn-cdm}=\frac{1}{n},$$

$$\frac{ad-bc}{(ad-bc)n}=\frac{1}{n},\qquad \frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

習題　七五

試解下列各聯立分方程式

1. $$\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{7}\\[2mm] \frac{3}{x}-\frac{8}{y}=2\end{cases}$$

2. $\begin{cases} \dfrac{4}{y}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{14} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{6}{7} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{a+b}{x}+\dfrac{a-b}{y}=a-b \\ \dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a-b}{y}=a+b \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{3}{r}-\dfrac{1}{s}=9 \\ \dfrac{4}{r}+\dfrac{3}{s}=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=-1 \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{15}{y}=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{3y+1}=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{3}{3y+1}=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{xy}{4y+3x}=\dfrac{1}{20} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{xy}{3y-2x}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{xy}{ax+by}=\dfrac{a}{b} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+1}-\dfrac{3}{y-1}=1 \\ \dfrac{5}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

139. 聯立方程式應用問題

解聯立方程式應用問題的規則如下:

(1) 細察題意,用 x, y 代替未知數。

(2) 依題意,將已知數和未知數間的關係,列成兩個相異方程式。

(3) 選用上述諸解法的一(通常取最適用於該問題的)解上所得二元聯立方程式。

(4) 將所得 x, y 的值,代入原題,驗其是否相合(不可代入所列方程式)。

例題一: 兄年比弟大兩倍,17 年前兄年是弟年的三倍;求兩人年紀各多少?

解　設兄是 x 歲,弟是 y 歲。

依題意得 $\begin{cases} x=2y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-17=3(y-17)\cdots\cdots(2) \end{cases}$

將(1)式 x 的值代入(2)式，得

$$2y-17=3(y-17)$$

解之得 $y=34$

代入(1)式得 $x=68$

答兄年68歲，弟年34歲。

例題二： 有一分數，分子分母各加 4 就等於 $\frac{2}{5}$，各減 1 就等於 $\frac{1}{5}$，求這分數是多少？

解 設分子是 x，分母是 y，那麼分數是 $\frac{x}{y}$

依題意得 $\begin{cases} \dfrac{x+4}{y+4}=\dfrac{2}{5}\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{5}\cdots\cdots(2) \end{cases}$

將(1)(2)兩式各化成整方程式，得

$$5(x+4)=2(y+4)\cdots\cdots(3)$$

$$5(x-1)=y-1\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

將(3)(4)兩式化簡，解之得

$$y=16$$

$$x=4$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{4}{16}$$

答這分數是$\frac{4}{16}$

例題三: 甲給乙銀10元,那末乙的銀等於甲的3倍,若乙給甲銀10元,那末甲的銀等於乙的2倍,問甲乙原有銀各多少?

解 設x是甲原有銀數

y是乙原有銀數

依題意得 $\begin{cases} y+10=3(x-10)\cdots\cdots(1) \\ x+10=2(y-10)\cdots\cdots(2) \end{cases}$

聯立(1)(2)兩式解之,得

$$x=22$$

$$y=26$$

答甲原有銀22元,乙原有銀26元。

例題四: 一個兩位數,他的數字的和是12,若兩個數字的地位交換,那麼所成的數,比原數的2倍小12,問原數是什麼?

解 設x是原數的十位數字,

y是原數的單位數字。

那麼原數是 $10x+y$

兩個數字的地位交換所成的數是 $10y+x$

依題意得 $\begin{cases} x+y=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 10y+x=2(10x+y)-12\cdots\cdots(2) \end{cases}$

聯立(1)(2)兩式解之,得

$$x=4$$

$$y=8$$

$\therefore\quad 10x+y=40+8=48$

答原數是48

習題　七六

(1)有大小兩個數,牠們的和是36,差是8,問兩數各多少?

(3)大數的4倍加小數等於22,小數比大數差3,問兩數各多少?

(3)二數的和爲100,若大數減去19等於小數加上11,求二數。

(4)兄3年前的歲數和弟5年後的一樣;而兄2年前的歲數和弟4年後的共30歲,問兄和弟各人現年各多少?

(5)有一隻船在長90里的河面上下,上水需18小時,下水只需9小時,問每小時船的速度和水流

的速度各多少?

6. 鷄兔同在一籠,共有15個頭,38隻脚,問鷄兔各幾隻?

7. 龜鶴共15隻,龜的脚共比鶴多6隻,問龜鶴各幾隻?

8. 綢每丈值6元,綿每丈值5元,兩種共長100丈,共值560元;問各長多少丈?

9. 一畝地價,甲地爲5元,乙地爲12元,甲乙兩地共計地375畝,其價合計爲1450元,問甲乙兩地的畝數各多少?

10. 有甲乙二數,甲數的半和乙數三分之一的和爲32,甲數四分之一和乙數五分之一的和爲18,問二數各多少?

11. 甲乙兩軍交戰,甲軍傷亡500人,乙軍傷亡2000人,但知戰前甲軍人數,爲乙軍的$\frac{5}{6}$,戰後甲軍人數,爲乙軍的$\frac{9}{8}$:問兩軍人數各多少?

12. 書二卷,初版合計600頁。再版時下卷減去四分之一,上卷增30頁,而上下二卷的頁數相等。問初版時二卷各若干頁?

(13) 分桃與兒童,每人4個,餘桃2枚;每人6

個,缺桃12枚,求桃數和人數。

14. 有一分數,分子加1,分母減1,就等於1,若分子加以分母,或分母減以分子,就等於4,問原分數是什麽?

15. 有兩位數用他的數字的和來除,得商爲7,若二數字交換後,所成的數減12,而用原數十位數字減單位數字的差除之,得商爲9,求原數是什麽?

16. 設有二分數,他們的分子一爲2,一爲5,這二分數的和的二倍爲3,二分母交換所成二分數的和爲2。問原有二分數是什麽?

17. 有二位數以數字的和除之,得整商6,剩餘3,數字交換所得的數,以數字的和除之,得整商4,剩餘9,問原數是什麽?

18. 沿河有甲乙二村相距12里,一人自甲到乙,步行至半道,舍陸乘舟逆流而上,共經7時抵乙,返時步行至半途,又舍陸乘舟,順流而下,共經6時抵甲。但知步行的速,返時爲往時的$\frac{3}{4}$。舟行的速,返時爲往時的二倍。問往時步行及舟行的速度各多少?

19. 設小麥 7 斗,大麥 10 斗的價是 15 元,小麥 4 斗大麥 5 斗的價是 8 元,問小麥大麥每斗的價各多少?

20. 某人以 7 元買茶 12 磅,咖啡 4 磅,又以 5 元買茶 4 磅,咖啡 12 磅。問茶和咖啡每磅售價各多少?

21. 有人買 6 馬 7 牛,費銀 1000 元,又買 11 馬 13 牛,費銀 1844 元。問馬牛每頭的價各多少?

22. 一個二輪車在 1 丈 2 尺長的路上行走,後輪比前輪多轉 6 次,若後輪周圍增加原長的 $\frac{1}{4}$,前輪周圍增加原長的 $\frac{1}{5}$,則後輪比前輪多轉 4 次,問二輪的周圍各長幾尺?

23. 一水槽,有大小兩管,若兩管齊放,$22\frac{1}{2}$ 分鐘可滿;已知大管獨放,比小管獨放少 24 分鐘,求兩管獨放各需多少時,方可注滿?

24. 一人行路 108 里,若每小時速度增加 2 里,可減少 $4\frac{1}{2}$ 點鐘;求原速度?

25. 甲乙二人合做一事,6 日可完;若甲做 10 日,乙做 3 日,亦可完工,問二人獨做,各需多少日完工?

26. 作一事,甲比乙可早成六日;若兩人合作此事,4 日卽成,問甲乙獨作此事,幾天可成?

27. 某會會員多少人,平均負擔會中費用,若會員增 3 人,那麼每人的負擔可以少 2 元;又會員少 2 人,那麼每人的負擔增 2 元。問費用總額多少?

28. 米 25 石麥 30 石買價共 391 元,出賣時米獲利 1 分 2 厘,麥獲利 1 分 5 厘,共賣得 442 元 6 角,求每石的買價各多少?

29. 有長方形的宅地,若闊加 4 丈,那麼面積增加 32 方丈,若長闊各加 3 丈,那麼面積增加 51 方丈。求原有宅地的長闊各多少?

30. 二火車相隔 100 里,若相對開駛,2 小時後相遇;若慢車在前,快車在後,同向開駛,10 小時後追及,求二車的速度。

140. 三元一次聯立方程式的解法

含三個未知數的三元一次方程式,必須有三個方程式聯立,纔能解得一組的定值。現在舉例如下:

例一: 解聯立方程式

$$\begin{cases}5x-4y+3z=51\cdots\quad(1)\\7x+6y-6z=64\cdots\cdots(2)\\9x-8y-9z=47\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

解　先取(1)(2)兩式消去 x,

用 2 乘(1)式得　$10x-8y+6z=102\cdots\cdots(4)$

(2)(4)兩式相加得　$17x-2y=166\cdots\cdots\cdots(5)$

又取(1)(3)兩式消去 x

用 3 乘(1)式得　$15x-12y+9z=153\cdots(6)$

(3)(6)兩式相加得　$24x-20y=200\cdots\cdots(7)$

再用(5)(7)兩式聯立,照聯立二元一次方程式解法解之,得

$x=10$

$y=2$

再將 x, y 的值代入原式中的任何一式求 z,

如代入(1)式　$50-8+3z=51$

故　$z=3$

$$\therefore\begin{cases}x=10\\y=2\\z=3\end{cases}$$

驗算: (1)　$50-8+9=51$

(2) $70+12-18=64$

(3) $90-16-27=47$

例二: 解聯立方程式

$$\begin{cases} 2x-y-z=2 \cdots\cdots(1) \\ 5x+y-2z=3 \cdots\cdots(2) \\ x-4y+z=9 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. (1)(3)兩式相加得

$3x-5y=1 \cdots\cdots(4)$

用2乘(3)式得 $2x-8y+2z=18 \cdots\cdots(5)$

(2)(5)兩式相加得 $7x-7y=21 \cdots\cdots(6)$

聯立(4)(6)兩式解之得

$$x=2$$

$$y=-1$$

將x, y的值代入(1)式得

$z=3$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

驗算: (1) $4-(-1)-3=2$

(2) $10-1-6=3$

(3) $2-(-4)+3=9$

由上二例得解聯立三元一次方程式的規則如下:

(1) 先任取原三式中的兩式,依上述的任一消去法,消去一個未知數,結果得兩個聯立二元一次方程式。

(2) 再用前法解聯立二元一次方程式

(3) 取解得的值代入任一原式,求其餘一個未知數的值。

注意 聯立四元一次方程式,可以任取二式消去一個未知數,結果得三個聯立三元一次方程式,再照本節方法求解,餘類推。由此可知多元聯立一次程式的解法,手續極繁,普通須用行列式的方法來方解,但是在初等代數裏還談不到。

習題 七七

試解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+5y+6z=39 \\ 3x+4y+5z=28 \end{cases}$

2. $$\begin{cases} 7x-11y+5z=5 \\ 5x-7y+11z=21 \\ 11x-5y+7z=43 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 6x-5y+9z=27 \\ 5x+8y-3z=7 \\ 7x-3y+6z=32 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=6 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 6x+2y-7z=15 \\ 7x-7y-11z=-4 \\ 3x+9y+8z=35 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 5x+4y+3z=22 \\ 12x+7y+3z=35 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x+y+z=35 \\ y-x+z=-5 \\ z-y-x=-25 \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 5x+3y-6z=4 \\ 3x-y+2z=8 \\ x-2y+2z=2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x-5y+2z=6 \\ 2x+3y-z=20 \\ 7x-4y+3z=35 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=9 \\ x+z=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+z+w=11 \\ x+2y+3z+4w=34 \\ 2x+3y+4z+w=25 \\ 3x+4y+2z+w=22 \end{cases}$

13. $\begin{cases} r+s+t+u=28 \\ r-s+t-u=72 \\ r+2s+3t-5u=72 \\ r+s-8t+u=-17 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z+w=0, \\ 2x+3y+4z+5w=-6 \\ 3x-4y+5z-6w=2 \\ 4x+5y-2z-w=2 \end{cases}$

141.三元一次聯立方程式應用問題

例題一 將 144 分爲三份,第一份的二倍,比第二份第三份的和多 18,第三份的二倍比第一份第二份的和少 18,求三份各是多少?

解: 設 x 爲第一份

y 爲第二份

z 爲第三份

$$\text{依題意得}\begin{cases} x+y+z=144 \cdots\cdots(1) \\ 2x=y+z+18 \cdots\cdots(2) \\ 2z=x+y-18 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

先將原式移項,寫作

$$x+y+x=144 \cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

$$2x-y-z=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

$$-x-y+2z=-18 \cdots\cdots(3')$$

(1')(2')兩式相加得

$$3x=162$$

$$\therefore \quad x=54$$

(1')(3')兩式相加得

$$3z=126$$

$$\therefore \quad z=42$$

以 x, z 的值代入(1)式

$$54+y+42=144$$

$$\therefore \quad y=48$$

答第一份爲54,第二份爲48,第三份爲42。

例題二　有甲乙丙三工匠,甲乙二人於20日間能合成一事,甲丙二人合做,須24日;乙丙二人合做,須40日,求三人獨做這事的日數。

解　設 x 爲甲獨做這事所需的日數

y 爲乙獨做這事所需的日數

z 爲丙獨做這事所需的日數

那麼 $\frac{1}{x}$ 爲甲每日所做的工作

$\frac{1}{y}$ 爲乙每日所做的工作

$\frac{1}{z}$ 爲丙每日所做的工作

依題意得
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24}\cdots\cdots(2) \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{40}\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

三式相加

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$$

即 $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{6}{120}+\frac{5}{120}+\frac{3}{120}$

即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{120}$ ……(4)

(4)－(1) $\frac{1}{z}=\frac{7}{120}-\frac{1}{20}=\frac{1}{120}$ $\therefore z=120$

(4)－(2) $\frac{1}{y}=\frac{7}{120}-\frac{1}{24}=\frac{1}{60}$ $\therefore y=60$

(4)－(3) $\frac{1}{x}=\frac{7}{120}-\frac{1}{40}=\frac{1}{30}$ $\therefore x=30$

答甲獨作須30日,乙須60日,丙須120日。

習題 七八

1. 甲乙丙三人共有銀100元,甲的2倍,乙的3倍,和丙的4倍共銀270元;甲的3倍,乙的2倍,和丙的5倍共銀310元,問三人各有銀多少元?

2. 現在父的年紀等於二子年紀的和,十年前父與次子的和比現在父的年紀多4,五年後2倍次子年紀比長子多17,求三人的年紀。

3. 有三種金塊,把甲種2公分,乙種1公分,與純金2公分熔和時,得成分0.92的金塊;把乙種150公分,丙種80公分,與銅3.6公分熔和時,得成分0.75的金塊,又把甲,乙,丙三種照6, 9, 10的比例熔和時

得成分 0.78 的金塊,求三塊金塊的成分。

4. 某人有 2 角,1 角和 5 分的貨幣三種,共 10 枚,共合洋 1 元。若以 5 分的換成 1 角的,1 角的換成 5 分的,則成爲 8 枚,問各種有幾枚?

5. 有一個三位的數。牠的三個數字的和爲 18,單位數字與百位數字的和恰爲十位數字的 2 倍,而三位數字又次第大 1,問原數是什麼?

6. 甲乙丙三人共欠銀 5500 元,其利率甲爲 10 %,乙爲 15%,丙爲 5%,一年後三人所出的利息相等,問各欠銀多少元?

7. 甲乙丙三人,各放出本銀若干元生利,乙的本銀比甲多 100元,利率比甲多 1%,丙的本銀比甲多 150 元,利率比甲多 2 %,放出一年所得的利息,乙比甲多 8 元,丙比甲多 15 元。問本銀利率各多少?

8. 甲乙丙三城,不在一直綫上,各城間都有直路大道可通。從甲至丙城,而繞道由乙城經過,共爲 82 里;由乙至甲城,而繞道由丙城經過,共爲 97 里;由丙至乙城,而繞道由甲城經過,共爲 89 里。求各城間的距離。

9. 有甲乙丙三水管,接通水池,開甲乙二管 20

分鐘,或開甲丙二管18分鐘,或開乙丙二管15分鐘,都能使池中水滿,若三管齊開,問幾分鐘時間滿池?

10. 甲乙丙三工人,於30日間,合成一事。若初用甲乙二人作工20日,其後加丙一人繼續工作14日;或初用甲丙二人作工24日,其後用甲乙二人繼續工作16日半,皆能畢事。問甲乙丙獨作,各須幾日可成?

第十四章

乘方及開方

142. 乘方

求一次的 n 次方,就是求 n 個該式的乘積,n 叫做該式的方次數,常寫在該式的右上角,例如:

$2^3=2\times2\times2$　　8 爲 2 的三乘方。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,　$a^2+2ab+b^2$ 爲 $a+b$ 的二乘方

$(2x)^4=16x^4$,　$16x^4$ 爲 $2x$ 的四乘方。

二乘方,三乘方,通常叫做平方,立方。

143. 平方

關於獨項式和二項式的平方,我們已經講過,

現在所要討論的,是三項以上的式子的平方,從實際運算,可得

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2ca$$

$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2bc+2cd+2de+2ea+2ab+2ce+2eb+2ac+2ad+2bd$$

細看上面三式,我們得求三項以上式的平方的規則如下:

三項式或多項式的平方,等於每項平方的和,再加上每兩不同項乘積的兩倍。

習題　七九

求下列各式的平方:

1. $(a+5b)$
2. $(5x-3y)$
3. $(pq-rs)$
4. $(a+b-c)$
5. $(4a-3b+2c)$
6. $(xy-yz-zx)$
7. $(\frac{a}{2}-2b+\frac{c}{4})$
8. $(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2})$
9. $(a-b+x-y)$
10. $(2m+3n+4p-5q)$

11. $(x^4+x^3+x^2+x+1)$　　12. $(a+b-c+d-e+f)$

144. 立方

關於單項式的立方,我們也已講過,現在要講的,是二項式的立方,從實際運算,可得

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

細看上式,我們得求二項式立方的規則如下:

二項式的立方,等於每項立方,與三倍每項平方乘他項乘積的和。

如欲求三項式的立方,可先將這三項式括為二項式,再依前法計算。

習題　八〇

求下列各式的立方:

1. $(x+2y)$　　2. $(1-x)$　　3. $(1-\frac{x}{2})$

4. $(ab-3)$　　5. $(\frac{x^2}{3}-3x)$　　6. (a^2b-2ab^3)

7. $(2-a+b)$　　8. $(a-3b+4c)$　　9. $(1-x-y)$

10. (x^2+x+1)

145. 開方

甲數的乘方等於乙數,那麼甲數叫做乙數的方根。如 $2^2=4$, $3^3=27$, 2 是 4 的平方根; 3 是 27 的立方根。又如 $(2a)^2=4a^2$, $(5x)^3=125x^3$, 那麼 $2a$ 是 $4a^2$ 的平方根; $5x$ 是 $125x^3$ 的立方根。

求一數或一式的平方根的方法,叫做開平方;求一數或一式的立方根的方法,叫做開立方。

開平方的符號爲 $\sqrt[2]{}$; 或記做 $\sqrt{}$; 開立方的符號爲 $\sqrt[3]{}$。

146. 代數式的平方根

關於單項式的平方根,我們已經講過,現在要討論的,是求多項式的平方根。

求一個多項式的平方根,我們可以看做一個除法題目,不過在這裏,除數和商數,都是要找的,我們先拿一個三項平方式來研究一下。

三項平方式: $a^2+2ab+b^2$ 的因數是 $(a+b)(a+b)$

所以 $a^2+2ab+b^2$ 的平方根是 $(a+b)$

在這裏,我們若看 $a^2+2ab+b^2$ 和 $a+b$ 都是依 a 的降冪或 b 的升冪而排列,那麼:

1. 平方根的第一項,是三項式第一項的平方

根。

2. 從三項式裏,減去平方根的第一項的平方(叫他做第一部分積),得 $2ab+b^2$(叫他做第一剩餘)。

3. 從 $2ab+b^2$ 裏,要得平方根的第二項 b,我們要用 2a 除第一剩餘的第一項,就是說:用 2 倍平方根的第一項(叫他做第一試除數),除第一剩餘第一項的商做平方根的第二項。

4. 要 $2ab+b^2$ 恰能給一數除盡,並得商數 b,我們當用 $2a+b$ 做除數,就是說:用第一試除數,同他試除第一剩餘第一項的商的和,做第一全除數。

5. 從第一剩餘裏,減去第一全除數與平方根第二項的積(叫他做第二部分積),得最終剩餘。

從上述各項,我們可以求任一三項式的平方根。

例一: 求 $9x^2-30xy+25y^2$ 的平方根。

解	$9x^2-30xy+25y^2$	$3x-5y$	平方根
	$9x^2$	第一部分積 $=(3x)^2$	
第一試除數 $=6x$	$-30xy+25y^2$	第一剩餘	
第一全除數 $=6x-5y$	$-30xy+15y^2$	第二部分積 $=(6x-5y)(-5y)$	
	0	最終剩餘	

故 $9x^2-30xy+25y^2$ 的平方根為 $3x-5y$

推廣求三項式的平方根的方法,我們可以得求多項式平方根的規則如下:

1. 將多項式依某文字的降冪或升冪排列。
2. 取多項式第一項的平方根,為他的根的第一項,於全式中減去根的第一項的平方,得剩餘。
3. 用 2 倍已得平方根做試除數,試除剩餘,得商的第一項為平方根的第二項,
4. 由已得剩餘內,減去上商與試除數及商數的和的積,得新剩餘。
5. 準是做去,到剩餘為 0,或所求根式到了所需的項數為止。

注意一　因為負數的平方,也是正數,所以一式的平方根,當有正負二值。

注意二　求分式的平方根,只須將其分子分母

各自開方卽得。

例二: 求 $4x^4-20x^3+37x^2-30x+9$ 的平方根

解

	$4x^4$	$-20x^3+37x^2-30x+9$	$2x^2-5x+3$
	$4x^4$		第一部分積
第一試除數 $=4x^2$		$-20x^3+37x^2-30x+9$	第一剩餘
第一全除數 $=4x^2-5x$		$-20x^3+25x^2$	第二部分積
第二試除數 $=4x^2-10x$		$12x^2-30x+9$	第二剩餘
第二全除數 $=4x^2-10x+3$		$12x^2-30x+9$	第三部分積
		0	最終剩餘

故 $\sqrt{4x^4-20x^3+37x^2-30x+9}=\pm(2x^2-5x+3)$

例三 求 $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ 的平方根。

	$x^6+4x^5 \quad -10x^3 \quad 4+x+1$	$(x^3+2x^2-2x-1$
	x^6	
$2x^3+2x^2$	$4x^5 \quad -10x^3 \quad +4x+1$	
	$4x^5 \quad +4x^4$	
$2x^3+4x^2-2x$	$-4x^4-10x^3 \quad +4x+1$	
	$-4x^4-8x^3+4x^2$	
$2x^3+4x^2-4x-1$	$-2x^3-4x^2+4x+1$	
	$-2x^3-4x^2+4x+1$	
	0	

故 $\sqrt{x^6+4x^5-10x^3+4x+1}=\pm(x^3+2x^2-2x-1)$

習題 八一

求下列各式的平方根:

1. $16a^2+40ab+25b^2$

2. $36x^6+2x^3+1$

3. $x^4-2x^3+3x^2+2x+1$

4. x^4-4x^3+8x+4

5. $4x^8-4x^6-7x^4+4x^2+4$

6. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$

7. $x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4$

8. $18b+b^4+81-2b^3-17b^2$

9. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

10. $9x^4y^2-16x^3y^3+16x^6-12x^2y4+4y^6+24x^5y$

11. $\frac{1}{9}x^4+\frac{1}{144}y^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{18}x^2y^2+1$

12. $a^{4y}-12a^{3y}+54a^{2y}-108a^y+81$

13. $\frac{25a^2+20ab+4b^2}{25a^2+20ac+4c^2}$

14. $\frac{9x^4-24x^2+16}{4x^2-12x+9}$

15. $(x+y)^4-4(x+y)^3+6(x+y)^2-4(x+y)+1$

16. $\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+3-\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$

147. 數的平方根

$1=1^2$, $100=10^2$, $10000=100^2$, 故數在1與100的中的,他的平方根必在1與10的中間。數在100與10000的中的,他的平方根必在10與100的中間。換句話說,就是一位二位的數的平方根,必爲一位的數,三位四位的數的平方根,必爲二位的數。

所以數的開方,必先分段,欲開一整數的平方,可以兩位爲一段,自右至左分爲若干段,(極左的一段有時祗剩一位)於是這數的段數就等於平方根的位數。

又 $0.01=0.1^2$, $0.0001=0.01^2$, $0.000001=0.001^2$。故小數的位數,常兩倍於他的平方根的小數的位數。卽每平方數中小數的位數,必爲偶數。(如爲奇數應加零變偶。)他的方根中小數的位數,必爲這偶數的一半。所以有小數的數,他的開方分段,應自小數點起,每二位分做一段,整數向左,小數向右。

數的開平方原理,和代數式開平方的理相同。

例一: 求3249的平方根

解

	32 | 49	5　7
	25	第一部分積$=5^2=(a^2)$
第一試除數$=2\times50=2a$	749	第一餘數
第一全除數$=2\times50+7=(2a+b)$	749	第二部分積$=(107\times7)=(2a+b)b$
	0	最終餘數

故 3249 的平方根為 57。

說明 原數分二段,故方根為二位的數(即$a+b$)

第一段 32,含方根十位數的平方。

32 所含的最大平方數(即a^2)為$25=5^2$,故方根的十位數(即a)為 5。

從 32 減去 25,再取下原數的第二段 49 得餘數 749(即$2ab+b^2$)

用$2\times50=100$(即$2a$)試除 749,取 7 為他的商(即b)加上2×50,得完全除數$2\times50+7=107$(即$2a+b$)

用 7 乘 107,從 749 減去,就得餘數為 0。

平方根在二位以上的也可用這法來求。

由上例我們可得求數的平方根的規則如下:

1. 從個位起,向左或向右每兩位分做一段。

2. 先找首段能容的最大平方數,用他

的平方根做根的第一位數字。

3. 把根的第一位數字自乘,從首段減去,減得的差數後面添上第二段的的數目做第一餘數。

4. 二倍根的第一位數字做試除數,去試除第一餘數,所得的整數商,用做根的第二位數字。

5. 把這整數商附在試除數後做全除數,就用這整數商去乘全除數,得的積從第一餘數裏減去,(若積大過餘數,那試得的整數商就須減一再試,)再添上下一段的數目做第二餘數。

6. 再二倍已得的根(合成二位數)做新試除數,照前法累次進行,直到沒有餘數,或根的位數已經求足爲止。

注意 非完全平方的數,其平方根的眞值,永不能

得遇這等數,應加零於後繼續開方,以得其近似的值。

例二: 求182.25的平方根

解	1 82.25	13.5
	1	第一部分積$=1^2$
第一試除數$=2$	82	第一餘數
第一全除數$=23$	69	第二部分積$=(20+3)\times3$
第二試除數$=26$	13.25	第二餘數
第二全除數$=26.5$	13.25	第三部分積$=(26+0.5)\times0.5$
	0	最終餘數

故$\sqrt{182.25}=13.5$

例三: 求 965.9664 的平方根

解	9 65.96 64	31.08
	9	
	65	
61	61	
	4.9664	
6208	4.9664	
	0	

故 $\sqrt{965.9664}=31.08$

求分數的平方根可各開分母分子的平方,假使分母不是完全平方,那麼在開方的前,應先化分數為同值的小數,或化為同值的分數,令分母成為平方數。

例: 求$\frac{5}{8}$的平方根

解 $\frac{5}{8}=0.625$

故 $\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{0.625}=0.79057$

或 $\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$;

故$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{1}{4}\times\sqrt{10}=\frac{1}{4}(3.16227)$

$=0.79057$

習題 八二

求下列各數的平方根:(遇開不盡的開到小數第四位為止)

1. 599,076	2. 104,976	3. 308,025
4. 1,500,625	5. 1,522,756	6. 616,225
7. 0.307	8. 12.345	9. 41.2164
10. 0.835396	11. 10.24	12. 53.29

13. 0.5　　14. 0.9　　15. 2

16. 5　　17. $\frac{2}{3}$　　18. $\frac{4}{5}$

19. $\frac{5}{6}$　　20. $\frac{6}{7}$

148. 代數式的立方根

關於獨項式求立方根的方法,我們也已講過,所要討論的,是求多項式的立方根。

從乘方得　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

所以　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$的立方根是$(a+b)$

細看上式　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 同 $a+b$ 都是依 a 的降冪或 b 的升冪而排列,那麼:

1. 立方根的第一項,是多項式第一項的立方根。

2. 從多項式裏減去立方根第一項的立方得第一剩餘 $3a^2b+3ab^2+b^3$ 從這裏,我們要得立方的第二項 b,當用三倍第一項的立方(即$3a^2$)試除第一剩餘的第一項,得第二項(即b),再用 $3a^2+3ab+b^2$ 做全除數

例一:　求 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 的立方根

解	$2x-3y$	立方根
	$8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$	
	$8x^3$	第一部分積
第一試除數 $3\times(2x)^2=12x^2$ $3\times2x\times(-3y)=-18xy$ $(-3y)^2=9y^2$	$-36x^2y+54xy^2-27y^3$	第一剩餘
第一全除數 $12x^2-18xy+9y^2$	$-36x^2y+54xy^2-27y^3$	第二部分積
	0	最終剩餘

故 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 的立方根爲 $2x-3y$。

由上例得求多項式的立方根的規則如下:

1. 將多項式依某文字的降冪或升冪排列。
2. 多項式第一項的立方根,是他的立方根的第一項,從多項式裏,減去立方根第一項的立方,得第一剩餘。
3. 用已得根的平方的三倍做試除數,試除上得剩餘,得商的第一項,爲立方根的第二項。
4. 用上得試除數,加上 3 倍已得根各

項與由(3)所得新項的積,及該新項平方的總和做全除數,由第一剩餘裏,減去全除數與該新項的積,得新剩餘。

5. 再按(3)同(4)的方法做,直到所得剩餘爲 0,或所求根式到所需的項數爲止。

注意 求分式的立方根,只須分子分母各自開立方,即得。

例二: 求 $5x^3-3x^5-3x+x^6-1$ 的立方根。

解

	x^2-x-1	立方根
	$x^6-3x^5+5x^3-3x-1$	
	x^6	第一部分積
$3\times(x^2)^2=3x^4$ $3\times x^2\times(-x)=-3x^3$ $(-x)^2=x^2$	$-3x^5+5x^3-3x-1$	第一剩餘
第一全除數: $3x^4-3x^3+x^2$	$-3x^5+3x^4-x^3$	第二部分積
$3(x^2-x)^2=3x^4-6x^3+3x^2$ $3(x^2-x)(-x)=3x^2+3x$ $(-1)^2=1$	$-3x^4+6x^3-3x-1$	第二剩餘
第二全除數: $3x^4-6x^3+3x+1$	$-3x^4+6x^3-3x-1$	第三部分積
	0	最終剩餘

故　$\sqrt[3]{5x^3-3x^5-3x+x^6-1}=x^2-x-1$

例三：　求$a^6-3a^5+6a^4-7a^3+6a^2-3a+1$的立方根

$$
\begin{array}{l|l}
 & a^2-a+1 \\
\hline
 & a^6-3a^5+6a^4-7a^3+6a^4-3a+1 \\
 & a^6 \\
\hline
3(a^2)^2=3a^4 & -3a^5+6a^4-7a^3+6a^2-3a+1 \\
3a^2(-a)=-3a^3 & \\
(-a)^2=a^2 & \\
\hline
3a^4-3a^3+a^2 & -3a^5+3a^4-a^3 \\
\hline
3(a^2-a)^2=3a^4-6a^3+3a^2 & 3a^4-6a^3+6a^2-3a+1 \\
3(a^2-a)\times 1=3a^2-3a & \\
1^2=1 & \\
\hline
3a^4-6a^3+6a^2-3a+1 & 3a^4-6a^3+6a^2-3a+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故　$\sqrt[3]{a^6-3a^5+6a^4-7a^3+6a^2-3a+1}=a^2-a+1$

習題　八三

求下列各式的立方根：

1. $8x^3+6x-12x^2-1$
2. $x^3-9x^2+27x-27$
3. $27x^3-189x^2+441x-343$
4. $1728x^6+1728x^4y^3+576x^2x^6+64y^9$
5. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$
6. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$

7. $x^6-3ax^5+5\,{}^3x^3-3a^5x-a^6$

8. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$

9. $y^6-3y^5+6y^4-7y^3+6y^2-3y+1$

10. $1+33x^4-36x^{10}-9x^2+8x^{12}-63x^6+66x^8$

11. $39x^2+1-9x-144x^5+64x^6-99x^3+156x^4$

12. $\frac{64a^3}{x^3}-\frac{192a^2}{x^2}+\frac{240a}{x}-160+\frac{60x}{a}-\frac{12x}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}$

149. 數的立方根

$1=1^3$, $1000=10^3$, $1,000,000=100^3$, 故數在1與1000的中間的,他的立方根,必在10與100的中間,換句話說,就是一位二位三位的數的立方根,必爲一位的數;四位五位六位的數的立方根,必爲二位的數。

所以數的開立方,必先分段,欲開一整數的立方,可以三位爲一段,自右至左,分做若干段,(極左的一段,有時祇剩二位或一位)於是這數的段數就等於立方根的位數。

又 $0.001=0.1^3$, $0.000001=0.01^3$, $0.000,000,001=0.001^3$,故小數的位數常三倍於他的立方根的小數的位數,即每立方數中小數的位數,必爲3的倍數(如不是3的倍數應加零補足)所以有小數的數,他的開立方分段,應自小數點起,每三位分做一段,

整數向左,小數向右。

數的開立方原理和代數式開立方理相同。

例一: 求42875的立方根

解

		42 875	3　5
		27	第一部分積
第一試除數 $=3a^2=3\times30^2=$	2700	15 875	第一剩餘
$3ab=3\times30\times5=$	450		
$b^2=5^2=$	25		
第一全除數	3175	15 875	第二部分積
		0	最終剩餘

說明 原數分二段,故方根爲二位的數(卽 $a+b$)

第一段42,含立方根十位數的立方。

42所含的最大立方數(卽 a^3)爲 $27=3^3$,故立方根的十位數(卽a)爲3。

從42減去27,再取下原數的第二段875,得餘數15875(卽 $3a^2b+3ab^2+b^3$)

用 $3\times30^2=2700$(卽 $3a^2$)試除15875,取5爲他的商(卽b)加上 $3\times30\times5+5^2$(卽 $3ab+b^2$)於 3×30^2,得完全除數 $3\times30^2+3\times30\times5+5^2=3175$(卽 $3a^2+3ab+b^2$)

用5乘3175從15875減去,就得餘數爲0。

平方根在二位以上的,也可用這法來求。

由上例我們可得求數的立方根的規則如下:

1. 從個位起向左或向右每三位分做一段。
2. 先找首段能容的最大立方數,用他的立方根做根的第一位數字。
3. 把根的第一位數字立方,從首段減去,減得的差數後面添上第二段的數目做第一餘數。
4. 300倍根的第一位數字的平方做試除數,去試除第一餘數,所得的整數商,用做根的第二位數字。
5. 把這整數商乘根的第一位數字的30倍,加在試除數上,再加上這整數商的平方,這三數的總和用做全除數。拿這整數商去乘全除數,得的積從第一餘數裏減去(若積大過餘數,那試得的整數商,就須減一再試,)再添上下一段的數目,做第二餘數。

6. 再300倍已得根的平方(合成二位數)做新試除數,照前法累次進行,直到沒有餘數,或根的位數已經求足爲止。

注意一　爲計算便利起見,應熟記 1 到 9 的立方數如下:

$1^3=1$,　$2^3=8$,　$3^3=27$,　$4^3=64$,　$5^3=125$,

$6^3=216$,　$7^3=343$,　$8^3=512$,　$9^3=729$

注意二　如果餘數不夠被試除數除,或是試除所得商數,一一再減小到 1,還是嫌大,那麼這位商數,應當是0。

注意三　非完全立方的數,其立方根的眞值永不能得,遇這等數,應加零於後,繼續開立方,以得其近似的值。

例二:　求 187,149,248 的立方根。

	1 8 7,	1 4 9,	2 4 8	5 7 2
	1 2 5			
$3\times50^2=7500$	6 2	1 4 9		
$3\times50\times7=1050$				
$7^2=49$				
8599	6 0	1 9 3		

$3\times570^2=974700$	1 956 248
$3\times570\times2=\ \ 3420$	
$2^2=\ \ 4$	
978124	1 956 248
	0

故 $\sqrt[3]{187,149,248}=572$

例三: 求 1879.080904 的立方根

	1 879 .080 904	12.34
	1	
$3\times10^2=\ 300$	879	
$3\times10\times2=\ \ 60$		
$2^2=\ \ 4$		
364	728	
$3\times120^2=43200$	151 .080	
$3\times120\times3=\ 1080$		
$3^2=\ \ 9$		
44289	132 .867	
$3\times1230^2=4538700$	18 .213 904	
$3\times1230\times4=14760$		
$4^2=\ \ 16$		
4553476	18 .213 904	
	0	

故 $\sqrt[3]{1879.080904}=12.34$

求分數的立方根,可各開分母分子的立方,假使分母不是完全立方,那麼在開立方的前,應先化分數爲同值的小數,或化爲同值的分數,令分母成爲立方數。

例: 求$\frac{27}{2}$的立方根到小數三位

解　$\frac{27}{2}=13.5$

故　$\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=\sqrt[3]{13.5}=2.381$

或　$\frac{27}{2}=\frac{108}{8}$

故　$\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=\sqrt[3]{\frac{108}{8}}=\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{108}=$

$\frac{1}{2}(4.762)=2.381$

習題　八四

求下列各數的立方根(遇開不盡的開到小數三位爲止。)

1. 801　　2. 46,656

3. 110,592　　4. 91,125

5. 274,625　　6. 109,215,352

7. 220,348,864

8. 2.05

9. 3.02

10. 87

11. 10

12. 218.01

13. 385,828,352

14. 0.0874

15. 1838.265625

16. 0.01

17. 0.05

18. $\frac{2}{3}$

19 $\frac{3}{4}$

20. $\frac{4}{5}$

第十五章

根式

150. 無理數

不是平方數的整數,或分母分子中有一個不是平方數的簡分數,開平方時,都不能開盡。他的平方根既不是整數,又不是分數.這種數叫做無理數。對無理數言,尋常的整數或分數,叫做有理數。

例如: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ 等都是無理數。

2, $\frac{1}{5}$等都是有理數。

上面所說,不論立方根或任何方根,都有同樣的情形。

151. 不盡根

無理數中如$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等開不盡的方根,叫做不盡根,或簡稱根數。

又如 $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 等含有根號的式,叫做根式。

152. 根式的性質

例一: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

兩邊各乘 n 次方,那麼原式

左邊$=(\sqrt[n]{ab})^n=ab$

右邊$=(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n$

$=ab$

兩邊相等,故上面等式是正確的。

例二: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

兩邊各乘 n 次方,那麼原式

左邊$=\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n=\dfrac{a}{b}$

右邊$=\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$

兩邊相等,故上面等式是正確的。

例三: $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

兩邊各乘 n 次方,那麼原式

左邊$=(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$

右邊$=\left\{(\sqrt[n]{a})^m\right\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\left\{(\sqrt[n]{a})^n\right\}^m$

$=a^m$

兩邊相等,故上面等式是正確的。

例四: $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

兩邊各乘np次方,那麽原式

左邊$=(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$

右邊$=(\sqrt[n]{a^m})^{np}=\left\{(\sqrt[n]{a^m})^n\right\}^p=(a^m)^p$

$=a^{mp}$

兩邊相等,故上面等式是正確的。

由上四例,因得方根的性質如下:

1. 積的n次方根,等於各因數的n次方根的積。
2. 商的n次方根,等於相除數的n次方根的商。
3. 連續求某數乘冪及方根時,他的次序,沒有關係。
4. 求某數的乘冪,又求方根時,可將乘

冪指數與方根指數中相同的因數消去。

習題 八五

1. 求下各式的積:

   1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$　　2. $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a-b}$,

   3. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{bc}$,　　4 $\sqrt[3]{a+b}$, $\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}$

2. 求下各式的商:

   1. $\sqrt{28}\div\sqrt{7}$　　2. $\sqrt{a^3b}\div\sqrt{ab^3}$

   3. $\sqrt{a^2-b^2}\div\sqrt{a+b}$　　4. $\sqrt[3]{3x^2-2x-8}\div\sqrt[3]{x-2}$

3. 求下各式的值:

   1. $\sqrt{6}\times\sqrt{24}$　　2. $\sqrt{35}\times\sqrt{21}\div\sqrt{15}$

   3. $\sqrt{(a+b)^3}\div\sqrt{a+b}$

   4. $\sqrt{x^4-y^4}\div\sqrt{x^2-y^2}\div\sqrt{x+y}$

4. 簡單下列各式:

   1. $\sqrt{a^2b^4}$　　2. $a^n\div a^{m+n}$

   3. $\sqrt[4]{x^6y^6}$　　4. $\sqrt[n]{a^{mn}}$

5. 把 $\sqrt[n]{a^m}$ 開 m 次方.

6. 求 $(\sqrt[n]{a})^m$ 的 n 次方。

7. 證明a的m次方根的n次根,等於a的mn次方根。

8. 證明 $\sqrt[m]{a^{mn+p}}=a^{n}\sqrt[m]{a^{p}}$

153. 根式的化法

凡根式都須化成最簡式

(一) 根式或根數,可以從根號中抽出開得盡的因數,使原數或原式改成簡單。

例一: $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

(a,b 都是正數,以下做比。)

例二: $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$

例三: $\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{2^3\times 6}=2\sqrt[3]{6}$

(二) 根號中是分數式時,可以變這式的形狀,使分母不含根號。

例一: $\sqrt{\frac{3}{37}}\quad\sqrt{\frac{3\times 37}{37^2}}=\frac{\sqrt{111}}{37}$

例二: $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 3^2}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

例三: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{a\cdot b^2}{b\cdot b^2}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$

(三) 根式或根數的係數可以納入根號中去。

例一: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

例二: $2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{48}$

例三: $4\sqrt{10}=\sqrt{16}\times\sqrt{10}=\sqrt{160}$

(四) 根式的乘冪指數和方根指數,如有公共因子,就用他們的最大公約數約去。

例一: $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4\div2]{a^{2\div2}}=\sqrt{a}$

例二: $\sqrt[6]{x^2+6xy+9y^2}=\sqrt[6]{(x+3y)^2}=$

$\sqrt[6\div2]{(x+3y)^{2\div2}}=\sqrt[3]{x+3y}$

例三: $\sqrt[6]{2\ (x-y)^3}=\sqrt[6]{3^3(x-y)^3}=\sqrt{3(x-y)}$

習題　八六

簡單下列各式的根數;

1. $\sqrt{80}$,　2. $\sqrt{375}$,　3. $\sqrt{\frac{7}{12}}$　4. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

5. $\sqrt{17x^2y^3z^4}$　6. $\sqrt[3]{135}$,　7. $\sqrt{\frac{c}{ab}}$　8. $\sqrt[3]{18}$,

9. $\sqrt{\frac{m}{n}}$,　10. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$　11. $\sqrt{175}$,　12. $\sqrt{\frac{1}{8}}$

13. $\sqrt{\frac{2}{7}}$,　14. $\sqrt{98x^3y^4}$　15. $\sqrt{(a-b)^3}$,

16. $\sqrt[3]{27(x-6)^6}$;　17. $\sqrt{a^5+3a^4+2a^3}$

18. $\sqrt{81(3a-2b)^4}$,　19. $\sqrt{(a-1)^3(a+1)^2}$

20. $\sqrt[3]{8x^4y-24x^3y^2+24x^2y^3-8xy^4}$

154. 同次根數

方根指數相同的各根數,叫做同次根數,例如 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ 是同次根數,因爲他們的方根指數都是 3。

155. 化不同次根數爲同次根數

乘方和開方,互爲相反的運算,將一個數乘 n 次方後,再開 n 次方,或開 n 次方後再乘 n 次方,都仍等於原數。例如 9 的立方根是 $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{9}$ 的立方是 9, 連結起來,得

$$(\sqrt[3]{9})^3=9$$

即　$(\sqrt[n]{a})^n=a$

所以根數的方根指數和乘方指數,可以用同一數乘或除,而該根數不變,由此我們得化不同次根數爲同次根數的規則如下:

化不同次根數爲同次根數,可分別將各根數的方根指數和乘方指數乘一個相當數,使各根指數相同。

例一: 化 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ 爲同次根數

解　$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\cdot2]{3^2}=\sqrt[6]{9}$,

$\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$

故　$\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ 等於 $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{8}$,

例二: 化 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, 爲同次根數

解　$\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{\cdot 29}$,

$\sqrt[3]{6}=\sqrt[12]{6^4}=\sqrt[12]{1296}$,

$\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}=\sqrt[12]{1000}$,

故　$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, 等於 $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{1296}$, $\sqrt[12]{1000}$。

注意 要化各根指數相同,通常用各根指數的最小公倍數做新根指數。

習題　八七

化下各式爲同次根數

1. $\sqrt{3}$,　$\sqrt[3]{5}$
2. $\sqrt{3}$,　$\sqrt[3]{4}$,　$\sqrt[4]{5}$,
3. $\sqrt[4]{5}$,　$\sqrt{7}$
4. $\sqrt[3]{20}$,　$\sqrt{5}$,　$\sqrt[4]{30}$,
5. $\sqrt{5}$,　$\sqrt[3]{11}$,　$\sqrt[6]{13}$,
6. $\sqrt{a}$,　$\sqrt[3]{b}$　$\sqrt[4]{c}$,
7. $\sqrt[4]{a^3}$.　$\sqrt[3]{b^2}$　$\sqrt[6]{a^5}$

8. $\sqrt{xy}$, $\sqrt[3]{x^2y}$

9. $\sqrt{a+b}$ $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt{a-b}$,

10. $\sqrt{x-2y}$, $\sqrt[3]{2x-y}$, $\sqrt[3]{x+y}$,

比較下列各數的大小。

11. $\sqrt[4]{7}$ $\sqrt[3]{4}$,

12. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$,

13. $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{11}$,

14. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$。

156. 同類根數

兩個或幾個根數,化為最簡後,若他們的方根指數和根數都相同的,叫做同類根數。若方根指數相同,而根數不同時,叫做異類根數,例如:

$3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $11\sqrt{2}$ 為同類根數,

$3\sqrt{20}$, $4\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 化簡後,得 $6\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\frac{1}{5}\sqrt{5}$, 也為同類根數。

$\sqrt[3]{a^4b}$, $4\sqrt[3]{ab}$ 化簡後得 $a\sqrt[3]{ab}$, $4\sqrt[3]{ab}$ 也為同類根數,

方根前面的數,叫做根係數,例如 $3\sqrt{2}$, 3為$\sqrt{2}$的根係數; $a\sqrt[3]{ab}$, a為$\sqrt[3]{ab}$ 的根係數。

157. 根數的加減法

同類的根數,可以加減,運算時先將各根數化簡,然後將其係數相加或相減。

例一: $\sqrt{18}+\sqrt{50}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

例二: $\frac{5}{\sqrt{18}}-\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

由上例因得同類根數加減法的規則如下:

求同類根數的和或差,等於他們根係數的和或較,再附以根數。

習題 八八

化簡下列各式:

1. $\sqrt{12}+\sqrt{75}$
2. $2\sqrt{3}+3\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$
3. $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$
4. $2\sqrt{40}+\sqrt{90}-2\sqrt{160}$
5. $7\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{1029}$

6. $\sqrt{128}-\dfrac{2}{\sqrt{8}}+5\sqrt{2}$

7. $8\sqrt{a}+4\sqrt{a}-5\sqrt{a}$

8. $3\sqrt{a^3b^5}-5\sqrt{a^5b^3}$

9 $3\sqrt[3]{abc^4}+3\sqrt[3]{ab^4c},+3\sqrt[3]{a^4bc}$

10. $\sqrt{(x^2-2xy+y^2)}-5\sqrt{x^2b}-2y\sqrt{b}$

11. $\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2)}+b\sqrt[3]{a-b}$

12. $\sqrt{\dfrac{a^4c}{b^3}}-\sqrt{\dfrac{a^2c^3}{bd^2}}-\sqrt{\dfrac{a^2cd^2}{bm^2}}$

158. 根數的乘除法

應用乘除法規則,我們先求根數的商或積;再化成最簡根數。

例一: $3\sqrt[3]{2}\times5\sqrt[3]{3}=15\sqrt[3]{6}$

例二: $3\sqrt{a^2b}\times4\sqrt{ab^2}=3\times4\sqrt{a^2b\cdot ab^2}=12\sqrt{a^2b^2ab}$

$$=12ab\sqrt{ab}$$

例三: $\dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{15}}{6}=\dfrac{2\sqrt{90}}{6}\ \dfrac{\sqrt{90}}{3}=\dfrac{\sqrt{9\times10}}{3}$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{8}=\sqrt{10}$$

例四: $\dfrac{36\sqrt{x^2-y^2}}{3\sqrt{x-y}}=\dfrac{36\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}}{3\sqrt{x-y}}=12\sqrt{x+y}$

例五: 求 $\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 和 $3\sqrt{5}+4\sqrt{3}-$

$\sqrt{6}$ 的積

解
$$\begin{array}{r}
\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}\\
3\sqrt{5}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}\\
\hline
15-3\sqrt{15}+6\sqrt{30}\qquad\qquad\\
-12+4\sqrt{15}\qquad\qquad+8\sqrt{18}\\
-12\qquad\qquad-\sqrt{30}\quad+\sqrt{18}\\
\hline
-9+\sqrt{15}+5\sqrt{30}+9\sqrt{18}
\end{array}$$

故 $(\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{6})(3\sqrt{5}+4\sqrt{3}-\sqrt{6})=$

$-9+\sqrt{15}+5\sqrt{30}+9\sqrt{18}=$

$-9+\sqrt{15}+5\sqrt{30}+27\sqrt{2}$

注意 求不同次根的積或商,要先化不同次根數爲同次根數,再求他們的積或商。

例六 求 $3\sqrt[3]{ab}\times4\sqrt{ab}\div6\sqrt{a^3b^3}$ 的結果。

解 這式各根指數的最小公倍數爲 6

故 $3\sqrt[3]{ab}\times4\sqrt{ab}\div6\sqrt{a^3b^3}=$

$3\sqrt[6]{a^2b^2}\times4\sqrt[6]{a^3b^3}\div6\sqrt[6]{a^9b^9}=$

$(3\times4\div6)\sqrt[6]{\dfrac{a^2b^2a^3b^3}{a^9b^9}}=2\sqrt[6]{\dfrac{a^5b^5}{a^9b^9}}=$

$2\sqrt[6]{\dfrac{1}{a^4b^4}}=2\sqrt[6]{\dfrac{a^2b^2}{a^6b^6}}=\dfrac{2}{ab}\sqrt[6]{a^2b^2}$

習題 八九

求下列各式的積並化爲最簡式

1. $(8\sqrt{12})(3\sqrt{24})$

2. $(5\sqrt{a})(2\sqrt{b})$

3. $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

4. $(8+\sqrt{5})(2\sqrt{5}-3)$

5. $(1+\sqrt{7}+\sqrt{8})\ 1-\sqrt{7}+\sqrt{8})$

6. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$

7. $\sqrt[3]{(x+2)}\times\sqrt[3]{(x-2)}$

8. $(3y-2\sqrt{x})(3y+2\sqrt{x})$

9. $(1+2\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

10. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$

求下列各式的商並化爲最簡式

11. $\dfrac{\sqrt{40}}{3\sqrt{5}}$

12. $\dfrac{4\sqrt[3]{7}}{5\sqrt[3]{2}}$

13. $\sqrt[5]{14}\div 2\sqrt{21}$

14. $\dfrac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{98}}\div\dfrac{5}{7\sqrt{22}}$

15. $\sqrt[3]{a^3b^2c}\div 2\sqrt[3]{ab^4c}$

16 $(\sqrt{18}+3\sqrt{2}-\sqrt{20})\div 2$

17. $\sqrt[3]{x^3y^4c^2}\div\sqrt{xyc^2}$

18. $(\sqrt{5}+3\sqrt{6}+\sqrt{8})\div 2\sqrt{3}$

19. $(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})\div(3\sqrt{3})$

20. $(\sqrt{ax^2}-\sqrt{a^2})\div\sqrt{ax}$

解下列方程式

21. $(7x-5)\sqrt{6}=(5x-7)\sqrt{3}$

22. $3\sqrt{10}(x-1)=4(x+1)$

159. 有理化因數

分數的分母,如含有根數,我們要將該分數的分母分子,同乘一個因數,使分母不含根數,這個可以使根數去掉的因數,叫做有理化因數。

從 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的結果我們可得

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$$
$$=a-b$$

同理 $(3+5\sqrt{11})(3-5\sqrt{11})=3^2-(5\sqrt{11})^2=9-275$
$$=-266$$

這 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, 叫做共軛根數。

$3+5\sqrt{11}$, $3-5\sqrt{11}$, 也是共軛根數。

從上面的例,可知兩共軛根數的積為有理數。

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的有理化因數為 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, 同時 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的有理化因數為 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 就是:

兩二次根數的和或差的有理化

因數，是該二次根數的較或和。

例一: 化$\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$爲最簡式

解 $\sqrt{7}+\sqrt{5}$的有理化因數爲$\sqrt{7}-\sqrt{5}$

故 $$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{7-5}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{2}$$

例二: 化$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$爲最簡式

解 $$\frac{4+3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}=\frac{(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}{(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{20+18+12\sqrt{2}+15\sqrt{2}}{25-18}$$

$$=\frac{38+27\sqrt{2}}{7}$$

例三: 化$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$爲最簡式

解 $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{a+x+2\sqrt{ax}}{a-x}$$

習題 九十

化下列各式爲最簡式

1. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{3}{4\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4. $\dfrac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

5. $\dfrac{(3-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-5}$

6. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

7. $\dfrac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a-b^2}}{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a-b^2}}$

8. $\dfrac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$

9. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

10. $\dfrac{2x-\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}-y}$

第十六章

一元二次方程式

160. 一元二次方程式

含有一個未知數 x 的方程式經過整理以後，x 的最高冪是二次的，叫做一元二次方程式。一元二次方程式，所含的項，至多祗有三類的項，就是

1. 未知數的二次項
2. 未知數的一次項
4. 不含未知數的常數項

各項依 x 的降冪排列，且令 a, b, c 等字母代表，x 各冪的係數及不含 x 的項(a 不能等於 o)那

麼

$$ax^2+bx+c=o$$

叫做一元二次方程式的通式.這個通式,是代表一切二次方程的.

例一: $3x^2=2x+5$

例二: $x^2=25$

例三: $4x^2-5x+6=0$ 都是二次方程式

試將(例一)移項後,和通式比較得 $a=3, b=-2, c=-5$

(例二)移項後,和通式比較得 $a=1, b=0, c=-25$

(例三)和通式比較得 $a=4, b=-5, c=6$

在(例二)內 $b=0$,就是缺少 x 的一次項,這樣的二次方程式,叫做純二次方程式.

161. 一元二次方程式的解法

從前我們解一次方程式的方法,大部分都屬於整理方面的範圍,其實已經整理了的一次方程解法極其簡單,只要移項一除,便可了事。例如從 $ax+b=o$, 立刻可得 $x=-\frac{b}{a}$。解二次方程式,那就不能這般容易,並且解法也有好幾種,現在分述於下:

162. 用因數分解法解一元二次方程式

將二次方程式整理,使一端是 o,一端是一個

二次三項式，如果這二次三項式，可以分解因數，那麼這二次方程式便立刻可解。

例一： 解方程式　$x^2-6x+8=0$

解　分解因數得 $(x-2)(x-4)=0$

從乘法運算上，我們知道兩個或多個因數的積若等於0，那麼這些因數裏，至少有一個等於0，因此

若　$(x-2)(x-4)=0$

必　$x-2=0$　或 $x-4=0$

故　$x=2$　或 $x=4$

驗算：若 $x=2$，原式 $=2^2-6\times2+8=0$

若 $x=4$，原式 $=4^2-6\times4+8=0$

故兩根都適合方程式。

注意：從上例我們可以知道二次方程式，可有二個根。

例二： 解方程式　$72-x-x^2=-0$

解　分解因數得 $(8-x)(9+x)=0$

若　$8-x=0$　那麼 $x=8$，

若　$9+x=0$　那麼 $x=-9$。

驗算：若 $x=8$　原式 $=72-8-8^2=0$

若$x=-9$; 原式$=72+9-(-9)^2=0$

故兩根都適合方程式。

由上二例得用因數分解法解一元二次方程式的規則如下:

1. 化簡原方程式,使其一端爲零,他端成ax^2+bx+c的二次三項式。
2. 分解ax^2+bx+c成兩個一次因數。
3. 令這二個數各等於零,得兩個一次方程式。
4. 解這兩個一次方程式,卽得原式的二根。
5. 將求得的二根,代入原方程式,驗其是否適合。

習題 九一

解下列各方程式:

1. $x^2-x-132=0$
2. $9x^2-15x=14$
3. $5x^2+4x-1=0$

4. $56x^2-50=15x+6$

5. $x^2-7x-8=0$

6. $x^2-4x=0$

7. $2x^2-3x+1=0$

8. $x^2-9=0$

9. $2+x^2=3x$

10. $x(x+1)=12$

11 $6x^2=23x+4$

12. $x^2-6x-27=0$

13. $16x^2-16x+3=0$

14. $x^2-4x-1=0$

15. $(3x+1)(5x-2)=(x+2)(x-8)+33$

16. $x(x-4)(x+4)=x^2(x-3)-5$

17 $(x-4)(x+4)(x^2+25)=x^4$

18. $(x-3)^2=16$

19. $(x-2)(x+2)=21$

20. $7(x^2-1)-(x+3)(x-3)-56=0$

21. $5(x^2+5)=3(x^2+25)$

22. $ax^2+bx=0$

23. $4x^2+4ax=b^2-a^2$

24. $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

25. $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$

26. $\frac{x^2}{5}+\frac{7x}{5}=12x-48$

27. $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$

28. $4x-\frac{14-x}{x+1}=14$

29. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$

30. $\frac{33}{x^2}+\frac{4}{x}=5$

163. 用配方法解一元二次方程式

我們已經知道$x^2+2ax+a^2$是一個三項平方式，所以遇到一個代數式x^2+2ax，我們就可加上一項a^2配成一個三項平方式。a^2是從那裏來的?就是從x的係數一半看出來的。換句話說，就是要加上x的係數一半的平方，那麼$x^2+2ax+a^2$，才可等於$(x+a)$，有了這種配方的法則，我們就可用來解二次方程式了。

例一: 解方程式 $x^2-8x=20$

解 把左邊配成三項平方式，就是加上8的一半的平方16;同時爲了要維持等式，所以方程式的兩端，都要加上16.

$$x^2-8x+16=20+16$$

卽　$(x-4)^2=36$

兩端開方　$x-4=\pm6$

卽　$x=4\pm6$

用(+)號　$x=4+6=10$

用(—)號　$x=4-6=-2$

驗算:若 $x=10$,　原式爲 $10^2-8\times10=20$

若 $x=-2$,　原式爲 $(-2)^2-8\times(-2)=20$

故兩根都適合原方程式。

注意:　在上例,解方程式 $(x-4)^2=36$ 的時候,曾將兩邊開平方,並且因爲 $(+6)^2$ 和 $(-6)^2$ 都是 36,所以 $(+6)$ 和 (-6) 都是 36 的平方根,我們寫做 $(x-4)=\pm6$;但是 36 開方得兩個根 $+6$,-6,$(x-4)^2$ 開方只得一個根 $(x-4)$,難道 $-(x-4)$ 不是 $(x-4)^2$ 的平方根嗎?這是不錯的,$-(x-4)$ 的確是 $(x-4)^2$ 的平方根,所以精密地說來,解二次方程式,兩邊開方應當是 $\pm(x-4)=\pm6$,這樣好像有四個解答:

(i) $+(x-4)=+6$　　(ii) $-(x-4)=+6$

(iii) $-(x-4)=+6$　　(iv) $-(x-4)=-6$

但立刻可以看出來,(i) 和 (iv) 得同樣的解答,

(ii)和(iii)也得同樣的解答,所以寫成 $x-4=\pm 6$ 也就夠了.

例二: 解方程式 $3x^2-5x+2=0$

解 $3x^2-5x=-2$

兩端各除以3得

$$x^2-\frac{5}{3}x=-\frac{2}{3}$$

兩端各加上$\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$$x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}$$

即 $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$

兩端各開平方

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$$

移項

$$x=\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}$$

用(+)號 $x=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$

用(−)號 $x=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

驗算:若 $x=1$ 原式 $=3\times 1^2-5\times 1+2=0$

若 $x=\frac{2}{3}$ 原式 $=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-5\times\frac{2}{3}+2=0$

故兩根都適合原方程式.

由上二例,得用配方法解一元二次方程式的規則如下:

1. 化簡原方程式,使含有 x 的項歸入左端,不含 x 的項歸入右端。

2. 用 x^2 的係數,遍除各數,使 x^2 的係數爲 1。

3. 兩端各加上 x 的係數一半的平方,使含有 x 的一端變成三項平方式。

4. 兩端各開平方,取正負兩號。

5. 解這兩個一次方程式,卽得原式的二根。

6. 將求得的二根,代入原方程式,驗其是否適合。

習題　九二

將下列各式配成平方三項式:

1. x^2-10x　　2. $x^2+\frac{7}{3}x$　　3. $4x^2-8x$

4. $x^2+\frac{4}{5}x$　　5. $x^2-\frac{7}{9}x$　　6. $\frac{x^2}{36}+9x$

用配方法解下列各方程式:

7. $x^2+11x+28=0$
8. $x^2+8x+12=0$
9. $x^2-8x+13=0$
10. $6x^2-5x=6$
11. $2x^2+3=7x$
12. $x^2+10x+7=0$
13. $2x^2+3x-35=0$
14. $x^2+2x=147$
15. $75-3x^2=75x$
16. $3x+4x^2+1=0$
17. $x^2+16x=-63$
18. $3x^2-7x=7$
19. $x^2-2x-111=0$
20. $3x^2+4x-5=0$
21. $(x-3)(x+3)=6$
22. $(x-1)^2=4$
23. $2x^2-1=5x+2$
24. $x^2+10x=2x^2-5x+50$
25. $x^2+3a^2=4ax$
26. $x^2+2ab=b^2+2ax$
27. $(x-1)(x-20)=20$
28. $31x=14-10x^2$
29. $x-4=-5x^2$
30. $2x^2+3=7x$

164. 解一元二次方程式的公式

上面講過解一元二次方程式的方法有因數分解法和配方法二種;但是用因數分解法,在二次三項式的因數容易分解時,計算手續,固極簡單。有時遇到因數不易分解或不能分解時,那麼這法就不能用了。配方法固適用於任何二次方程,範圍極廣,但計算手續很繁,我們於是不得不別立一種公

式的解法,就是從配方法求出一個通用的公式,那麼任何一元二次方程式,都可利用這公式,以求其根。這法不但可解數字係數的二次方程式,並且可解文字係數的二次方程式。

我們已經知道二次方程式的通式為

$$ax^2+bx+c=0$$

把這通式用配方法求解,就得二次方程式根的公式

解方程式　$ax^2+bx+c=0$

解　將常數項 c 移項　$ax^2+bx=-c$

兩端各用 a 除　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$,

配方　$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

即　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

兩端各開平方　$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

取正號得　$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

取負號得　$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

若把這兩個根代入原方程式,都能適合.

上面所得的兩個根,若把他們合起來,可以寫

做:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

這就是二次方程式根的公式,學者務須熟記。

例一: 解方程式 $5x^2+x=6(2-x^2)$

解 $5x^2+x=12-6x^2$

$11x^2+x-12=0$

和通式比較 $a=11,\quad b=1,\quad c=-12$。

代入公式得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times11\times(1-2)}}{2\times11}$

$=\frac{-1\pm23}{22}$

故 $x=1$

$x=-\frac{12}{11}$

驗算:若$x=1$, 原式爲 $5+1=6(2-1)\quad 6=6$

若$x=-\frac{12}{11}$ 原式爲 $5\times\frac{144}{121}-\frac{12}{11}=$

$6\left(2-\frac{144}{121}\right);\quad \frac{588}{121}=\frac{588}{121}$

故兩根都適合方程式。

例二: 解方程式 $3x^2+3x=2x+4$

解 $3x^2+3x-2x-4=0$

$3x^2+x-4=0$

和通式比較得 $a=3,\quad b=1,\quad c=-4$

代入公式得$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times3\times(-4)}}{2\times3}=\frac{-1\pm7}{6}$

故　$x=1$

$x=-\frac{4}{3}$

驗算:若$x=1$　原式爲　$3+3=2+4$　$6=6$

若$x=-\frac{4}{3}$原式爲$3\times\frac{16}{9}-4=-\frac{8}{3}+4$

$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

故兩根都適合方程式。

由上二例得用公式解一元二次方程式的規則如下:

1. 化簡原方程式,使成$ax^2+bx+c=0$的形式。

2. 將a,b,c的值代入公式,以求x的值。

3. 將求得的二根,代入原方程式,驗其是否適合。

習題　九三

用公式解下列各方程式:

1. $x^2+11x=210$　　2. $2x^2+11x=32x-x^2-27$

3. $2x^2-11x=6$　　4. $8x^2+5x=8$

5. $18-41x=3+x^2$

6. $6x-11x^2=-7$

7. $7x^2+11x=6$

8. $10+15x+x^2=26x$

9. $1+2x+x^2=0$

10. $(5x-11)^2=6(x-2)$

11. $x^2-2x-1=0$

12. $x^2+4x+2=0$

13. $2x^2+4x-1=0$

14. $4x^2+6x+1=0$

15. $x^2-4x-21=0$

16. $8x^2+9x=(x+1)(x-6)$

17. $(3x-1)(x^2-5x-24)=0$

18. $\frac{(2y-6)^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$

19. $\frac{x^2}{4}+\frac{(2x-1)^2}{9}=1$

20. $(3y-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$

165. 虛根

解二次方程式時,有時要開負數的平方,例如:

解方程式 $x^2-2x+6=0$

解 移常數項 $x^2-2x=-6$

配方 $x^2-2x+1=-6+1$

即 $(x-1)^2=-5$

開方 $x-1=\pm\sqrt{-5}$

因為正數的平方為正,負數的平方也為正,所以在正負數中,我們不能找出一個平方以後等於 -5 的數。

照此說來, $x-1$ 是一個難理解的數。

$\therefore x$ 是一個難理解的數。

我們叫這種負數的平方根爲虛根,(在本書中廿二章裏當詳論之);現在遇着一個方程式有這樣的解答時就說他沒有實根,不要再解下去。

166. 一元二次方程式的應用問題

解二次方程式應用問題,仍和以前解一次方程應用問題的步驟相同,不過二次方程式的二根,解得後,有時雖都適合方程式,但與原題意義或事實未必盡合,所以解得的二根,必須代入原題,視其合理與否,以定取舍。現在把解一元二次方程式應用問題的規則,分述於下:

1. 選擇題中適宜的數,以爲未知數,用 x 來代表。

2. 細審題意,將已知數和未知數的關係,列成方程式。

3. 解這方程式,得二根。

4. 將求得的二根,代入原題(不能代入所列方程式)驗其是否適合,不合者棄

之。

例題一: 有二位數等於二個數字的積的二倍,已知單位數字,比十位數字大3,問這數是多少?

解 設十位數字爲 x,

那麼單位數字爲 $x+3$,

原數爲 $10x+(x+3)$

依題意得方程式

$$10x+x+3=2x(x+3)$$

即 $2x^2-5x-3=0$

分解因數 $(2x+1)(x-3)=0$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}$$

$$x=3$$

但十位上的數字,必爲整數,故 $-\frac{1}{2}$ 不合理。

答十位數字爲 3,單位數字爲 6,即所求的數爲36。

例題二: 分30爲二部,使二部的積爲230,求這二部的數。

解 設一部爲 x,

那麼他部爲 $30-x$,

依題意得方程式

$$x(30-x)=230$$

即　$x^2-30x+230=0$

由公式得　$x=\frac{30\pm\sqrt{900-920}}{2}=\frac{30\pm\sqrt{-20}}{2}$

$$\therefore\quad x=\frac{30+\sqrt{-20}}{2}$$

$$x=\frac{30-\sqrt{-20}}{2}$$

平方根內有負數,就是這個方程式沒有實根,那麼這個問題,是不合理的。因爲30分爲二部,他的最大的積,不過$15\times15=225$,絕對不會有相乘等於230的數,所以這個問題,不能有合理的答數。

例題三: 用車若干載米552袋,恰好載完,後來因爲要空出一車載人,於是每車多載一袋,問原來車數是多少?

解　設x爲原有車數。

那麼$\frac{552}{x}$爲原來每車所載的袋數。

$\frac{552}{x-1}$爲除出一車後每車所載的袋數

依題意得方程式

$$\frac{552}{x-1}-\frac{552}{x}=1$$

去分母 $552x=552x-552+x^2-x$

即　$x^2-x-552=0$

分解因數 $(x-24)(x+23)=0$

$\therefore \quad x=24$

$x=-23$

因爲車數不能是負數,那麼$x=-23$不合理。

答原有車數爲24。

例題四: 甲乙兩船,甲船從東向西,每小時行3里;乙船從南向北,每小時行4里兩船相遇後,甲船再行9里,乙船再行12里,恰爲正午。問在什麼時候,兩船相距40里?

解 設午後x時,兩船相距40里

那麼甲船距相遇處爲$9+3x$里

乙船距相遇處爲$12+4x$里

依直角三角形定理得

$$(9+3x)^2+(12+4x)^2=40^2$$

化簡得 $x^2+6x-55=0$

分解因數 $(x+11)(x-5)=0$

$\therefore \quad x=-11$

$x=5$

答午後5時或午前11時(即上午一時)兩船相距40里。

習題　九四

1. 某人 3 年後的年齡,却是 3 年前的平方,求他現在的年齡?

2. 兄弟歲數的和爲70,十年前二人歲數的積爲十年後二人歲數的積的$\frac{3}{10}$,問兄弟現年各幾歲?

2. 甲乙二人年齡的和爲100,年齡的積的$\frac{1}{10}$,大於甲的年齡 180,問甲乙各年多少?

4. 求平方的差1016的兩個連續奇數。

5. 三個數的比爲1:2:3牠們的平方的和爲1134,求這三個數。

6. 有連續的四個正整數,其相鄰二數的各積與兩端的數的積相加爲168,問最小的數是多少?

7. 二整數相比,如 5 與 4 的比。若各加 15 而平方,那麽他們的差爲 999, 求二數是什麽?

8. 長方形的周界爲 42 尺,若長減 1 尺,闊減$\frac{1}{4}$尺,那麽面積却爲原來的$\frac{2}{3}$求長闊各幾尺?

8. 一立方體,若長寬高各加 3 寸,他的體積便增加 4167 立方寸,求他每邊的長是多少寸?

10. 鷄犬的頭數共爲 7,其足數平方的和爲416,問鷄犬各有多少頭?

11. 鷄犬共有24足,其頭數平方的和爲29,求鷄犬各幾頭?

12. 分桃與兒童,每人 6 枚,不足 5 枚,已知桃數爲人數的平方,問桃數多少?

13. 宴會費18元,照人數均攤,現因 4 人不到,其餘各人就多出 1 角 5 分,問原定參加人數多少?

14. 甲乙二人合作一事,8 日可成,甲獨做比乙獨做可早成12日,問兩人獨做,幾日可成?

15. 抛一石子,七秒鐘時距地 $(100t-16t^2)$ 呎,問幾秒鐘距地100呎,又幾秒鐘落地?

16. 某人用16000元買田,後來留下40畝,將其餘的每畝多賣20元,仍收入16000元,問原買幾多畝?

17. 一人買物若干件加5%的利出售,獲利 3 元 2 角;若每件加銀 5 分出售,那麼他所獲的利等於20件的原價。試求這人所買件數及每件的原價?

17. 兩車站相隔300里,一火車想早到五小時就得增加速度每小時 5 里,問這車原速度多少?

18. A 車發於甲地,行向乙地,B 車發於乙地,行

向甲地。二車出發後20時相會於途中,而A車比B車早到9時,已知A車的速度比B車每時多10里,試求二車的速度及甲乙二地的距離。

20, 甲乙兩人從同一地點出發,甲向北行,每小時走12里,乙向東行,每小時走9里,幾小時後兩人相距48里?

第十七章

二次函數的變跡

167. 二次函數的變跡

方程式含 x 的一次式時,叫一次函數,故方程式含 x 的二次式時,便叫二次函數。

我們知道一次函數的變跡,是一直線。現在求二次函數的變跡,和以前一樣,不過他的變跡不是直線,而是曲線。他的圖形,不外四種,就是:

1. 拋物線, 2. 圓, 3. 橢圓, 4. 雙曲線。

作曲線的法,先求 (x,y) 適合於方程式的值。列表作點;用曲線板聯各點,即成圓滑的曲線。

168. 反變函數的變跡

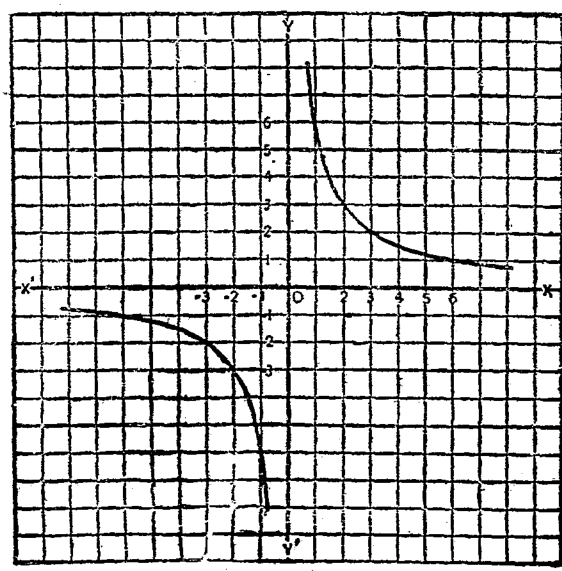
例 求 $xy=6$ 的變跡

解 方程式求y $y=\dfrac{6}{x}$

依上式,求出若干對x,y的對應值,列成下表。

x	-8	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	5	6	8
y	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	-6	-8	8	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{3}{4}$

取各組對應值作點,然後聯成一平滑曲綫如下圖。



這種曲綫,叫做雙曲綫。

凡方程式爲$xy=k$的形的,他的圖形爲一雙曲線,換句話說,就是反變函數的變跡,都是雙曲線。

169. 拋物線

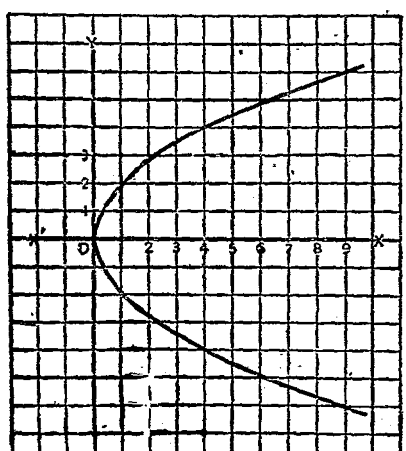
例一 求 $y^2=4x$的變跡

解 方程式求y $y=\pm 2\sqrt{x}$

依上式求出若干對x,y的對應值,列成下表:

x	0	1	2	3	4	9	(x爲負數)
y	0	±2	±2.8	±3.4	±4	±6	(y的值爲虛數)

取各組對應值作點聯成一平滑曲綫得下圖。



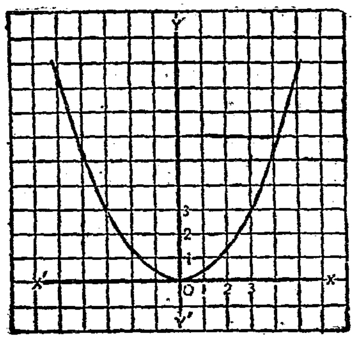
例二 求 $x^2-3y=0$的變跡

解方程式求y $y=\frac{x^2}{3}$

依上式得x,y的對應值,列成下表:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$5\frac{1}{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$

取各組對應值作點,聯成一平滑曲線得下圖。



這種曲線,叫做拋物線。

凡方程式為$y=ax^2+bx+c$,(a,b,c,任為何值,但$a\neq0$)的變跡,都是拋物線。

170. 圓

例一: 求 $x^2+y^2=16$的變跡

解方程式求y $y=\pm\sqrt{16-x^2}$

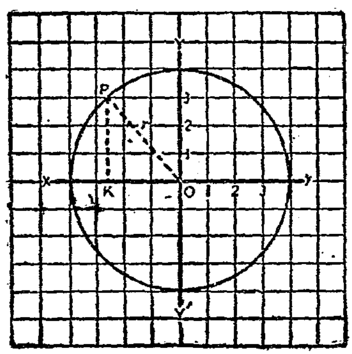
依上式得x,y的對應值列成下表

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	$3\sqrt{-1}$	0	±2.64	±3.46	±3.87	4	±3.87	±3.46

3	4	5
0	±2.64	$3\sqrt{-1}$

x的值大於4或小於-4,那麼y的值爲虛數。

取各組對應值作點,聯成一平滑曲綫,得下圖。



這種曲線叫做圓。

凡方程式爲 $x^2+y^2=r^2$ 的形的變跡都是圓。

就此式可見x和y的絕對值都不能比r大。

171. 橢圓

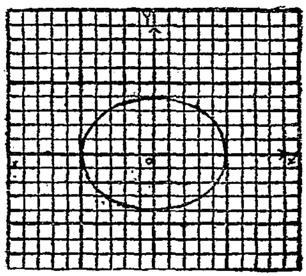
例　　求$25y^2+16x^2=400$的變跡

解方程式求y　　$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$

依上式得　x,y的對應值列成下表

x	—5	—4	—3	—2	—1	0	+1	+2	+3	+4	+5
y	0	±2.4	±3.2	±3.6	±3.9	±4	±3.9	±3.6	±3.2	±2.4	0

取各組對應值作點,聯成一平滑曲綫,得下圖。



這種曲綫叫做橢圓。

凡方程式爲$a^2x^2+b^2y^2=c^2$的形的變跡,都是橢圓。

就此式可見x的絕對值,不能比a大.y的絕對值,不能比b大。

172. 雙曲線

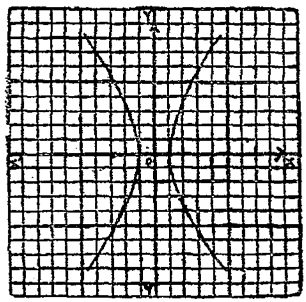
例一　　求$4x^2-y^2=4$的變跡

解方程式求y　　$y=\pm2\sqrt{x^2-1}$

依上式得　x,y的對應值列成下表

x	—4	—3	—2	—1	0	+1	+2	+3	+4
y	±7.2	±5.6	±3.4	0		0	±3.4	±5.6	±7.2

取各組對應值作點,聯成一平滑曲線,得下圖



這種曲綫叫做雙曲綫。

凡方程式爲 $a^2x^2-b^2y^2=c$ 的形的變跡,都是一雙曲線。

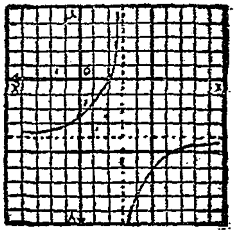
就此式可見 x 的絕對值,不能比 b 小,(譬如本例中,x 不能大於 -1, 也不能小於 1)但 y 的值,却沒有限制。

例二 求 $y=\dfrac{4x+4}{2x+3}$ 的變跡

依上式得 x, y 的對應值,列成下表:

x	……	-5	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	2	3	4
y	……	$\frac{16}{7}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{8}{3}$	4	不能	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{20}{11}$

取各組對應值作點,聯成一平滑曲綫,得下圖:



注意 $x=-\frac{3}{2}$時,右端分母爲0,所以y無值,但是x比$-\frac{3}{2}$稍小時,y是絕對值很大的正數,x比$-\frac{3}{2}$稍大時,y是絕對值很大的負數,因此在$x=-\frac{3}{2}$左邊,曲綫無限向上升,在右邊時,無限向下降。

又就上表可見$x<-\frac{3}{2}$時,y的對應值都比2大,$x>-\frac{3}{2}$時,y的對應值都比2小。x的對應值愈大(不論正負)則y值愈和2相近。

這種曲綫是一種特殊雙曲綫,叫做正雙曲綫。

凡一分數函數中,如分子分母均爲一次時,圖解都是正雙曲線,如分子不高於二次,而分母爲一次(且不能整除分子的),那麼圖解是普通雙曲線。

173. 兩曲綫的相交

二個方程式都是二次函數;那麼用圖解求解時,常得四組根。如果四組的值,都是實數,那麼他的交點是 $p_1(x_1,y_1)$ $p_2(x_2,y_2)$ $p_3(x_3,y_3)$ $p_4(x_4,y_4)$

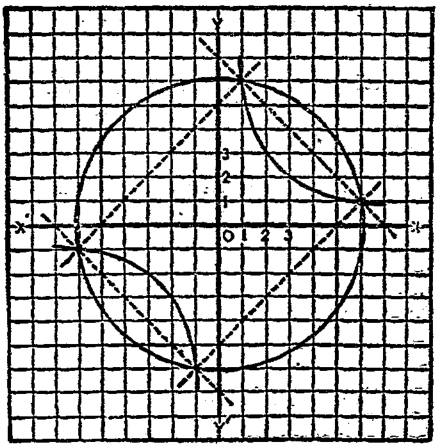
例一　試圖解

$$\begin{cases} x^2+y^2=37 & \cdots(1) \\ xy\quad=6 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖,(1)為圓,(2)為雙曲線,二曲線交於四點 A(1,6,) B(6,1), C(—1,—6) D(—6,—1)

就是這方程式有四組根:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6 \\ y=-1 \end{cases}$$



例二　試圖解

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \cdots\cdots(1) \\ 9(x-1)^2+4y^2=36 \cdots \quad (2) \end{cases}$$

這二式的圖,(1)爲圓,(2)爲橢圓,二曲線交於$(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\sqrt{6})$,及$(\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\sqrt{6})$二點,同時相切於(3,0),就是有二組根相等。

即$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{6}{5}\sqrt{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=-\frac{6}{5}\sqrt{6} \end{cases}$

學者試自作圖驗之。

例三 試圖解:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 9x^2+16y^2=144 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖,(1)爲圓,(2)爲橢圓,二曲綫相切於(0,3)及(0,−3)二點,就是前二組及後二組的根都相等。

即$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

學者試自作圖驗之.

例四 試圖解:

$$\begin{cases} 4y^2=27x \cdots\cdots(1) \\ 9x^2-4y^2=36 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖:(1)爲抛物線,(2)爲雙曲線,二曲線相交於$(4,3\sqrt{3})$及$(4,-3\sqrt{3})$二點,其他二點不可作,就是其他二組根爲虛數。

學者試自作圖驗之。

例五　試圖解:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots\cdots(1) \\ 9(x-5)^2+4y^2=36 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

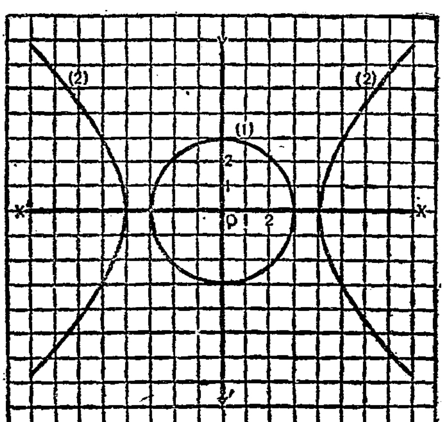
這二式的圖:(1)爲圓,(2)爲橢圓,二曲線相切於(3,0),其他二點不可作,就是兩組根相等,二組根爲虛數。

學者試自作圖驗之。

例六　試圖解:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \cdots(1) \\ x^2-y^2=16 \cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖,(1)爲圓,(2)爲雙曲線;四交點都不可作,就是四組根都是虛數。



由上六例,可知兩個二次曲綫相交,有四組根。這二曲綫交點的個數,有下列的規則:

1. 兩曲綫相交於四點,就是有四個不等的根。

2. 二曲綫相切於一點,就是兩個根相等。

3. 二曲綫沒有交點,就是根爲虛數。

此外尙有二曲綫,僅交於三點,或二點,或一點,或不相交的,那麽他的根,祇有三組,或二組,或一組,或幷一組而不可得。

例七 試圖解:

$$\begin{cases} x^2-y^2=9 \cdots\cdots(1) \\ (x+4)(x-y-3)=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖,(1)爲雙曲線,(2)爲二直綫,(1)(2)祇有三交點。

學者試自作圖驗之。

例八 試圖解:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \cdots\cdots(1) \\ (x-4)^2+y^2=9 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖:(1)爲圓,(2)也爲圓,二圓祇有二交

點。

學者試自作圖驗之。

例九　試圖解：

$$\begin{cases} x^2-y^2=12 \cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2-6x+6y=6\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖：(1)為雙曲綫，(2)也為雙曲綫，二曲綫祗有一交點。

學者試自作圖驗之。

例十　試圖解：

$$\begin{cases} xy=1\cdots\cdots(1) \\ xy=-1\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

這二式的圖：(1)為雙曲綫，(2)也為雙曲綫，二曲綫沒有交點。

學者試自作圖驗之。

習題　九五

試作下列各方程式的圖解：

1. $x^2+y^2=49$　　2. $9x^2+4y^2=36$

3. $9x^2-4y^2=36$　　4. $y^2+2x=0$

5. $25x^2+9y^2=225$　　6. $x-y^2=0$

7. $3xy=4$

8. $x^2+y^2=0$

9. $y(2x-1)=3x+2$

10. $x^2+2xy-3x+3y+2=0$

11. $x^2-5x+6=0$

12. $x^2-6x+9=y$

13. $6+5y+2x=y^2$

14. $y^2+8x+4y=20$

試作下列各組方程式的圖解,並求其交點:

15. $\begin{cases}5x^2+2y^2=22\\3x^2-5y^2=7\end{cases}$

16. $\begin{cases}x+xy=35\\y+xy=32\end{cases}$

17. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=2\\x^2-xy+y^2=6\end{cases}$

18. $\begin{cases}4x^2-9y^2=0\\4x^2+y^2=8(x+y)\end{cases}$

19. $\begin{cases}3x^2-2y^2=6(x-y)\\xy=0\end{cases}$

20. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=37\\x^2-y^2=40\end{cases}$

第十八章

二元二次聯立方程式

174. 二次聯立方程式

一次聯立方程式的解法,我們已經講過,現在要討論的,是至少有一個方程式是二次的聯立方程式。解聯立方程式的要訣,在將幾個方程式,併為一個方程式,同時消去未知數,使最後一個方程式,祗含一個未知數。但是實際上,這種手續,往往很繁,有時簡直無法可做。以下討論的,是幾種特別聯立方程式的解法。

175. 一式為一次,一式為二次的聯立方

程式解法(一)

在這一類方程式,我們可先就一次方程式裏,暫將一未知數看做已知,解另一未知數,將此結果代入二次方程式裏,得到最後的方程式,祇含一個未知數,解這最後方程式,再將所得結果逐一代入一次方程式裏,便得各組答數。

例一　解聯立方程式

$$\begin{cases} x+2y=5 \cdots\cdots (1) \\ x^2+2y^2=9 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解　從(1)式得 $x=5-2y$　(3)

代入(2)式　$(5-2y)^2+2y^2=9$

即　$25-20y+4y^2+2y^2=9$

即　$6y^2-20y+16=0$

即　$3y^2-10y+8=0$

分解因數　$(3y-4\ (y-2)=0$

故　$y=\frac{4}{3}$　或 2

代入(3)式　$x=\frac{7}{3}$　或 1

$\therefore$ 所求的根爲 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$　$\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$

例二　解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=12\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=90\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　從(1)式得　$x=12-y\cdots(3)$

代入(2)式　$(12-y)^2+y^2=90$

卽　$144-24y+y^2+y^2=90$

化簡　$y^2-12y+27=0$

分解因數得　$(y-3)(y-9)=0$

故　$y=3$　或　9

代入(3)式得　$x=9$　或　3

$\therefore$所求的根爲 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$　$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$

由上二例,得解一式爲一次,一式爲二次的聯立方程式的規則如下:

1. 由一次方程式中,將一個未知數當做已知,解其他一個未知數。
2. 將(1)的結果,代入二次方程式,化簡後得一個一元二次方程式.
3. 從這一元二次方程式,求出一個未

知數的值。

4. 將(3)的結果,代入一次方程式,得其他一個未知數的值。

5. 將各組未知數的值,代入原方程式,驗其是否適合。

176. 一式爲一次,一式爲二次的聯立方程式解法(二)

上面所講的,是代入法,但除了代入法以外,還有其他的解法,舉例如下:

例一 解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2-y^2=5 \cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=-5 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解 用(2)式除(1)式得

$$x+y=-1 \cdots\cdots (3)$$

$$\underline{x-y=-5 \cdots\cdots (2)}$$

(2)式加(3)式得 $2x=-6$

$$\therefore \quad x=-3$$

代入(2)式得 $y=2$

∴所求的根爲 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

例二　解聯立方程式

$$\begin{cases} x-y=6 \cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=-5 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　(1)式平方　$x^2-2xy+y^2=36 \cdots\cdots\cdots(3)$

(2)式乘4　$4xy \quad =-20 \quad (4)$

(3)式加(4)式　$x^2+2xy+y^2=16$

開平方　$x+y=\pm 4 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(1)式加(5)式得　$2x=10$　或 2

$\therefore \quad x=5$　或 1

(5)式減(1)式得　$2y=-2$　或 -10

$\therefore \quad y=-1$　或 -5

$\therefore$所求的根為　$\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$　$\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$

習題　九六

1. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=85 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x+y=3 \\ y^2-x^2=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x+3)(y+3)=20 \\ (x-4)(y+4)=-18 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x^2-xy+y^2=x+y-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 2x^2-3xy-y^2=1 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} y^2=16x \\ y=3x-4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=52 \\ x+y=8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=a \\ 4xy-a^2=-b^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy=4 \\ x+2y=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-3y=1 \\ x^2-2xy+9y^2=17 \end{cases}$

11. $\begin{cases} xy=45 \\ x+y=14 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x^2+xy=6y^2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-y=1 \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2+y^2=125 \end{cases}$

177. 二式都爲二次的聯立方程式解法

例一 解聯立方程式

$$x^2+y^2=10 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$xy=3 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1)式＋(2)式×2

$$x^2+2xy+y^2=16$$

卽 $(x+y)^2=16$

卽 $x+y=\pm4\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)式－(2)式×2

$$x^2-2xy+y^2=4$$

卽 $(x-y)^2=4$

卽 $x-y=\pm2\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)(4)二式聯立得

$$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$$

例二　解聯立方程式

$$\begin{cases}x^2-xy+2y^2=4\cdots\cdots\cdots(1)\\2x^2-3xy-2y^2=6\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解　(1)式×3　$3x^2-3xy+6y^2=12\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)式×2　$4x^2-6xy-4y^2=12\cdots\cdots\cdots(4)$

從(4)－(3)　$x^2-3xy-10y^2=0$

$$(x-5y)(x+2y)=0$$

$$x-5y=0\text{或}x+2y=0$$

$$\therefore\quad x=5y\text{或}x=-2y$$

將 $x=5y$ 代入(1)式得

$$25y^2-5y^2+2y^2=4$$

$$22y^2=4$$

$$y^2=\frac{2}{11}$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{\sqrt{22}}{11}\quad\therefore\quad x=\pm\frac{5\sqrt{22}}{11}$$

將 $x=-2y$ 代入(1)式得

$$4y^2+2y^2+2y^2=4$$

$$8y^2=4$$

$$y^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\qquad \therefore\quad x=\mp\sqrt{2}$$

∴ 所求的根爲

$$\begin{cases}x=\dfrac{5\sqrt{22}}{11}\\ y=\dfrac{\sqrt{22}}{11}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\dfrac{5\sqrt{22}}{11}\\ y=-\dfrac{\sqrt{22}}{11}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

習題 九七

1. $\begin{cases}x^2+y^2-x-y=78\\ xy+x+y=39\end{cases}$

2. $\begin{cases}x^2+7xy=-104\\ 5xy-y^2=-129\end{cases}$

3. $\begin{cases}xy+2x=5\\ 2xy-y=3\end{cases}$

4. $\begin{cases}3x+2y=5xy\\ 15x-4y=4xy\end{cases}$

5. $\begin{cases}xy=x+y+2\\ x^2+y^2=20\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2+1=9y\\ x^2+x=6y\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2-7x+y^2=7y\\ 3(x+y)=-2xy\end{cases}$

8. $\begin{cases}x^2-2xy=2y\\ 2x^2-9y^2=9y\end{cases}$

9. $\begin{cases}x^2+y^2+2(x+y)=6\\ xy(xy+2)=3\end{cases}$

10 $\begin{cases}x^2=ax+by\\ y^2=ay+bx\end{cases}$

178. 等次式

前面已經講過,一個代數式裏各項次數相等

的,叫做同次式,也叫做等次式,所以方程式中,各項次數相等的,叫做等次方程式。例如方程式:

$ax^2+by^2=c$

$ax^2+bxy=c$

$ax^2+bxy+cy^2=d.$ 都是x,y的二次等次式。

如果二個方程式,都是二次等次式,那麼解聯立方程式時,可假設 $y=mx$ 代進去,先決定m的值,再求x和y的值。

例一 解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2+xy=-1 \cdots\cdots\cdots (1) \\ y^2-2xy=8 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解 設 $y=mx$ 代入(1)和(2)式

$$x^2+mx^2=-1 \cdots\cdots (3)$$

$$m^2x^2-2mx^2=8 \cdots\cdots (4).$$

從(3)式得 $(1+m)x^2=-1$,和 $x^2=\dfrac{-1}{1+m} \cdots\cdots\cdots (5)$

從(4)式得 $(m^2-2m)x^2=8$,和 $x^2=\dfrac{8}{m^2-2m} \cdots\cdots (6)$

從(5)和(6)得 $-\dfrac{1}{1+m}=\dfrac{8}{m^2-2m}$

因得 $-m^2+2m=8+8m$

即 $m^2+6m+8=0$

即 $(m+2)(m+4)=0$

$\therefore\ m=-2$ 或 -4

代入(5) $x^2=\frac{-1}{-1}=1$ 和 $x^2=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ x=\pm1$ 或 $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\therefore\ y=(-2)(\pm1)=\mp2$

或 $(-4)\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)=\mp\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$\therefore$ 所求的根爲

$$\begin{cases}x=\pm1\\ y=\mp2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\\ y=\mp\frac{4}{3}\sqrt{3}\end{cases}$$

注意 這裏應當注意的,就是$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$的值,是用$m=-4$,代入(5)式計算出來的,所以用$y=mx$計算y的值的時候,一定只能用$m=-4$的值代進去,還有$\pm$和$\mp$中正負號的順序,也要弄清楚。

例二 解聯立方程式

$$\begin{cases}x^2+xy=15\cdots\cdots(1)\\ y^2+xy=10\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解 設$y=mx$代入(1) (2)式

$$x^2+mx^2=15\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$m^2x^2+mx^2=10 \cdots\cdots\cdots(4)$$

從(3)式得　$x^2(1+m)=15 \cdots\cdots\cdots(5)$

從(4)式得　$x^2m(1+m)=10 \cdots\cdots\cdots(6)$

(6)除以(5)得　$m=\frac{2}{3}$

將$y=\frac{2}{3}x$代入(1)式得　$x^2+\frac{2x^2}{3}=15$

即　$3x^2+2x^2=45$

即　$x^2=9$

$\therefore$　$x=\pm 3$

$\therefore$　$y=\pm 2$

$\therefore$所求的根為

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$　　$\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

習題　九八

解下列聯立方程式

1. $\begin{cases} y^2=x \\ xy=8 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x^2+xy=24 \\ xy+y^2=40 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x^2-3y^2=9 \\ 2x^2-xy-6y^2=4 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ 4x^2+4y^2=25 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x^2-y^2=23 \\ 2x^2-xy=12 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 7xy-8x^2=10 \\ 8y^2-9xy=18 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3+y^3=152 \\ x^2y+xy^2=120 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=2 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x^2+2y^2=29 \\ x^2-3xy=0 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} x^2+3xy=54 \\ xy+4y^2=23 \end{cases}$

179. 對稱式

如 $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3, x^2+xy+y^2, x^4+y^4 等,將式中 x 和 y 互相交換,他的式子,依然不變。這樣的式子叫做關於 x, y 的對稱式.同樣地 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, 就是關於 a, b, c, 的對稱式。所以方程式中各項文字對稱的,叫做對稱方程式。例如

$$x+y=3$$

$$x^2+xy+y^2=15$$

$$x^5+y^5=31 \qquad \text{都是對稱方程式}$$

如果兩個方程式,都是對稱的,或除了符號,就是對稱的,如 $x-y=a$, $x^3-y^3=b$ 等,那麼解聯立方程式時,可假設 $x=u+v$, $y=u-v$, 代進去解他。

例一　解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=13 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　設 $x=u+v$, $y=u-v$ 代入(1)和(2)式

從(1)式得 $u+v+u-v=5$………(3)

從(2)式得 $u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2=13$……(4)

卽　$2u^2+2v^2=13$………(4)

從(3)式得　$2u=5$

$$\therefore\ u=\frac{5}{2}$$

代入(4)式　$2\left(\frac{5}{2}\right)^2+2v^2=13$

$$4v^2=1$$

$$\therefore\ v=\pm\frac{1}{2}$$

因 $x=u+v$

$$\therefore\ x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\qquad \text{卽 } x=3 \text{ 或 } 2$$

因 $y=u-v$

$$\therefore\ y=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\qquad \text{卽 } y=2 \text{ 或 } 3$$

∴所求的根爲

$$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$$

例二　解聯立方程式

$$\begin{cases}x^4+y^4=97\cdots\cdots\cdots(1)\\x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解　設 $x=u+v$，$y=u-v$ 代入(1)和(2)式

從(1)式得 $u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4+u^4-4u^3v+$

$$6u^2v^2-4uv^3+v^4=97$$

即　$2u^4+12u^2v^2+2v^4=97\cdots\cdots\cdots(3)$

從(2)式得　$u+v+u-v=5$

即　$2u=5\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$$\therefore\ u=\frac{5}{2}$$

代入(3)式　$2\left(\frac{5}{2}\right)^4+12\left(\frac{5}{2}\right)^2v^2+2v^4=97$

即　$\frac{625}{8}+75v^2+2v^4=97$

即　$16v^4+600v^2=151$

完成平方 $16v^4+600v^2+5625=5776$

即　$(4v^2+75)^2=\pm 76$

$\therefore$　$4v^2=1$　或 -151

$\therefore$　$v^2=\frac{1}{4}$　或 $-\frac{151}{4}$

$\therefore$　$v=\pm\frac{1}{2}$　或$\pm\frac{1}{2}\sqrt{-151}$

$\therefore\ x=u+v=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$　或　$\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-151}$

$y=u-v=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}$　或　$\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-151}$

$\therefore$ 所求的根爲

$$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-151}\\y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-151}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-151} \\ y=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-151} \end{cases}$$

習題　九九

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^3-y^3=152 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12 \\ x+y=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^5-y^5=781 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^4-y^4=2401 \\ x^2+y^2=49 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3+y^3=28 \\ x+y=-2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3-y^3=m^3 \\ x-y=m \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{8}{15} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{34}{225} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \\ \frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=91 \end{cases}$

180. 應用問題

解二元二次聯立方程式應用問題,應注意下

列幾點:

1. 假設的未知數,應確定單位。

2. 所列的方程式,應合於題意。

3. 求得的根,必須覆證,因所解的根,常有幾個,且必有半數爲負。

例一 二數的兩乘積,比其和多1,他們的平方的和爲13,問二數是多少?

解 設一數爲x,他數爲y,

依題意得

$$\begin{cases} xy-(x+y)=1 \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)式×2+(2)式

$$x^2+2xy+y^2-2(x+y)=15$$

即 $(x+y)^2-2(x+y)-15=0$

即 $\left\{(x+y)-5\right\}\left\{(x+y)+3\right\}=0$

$\therefore$ $x+y=5$ 或 $x+y=-3 \cdots\cdots\cdots(3)$

代入(1)式得 $xy=6$ 或 $xy=-2 \cdots\cdots(4)$

(2)(4)聯立得

$$(x-y)^2=1 \quad 或 \quad (x-y)^2=17$$

卽　$x-y=\pm1$　或 $x-y=\pm\sqrt{17}\cdots\cdots(5)$

(3) (5) 聯立得

$$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{17}\right)\\y=\frac{1}{2}\left(-3\mp\sqrt{17}\right)\end{cases}$$

答所求的數爲2, 3; 或$\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{17}\right)$,

$\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{17}\right)$

例二　有一分數,將分子加 1 所得分數和分母減 1 所得分數的值相等,分子分母平方的和爲25,求這分數。

解　設分子爲 x, 分母爲 y, 那麼原分數爲$\frac{x}{y}$

依題意得

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{y}=\dfrac{x}{y-1}\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2=25\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

卽　$x-y=-1\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$

$x^2+y^2=25\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從(1')式得　$x=y-1\cdots\cdots(3)$

代入(2)式得　$(y-1)^2+y^2=25$

卽　$y^2-2y+1+y^2=25$

卽　$y^2-y-12=0$

$$(y-4)(y+3)=0$$

$$\therefore \quad y=4 \quad 或-3$$

代入(3)式得　$x=3$　或-4

答原分數爲$\frac{3}{4}$

例三　買布二種,用銀7元2角,計甲乙二種長短相差5尺,若每尺的價,兩種都貴2分時,相差4尺,求各種每尺的原價?

解　設甲種每尺價 x 分,乙種每尺價 y 分

依題意得

$$\begin{cases}\dfrac{720}{x}-\dfrac{720}{y}=5\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{720}{x+2}-\dfrac{720}{y+2}=4\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

去分母得　$xy=144(y-x)\cdots\cdots\cdots(3)$

$$xy+2(x+y)+4=180(y-x)\cdots\cdots(4)$$

(3)(4)相減得

$$17y=19x+2$$

即　$y=\dfrac{19x+2}{17}$

代入(3)式　$x\left(\dfrac{19x+2}{17}\right)=144\left(\dfrac{19x+2}{17}-x\right)$

即 $x(19x+2)=144(19x+2-17x)$

即 $19x^2+2x=288x+288$

即 $19x^2-286x-288=0$

解之得 $x=-\frac{18}{19}$ 或 $x=16$

故 $y=-\frac{16}{17}$ 或 $y=18$

因負數不合理，故 $x=16$ $y=18$

答甲種每尺價1角6分,乙種每尺價1角8分

例四 A車自甲地行向乙地,B車自乙地行向甲地,二車出發後,1時15分,在途中相遇。但A車比B車早1時20分達到目的地,已知兩地相距100里,求二車每時的速度。

解 設x爲A車每時所行的里數

y爲B車每時所行的里數

依題意得

$$\begin{cases} 1\frac{1}{4}(x+y)=100 \cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{100}{y}-\frac{100}{x}=1\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

從(1)式得 $y=80-x \cdots\cdots\cdots (3)$

從(2)式得 $75(x-y)=xy \cdots\cdots\cdots (4)$

從(3)代入(4)消去y $x^2+70x-6000=0$

即 $(x-50)(x+120)=0$

$\therefore \quad x=50 \qquad x=-120$

以x的值代入(3)式得 $y=30 \qquad y=200$

因x的負值不合理故 $x=50$

$y=30$

答A車每時行50里,B車每時行30里。

習題 一〇〇

1. 將9分爲二部,使各部立方的和爲189,問二部各爲多少?

2. 二數的積加二數的和爲79,二數的積減二數的和爲47,問二數各是多少?

3. 二數的相乘積,比其和多1,他們平方的和爲13,問二數是多少?

4. 二數的差爲3,他們立方的差爲279,問二數各是多少?

5. 有兩位的數,兩數字平方的差爲20,其倒位數與原數的和爲110,求這數。

6. 兩數的較爲大數的$\frac{3}{8}$,這二數平方的和爲356,求二數。

7. 用銀195元,買米若干石。若米價每石降低2

元,那麼可多買2石,問米的原價是多少?

8. 有甲乙二種綢緞,甲種每尺比乙種每尺價低4分,一人以32元買甲種,以36元買乙種,但甲種比乙種多10丈,問兩種各買多少?

9. 一矩形周圍20尺,面積24平方尺,求這矩形的長寬。

10. 某車於若干時內進行300里,倘這車每時多行5里,那麼行300里可少需2時,問該車原有的速度多少?

11. 東西兩地,相距25里,甲乙二人各從一地同時出發,經5時而相會,甲行一里所費的時間,比乙行一里所費的時間多18分鐘,求二人每時所行的里數。

12. 一汽車用某速度進行某距離,若這車每時加速5里,那麼可早到40分鐘;又若每時減速5里,那麼遲到1點鐘,求這距離的長。

13. 甲乙二工人,每日的工資不等,但工作的日數相同,甲於這幾日中勤作不輟,乙則輟工6日,故甲得工資9元6角,乙僅得工資5元4角。假如乙於這幾日中勤作不輟,甲輟6日,那麼二人所得的

工資相等。求工作的日數及二人每日的工資。

14. 某人貸出銀若干元,一年後,得本利和140元;若本銀增25元,年利率抬高4%,可多得34元。求本銀及年利率。

15. 甲乙二人經商,甲以資本金若干元,一年得本利和520元,乙以資本金600元,一年四個月得本利和若干元。但知甲乙獲利的和為360元。求甲的資本元數。

16. 某人沿河行72里,步行乘舟各占一半。順流時共需5小時,逆流時共需7小時;若水不流動,共需$5\frac{1}{2}$小時,求步行,划行及水流的速度。

17. 甲從A到B,乙從B到A,二小時後,兩人在距A 20里的地方相遇,當乙到A的時候,甲距B還有$13\frac{5}{7}$里,求AB的距離。

18. 一人上山,行至$\frac{1}{3}$的地方,減少初時速度的$\frac{1}{4}$,那麼自山麓到山頂,共需$6\frac{4}{7}$時,下山速度,比上山初時速度增$\frac{1}{4}$,那麼須$5\frac{1}{3}$時到平地,求山高及上山初時的速度。

19. 有兵二隊,不知其數,但知甲隊若撥5人於

乙隊,那麼乙隊所列的方陣恰爲甲隊所列方陣的2倍。若甲乙二隊的總人數,以甲隊去100人數除時,又適等於乙隊減去95人後的$\frac{1}{3}$,問二隊各有兵多少?

20. 慢車比快車每小時少行1里,二車同行92里,慢車比快車多行1小時,求慢車每小時的速度。

第十九章

指數定律的推廣

181. 指數定律

我們在上册中,曾經講過幾個相同因數相乘,可將重複的因數祇寫一個,另用一個數字,寫在右肩上,去表明他爲因數次數,寫在因數右上角的數,叫做指數,例如:

$a \cdot a \cdot a$ 可以寫做 a^3, 3 爲 a 的指數。

從指數意義,若以 m, n 代表正整數,那麼我們得到下面的三個定律:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

因 $a^m=a\cdot a\cdot a$ …………到m個a,

$a^n=a\cdot a\cdot a$ …………到n個a,

故 $a^m\times a^n=(a\cdot a\ a$ …到m個a) ×

(a a·a …到n個a)

$=a\cdot a\cdot a$ …到m+n個a

$=a^{m+n}$

2. $a^m\div a^n=a^{m-n}\ (m>n)$

因 $a^m=a\cdot a\cdot a$ …………到m個a,

$a^n=a\ a\cdot a$ ……… 到n個a,

故 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots\text{到}m\text{個}a}{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots\text{到}n\text{個}a}$

$=a\cdot a\cdot a$ ………到m−n個a

$=a^{m-n}$

3. $(a^m)^n=a^{mn}$

因 $(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot a^m$ ………到n個a^m

=(a·a·a ……………到m個a)

(a·a·a ……………到m個a)

……………… ………………

到n個因數的相乘積

$=a\cdot a\cdot a$ ………… 到mn個a

$=a^{mn}$

上面的三個定律,在m,n爲正整數時,才能適用,但代數學上的指數有時不能限於正整數,或是分數,或是負數,那些形式,倘照上面的普通定義,就沒有意義。代數學的目的,既在普遍,因此不能不另下定義,使上面的定律,能適用於正整數以外——分數或負數——的指數。

182. 分指數

應用指數定律,得

$$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a$$

從根數運算,得

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$$

所以 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

同理 $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=(\sqrt[3]{a})^3=a$$

所以 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

依此類推得 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

於是 $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

或 $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

因得分指數的定義如下:

一個數的指數若是分數,這分數的分子,是表示該數的乘方次數,分母是表示該數的方根次數。

注意　分數指數和方根指數,是用不同的方法,表示同一意義。在運算時,若把根數寫成分數指數,比較簡明。

例一: 求$\sqrt{9^3}$的值。

解　$\sqrt{9^3}=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\cdot\frac{3}{2}}=3^3=27$

例二: 求$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$的值。

解　$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}=2^{1+\frac{1}{4}}=2\cdot 2^{\frac{1}{4}}$

$=2\sqrt[4]{2}$

習題 一〇一

簡單下列各式:

1. $16^{\frac{1}{2}}$　2. $49^{\frac{1}{2}}$　3. $27^{\frac{1}{3}}$　4. $625^{\frac{1}{2}}$

5. $10000^{\frac{3}{4}}$　6. $2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}$　7. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$　8. $(4a^2)^{\frac{1}{2}}$

9. $\left(\frac{16a^2}{9b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 10. $\left(\frac{8a^3}{27b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

求下列各式的值;

11. $\left(16^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 12. $32^{\frac{4}{5}}$ 13. $3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ 14. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

15. $25^{\frac{5}{2}}\div 27^{\frac{2}{3}}$ 16. $5^{\frac{1}{2}}\cdot(5^2)^{\frac{1}{2}}$ 17. $m^{\frac{2}{3}}\div m^{\frac{1}{6}}$ 18. $(a^4\cdot b^2)^{\frac{1}{2}}$

19. $a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$ 20. $(x^3y^2)^{\frac{1}{2}}\div y^{\frac{1}{2}}$

用根數表示下列各數:

21. $a^{\frac{1}{4}}$ 22. $2a^{\frac{1}{5}}$ 23. $2^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}}$ 24. $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{5}{4}}$

25. $c^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 26. $a^{\frac{1}{2}}\cdot y$ 27. $a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{3}}d$ 28. $(a-b)^{\frac{1}{2}}$

29. $\dfrac{ax^{\frac{m}{n}}}{by^{\frac{p}{q}}}$ 30. $(a^n+b^n)^{\frac{1}{2}}$

用分指數表示下列各式:

31. $\sqrt[3]{a^2}$ 32. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ 33. $a^2b\sqrt{a^3b^2}$ 34. $\sqrt[3]{\dfrac{25a^2}{b^2}}$

183. 零指數

在指數定律裏,不但m, n 爲正整數,分數,負數都合理,那m,n爲零也是合理的。

從指數定律得

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$$

從除法定義得

$$a^m \div a^m = 1$$

故 $a^0 = 1$

因得零指數的定義如下:

指數爲零的任何數等於1

184. 負指數

在指數定律裏,我們已經假定負指數也是合理,負指數的定義,就是表明某數若干次自乘積除1的分數。

例如: 求 3^{-2} 的值

從指數定律,我們可以假定 $3^{-2} = 3^{1-3} = 3 \div 3^3$

但 $3 \div 3^3 = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{3^2}$

故 $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

推廣說來

$$a^m \cdot a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

兩邊各除以 a^m

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

因得負指數的定義如下:

一數負指數的值,等於該數正指

數值的倒數。

注意 利用負指數,我們可將任何分數,用整數來表他。

例如: $\frac{1}{5}$可寫做5^{-1}

$\frac{3}{7}$可寫做3×7^{-1}

習題 一〇二

簡單下列各式:

1. $9^{-\frac{1}{2}}$ 2. 4^{-2} 3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ 4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

5. $27^{-\frac{1}{3}}$ 6. $9^{-\frac{3}{2}}$ 7. 7^{0} 8. $\left(16^{\frac{2}{3}}\right)^{0}$

9. $(9a^2)^{-2}$ 10. $\left(\frac{16a^2}{9b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

用負指數表示下列各式:

11. $\sqrt[3]{a}$ 12. $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c^5}}$ 13. $\frac{1}{a^2}$ 14. $\frac{1}{5\sqrt{a}}$

15. $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ 16. $\frac{1}{\sqrt{a^2bc^3}}$

用正指數簡單下列各式:

17. $2x^{-3}$ 18. $(2a)^{-2}$ 19. $\frac{3x^2y}{\sqrt{xy}}$ 20. $\frac{1}{(1+x)^{-2}}$

21. $(-y)^{-3}$ 22. $\left(\frac{1}{a-1}\right)^{-2}$

不用負指數和0指數化簡下列各式:

23. $x^{-7}y^{-\frac{1}{3}}$ 24. $\left(\dfrac{a}{c^{-1}}\right)^0$ 25. $\dfrac{a^{-0}}{b^{-n}}$ 26. $\dfrac{c^{-2}}{c^{-0}}$

27. $\dfrac{(a+c)^{-1}}{(a-c)^{-3}}$ 28. $\dfrac{a+x}{(a+x)^{-1}}$ 29. $\dfrac{a^{2-1}c}{m^{-1}np^{-3}}$ 30. $\dfrac{ab^{-2}c^{-3}}{x^{-1}y^{-2}z}$

31. $a^{-1}+c^{-1}$ 32. $\dfrac{a^{-1}}{c^{-1}+x^{-1}}$

求下列各式的值:

33. $(-32)^{-\frac{3}{5}}$ 34. $-64^{\frac{4}{3}}$ 35. $(0.0001)^{-\frac{1}{4}}$

36. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$ 37. $36^{-\frac{3}{2}}\times 3^2$ 38. $9^{-\frac{3}{2}}\times 36^{\frac{3}{2}}$

39 $\dfrac{4^{\frac{3}{2}}\times 9^{-2}}{81^{-\frac{3}{2}}\times 16^{\frac{7}{4}}}$ 40. $8^{-\frac{7}{4}}+8^{-2}-8^{\frac{2}{3}}+8^{-\frac{2}{3}}$

185. 關於指數的計算題

例一: 求$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$的積

解 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{13}{12}}c$

例二: 求$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$的平方

解 $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}\times 2}b^{\frac{1}{2}\times 2}=a^{\frac{4}{3}}b$

例三: 求$\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}\right)\div\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{5}}\right)$的商

解　$(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}})\div(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}})=x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$

例四: $a^3b^{-3}c^4$的立方根

解　$\sqrt[3]{a^3b^{-3}c^4}=(a^3b^{-3}c^4)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{3}}b^{-\frac{3}{3}}c^{\frac{4}{3}}=ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}$

$$=\frac{ac}{b}\sqrt[3]{c}$$

例五: 求$(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})\times(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1})$的積。

解

$$\begin{array}{l}
x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}} \\
\underline{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x} \\
x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1 \\
\qquad x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}} \\
\qquad\qquad \underline{-1-x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}} \\
x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1 \qquad\qquad -x^{-\frac{4}{3}}
\end{array}$$

例六: 求$(a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}})\div$

$(a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}})$的商

解

$$
\begin{array}{r|l}
a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}} & a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \quad \big(a^{\frac{1}{6}}-b^{-\frac{1}{6}} \\
 & a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}} \\
\hline
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \\
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

習題 一〇三

簡單下列各式:

1. $x^3y^4(x^2y)^{-1}$

2. $2ab^2(a^2b^6)^{-\frac{1}{2}}$

3 $u^2v(17u^6v^9)^{-\frac{2}{3}}$

4 $(a^3b)^{\frac{1}{3}}\times(a^6b)^{\frac{2}{3}}$

5. $3(x^4y^2)^{\frac{1}{2}}\times(9x^2y^4)^{\frac{3}{2}}$

6. $2(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}})^2\times(2xy^2)^{-1}$

7. $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}\times(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{6}{5}})^{\frac{10}{3}}$

8. $(a^2d^{-\frac{1}{3}})^{-1}\times(a^5\cdot d^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$

9. $(x^{12}y^6)^{\frac{5}{6}}\div(x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{3}{4}})^{12}$

10. $\left(x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{9}{4}}\right)^{-\frac{4}{9}}\div\left(x^{\frac{1}{7}}y^{\frac{1}{8}}\right)^{14}$

11. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)\div\left(x^{\frac{1}{6}}\div y^{\frac{1}{6}}\right)$

12. $\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$

13. $\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x-2x^{\frac{1}{2}}+1\right)$

14. $\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)$

15. $\left(y^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(y^{-\frac{1}{4}}+2y^{-\frac{1}{2}}\right)$

16. $\left(x^{\frac{2}{3}}+3-4x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-3-4x^{-\frac{2}{3}}\right)$

17. $\left(x^{2}+3x^{\frac{3}{2}}+x\right)\div x^{\frac{1}{2}}$

18. $\left(x+x^{\frac{1}{2}}-3\right)\div x^{\frac{1}{2}}$

19. $\left\{\left(\frac{z-w}{g+h}\right)^{-2}\right\}^{2}\times\left\{\left(\frac{g+h}{z-w}\right)^{-2}\right\}^{2}$

20. $\left\{\left(\frac{m+n}{x-y}\right)^{-2}\right\}^{7}\times\left\{\left(\frac{x-y}{m+n}\right)^{-6}\right\}^{2}$

第二十章

根式方程式

186. 根式方程式

方程式中含有根式的,叫做根式方程式,也叫無理方程式,例如:

$$x+\sqrt{x+7}=10$$

$$\sqrt{x^2-9+x}=9$$

都是根式方程式。

187. 根式方程式的解法

(一)消去根號法

若根式方程式中,只含有一個平方根數,這很

容易化去,只要單將根數列在一邊,然後兩邊都平方起來,就可以了。

例一: 解方程式

$$\sqrt{3x+1}=4$$

解　兩邊平方　$3x+1=16$

移項　$3x=15$

故　$x=5$

驗算　設 $x=5$, $\sqrt{3\times5+1}=\sqrt{16}$ 適合原方程式。

例二: $2x-\sqrt{x^2-3x-3}=9$

解

移項　$2x-9=\sqrt{x^2-3x-3}$

兩邊平方　$4x^2-36x+81=x^2-3x-3$

卽　$x^2-11x+28=0$

卽　$(x-4)(x-7)=0$

故　$x=4$

$x=7$

驗算: 設 $x=4$, $2x-\sqrt{x^2-3x-3}=8-\sqrt{1}=7$

設 $x=7$, $2x-\sqrt{x^2-3x-3}=14-\sqrt{25}$

$=14-5=9$

故只有　$x=7$　合於原方程式

若根式方程式中,含有二個平方根數,那就不能一次便可化去.舉例如下:

例三: 解方程式

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{i})$$

解　兩邊平方 $2x-4+x+5-2\sqrt{2x-4}\sqrt{x+5}=1$ (ii)

即　$3x=2\sqrt{2x-4}\sqrt{x+5}$ ……(iii)

兩邊再平方　$9x^2=4(2x-4)(x+5)$ …(iv)

即　$x^2-24x+80=0$ ……(v)

即　$(x-20)(x-4)=0$ ……(vi)

故　$x=20$

$x=4$

驗算: 設 $x=20$　$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=\sqrt{36}-\sqrt{25}$

$=6-5=1$

設 $x=4$　$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=\sqrt{4}-\sqrt{9}$

$=2-3=-1$

故只有　$x=20$　適合原方程式

例四: 解方程式　$\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2=0$

解　原式寫做　$\sqrt{2x+8}=2+2\sqrt{x+5}$

兩邊平方　$2x+8=4+4x+20+8\sqrt{x+5}$

即　$-x-8=4\sqrt{x+5}$

兩邊再平方 $x^2+16x+64=16x+80$

即 $x^2=16$

故 $x=4$

$x=-4$

驗算: 設 $x=4$ $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2$

$=\sqrt{16}-2\sqrt{9}-2=4-6-2=-4$

設 $x=-4$, $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2=-2-2=-4$

$x=4$ $x=-4$ 都不合原方程式

所以原方程式沒有根。

從上例,得用消去根號法解根式方程式的規則如下:

1. 令含未知數根式的各項,居於方程式的一端,其餘各項,都移至他端。

2. 兩端各自平方,使消去方程式一端含未知數的根式,再化簡所得的方程式。

3. 若方程式還含未知數的根式,再依(1.)(2.)運算,直至所得方程式,不含未知數的根式,然後解這方程式。

4. 驗算所得的根,適合原方程式的用他,不適合的便棄去。

(二)代入解法

有時解根式方程式,可不必先將該方程式平方,只須細看根式以外的項,和根式以內的項,是否相同。如果不相同的,化做相同,然後用代入法去解。

例五: 解方程式

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}=4$$

解　根號外的 x^2+3x-2 和根號內的項相同,

令　$y=\sqrt{x^2+3x-2}$

那麽原式變爲　$y^2+3y-4=0$

即　$(y+4)(y-1)=0$

故　$y=-4$

$y=1$

設　$y=1$　得 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$

即　$x^2+3x-2=1$

即　$x^2+3x-3=0$

故　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

設　$y=-4$,得　$\sqrt{x^2+3x-2}=-4$,因爲正

數不能等於負數,故這式不適合原方程式,不必再解。

驗算: $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ 都適合原方程式

故原方程式的根為 $x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$, $x=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

例六: 解方程式

$$x^2-10x+31-5\sqrt{x^2-10x+25}=0$$

解 兩邊各加 -6

$$x^2-10x+25-5\sqrt{x^2-10x+25}=-6$$

令 $y=\sqrt{x^2-10x+25}$

那麼原式變為 $y^2-5y+6=0$

即 $(y-2)(y-3)=0$

故 $y=2$

$y=3$

設 $y=2$ 得 $\sqrt{x^2-10x+25}=2$

即 $x^2-10x+25=4$

即 $x^2-10x+21=0$

故 $x=3$

$x=7$

設 $y=3$ 得 $\sqrt{x^2-10x+25}=3$

即　$x^2-10x+25=9$

即　$x^2-10x+16=0$

故　$x=2$

$x=8$

驗算: $x=3,\quad 7,\quad 2,\quad 8$ 都適合原方程式

由(五)(六)二例得用代入解法,解根式方程式的規則如下:

1. 整理全式。

2. 在方程式的兩邊加同數,使根號外各項合所加數所成的式,與根式內各項相同。

3. 令根式爲 y。

4. 求得 y 根後,考查是否適用。

5. 令適用的根,等於根式,求 x 的值。

188. 增根

解根式方程式時,其所得的根,有時代入原方程式中,不能適合,例如上節(例三)中,$x=4$ 不適合於原方程式 $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$。但在 $x=4$ 驗算的時候,$\sqrt{4}$ 和 $\sqrt{9}$ 我們都取他負根,那就適合於原

方程式了。因為通常為了便利，$\sqrt{\ }$ 這個符號常表示正的有理數，所以不能用負根。那末，怎樣會遇到不適合於原方程式的 $x=4$ 的根呢？我們從末了倒起檢查上去，就可看出 $x=4$，從 (vi) 到(ii)各節，都適合的，只是不適合於(i)，所以第一步就得注意，這是表明將方程式兩邊平方，是一個不妥當的辦法。

設有方程式 $x=a$，兩邊平方得 $x^2=a^2$，這個倒回去便得 $x=\pm a$；所以平方就要生出新的根來，這新生的根 $(-a)$，不合於原方程式，所以我們知道，將方程式的兩邊平方，總可產生新的根，這個新生的根，就叫增根，也叫餘分根。

反是將一個方程式，$x^2=a^2$，兩邊開平方，得 $x=\pm a$，就是 $x-a=0$ 和 $x+a=0$，他可以倒回到 $x^2-a^2=0$，卽 $x^2=a^2$。所以將方程式的兩邊開平方，是一個妥當的方法，平方根可以是正的或負的。

不但在方程式兩邊平方的時候，可有新的根加進去，就是在一個方程式的兩邊乘以同一的代數式時，也可以生出新的根來。例如：有方程式 $x=a$，兩邊乘以 $x-b$，那麼 $x(x-b)=a(x-b)$，卽 $(x-a)(x-b)=0$，卽 $x=a$ 或 $x=b$。這 b 不合於原方程式，就是

新增的根,所以在根式方程式或分式方程式時,必須留意到新增的根,就是求得的根,必須代入原式,驗其是否適合。

習題　一〇四

解下列各方程式:

1. $x-5\sqrt{x}=14$

2. $x-\sqrt{x+11}=1$

3. $x=7\sqrt{2-x^2}$

4. $x+\sqrt{3x-14}=6$

5. $5\sqrt{1-x^2}+5x=7$

6. $a+\sqrt{a^2-x^2}=x$

7. $3x+\sqrt{x^2+7x+5}=19$

8. $\sqrt{x+7-\sqrt{(5x-2)}}=3$

9. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

10. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{5}$

11. $\sqrt{7x}-\sqrt{3x+1}=1$

12. $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-11}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}$

13. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}$

14. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$

15. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{10}{3}$

16. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$

17. $2x^2+5x+2-8\sqrt{2x^2+5x+2}=-15$

18. $x^2+3=2\sqrt{x^2-2x+2}+2x$

19. $x-9+9\sqrt{x-9}+20=0$

20. $6x^2-10x+6-5\sqrt{3x^2-5x+2}=0$

第二十一章

準二次方程式

189. 準二次方程式

一個方程式,經過整理以後,他的次數高於二次的,叫做高次方程式.關於高次方程式的解法,不屬於初等代數學的範圍.現在所述的,是可以利用二次方程式解的高次方程式.這種方程式,就叫做準二次方程式.

190. 準二次方程式的解法(一)

例一 解方程式

$$x^4-13x^2+36=0$$

解　把 x^2 看做未知數,那麼原方程式爲 x^2 的一元二次式,所以可用一元二次方程式的解法求解。

令　$y=x^2$

那麼原式變爲　$y^2-13y+36=0$

卽　$(y-4)(y-9)=0$

故　$y=4$

或　$y=9$

卽　$x^2=4$　$\therefore\ x=\pm2$

或　$x^2=9$　$\therefore\ x=\pm3$

故所求的根爲 2, -2, 3, 及 -3 四個。

例二　解方程式

$$(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12$$

解　令 $y=x^2-x$

那麼原式變爲　$y^2-8y+12=0$

卽　$(y-2)(y-6)=0$

故　$y=2$

或　$y=6$

卽　$x^2-x=2$

或　$x^2-x=6$

若 $x^2-x=2$

即得 $x^2-x-2=0$

即 $(x-2)(x+1)=0$

∴ $x=2$

或 $x=-1$

若 $x^2-x=6$

即得 $x^2-x-6=0$

即 $(x-3)(x+2)=0$

∴ $x=3$

或 $x=-2$

故所求的根爲 $-1, -2, 2, 3$。

驗算: 這四個根,都適合原方程式。

例三 解方程式

$$\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$$

解 令 $y=\frac{x^2-6}{x}$

那麼原式變爲 $y-\frac{5}{y}=4$

即 $y^2-4y-5=0$

即 $(y-5)(y+1)=0$

故 $y=5$

或 $y=-1$

若 $y=5$, 得 $\frac{x^2-6}{x}=5$,

即 $x^2-5x-6=0$

即 $(x-6)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=6$

或 $x=-1$

若 $y=-1$ 得 $\frac{x^2-6}{x}=-1$

即 $x^2+x-6=0$

即 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$

或 $x=2$

故所求的根為 2, 6, -1, -3。

驗算: 這四個根,都適合原方程式。

例四 解方程式

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

解 $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

令 $y=x^2+5x$

那麼原式變為 $(y+4)(y+6)=120$

即 $y^2+10y-96=0$

即 $(y-6)(y+16)=0$

故 $y=6$

或 $y=-16$

若 $y=6$ 得 $x^2+5x=6$

即 $x^2+5x=6$

即 $(x+6)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=1$

或 $x=-6$

若 $y=-16$ 得 $x^2+5x=-16$

即 $x^2+5x+16=0$

$\therefore$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{2}$

故所求的根爲 $1, -6, \frac{-5+\sqrt{-39}}{2}, \frac{-5-\sqrt{39}}{2}$。

驗算: 這四個根都適合原方程式。

習題 一〇五

解下列各方程式:

1. $x^4-7x^2+12=0$

2. $9x^4-32x^2-16=0$

3. $4-5x^2+x^4=0$

4. $x^2(x^2+2x)+4(x^2+x)=12-x^2$

5. $(x^2+2)^2+198=3(x^2+2)$

6. $x(x-2a)=\dfrac{8a^4}{x^2-2ax}+7a^2$

7. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$

8. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)=280$

9. $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

10. $\dfrac{6x}{2x^2+1}+\dfrac{2x^2+1}{3x}=3$

191. 準二次方程式的解法(二)

例一 解方程式

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

解 用分解因數法得

$$x^2(x-2)-(x-2)=0$$

即 $(x^2-1)(x-2)=0$

即 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$

$x=1$

$x=2$

故所求的根為 $-1,\ 1,\ 2$。

驗算：這三個根都適合原方程式。

例二 解方程式

$$(x^2-5)(x^2-4)=4x(x^2-4)$$

解 移項得

$$(x^2-5)(x^2-4)-4x(x^2-4)=0$$

分解因數得 $(x^2-4)(x^2-4x-5)=0$

即 $(x-2)(x+2)(x-5)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=2$

$x=-2$

$x=5$

$x=-1$

故所求的根為 2, -2, 5, -1。

驗算: 這四個根都適合原方程式。

例三 解方程式

$x^3-6x^2+11x-6=0$, 但已知一根為 $x=1$。

解 因 $x=1$ 時,原式為 0,故 $x-1$ 為原式的一個因數,用 $x-1$ 除原式的左邊,得

x^2-5x+6

即原式可寫為 $(x-1)(x^2-5x+6)=0$

即 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=1$

$x=2$

$$x=3$$

故方程式的根爲 1, 2, 3。

驗算: 這三個根都適合原方程式。

例四 解方程式 $x^3=1$

解 原式寫爲

$$x^3-1=0$$

分解因數得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

若 $x-1=0$

$$x=1$$

若 $x^2+x+1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

故所求的根爲 $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

驗算: 這三個根,都適合原方程式。

習題 一〇六

解下列各方程式:

1. $(x^2-4)(x^2+3)=4x(x^2-4)$
2. $3x^3+13x^2+13x+3=0$
3. $px^3-x+p-1=0$
4. $x^3-27=0$
5. $x^6-19x^3=216$

6. $x^6-1=0$

解下列各方程式,已知一根,求其餘各根:

7. $x^3-2x+1=0 \quad (x=1)$

8. $x^3-5x+4=0 \quad (x=1)$

9. $x^3-49x+120=0 \quad (x=3)$

10. $x^3+21=3x^2+7x \quad (x=3)$

192. 逆係數方程式

設 n 次方程式中,n 次與 0 次,n—1 次與 1 次,n—2 次與 2 次……的各係數,各自相等的,叫做逆係數方程式。若 n 爲奇數,或 n 爲偶數而缺中央項,且 n 次與 0 次,n—1 次與 1 次,n—2 次與 2 次……的各係數絕對值相等,符號相反,也是逆係數方程式。

例如:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+cx^2+bx+a=0$$

$$ax^{2n+1}+bx^{2n}+cx^{2n-1}+\cdots-cx^2-bx-a=0$$

$$ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+\cdots\cdots$$
$$+lx^{n+1}-lx^{n-1}\cdots-cx^2-bx-a=0$$

都是逆係數方程式。

193. 逆係數高次方程式的解法

例一 解方程式

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$

解　原式寫爲　$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$

即　$(x+1)\left\{a(x^2-x+1)+bx\right\}=0$

即　$(x+1)\left\{ax^2+(b-a)x+a\right\}=0$

故所求的根爲一次方程式　$x+1=0$ 及二次方程式 $ax^2+(b-a)x+a=0$ 的根。

例二　解方程式

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

解　用 x^2 除兩邊得

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$ ………(1)

那麼　$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

即　$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$……(2)

將(1)(2)代入原方程式得

$$a(y^2-2)+by+c=0$$

$$ay^2+by+(c-2a)=0$$

解這方程式,即得 y 的二值,代入(1)式即得所求的根。

例三 解方程式

$$ax^3+bx^2-bx-a=0$$

解 原式寫爲 $a(x^3-1)+bx(x-1)=0$

即 $(x-1)\{a(x^2+x+1)+bx\}=0$

即 $(x-1)\{ax^2+(a+b)x+a\}=0$

故所求的根,即一次方程式 $x-1=0$ 及二次方程式 $ax^2+(a+b)x+a=0$ 的根。

例四 解方程式

$$ax^4+bx^3-bx-a=0$$

解 原式寫爲 $a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$

即 $(x^2-1)\{a(x^2+1)+bx\}=0$

即 $(x^2-1)\{ax^2+bx+a\}=0$

故所求的根,即兩個二次方程式 $x^2-1=0$ 及 $ax^2+bx+a=0$ 的根,

習題 一〇七

解下列各方程式

1. $3x^3-24x^2-24x+3=0$
2. $x^4+3x^3+6x^2+3x+1=0$
3. $4x^4-2x^3+2x^2-2x+4=0$

4. $40x^4-286x^3+573x^2-286x+40=0$

5. $5x^4-5x^3-5x+5=0$

6. $12x^3+5x^2-5x-12=0$

7. $7x^4-17x^3+17x-7=0$

8. $m^2x^4+mx^3-mx-m^2=0$

9. $9x^5+5x^4-\frac{22}{9}x^3-\frac{22}{9}x^2+5x+9=0$

10. $6x^5+4x^4-6x^3+6x^2-4x-6=0$

第二十二章

虛數及雜數

194. 虛數的來源

我們已經講過的數,他們的平方,都是正數,但是在解二次方程式的時候,常常遇到平方號裏有負數,就是得到平方爲負數的數。例如:解$x^2+1=0$時,$x=\pm\sqrt{-1}$,這種平方爲負數的數,叫做虛數。

如$\sqrt{-3}$, $\sqrt{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{-a}$都是虛數。

和虛數相對的數,就是平方爲正數的數,叫做實數。

195. 虛數的單位

實數的單位爲 1, 任何實數,都可以看做是這單位的倍數。虛數的單位爲 $\sqrt{-1}$, 任何虛數,都可寫做這虛單位的實倍數。例如

$\sqrt{-3}$ 可以寫做 $\sqrt{3(-1)}=\sqrt{3}\sqrt{-1}$

$\sqrt{-a}$ 可以寫做 $\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$

我們爲便利起見,常用 i 代表虛數單數 $\sqrt{-1}$ 例如:

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i,\quad \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$

注意: $\sqrt{-1}$ 只能看做自乘時等於 -1 的數的記號,不可用解剖的觀察,而視爲根號下的 -1,

因爲 $\sqrt{-1}$ 自乘的結果爲 -1,乃出於一種規約,若應用 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 的公式,那麼 $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$ 這與 $\sqrt{-1}$ 的定義衝突,所以 $\sqrt{-1}$ 不可視爲根號下的 -1。

196. 虛數的乘方

從虛數單位定義,我們得

1. $i=\sqrt{-1}$

2. $i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$

3. $i^3=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}$

$=-1\sqrt{-1}=-i$

4. $i^4 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$

$\quad = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1$

5. $i^5 = i^4 \cdot i = i$

6. $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$

7. $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$

8. $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

....

就是虛數單位的偶次乘方是實數,奇次乘方還是虛數。

197. 虛數的加減

將虛數化做單位虛數的實倍數,那末,他們的加減,和同類獨項式加減的方法一樣。

例一 求 $\sqrt{-3}$ 同 $\sqrt{-5}$ 的和

$$\sqrt{-3}+\sqrt{-5}=3i+5i=(3+5)i=8i$$

例二 求 $\sqrt{-5}$ 減 $\sqrt{-3}$ 的差

$$\sqrt{-5}-\sqrt{-3}=5i-3i=(5-3)i=2i$$

求虛數的和或差,須先將各虛數寫做虛單位的實倍數,求各實數的和或差,再附以虛單位。

198. 虛數的乘除

將虛數化做單位虛數的實倍數,那末他們的乘除,和同類獨項式乘除的方法一樣;但所得的結果,要化爲最簡式。例如:

例一 求$\sqrt{-3}$同$\sqrt{-5}$的積

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{5}\,i=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,i^2$$
$$=\sqrt{15}\,i^2=\sqrt{15}\,(-1)=-\sqrt{15}$$

例二 求$\sqrt{-3}\div\sqrt{-6}$的商

$$\sqrt{-3}\div\sqrt{-6}=\sqrt{3}\,i\div\sqrt{6}\,i=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=$$
$$\sqrt{\frac{3}{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

求虛數的積或商,須先將各虛數寫做虛單位的實倍數,利用同類獨項式的乘除法,求他們的積或商,再化爲最簡式。

注意 兩虛數的積或商,爲一實數。

習題 一〇八

下列各式若爲虛數那麼 x 的界限,應該怎樣?

1. $\sqrt{3-x}$ 2. $\sqrt{7-2x}$

下列各數爲什麼數的平方?

3. -9 4. $-\frac{4}{9}$

計算下列各式:

5. i^{12} 6. i^{15} 7. $i^{5\times 6\times 7}$ 8. $(-1)\div i^{17}$

9. i^{57} 10. $\frac{3i}{i^3}$ 11. i^{22} 12. i^{17}

用虛單位寫下列各位數:

13. $\sqrt{-27}$ 14. $\sqrt{-20}$ 15. $\sqrt{-x^2}$

16. $3\sqrt{-a}$ 17. $a\sqrt{-16}$ 18. $\sqrt{ab}\sqrt{-a^2b^2}$

19. $\sqrt{-y^2+2y-1}$ 20. $\sqrt{-x^2-4x-4}$

化簡下列各式:

21. $\sqrt{-9}+\sqrt{-49}$ 22. $5\sqrt{3-64}-\sqrt{-144}$

23. $\sqrt{-x}+\sqrt{-y}$ 24. $\sqrt{-(a-c)^2}+\sqrt{-(a+c)_2}$

25. $a\sqrt{-a^3}-\sqrt{-a^5}$ 26. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{-2}$

27. $\sqrt{-18}\cdot\sqrt{-2}$ 28. $(\sqrt{-6})^2$

29. $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-24}$ 30. $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$

31. $-\sqrt{-8}\times(-\sqrt{-2})$ 32. $\sqrt{-24}\div\sqrt{-6}$

33. $\sqrt{-(x+y)}\cdot\sqrt{-(x-y)}$

34. $\sqrt{-(x+y)}\cdot\sqrt{-(x^2-xy+y^2)}$

35. $\sqrt{-21}\div\sqrt{7}$ 36. $\sqrt{125}\div\sqrt{5}\,i$

37. $\dfrac{\sqrt{5}}{i\sqrt{20}}$　　38. $\dfrac{(-\sqrt{5})(-\sqrt{3}i)}{-\sqrt{15}}$

39. $\sqrt{-108a^3b} \div \sqrt{-6ab^2}$

40. $\sqrt{-(a^3-b^3)} \div \sqrt{-(a^2+ab+b^2)}$

199. 雜數

包含有虛數或實數的數,叫做雜數,也叫複數。

雜數可以看做從兩個單位不同的數合成。如 $a+bi$ 是從單位爲1的實數部a和單位爲 i 的虛數部b做成的。若b爲零,就得實數a,若a爲零,就得虛數 bi。

200. 雜數定律

因爲單位不同的數,不能比較他們的大小,所以

兩個雜數若相等,他們的實數部和實數部必須相等,虛數部和虛數部必須相等。

例一　若 $a+bi=c+di$

那麼 a 必等於 c

b 必等於 d

(證明)　$a+bi=c+di$

$$a-c=(d-b)i$$

$$(a-c)^2=-(d-b)^2$$

這等式左邊爲正,右邊爲負,故兩邊若都不是零,決不能成立。

$$\therefore\quad a-c=0\qquad d-b=0$$

$$\therefore\quad a=c\qquad b=d$$

例二: 若 $a+bi=0$

那麼 a 必等於0,

b 必等於0。

201. 雜數的加減

單位不同的數,不能施以加減,所以

雜數的和或差,是他們各實數部的和或差,加各虛數部的和或差。

例一: 求 $2+3i$ 同 $5-4i$ 的和

解 $(2+3i)+(5-4i)=(2+5)+(3-4)i=7-i$

例二: 求 $16+5i$ 減 $3+2i$ 的差

解 $16+5i-(3+2i)=(16-3)+(5-2)i=13+3i$

因得雜數加減的公式如下:

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

注意 兩雜數的和或較,可以得一實數。

例三: 求 $4a-3bi$ 同 $2a+3bi$ 的和

解 $(4a-3bi)+(2a+3bi)=(4a+2a)+(-3b+3b)i$

$$=6a$$

202. 雜數的乘法

雜數的乘法,和多項式乘法的方法一樣,不過在運算之前,須先把各虛數部,寫成虛單位的實倍數。

例一: 求 $5+3\sqrt{-1}$ 同 $7-2\sqrt{-1}$ 的積。

解 $5+3\sqrt{-1}=5+3i$

$7-\sqrt{-1}=7-2i$

$$\begin{array}{r} 5+3i \\ \times)\ 7-2i \\ \hline 35+21i \\ -10i-6i^2 \\ \hline 35+11i+6 \end{array}$$

故 $(5+3\sqrt{-1})\times(7-2\sqrt{-1})=35+11i+6$

$$=41+11i$$

例二: 求 $1+i$ 的四次冪

解 因 $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

故 $(1+i)^4=\left\{(1+i)^2\right\}^2=(2i)^2=4i^2=-4$

因得雜數乘法的公式如下:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

203. 共軛雜數

兩個雜數,他們的實數部分與虛數部分,完全相同,只有虛數部的符號相異的,那麼這二個雜數,叫做共軛雜數,

兩個共軛雜數的相乘積,必為實數。

兩個共軛雜數的和,也必為實數。

例如:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

所以

$a+bi$ 為 $a-bi$ 的共軛雜數。

$a-bi$ 為 $a+bi$ 的共軛雜數。

在代數計算裏,如遇分母為雜數時,應將該分數的分子分母,同乘以分母的共軛雜數,使分母不含雜數。

204. 雜數的除法

求兩雜數的商,須先將除數和被除數同乘以除數的共軛雜數使除數變成實數,再求實數除雜數的商。

例一: 求 $(5+7i)\div(3-4i)$ 的商。

解
$$\frac{5+7i}{3-4i}=\frac{(5+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$
$$=\frac{15+41i+28i^2}{3^2-4^2i^2}$$
$$=\frac{15+41i-28}{9+16}$$
$$=\frac{-13+41i}{25}=-\frac{13}{25}+\frac{41}{25}i$$

例二: 求 $2\sqrt{-5}\div(6+i)$ 的商

解
$$\frac{2\sqrt{-5}}{6+i}=\frac{2\sqrt{5}\,i}{6+i}=\frac{2\sqrt{5}\,i(6-i)}{(6+i)(6-i)}$$
$$=\frac{12\sqrt{5}i-2\sqrt{5}i^2}{6^2-i^2}=\frac{12\sqrt{5}i+2\sqrt{5}}{36+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+12\sqrt{5}i}{37}=\frac{2\sqrt{5}}{37}+\frac{12\sqrt{5}}{37}i$$

因得雜數除法的公式如下:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

習題 一〇九

1. 設 $a-5i=4+bi$ 求 a,b

2. 設 $7a-bi=14-i$ 求 a,b

計算下列各式:

3. $(a+bi)+(3a-bi)-(5-2bi)$

4. $(2-\sqrt{-2})+(7-\sqrt{-8})+(3-\sqrt{-32})$

5. $(a-b\sqrt{-3})-(b-a\sqrt{-27})+(c-d\sqrt{-3})$

6. $(3-2i)-(1-i)-(7+2i)$

7. $5i+\sqrt{-16}i$

8. $(5-i)(3+2i)$

9. $(\sqrt{5}+\sqrt{2}i\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}i\ )$

10. $(\sqrt{3}+2\sqrt{-2})(\sqrt{3}-2\sqrt{-2})$

11. $(\sqrt{-8}-\sqrt{-2}+6)i$

12. $(5+7\sqrt{-1})^2$

13. $(1+2i\ ^3+(1-2i)^3$

14. $(-1+\sqrt{3}i)^2-(-1-\sqrt{3}i)^2$

15. $(a+bi)^2-(a-bi)^2$

16. $2\div(1-i)$

17. $\dfrac{24}{1+4i}$

18. $(1+2i)\div(3-4i)$

19. $(a+i\sqrt{1-b^2})(a-i\sqrt{1-b^2})$

20. $\dfrac{1+i}{1-2i}$

21. $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}$

22. $(3+2i)(1-i)\div(3-4i)(1+i)$

23. $(1+i^3)+(1\div i)$

24. $(a+bi)\div(a-bi)$

將下式分母化爲實數:

25. $\dfrac{1-2i}{2i}$

26. $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}\,i}$

27. $\dfrac{1-i}{1+i}$

28. $\dfrac{3\sqrt{-2}+2\sqrt{-5}}{3-\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}$

29. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}$

30. $\dfrac{5-7\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$

31. $\dfrac{1+\sqrt{-2}}{2-\sqrt{-2}}$

32. $\dfrac{4-\sqrt{-2}}{2+\sqrt{-8}}$

化簡下列各式

33. $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$

34. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}$

35. $\dfrac{a+mi}{a-mi}-\dfrac{a-mi}{a+mi}$

36. $\dfrac{(x+i)^3-(x-i)^3}{(x+i)^2-(x-i)^2}$

37. $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}-\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$

38. 設 $x=\dfrac{3+5i}{2}$求 $2x^3+2x^2-7x+72$ 的值。

39. 設 $x=\dfrac{3-5i}{2}$求 $2x^3+2x^2-7x+72$ 的值。

40. 證明 $\dfrac{3+5i}{2}$爲方程式 $2x^2-6x+17=0$ 的一根。

第二十三章

不　等　式

205. 不等式

數量不相等,就有大小的不同,而表示兩個數量大小關係的,就是不等式。

不等的記號爲$\neq$,"大於"的記號爲$>$,"小於"的記號爲$<$,如$A \neq B$, $6>4$, $3<4$等。

不等數量的基本原則有三:

1. 一數a大於他數b,那麼$a-b$恆爲正,一數a小於他數b,那麼$a-b$恆爲負。即

(一) $a-b>0$, 那麼 $a>b$

(二) $a-b<0$, 那麼 $a<b$

如兩個不等式的符號是表相同方向的,叫同向,否則,叫異向。

如 $a>b$ 和 $c>d$ 是相同, $a>b$ 和 $c<d$ 是異向。

2. 正數都比零大,負數都比零小,任何正數都大於任何負數。

3. 兩正數比較,絕對值大的較大,兩負數比較,絕對值大的反小。

206. 不等式公理

公理1 不等式兩端同加減乘或除以一正數,仍爲一不等式,不等號的向不變。

如 $10>8$ 那麼	又如 $a>b$ 那麼
$10+3>8+3$	$a+c>b+c$
$10-4>8-4$	$a-c>b-c$
$10\times5>8\times5$	$ac>bc$ (c是正數)
$10\div2>8\div2$	$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ (c是正數)

依公理 1 得不等式兩端,也和方程式一樣,可以變號移項,及以正數遍除其各項。

公理2 兩同向不等式相加,仍爲不等式,不等號的向不變。

例: $15>6$ $3>2$ 相加, 那麼 $18>8$

公理3 兩異向不等式相減,仍爲不等式,不等號與被減式同向。

例: $9>6$, $3<4$ 相減, 那麼 $6>2$

公理4 不等式兩端同乘或除以一負數,仍爲不等式。不等號與原式異向。

例: $8>3$ 用(-3)乘兩端,那麼 $-24<-9$

又 $-18<-6$ 用(-2)除兩端,那麼 $9>3$

207. 絕對不等式

不等式中的文字,無論代入何數都能成立的,就叫做絕對不等式。

例: 設$(a-b)^2>0$ 那麼 無論$a>b$,或$a<b$,均不改變。

故 $(a-b)^2>0$ 是絕對不等式

又 $(a-b)^2>0$　　即 $a^2-2ab+b^2>0$

移項　　$a^2+b^2>2ab$

由此得(一)兩實數平方的和,常大於他們積的二倍。

從 $a^2+b^2>2ab$,

兩邊各加 $2ab$ 得,　$a^2+2ab+b^2>4ab$

兩邊開平方取正數得

$$a+b>2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

由此得(二)兩實數和的一半,常大於他們積的平方根。

從　$a^2+b^2>2ab$,

同理　$b^2+c^2>2bc$,

$c^2+a^2>2ca$。

兩邊各相加,得

$$2(a^2+b^2+c^2)>2(ab+bc+ca)$$

於是　$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$

由此得(三)各數平方的和,常大於該

數中每兩個乘積的和。

208. 條件不等式

不等式中,文字的值有限制的,就叫做條件不等式。

例　$x-5>0$ 是條件不等式

因爲x的值必須大於5。就是說合$x>5$的條件。

那麼$x-5>0$才能成立

註: 這合於限制的值,叫做不等式的解。

209. 條件不等式解法

求不等式的解的方法,叫做解不等式,這和解方程式的步驟一樣。

例　解不等式 $4x+1>2x+5$

解　移項 $4x-2x>5-1$

即 $2x>4$

兩端用2除得 $x>2$

不等式兩邊的平方根,若取絕對值,仍得同向不等式。

例　解不等式 $x^2+2x+1>9$

解　兩邊開平方,取絕對值,得

$|x+1|>3$

即 $-3<x+1<3$

各邊減1，得 $-2<x<2$

習題 一一〇

1. $x>0$ 時，x表什麼數？ $x<0$ 時，x表什麼數？

2. 不論x是什麼數，試寫一式表示正數。

3. 證明不論a, b是何正數，均有 $(a+b)^2>4ab$。

4. 若a,b,c爲正數，證明 $(a+b)^2>a^2+b^2$

解下列不等式

5. $-x>-7$

6. $2x+13>4x+6$

7. $\frac{1}{15}x<\frac{7}{3}$

8. $9x-6>3x-12$

9. $21x-4<14x+17$

10. $x^2-3x+4<(x-2)(x+4)$

11. $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$

12. $\frac{3}{8}x-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$

13. $x^2>25$

14. $x^2+4x+4>49$

15. $4x^2+4x+1<16$

16. $2x^2+12x+18<8$

17. 若 a, b, c 都是正數,且 $a>b$,證明

$$\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$$

18. x 為什麼數,可使 $16-7x$ 為正數;又為什麼數時,可使 $16-7x$ 為負數?

設下列諸文字不等,且都為正數,試證明

19. $(a+b+c)^3>3(a+b)(b+c)(a+c)$

20. $(ab+cd)(ac+bd)>4abcd$

第二十四章

一元二次方程式根的性質

210. 根的判別式

從一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

我們知道這個公式裏,含有 b^2-4ac 的平方根。

現在把這平方根裏的數 b^2-4ac 加以研究如下:

若 $b^2-4ac=0$, 那麼方程式的二根相等,就是 $x=\frac{-b}{2a}$

若 $b^2-4ac\neq 0$, 那麼方程式的二根不相等,既

然b^2-4ac不等於0，那麽不是正數便是負數。

若b^2-4ac爲正數，且爲完全平方的數，那麽方程式的二根爲有理數。

若b^2-4ac爲正數，但非完全平方的數，那麽方程式的二根，含有無理數。

若b^2-4ac爲負數，那麽方程式的二根爲虛數。

從上所述，可知二次方程式的根的性質，是依b^2-4ac的值而定的，所以b^2-4ac叫做二次方程式的根的<u>判別式</u>。

設以α β，代表方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，那麽我們可用判別式決定α，β的性質，如下表：

(I.) $b^2-4ac=0$，　$\alpha\beta$是相等的實根。

(II.) $b^2-4ac>0$，$\begin{cases} b^2-4ac\text{爲完全平方} —— \alpha\beta\text{是不相等的有理實根} \\ b^2-4ac\text{非完全平方} —— \alpha\beta\text{是不相等的無理實根} \end{cases}$

(III) $b^2-4ac<0$，——α，β是不相等的虛根。

例一　判別方程式　$9x^2+17x+4=0$　根的性質

解　　$a=9$，$b=17$，$c=4$

$$b^2-4ac=17^2-4\times9\times4=289-144=145>0$$

所以原方程式有兩個不相等的實根。

例二 判別方程式 $4x^2+11x+10=0$ 根的性質

解 $a=4$, $b=11$, $c=10$。

$b^2-4ac=11^2-4\times4\times10=121-160=-39<0$。

所以原方程式有兩個不相等的虛根。

例三 判別方程式 $x^2-6x+9=0$ 根的性質

解 $a=1$, $b=-6$, $c=9$

$b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0$

所以原方程式有兩個相等的實根。

例四 方程式 $x^2+6x+m=0$ 的兩根相等，求m的值。

解 要兩根相等，必 $b^2-4ac=0$

故 $6^2-4\times1\times m=0$

即 $36-4m=0$

$\therefore\ m=9$

故 $m=9$ 時這方程式的兩根相等。

習題 一一一

用根的判別式決定下列方程式根的性質：

1. $x^2-5x+7=0$
2. $5x+25-6x^2=0$
3. $4x^2-3=0$
4. $3x^2-7x-2=0$

5. $x^2+7x+6=0$　　6. $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$

7. $x^2-4x-25=0$　　8. $x^2-16x+4=0$

9. $25x^2+9=-30x$　　10. $x-5=6x^2$

11. $(a^2+b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$

12. $(b^2-4a\ x^2+2(a+1)x-1=0$

下列各方程式(i)兩根相等(ii)兩根是實數而不相等,(iii)兩根爲虛數,那麼a的值怎樣?

13. $ax^2+4x+1=0$　　14. $3x^2+3x+a=0$

15. $x^2+ax+5=0$　　16. $ax^2+ax+2=0$

下列各方程式的根相等,求m的值:

17. $4x^2+(1-m)x+25=0$　　18. $(2+m)x^2+6x+9=0$

19. $x^2-2m(x-4)-15=0$　　20. $mx^2+40x+16=0$

21. $x^2+mx+25=0$　　22. $9x^2+(3+2m)x+49=0$

23. $(2m-1)x^2+(1+m)x+1=0$

24. $32(m+2)x^2-12(2m-1)x-38m-11=0$

25. 求k使方程式 $x^2-2(3k-1\ x+1=0$ 有等根。

26. 求m使方程式 $(12m+11)x^2-60x+12m=0$ 有等根。

27. 求方程式 $(a^2+1)x^2-(3a-2)x+2=0$ 有等根時的條件。

28. 證明方程式 $(x-a)(x-b)=c^2$ 的根常爲實數。

29. 證明方程式 $a(x^2-1)=(b-c)x$ 的根常爲實數。

30. 證明方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x-(c-b)=0$ 的根相等時，必

$$2b=a+c \quad 或 \quad 2b=3c-a$$

211. 用圖解說明根的性質

我們已經知道一元二次方程式有二個根;現在可用圖解一元二次方程式,來說明他的根的性質。例如:一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

他的函數爲 $y=ax^2+bx+c$

依照前法 x 是什麼數值,y 必同時得一對應的值。

因 $ax^2+bx+c=0$

$\therefore$ $y=0$

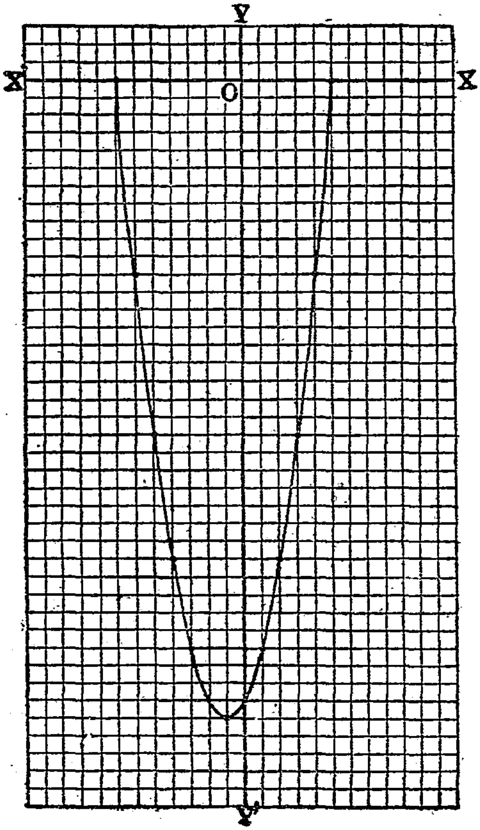
那麼 x 的數值,能使前面的函數值等於 0 時,這 x 的數值,必能適合上式,而爲這式的根。所以這根必是曲綫與橫軸的交點的橫坐標。這個數值是實數;故所求的根,也爲實數。若曲線不與橫軸相交,就是 x 不能有使函數值爲 0 的實數值,那麼這方程式的根爲虛數。

例 圖解方程式 $x^2+2x-35=0$

解 求 x, y 的對應值如下表。

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	-11	-20	-27	-33	-35	-36	-35	-33	-27	-20	-11	0

聯各點作圖



這曲線與橫軸交點的橫坐標爲5, —7,

即 $x=5$ 或 $x=-7$時, y的值等於0

故 $x=5$ $x=-7$ 爲這方程式的根。

從圖解,可看出方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性質如下:

(1) 與橫軸交二點——方程式有二個不等的實根。

(2) 與橫軸交一點——方程式有二個相等的實根。

(3) 與橫軸不相交——方程式有二個不相等的虛根。

習題 一一二

作下列各函數的圖解:

1. $y=-x^2-3x$
2. $y=x^2+1$
3. $y=2x^2-x+1$
4. $y=-2x^2+3x-1$

用圖解法求下列各二次方程式的實根:

5. $2x^2-x-1=0$
6. $x^2+x+\frac{1}{4}=0$
7. $5x^2-6x+1=0$
8. $x^2-3x=0$

用圖解法驗明下列各二次方程式沒有實根:

9. $3x^2-x+1=0$　　10. $x^2+x+1=0$

11. $3x^2+4=0$　　12. $2x^2+3x+1=0$

212. 根與係數的關係

設有二次方程式　$x^2-7x+12=0$

x^2的係數為1; x的係數為-7,常數為12,

方程式的根為　4和3

仔細一看,兩個根的和$(4+3)$的值,和x的係數恰好相等,只有正負號不同;而兩個根的積(4×3)的值,卻和常數項一樣。因知二次方程式的根和係數,是有相當的關係的。

我們試來研究一般的二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

依配方的解法,得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

設兩根為α和β

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

兩根的和 $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

兩根的積 $\alpha\beta=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac}\ )^2}{(2a)^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

倘若在原來的二次方程式中,用 x^2 的係數除兩邊,使 x^2 的係數成 1,就得下方程式、

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

那麽兩根的和仍與 x 一次項的係數而變號的相等,二根的積,仍與常數項相等。

若二次方程式用 $x^2+px+q=0$ 表示時

那麽和　　$ax^2+bx+c=0$ 比較

得　　$p=\dfrac{b}{a}$　　$q=\dfrac{c}{a}$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-p$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=q$$

用α和β項來表示p和q的值,代入原方程式,就得

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

例如　方程式　$x^2+7x+10=0$

二根的和爲　-7

二根的積爲　10

又　方程式　$7x^2-13x-9=0$

二根的和爲　$\frac{13}{7}$

二根的積爲$-\frac{9}{7}$

又　方程式　$mx^2+(m-1)x+m+n=0$

二根的和爲　$-\frac{m-1}{m}$,

二根的積爲　$\frac{m+n}{m}$,

因得一元二次方程式,根和係數的關係如下:

(1)一元二次方程式兩個根的和,等於x項係數,除以x^2項係數的商,符號相反。

(2)一元二次方程式兩個根的積,等於常數項除以x^2項係數的商,符號不變。

213. 由已知根求方程式法

設所求二次方程式的形為 $x^2+px+q=0$

那麼要決定這個方程式,必先決定 p 和 q 的值。

從前節,根和係數的關係;我們得

$p=-$(兩根的和)

$q=$兩根的積

因得由已知根求方程式的規則如下:

已知兩根要作一個一元二次方程式,只須將該兩根代入下式,再化簡便得。

x^2-(兩根的和)$x+$(兩根的積)$=0$

例一 求作一元二次方程式,使他的根為

3 及 -4

解 $p=-\left[(3+(-4)\right]=-(-1)=1$

$q=3\times(-4)=-12$

故所求的方程式為 $x^2+x-12=0$

例二 求作一元二次方程式,使他的根為

$\frac{2}{3}$ 及 $-\frac{1}{2}$

解 $p=-(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}$

$q=\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{3}$

故所求的方程式爲 $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$

即 $6x^2-x-2=0$

例三 求作 $5-\sqrt{7}$ 及 $5+\sqrt{7}$ 爲根的二次方程式

解 $p=-(5-\sqrt{7}+5+\sqrt{7})=-10$

$q=(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})=25-7=18$

故所求的方程式爲 $x^2-10x+18=0$

例四 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根爲 α,β 求 α^2,β^2 爲二根的方程式。用 a,b,c, 表之

解 所求的方程式爲

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots(1)$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)的平方爲 $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)的二倍爲 $2\alpha\beta=\frac{2c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3) (4) 相減,得 $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ 即二根的和

(2) 的平方為 $\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$ 即二根的積

故所求的方程式為

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$$

即 $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$

例五　設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根為α,β,求$\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$為二根的方程式,用a,b,c表之

解　$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

故二根的和為$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

二根的積為 $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$

故所求的方程式爲　$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0$

即　$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

習題　一一三

用下列各題的二個根,作成二次方程式(有分數,須將他消去):

1. $4,\ 5,$　　2. $a,\ b,$　　3. $\frac{1}{2},\ 2,$

4. $-\frac{1}{5},\ 2\frac{1}{2}$　　5. $a+b, a-b$　　6. $2+i, 2-i$

7. $\frac{2}{3}a\ -\frac{4}{5}a$　　8. $2\pm\sqrt{5}$　　9 $1\pm\sqrt{3}$

10. $a\pm b\sqrt{3}$　　11. $\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$　　12. $5a\pm3b\sqrt{3}$

求下列各方程式的根 α 或 β (13—20):

13 $3x^2+4x-15=0$　　$(\alpha=-3)$

14. $2x^2+7-9x=0$　　$(\alpha=1)$

15. $3x^2+5x=2$　　$(\alpha=-2)$

16. $26x-21+11x^2=0$　　$(\alpha=-3)$

17. $x^2-8.7x+17.6=0$　　$(\beta=5.5)$

18. $x^2-1.7x-4.8=0$　　$(\beta=3.2)$

19. $x^2-2.1x+0.9=0$　　$(\beta=1.5)$

20 $x^2+2bx+20=0$　的一根爲 -2 求 b

21 $x^2+7x+c=0$ 的一根較他根大2,求c

22. $x^2+4bx+8=0$ 的一根爲他根的平方,求b

23. $x^2-x-c=0$ 的一根爲6,求c

24 求方程式 $3x^2+16x-12=0$ 的根,用這二根的平方爲根,作一二次方程式。

25. 求方程式 $x^2-6x+8=0$ 的根,以此二根的比,及逆數的比爲根,作一二次方程式。

26. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根爲α, β,

求作$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}$爲二根的方程式,用a, b, c表之。

27. 設方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根爲α, β,

求作$\alpha+\beta$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$爲二根的方程式,用p, q表之。

28. 求作 $3x^2+3ax-a^2=0$ 二根的和的平方及差的平方爲根的二次方程式。

29. 方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根,爲a, β試證明:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{p}{q}=0 \qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}$$

30. 證明方程式 $x^2+4ax+a^2=0$ 二根的平方的和爲$14a^2$。

第二十五章

排列、組合 二項定理

214. 排列

設有不同的三物, a, b, c, 每次取其二種排列,那麼他的排法有好幾種,例如:

a, b, 二物,可排成　　a b, b a 兩種,

b, c, 二物,可排成　　b c, c b 兩種,

a, c, 二物,可排成　　a c, c a 兩種,

一共有六個排列方法。這樣在三物中,每次取兩物,他的排列數,可用 ${}_3P_2$ 代表。

即　${}_3P_2=3\times2=6$ 個方法。

推廣說來,若物數爲 n 個,每次取 r 個,列成各樣的次序,這樣求可成的幾個排法,就叫做排列,常用 $_nP_r$ 表示。

215. 求排列數的方法

例一　將 n 個物,每次取 2 個,求排列的數.

設 n 個物爲 a, b, c, d, e 五個,就得

ab	ba	ca	da	ea
ac	bc	cb	db	eb
ad	bd	cd	dc	ec
ae	be	ce	de	ed

各行都有四數,而行數有五,故排列的數爲 4×5,依此類推,凡文字有 n 個時,就有 n 行,各行都有 $n-1$ 個數,故排列的總數爲 $n(n-1)$。

故知自 n 個裏面,每次取 2 個,他的排列數爲

$$_nP_2=n(n-1)$$

例二　將 n 個物,每次取 3 個,求排列的數。

設 n 個物爲 a, b, c, d, e, ………現在把 a 放在首位,那麼 a 的右面兩數的排法,就是從其餘 $n-1$ 個物中,每次取 2 個的排列數,即 $_{n-1}P_2$ 即 $(n-1)(n-2)$。

abc	acb	adb	aeb
abd	acd	adc	aec
abe	ace	ade	aed

同樣將 b 放在首位時,也可以列成 $(n-1)(n-2)$ 種。c在首位,d在首位,也是這樣。即有n個 $(n-1)(n-2)$。故排列的數共爲

$$n(n-1)(n-2)$$

故知自 n 個裏面,每次取 3 個,他的排列數爲

$${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$$

例三 將 n 個物,每次取四個,求排列的數。

照前例在 n 個物, a, b, c, d, e……裏面,先將 a 列在首位的,可以列成

$$(n-1)(n-2)(n-3);$$

b 在首位,c 在首位,………都是這樣。即有 n 個 $(n-1)(n-2)(n-3)$。故排列的數共爲

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

例四 將 n 個物,每次取 5 個,6 個,7 個,…… r個,求排列的數。

依同理 ${}_nP_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$${}_nP_6=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

……………………………………

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-\overline{r-1}) $$

由上四例,得排列數的公式如下:

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)\cdots(1) $$

一若將 n 個物,每次取 n 個,那麼

$$ n-n+1=1 $$

故 $\quad {}_nP_n = n(n-1)\,(n-2)(n-3)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!\cdots(2)$

$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 叫做n 的階乘,通常用 $n!$ 或 $\underline{n|}$ 表示,例如:

$$ 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120 $$

例 求 ${}_7P_5$ 的值

解 $n=7,\quad r=5,\quad n-r+1=7-5+1=3$

$$ \therefore\quad {}_7P_5 = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520 $$

習題 一一四

1. 求 ${}_9P_3$, ${}_{18}P_5$,的值

2. 求 ${}_{24}P_{12}$, ${}_7P_7$,的值

3. 五個數字 1, 2, 3, 4, 5,將三個字組成三位數,可得幾個三位數?

4. 英文字母26個,每次取 3 個不同的字母排列,

問有幾種取法?

5. 學生六人,排爲一列,問有幾種排法?

6. 從 1, 2, 3, 4, ……9,九個數字裏,每次取 9 個,求他的排列數?

7. 設 $_nP_4 = 7\ _nP_3$,求 n 的值。

8. 證明 $_nP_r = n\ _{n-1}P_{r-1}$

9. 證明 $(n-r)\ _nP_r = n\ _{n-1}P_r$

10. 證明 $_nP_r - _{n-1}P_r = r\ _{n-1}P_{r-1}$

216. 組合

設有不同的三物, a, b, c, 不論次序,每次取 2 個組合起來,那麼可得下列三種組合法

ab, ac, bc,

組合與排列不同的地方,就是排列須照次序,組合不依次序。例如在排列裏, ab, ba 因次序不同,要算二種,在組合裏,只算一種。這樣從 n 個物中,不論次序,每次取 r 個列成一組,就叫做組合,常用 $_nC_r$ 表示。

217. 求組合數的方法

例一 將 n 個物,每次取 2 個,求組合的數。

先就 a 與 b 的組合,若依排列有 ab, ba 兩個。這

兩個就是從 $_2P_2$ 卽 $2!$,求來的。

又 a 與 c 的組合,若依排列有 ac,ca 兩個.這樣無論那一組組合都有兩個排列,故

$$_nP_2 = 2\ _nC_2 \qquad \text{或}\ _nP_2 = 2!\ _nC_2$$

$$\therefore\quad _nC_2 = \frac{_nP_2}{2!}$$

例二　將 n 個物,每次取 3 個,求組合的數。

先就 a,b 與 c 的組合,若依排列,有 abc, acb, bac, bca, cab, cba 六個.這六個是從 $_3P_3$ 卽 $3!$ 求來的.同樣,a, c 與 d 的組合, c,d 與 b 的組合,都有六個卽 $3!$ 的排列,故

$$_nP_3 = 3!\ _nC_3$$

$$\therefore\quad _nC_3 = \frac{_nP_3}{3!}$$

依同理

$$_nC_4 = \frac{_nP_4}{4!}$$

$$_nC_5 = \frac{_nP_5}{5!}$$

$$_nC_6 = \frac{_nP_6}{6!}$$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

卽自 n 個物裏,每次取 r 個的組合數,等於用 $r!$ 除他的排列數。

因 $$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

故得組合數的公式如下:

$$_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$\times\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

故 $$_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r!)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $$_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

故 $$_nC_r={}_nC_{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

例一 求 $_7C_3$ 的值

解 $n=7,\ r=3,\ n-r=7-3=4$

$$\therefore\quad {}_7C_3=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3\cdot2\cdot1\cdot4!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$$

例二 求 $_{19}C_{17}$ 的值

解 $$_{19}C_{17}=\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{19\cdot18}{2\cdot1}=171$$

或 $$_{19}C_{17}={}_{19}C_{19-17}={}_{19}C_2=\frac{19!}{2!(19-2)!}$$

$$=\frac{19!}{2!17!}=\frac{19\cdot18}{2\cdot1}171$$

習題　一一五

1. 求 ${}_{16}C_4$，${}_{16}C_2$ 的值

2. 求 ${}_{20}C_{17}$，${}_{90}C_{88}$ 的值

3. 設 ${}_nC_4=2\,{}_nC_3$，求 n 的值

4. 設 ${}_{2n}C_3={}_nC_2\times12$，求 n 的值

5. 設 ${}_nC_{10}={}_nC_{11}$，求 ${}_nC_2$ 的值

6. 同學會會員60人，舉出幹事8人，問選法有幾種?

7. 運動員30人，欲選出兩組運動員，每組11人，問選法有幾種?

8. 某船乘客有本國人37人，外國人20人，現在要從本國人中選出5人，外國人中選出4人，可得幾種組合?

9. 證明 $r\,{}_nC_r=n\,{}_{n-1}C_{r-1}$

10. 證明 ${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$

218. 二項定理

從 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

我們知道第一式的右邊，是 a+b 平方的展開式，第二式的右邊是 a+b 立方的展開式，但這二數

和的平方或立方的展開式,我們都要實行乘算,才能得到,假如要求二數和的 n 次方的展開式,(n為正整數)仍用乘法來求,那就非常麻煩了,因此我們常把二數和的 n 次方的展開式,用很簡便的公式來求,這公式就叫二項式定理。

我們實行二項式乘算常得下列各式:

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+(x_1+x_2)+x_1x_2$$

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3$$

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)=1+(x_1+x_2+x_3+x_4)+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)+x_1x_2x_3x_4$$

由此可知

1. 連乘積的第一項爲1。

2. 第二項爲 x_1, x_2,……等每次取一個字的和。

3. 第三項爲 x_1, x_2,……等每次取二個字乘積的和。

4. 末項是 x_1, x_2,……等的乘積。

設有n個字$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_{n-1}, x_n$用$\Sigma$表同類各項的記法,那麼

$$\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n,$$

$$\Sigma x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots\cdots + x_2 x_3 + \cdots\cdots + x_{n-1} x_n,$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots\cdots + x_1 x_2 x_n + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

便得 $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots\cdots(1+x_n) = 1 + \Sigma x_1 + \Sigma x_1 x_2 + \Sigma x_1 x_2 x_3 + \cdots\cdots + x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n$

因 Σx_1的項數,等於n個字中每次取1個的組合數。

$\Sigma x_1 x_2$的項數等於n個字中,每次取2個的組合數。

仿此得$\Sigma x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_r$的項數,等於n個字中每次取r個的組合數,餘類推。

故在 $x = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots\cdots = x_{n-1} = x_n$ 時

$$\Sigma x_1 = x + x + \cdots\cdots = {}_nC_1 x.$$

$$\Sigma x_1 x_2 = x^2 + x^2 + \cdots = {}_nC_2 x^2$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = x^3 + x^3 + \cdots\cdots = {}_nC_3 x^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n = x^n$$

故得二項定理的公式如下:

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+x^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$
$$+\cdots\cdots+nx^{n-1}+x^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若$x=\dfrac{b}{a}$,那麼公式(1)可寫爲:

$$(1+\frac{b}{a})^n=1+{}_nC_1(\frac{b}{a})+{}_nC_2(\frac{b}{a})^2+{}_nC_3(\frac{b}{a})^3$$
$$+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(\frac{b}{a})^{n-1}+(\frac{b}{a})^n$$

兩邊各乘以a^n,卽得

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+{}_nC_3$$
$$a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+b^n\cdots\cdots\cdots(3)$$

或$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+nab^{n-1}+b^n\cdots(4)$$

上式內 a 的指數依次是 $n,n-1,n-2,\cdots\cdots2,1,0$。

b 的指數依次是,$0,1,2\cdots\cdots\cdots n-2,n-1,n$,

各係數依次是$1,{}_nC_1,{}_nC_2\cdots\cdots{}_nC_{n-2},{}_nC_{n-1}$

因　${}_nC_1={}_nC_{n-1}$,

${}_nC_2={}_nC_{n-2}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故二項式定理內的係數,從左看到右,及從右看到左是一樣的。

例一 展開$(1+x)^5$

解 $(1+x)^5=1+5x+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^3+5x^4+x^5$

$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$

例二 展開$(a+b)^7$

解 $(a+b)^7=a^7+7a^6b+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}a^5b^2+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}a^4b^3+$

$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^3b^4+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^2b^5+7ab^6+b^7$

$=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5$

$+7ab^6+b^7$

習題 一一六

展開下列各式

1. $(1+x)^7$
2. $(1+a^2)^4$
3. $(x-\frac{1}{x})^n$
4. $(1-xy)^6$
5. $(1+a^2bc^3)^4$
6. $(a^2+b^2)^5$
7. $(a+b)^5$
8. $(3x-2y)^7$
9. $(a^2-bc)^5$
10. $(9999)^7$
11. $(1001)^5$
12. $(a+\sqrt{x})^6+(a-\sqrt{x})^6$

第二十六章

對　數

219. 對數的定義

我們從

$$3^2=9$$

的式子中,可以得到三種問題:

1. 3的平方等於什麼數?
2. 什麼數的平方等於9?
3. 3的幾方等於9?

上列三種問題,1.就是乘方的算法,2.就是開方的算法,3.這就是現在要講的對數問題了。

什麽是對數呢?對數就是把指數式改變一種記法,如

指數式	對數式
$3^2=9$	$\log_3 9=2$
$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$\log_3\frac{1}{9}=-2$
$8^{\frac{1}{3}}=2$	$\log_8 2=\frac{1}{3}$
········	············
$a^x=N$	$\log_a N=x$

註　這時 $a\neq0$, $a\neq1$, $a\nless0$, $n>0$, 否則就沒有意義了。

對數和指數不同的地方,就是把指數 x 叫做 N 以 a 爲底時的對數。這時 a 叫做底, N 叫做眞數。

所以對數的定義是:

正數 N 以 a 爲底的對數,就是 a 的某次冪,等於 N 時的次數。

習題 一一七

1. 以 3 爲底,說出 9, 27, 81, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{243}$, 的對數。

2. 以10爲底,說出1000, 100, 10, 0.1, 0.01, 0.001,的對數。

3. 化下列各式爲指數式

$\log_3 81=4$　　$\log_{10}3=0.4771$

$\log_a N=y$　　$\log_b b=1$

4. 化下列各式爲對數式

$7^3=343,$　　$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$8^0=1$　　$100^{\frac{1}{2}}=10$

$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$　　$10^{.3010}=2$

5. 求下列各對數的值

$\log_2 64$　$\log_3 81$　$\log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$　$\log_4 8$

$\log_3\frac{1}{3}$　$\log_{\frac{1}{3}}2$

6. 以4爲底的對數是 $1, 2, 3, 0, -1, -2, \frac{1}{2}$,求這些對數的眞數。

7. 證 $\log_{10}10=3$ $\log_{10}100=2$ $\log_{10}1000=1$

8. 不論以什麼數爲底,1的對數爲定數,何故?又底的對數是什麼數?何故?

220. 對數的性質

一.積的對數,等於牠的各因數的對數相加。

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

設 $\log_a m = x$, $\log_a n = y$, 就是 $m = a^x$ $n = a^y$。

$$\therefore \quad mn = a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \quad \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$$

同理 $\log_a mnp \cdots\cdots = \log_a m + \log_a n + \log_a p \cdots\cdots$

二. 商的對數,等於被除數的對數減除數的對數。

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

設 $\log_a m = x$, $\log_a n = y$, 就是 $m = a^x$, $n = a^y$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \quad \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$$

三. 某數 P 次方的對數,等於牠的對數的 P 倍。

$$\log_a N^p = p \log_a N$$

設 $\log_a n = x$ 就是 $N = a^x$

$$\therefore \quad N^p = (a^x)^p = a^{px}$$

$$\therefore \quad \log_a N^p = px = p\log_a N$$

四. 某數 r 次根的對數,等於牠的對數

的 $\frac{1}{r}$ 倍

$$\log_a \sqrt[r]{N}=\frac{1}{r}\log_a n$$

設　$\log_a N=x$　　就是 $N=a^x$

$$\therefore\quad \sqrt[r]{N}=\overline{N}^{\frac{1}{r}}=a^{\frac{x}{r}}$$

$$\therefore\quad \log_a\sqrt[r]{N}=\frac{x}{r}=\frac{1}{r}\log_a N$$

習題　一一八

1. 已知 $\log_{10}2=0.3010$　　$\log_{10}3=0.4771$　求 $\log_{10}6$
2. 由上題求 $\log_{10}24+\log_{10}36+\log_{10}10-\log_{10}72$ 的值。
3. $\log_{10}8$ 等於 $\log_{10}2\cdot\log_{10}4$ 嗎?何故?
4. $\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}$ 等於 $\frac{5}{2}$ 嗎?何故?
5. $\frac{\log_{10}8}{\log_{10}3}$ 等於 $\log_{10}\left(\frac{8}{3}\right)$ 嗎?何故?

221. 常用對數

用10為底的對數,叫做常用對數。本書以後所講的對數,都指常用對數,底10可以省去不寫。例如 $\log_{10}100000=5$ 可寫做 $\log 100000=5$

....　　　　..................

$10^4=10,000$　　　　$\log 10,000=4$

$10^3 = 1{,}000$	$\log 1{,}000 = 3$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\log 0.001 = -3$
…………………	…………………

我們從上列的表中,可以看到常用對數,是:

1. 比 1 大的數,牠們的對數是正數,小數的對數是負數。

2. 數大的對數也大,數小的對數也小。

所以我們可以想到:在 1 與 10 間的數,牠們的對數一定比 0 大,比 1 小,這就是小數。在 10 與100間的數,牠們的對數一定比 1 大,比 2 小,這就是等於 1 加上小數,餘可類推。

222. 定位部

對數的整數部分叫做定位部。或叫指標。

假使我們已經知道 $\log 725 = 2.8603$, 那麼

$$\log 72500 = \log(725 \times 10^2)$$

$$=\log 725+\log 10^2=2.8603+2=4.8603$$

同理　$\log 7250=\log(725\times 10)=2.8603+1=3.8603$

$$\log 72.5=\log\left(725\times\frac{1}{10}\right)=\log(725\times 10^{-1})$$

$$=2.8603-1=1.8603$$

$$\log 7.25=\log\left(725\times\frac{1}{100}\right)=\log(725\times 10^{-2})$$

$$=2.8603-2=0.8603$$

$$\log 0.725=\log\left(725\times\frac{1}{1000}\right)=\log(725\times 10^{-3})$$

$$=2.8603-3=\overline{1}.8603=9.8603-10$$

$$\log 0.0725=\log\left(725\times\frac{1}{10000}\right)=\log(725\times 10^{-4})$$

$$=2.8603-4=\overline{2}.8603=8.8603-10$$

注意：$\overline{1}.8603$，就是$0.8603-1$的意思，倘是寫作-1.8603，後面的小數也變爲負了，所以負號記在整數的上面，來表示區別。爲計算便利起見，這個(-1)總用$9-10$來代替，同樣(-2)用$8-10$來代替，餘類推。

從上面可以知道**數目相同的數，不管小數點在什麼地方，牠們的對數的小數部分總是一樣。**

(一)　倘是一數大於1，牠的對數

的定位部爲正或零,他的值較這位數的整數位數少 1。

(二) 倘是一數小於 1,牠的對數的定位部爲負,他的絕對值較這個數小數點後 0 的個數多 1。

習題 一一九

求下列各數的對數的定位部:

1. 6.034
2. 32.503
3. 6442
4. 387.2
5. 201003
6. 0.03
7. 0.00303
8. 0.1001
9. 0.0009001
10. 0.000567

223. 定值部

對數中小數部分,叫做定值部,或叫假數。定值部須從對數表中去尋出來。

224. 對數表的用法

對數表附在數值三角後的表中,表的正中四位小數是對數的定值部,左邊和頂上橫行爲眞數。

現在讓我們舉例來說明用法:

(一)知真數找對數

(1.) $\log 3.78=?$

在對數表的第3頁(附表第9頁)左行下尋到3.7,再平行向右橫看對準頂上8字下找出5775。

$\therefore\ \log 3.78=0.5775$

(2.) $\log 3.784=?$

上法先找出 $\log 3.78=0.5775$, 因爲眞數3.784的末位爲4,就在附表第四行下對準左邊3.7找到一個5字;把牠加在對數0.5775的末位。

$\therefore\ \log 3.784=0.5775+0.0005=0.5780$

(3) $\log 3.786=?$

眞數末位爲6,但附表上到5爲止,但知6比10少4,就在附表上第4行下找到個5字,於是不從 $\log 3.78=0.5775$ 的末位加;却從 $\log 3.79=0.5786$ 的末位減去。

$\therefore\ \log 3.786=0.5786-0.0005=0.5781$

(4.) $\log 1.684=?$

1.684是在1—2間的數,只要在對數表的前兩頁上去找;並用不着附表的。

$\therefore\ \log 1.684=0.2263$

(5.) $\log 178.6=?$

因爲178.6的整數位爲3,故定位部爲+2,從對數表找到$\log 1.786=0.2519$

$\therefore\ \log 178.6=2.2519$

(6.) $\log 0.000378=?$

因爲0.000378的小數點後有3個0,故知定位部爲−4,從表找得

$\log 0.000378=\overline{4}.5775$

(二)知對數找真數

(1.) 知$\log x=0.2788$ 求x

在對數表中本部內依次尋覓,見有0.2788左邊對準眞數1.9,上面對準0,

$\therefore\ \log 1.90=0.2788 \qquad \therefore\ x=1.9$

(2.) 知$\log x=0.5780$ 求x

照上例方法,尋不見0.5780,但見0.5775和0.5780,最相近,末位相差爲5,但同橫行中的附表中,恰有5字,可以加到0.5775裏,湊成0.5780,這5字是在附表的第4行,可見眞數爲3.78+0.004

$\therefore\ \log 3.784=0.5775+0.0005=0.5780$

$\therefore \quad x=3.784$

(3.) 知 $\log x=0.5781$，求x

照上例找到 $\log 3.79=0.5786$，但稍嫌大，相差不過末位的5，並在同橫行附表裏找到5字在第4行下，可見眞數爲 $3.79-0.004$

$$\therefore \log 3.786=0.5786-0.0005=0.5781$$

$\therefore \quad x=3.786$

(4.) 知 $\log x=3.5730$　求x

照上法先找到 $\log 3.741=0.5730$，因爲定位部爲 $+3$，所以3.741應爲3741

即　$\log 3741=3.5730$

$\therefore \quad x=3741$

注意：附表中的值，是按照對數差和眞數差成比例的道理造出的，所以無附表時，也不難自己求出，例如求234.7的對數時，

$$\begin{array}{r} \log 235=2.3711 \\ \log 234=2.3692 \\ \hline \text{表差}=0.0019 \end{array}$$

$$1 : 0.7=0.0019 : x$$

$$x=0.0019\times 0.7=0.00133$$

$\therefore \log 234.7 = 2.3692 + 0.0013 = 2.3705$

習題 一二〇

求下列各數的對數:

1. 345　　2. 4.87　　3. 520

4. 0.0356　　5. 80.03　　6. 9.86

7. 87500　　8. 6543　　9. 0.0435

10. 0.00004083

求下列對數的眞數:

11. 0.8129　　12. 1.9058　　13. 8.7649—10

14. 8.4352　　15. 9.8476　　16. $\overline{3}.5429$

17. 4.4783—10　　18. 5.8242　　19. 6.1845—10

20. 8.3450—10

225. 用對數計算

例一: 求 67.3×0.00425 的值

解　$\log(67.3 \times 0.00425) = \log 67.3 + \log 0.00425$

$= 1.8280 + \overline{3}.6284 = 1.8280 + (7.6284 - 10)$

$= 9.4564 - 10 = \overline{1}.4564 \doteq \log 0.286$

$\therefore \ 67.3 \times 0.00425 = 0.286$

例二: 求 $0.08162 \div 0.259$ 的值

解 $\log(0.08162 \div 0.259) = \log 0.08162 - \log 0.259$

$= \overline{2}.9118 - \overline{1}.4133$

$= \overline{1}.4985 = \log 0.3151$

$\therefore\quad 0.08162 \div 0.259 = 0.3151$

注意: 除法應用對數相減,但減法不便於計算,於是把減數改爲餘對數就可用加法去計算了。什麼是餘對數呢?餘對數就是某數的倒數的對數,用 Colog 來表示.

$$\mathrm{Colog}N = \log\frac{1}{N} = \log 1 - \log N$$

$$= 0 - \log N = 10 - \log N - 10$$

例如 $\log 712.4 = 2.8527$ 於是

$$\mathrm{Colog}\ 712.4 = 10 - 2.8527 - 10 = 7.1473 - 10$$

例三: 求 $\dfrac{121.6 \times 9.025}{3662}$ 的值

解 令 x 代所求的值

$$\log x = \log 121.6 + \log 9.025 + \mathrm{Colog} 3662$$

$$= 2.0849 + 0.9554 + \overline{4}.4363$$

$$= \overline{1}.4766 = \log 0.2996$$

$$\therefore\quad x = 0.2996$$

例四: 求 $(0.0839)^3$ 的值

解 $\log(0.0839)^3 = 3\log 0.0839$

$$=3\times(8.9238-10)=26.7714-30$$

$$=6.7714-10=\overline{4}.7714=\log 0.0005907$$

$$\therefore\quad (0.0839)^3=0.0005907$$

例五: 求$\sqrt[3]{0.03824}$的值

解 $\log\sqrt[3]{0.03824}=\frac{1}{3}\log 0.03824$

$$=\frac{1}{3}(8.5826-10)=\frac{1}{3}(28.5826-30)$$

$$=9.5275-10=\overline{1}.5275=\log 0.3369$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{0.03814}=0.3369$$

習題 一二一

用對數計算下列各值:

1. 7931×0.05864
2. 57208×0.000897
3. $9.126\div 635.2$
4. $853.7\div 0.006805$
5. $(73.85)^4$
6. $(0.08954)^3$
7. $\sqrt{1839}$
8. $\sqrt[5]{2.006}$

9. $\dfrac{731\times4.386}{14.82\times1.742}$

10. $\dfrac{1.358}{0.03248\times97.06}$

11. $\dfrac{34.7^2\times\sqrt[3]{10.95}}{8.92^3}$

12. $\dfrac{0.0781^{\frac{1}{2}}\times489^{\frac{2}{3}}}{5005^{\frac{3}{4}}}$

13. $\dfrac{1}{273}\sqrt{\dfrac{886\times26.5}{5300}}$

14. $\sqrt[3]{\dfrac{54.3\times0.0784}{93.72^2}}$。

226. 複利計算

單利計算很容易由算術方法解決,複利計算頗繁。現在以p代本金,r代每期的利率,n代期數,A代本利和,於是本利和的公式為

$$A=P(1+r)^n$$

所以照上式計算時,利用對數法就可簡便得多了。

例一 本金250元,年利率8%,半年為期,求3年的本利和。

解 $A=250\times(1+0.04)^6$

$$\log A=\log250+6\log(1.04)=2.3979+0.1020$$

$$=2.4999=\log 316.2$$

$$\therefore \quad A=316.2$$

答本利和爲316.2元

例二 本金100元,年利率7厘,按年計複利息,問幾年後本利和大過原本一倍?

解 $A=P(1+r)^n$

$$200=100\left(1+\frac{7}{100}\right)^n$$

即 $(1.07)^n=2$

$$n\log 1.07=\log 2$$

$$\therefore \quad n=\frac{\log 2}{\log 1.07}=\frac{0.3010}{0.0294}$$

$$\log n=\log 0.3010+\mathrm{Colog}\,0.0294=\overline{1}.4786+1.5317$$

$$=9.4786-10+1.5317=1.0103=\log 10.24$$

$$\therefore \quad n=10.24$$

答約10年後

習題 一二二

1. 本金200元,年利6厘,每一年爲一期,求第12年終了時的本利和。

2. 本金500元,存銀行年利9厘,每一年爲一期,求第8年終了時的本利和。

3. 某人存款銀行,年利 8 厘,每一年爲一期,15 年後得本利和900元,求本金。

4. 年利 4 厘的複利,幾年後本利恰好相等。

5. 本金50元,年利 7 厘,按年計複利,問幾年後得本利和175元。

6. 以400元存入銀行,按年計複利,5年後得本利和550元,求年利率。

7. 本金650元,年利4厘,按4個月爲一期,問4年後本利和爲幾元?

8. 解下列方程式:

1. $10^x=6^{20}$ 2. $4^x=2^{x+3}$

3. $15^{x-1}=296$ 4. $2^x+3^y=17$

$2^{x+2}-3^{y+1}=5$

第二十七章

級　數

227. 級數的意義

一羣數按照一定的規則排列,就是每相鄰前後兩數間,都有一定的關係,好像階級一樣,這樣的一羣數,叫做級數。級數的各數,叫做項從左邊起爲第一項,第二項,第三項等等,例如:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 …. …………………

這一羣數,是按照每數比他前一數大 1 排列的,他們便成爲一個級數,1 爲級數第一項,2 爲第二項 3 爲第三項餘類推。

又如:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\cdots\cdots\cdots$$

這一羣數,是按照每數比他前一數大 2 倍排列的,他們也成為一個級數,1 為級數的第一項,2 為第二項,4 為第三項,餘類推。

228. 等差級數

以一定的差增減的一羣數,叫做等差級數。換句話說,就是取級數的任一項減去其前一項,若他們的差是相等的,這就是等差級數。等差級數,又叫算術級數。這相同的差,叫做公差。公差是正的,這級數便叫昇級數,公差是負的,這級數便叫降級數。

例　$1,\ 4,\ 7,\ 10\cdots\cdots$ 公差為 3,是昇級數

$7,\ 3,-1,-5\cdots\cdots$ 公差為 -4,是降級數。

229. 等差級數的末項

假使一個等差級數的第一項為 a,公差為 d,那麼這個級數,可以寫做

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d\cdots\cdots\cdots$$

因　第一項 $=a=a+(1-1)d$

第二項 $=a+d=a\ \ (2-1)d$

第三項 $=a+2d=a+(3-1)d$

第四項$=a+3d=a+(4-1)d$

………………………………

所以第 n 項 $=a+(n-1)d$

由是可知 **等差級數順次的項,就是他的前項與公差的和。公差 d 的係數,常比項數少 1。**

設用 a 表首項,L 表末項,n 表項數,我們得公式:

$$L=a+(n-1)d$$

例一 求級數 5, 9, 13…………的第十三項

解 與公式比較 得 $a=5$, $n=13$, $d=4$.

$\therefore L=5+(13-1)\times4=5+12\times4=53$

例二 已知等差級數的第一項為 3,項數為 7,末項為 33,求這級數。

解 與公式比較 得 $a=3$; $n=7$, $L=33$,

$33=3+(7-1)d$

$33=3+6d$

$30=6d$

$d=5$

故公差為 5,所求的級數為3,8,13, 18, 23, 28, 33.

230. 等差級數的總和

設等差級數的首項爲 a,末項爲 l,公差爲 d,項數爲 n,級數的總和爲 s,那麼

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots\cdots+(L-d)+L\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{或}S=L+(L-d)+(L-2d)+(L-3d)+\cdots\cdots+(a+d)+a\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$1,2.\text{相加},2=(a+L)+(a+L)+(a+L)+(a+L)+\cdots\cdots+(a+L)(a+L)$$

即 $2s=n(a+L)$

故得公式

$$S=\frac{n(a+L)}{2}$$

因 $L=a+(n-1)d$

故又得公式

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

例 求級數 3, 6, 9, 12 15……………十項的和

解 $a=3 \quad d=3 \quad n=10$

$$L=3+(10-1)\times3=3+27=30$$

$$\therefore S=\frac{10}{2}(3+30)=\frac{330}{2}=165$$

331. 等差中項

若三數成等差級數,那麽中間的數,叫做餘兩

數的等差中項。

設有二數 a, b. 他們的等差中項為 A, 那麼

$$A-a=b-A$$

$$2A=a+b$$

$$\therefore A=\frac{a+b}{2}$$

卽兩數的等差中項,爲這兩數和的一半。

習題　一二三

1. 求級數 3, 6, 9……中的第廿五項。
2. 求級數 50, 49, 48……中的第十三項。
3. 求級數 $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$ …… 中的第十五項,
4. 求級數 $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$ …中的第十九項,
5. 等差級數的第一項為 10,第六項為 5,求第十一項。
6. 等差級數的第三項為 20,第十三為100,求第二十項。
7. 問 43 為級數 5, 7, 9, 11……中的第幾項。
8. 問 18 為級數 $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$……中的第幾項。

9. 問什麼數爲20和32間的等差中項,

10. 求$a+b$和$a-b$間的等差中項。

11. 求a^2+ab-b^2和a^2-ab+b^2間的等差中項。

12. 試於-4與17間插入四個等差中項。

13. 求級數$1+2+3+\cdots\cdots+n$的和。

14. 求級數$a+4a+7a+\cdots\cdots+n$的和。

15 求等差級數$\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$……的十六項的和。

16. 求首項$\frac{3}{2}$,第七項3的等差級數的第十項到第二十項的和。

17. 等差級數12, 10……幾項的和爲36?

18. 求級數100, 96, 92……的十項的和。

19. 等差級數15,11,7……幾項的和爲35

20. 等差級數二十項的和爲420,首項爲2,求公差。

21 求100與200間奇數的和。

22. 求200與400間3的倍數的和。

23. 求200與400間7的倍數的和。

24. 物體下墜第一秒16.1英尺,以後每秒所墜較前一秒多32.2英尺,問歷時19秒共墜多少英尺?

25. 甲乙二數的等差中項爲13,甲數的二倍和乙數的三倍的等差中項爲$33\frac{1}{2}$,求這二數。

26. 三數成一等差級數,其和爲27,第一第二兩數的和,等於第二第三兩數的$\frac{4}{5}$,求這三數。

27. 鐘的報時,自一下至十二下.問一晝夜間共鳴多少下?

28. 某天文台的鐘,報時自一下至二十四下,問一晝夜間共鳴多少?

29. 在一直綫上,每隔 5 丈,置一個球,共置 8 個.現在從離第一球10丈的地方放一個籠,從此發足,把各個球逐一取來,放入籠中.問共走多少距離?

30 某人把遺產4500元,分給幾個兒子,分配時依年齡的順序各差150元。長子的所得爲幼子所得的 2 倍;問這人的兒子有多少人?

332. 等比級數

以一定的比增減的一羣數,叫做等比級數。換句話說,就是級數的任一項與其前一項的比是固定的,這就是等比級數。等比級數又叫幾何級數這固定的比,叫做公比,公比爲大於 1 的正數的,這級數便叫昇級數,公比爲小於 1 的正數的,這級數便叫降級數。公比爲負數的,那麽級數中各項,正負相間。

例　2, 4, 8, 16……公比爲 2 是昇級數。

$10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}$……公比爲 $\frac{1}{2}$ 是降級數。

$27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}$……公比爲 $-\frac{1}{3}$, 各項正負相間。

233. 等比級數的末項

假使一個等比級數的第一項爲 a, 公比爲 r, 那麼這個級數可以寫做

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\cdots\cdots$$

因　第一項 $= a = ar^0 = ar^{1-1}$

第二項 $= ar = ar^{2-1}$

第三項 $= ar^2 = ar^{3-1}$

第四項 $= ar^3 = ar^{4-1}$

……………………………

所以　第n項 $= ar^{n-1}$

由是可知 **等比級數順次的項,就是他的前項與公比的積,公比 r 的指數,常比項數少1。**

設用 a 表首項 L 表末項, n 表項數,我們得公式;

$$L=AR^{n-1}$$

例一　求級數，2，6，18……的第七項

解　與公式比較,得 $a=2$, $r=3$ $n=7$

$$\therefore L=2\times3^{7-1}=2\times3^6=2\times729=1458$$

例二　等比級數的第五項爲48,第七項爲 192,求這級數。

解　第五項爲 ar^4,

第七項爲 ar^6

故　$ar^4=48$ ………… (1)

$ar^6=192$ ………(2)

以(1)除(2 得　$r^2=4$

$$\therefore \quad r=\pm2$$

$$\therefore \quad a=\frac{48}{r^4}=\frac{48}{16}=3$$

故所求的級數爲 3, ±6, 12, ±24 ……………

234. 等比級數的總和

設等比級數的首項爲 a,末項爲 L,公比爲 r,項數爲 n,級數的總和爲 s,那麼

$$s=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

各項乘以 r

$$rs=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \cdots\cdots(2)$$

由(2)減(1)

$$rs-s=ar^n-a$$

即 $(r-1)s=a(r^n-1)$

故得公式 $S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$

因 $L=ar^{n-1}$

故又得公式

$$S=\frac{Lr-a}{r-1}=\frac{a-Lr}{1-r}$$

例 求級數 3, 6, 12 ……………八項的和

解 $a=3,\quad r=2,\quad n=8$

$$L=3\times2^7=3\times128=384$$

$$\therefore S=\frac{384\times2-3}{2-1}=768-3=765$$

235. 等比中項

若三個數成等比級數,那麼中間的數,叫做餘兩數的等比中項。

設有二數, a, b, 他們的等比中項爲 G, 那麼

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$$

$$G^2=ab$$

$$\therefore G=\sqrt{ab}$$

即兩數的等比中項,爲這兩數的積

的平方根。

236. 無限等比級數

等比級數的項數無限時,叫做無限等比級數。

設首項 a,公比 r,都是正數,那麽公比 r 比 1 大時,各項逐次增大,故項數增大時,等比級數的和也漸次增大,可以增到無限。公比 r 是 1 時,也是這樣。

若公比 r 比 1 小時,(例如:級數 $4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\cdots\cdots$)那就有下面的三種性質:

(1)各項數值以次逐漸減小。

就是任一項的數值總比他的前項數值小,比他的後項數值大。

(2)項的數值可以小至任意小。

就是任舉一個小的數,我們可以在級數中,找出一項,比這數還要小。

(3)不能求他們的和,但是他們的和漸漸接近一個定數。

我們要求一個級數的和,一定先要知道他的項數;無窮級數的項很多很多,永沒有寫完的時候,當然無法去求他的和,但是他的和漸漸接近一個

定數。換句話說,他的和與一個定數的差的絕對值可以小到任意小。

例如: 級數 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ....

一項的和 $S_1=1$ 與2的差爲 1,

二項的和 $S_2=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ 與2的差爲 $\frac{1}{2}$,

三項的和 $S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$ 與2的差爲 $\frac{1}{4}$,

四項的和 $S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}$ 與2的差爲 $\frac{1}{8}$,

五項的和 $S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1\frac{15}{16}$ 與2的差爲 $\frac{1}{16}$

項數逐漸增加,和也逐漸增大與 2 的差也漸漸減小,但是無論如何,所得的和,不能大於或等於 2,不過漸漸接近 2 罷了。

237. 無限等比級數的和的極根

無限等比級數的和,雖不能求,但是他漸漸接近的這個定數,却有法求出,這個定數,叫做無限等比級數的和的極限,可簡稱無限等比級數的和。

設有無限等比級數

$$a, \quad ar, \quad ar^2 \quad ar^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

假定 r 的絕對值小於 1,那麼他的 n 項的和爲

$$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

$$或S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

因爲 r 的絕對值小於 1, n 愈大,r^n 愈小,那麼 $\frac{ar^n}{1-r}$ 也愈小,所以當 n 逐漸增大時,$\frac{ar^n}{1-r}$ 逐漸減小,因此級數的和,就逐漸接近 $\frac{a}{1-r}$。故得級數和的極限的公式

$$S=\frac{a}{1-r}$$

例一　求無限級數　$1,\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64}\cdots\cdots$的和

解　$a=1,\qquad r=\frac{1}{4}$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

例二　化循環小數　$.\dot{5}$爲分數.

解　因 $.\dot{5}=.555\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=.5+.05+.005+.0005+\cdots\cdots$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a=\frac{5}{10}\qquad r=\frac{1}{10}$$

$$故\quad S=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{9}$$

故 $\dot{.5}=\frac{5}{9}$

習題 一二四

1. 求級數 3, 9, 27…………中的第五項

2. 求級數 3, 6, 12…………中的第七項

3. 求級數 6, 3, $\frac{3}{2}$…………中的第八項

4. 求級數 1,—2,4,…………中的第九項

5. 求2與8間的等比中項,

6. 等比級數的第一項爲2,第三項爲32,求公比。

7. 試於14和224中間插入3項,使成等比級數。

求下列無限級數的和:

8. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$

9. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots$

10. $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots\cdots$

11. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

12. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots(x>1)$

13. $\frac{1}{r}+\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{4r^3}+\frac{1}{8r^4}+\cdots\cdots(r>\frac{1}{2})$

14. 試於$-\frac{1}{10}$和$3\frac{1}{5}$中間插入4項,使成等比級數。

15. 求級數　$0.1+0.5+2.5\cdots\cdots$十項的和

16. 求級數　$m-\frac{m}{4}-\frac{m}{16}\cdots\cdots$七項的和

17. 求級數　$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\cdots\cdots$八項的和

化下列循環小數爲分數

18. $0.2\dot{3}$

19. $0.\dot{1}\dot{5}$

20. $0.\dot{1}2\dot{3}$

21. $0.4\dot{2}\dot{8}$

22. 一氣箱內盛空氣 2 立方尺,用抽氣筒將空氣抽出,每次抽出的空氣,爲箱中所餘空氣的$\frac{1}{25}$,問抽 25 次後,箱中尙餘空氣多少?

23. 一個鎭內的居民,在 5 年內由10,000 人增加到14,641. 若各年的人口成等比級數,問每年增加多少人?

24. 等比級數的首項是3,三項的和是$\frac{19}{3}$求公比。

25. 成等比級數的三個數的和是35,他的平方的和是525,求這三數。

26. 某兒作工,第一日得銀2分,第二日4分,第三日8 分,如是遞加至第十二日,問彼於十二日中共得工銀多少?

27. 某城今有100,000人,設人口每年增10%,問四年後可有多少人?

28. 三數成一等比級數,其連乘積爲216,其兩兩相乘積的和爲156,求這三數。

29. 有一個人,一連十年,每年初存洋100元到銀行,說明年利率百分之$3\frac{1}{2}$的複利,求他到第十年末本利共存了多少?

30. 甲所得的獎金第一年100元,以後每年所得的都是先一年的百分之90,求最初6年間共得多少?又最多他一共有得多少的可能?

【賣價一元】

中華民國二十四年一月付印
中華民國二十四年一月出版

【初中標準算學】

代　數

（下冊）

每本大洋一元

編輯者	孫宗堃　胡爾康
校訂者	江蘇教育廳修訂初中算學科教學進度表委員會主席 沈滌生
發行人	高圮書
印刷者	上海中學生書局 上海四馬路中市
發行所	上海中學生書局
分售處	全國各大書局