

## Analysis I

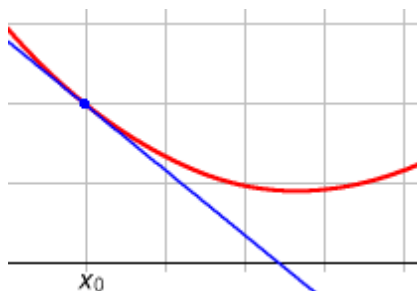
### Vorlesung 18

#### Differenzierbare Funktionen

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei  $D \subseteq \mathbb{K}$  eine offene Menge in  $\mathbb{K}$  ist. Das ist eine Menge derart, dass es zu jedem  $a \in D$  auch eine offene Umgebung  $U(a, r)$ ,  $r > 0$ , gibt, die ganz in  $D$  liegt. Typische Beispiele sind  $D = \mathbb{K}$ ,  $U(a, r)$ ,  $\mathbb{K} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .



DEFINITION 18.1. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu  $x \in D$ ,  $x \neq a$ , heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von  $f$  zu  $a$  und  $x$ .

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graphen durch die beiden Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$ , diese Situation wird auch durch das *Steigungsdreieck* dargestellt. Für  $x = a$  ist dieser Differenzenquotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für  $x \rightarrow a$  existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der „Tangente“.

DEFINITION 18.2. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  *differenzierbar* in  $a$  ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von  $f$  in  $a$ , geschrieben

$$f'(a).$$

Die Ableitung in einem Punkt  $a$  ist, falls sie existiert, ein Element in  $\mathbb{K}$ . Häufig nimmt man die Differenz  $h = x - a$  als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt  $h$  gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Die Bedingung  $x \in D \setminus \{a\}$  wird dann zu  $a+h \in D$ ,  $h \neq 0$ . Wenn die Funktion  $f$  einen eindimensionalen Bewegungsvorgang beschreibt, also eine von der Zeit abhängige Bewegung auf einer Strecke, so ist der Differenzenquotient  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  die (effektive) Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten  $a$  und  $x$  und  $f'(a)$  ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $a$ .

BEISPIEL 18.3. Es seien  $s, c \in \mathbb{K}$  und sei

$$\alpha: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt  $a \in \mathbb{K}$  betrachtet man

$$\frac{(sx+c) - (sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s.$$

Dies ist konstant gleich  $s$ , so dass der Limes für  $x$  gegen  $a$  existiert und gleich  $s$  ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich  $s$ . Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

BEISPIEL 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu  $a$  und  $a+h$  ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für  $h$  gegen 0 ist  $2a$ . Die Ableitung ist daher  $f'(a) = 2a$ .

## Lineare Approximierbarkeit

SATZ 18.5. *Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $a$  genau dann differenzierbar, wenn es ein  $s \in \mathbb{K}$  und eine Funktion*

$$r: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*gibt mit  $r$  stetig in  $a$  und  $r(a) = 0$  und mit*

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a).$$

*Beweis.* Wenn  $f$  differenzierbar ist, so setzen wir

$$s := f'(a).$$

Für die Funktion  $r$  muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s & \text{für } x \neq a, \\ 0 & \text{für } x = a, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass  $r$  in  $a$  stetig ist. Wenn umgekehrt  $s$  und  $r$  mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für  $x \neq a$  die Beziehung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s + r(x).$$

Da  $r$  stetig in  $a$  ist, muss auch der Limes links für  $x \rightarrow a$  existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Ihr Graph heißt die *Tangente* an  $f$  im Punkt  $a$ . Die durch  $f(a)$  gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen. Das Konzept der linearen Approximierbarkeit erlaubt es, die Differenzierbarkeit auf die Stetigkeit (einer anderen Funktion) zurückzuführen und dadurch verschiedene Rechenregeln einfach beweisen zu können.

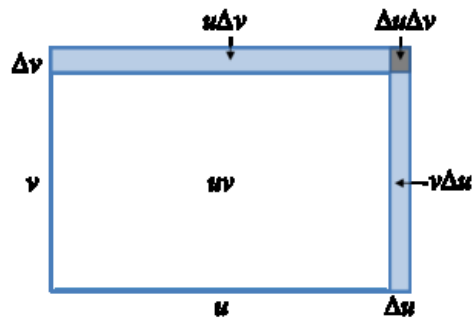
KOROLLAR 18.6. *Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine Funktion, die im Punkt  $a$  differenzierbar sei. Dann ist  $f$  stetig in  $a$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 18.5. □

### Ableitungsregeln



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängezuwächse irrelevant.

LEMMA 18.7. *Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und*

$$f, g: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*Funktionen, die in  $a$  differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.*

- (1) *Die Summe  $f + g$  ist differenzierbar in  $a$  mit*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- (2) *Das Produkt  $f \cdot g$  ist differenzierbar in  $a$  mit*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- (3) *Für  $c \in \mathbb{K}$  ist auch  $cf$  in  $a$  differenzierbar mit*

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

- (4) *Wenn  $g$  keine Nullstelle in  $D$  besitzt, so ist  $1/g$  differenzierbar in  $a$  mit*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

- (5) *Wenn  $g$  keine Nullstelle in  $D$  besitzt, so ist  $f/g$  differenzierbar in  $a$  mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

*Beweis.* (1). Wir schreiben  $f$  bzw.  $g$  mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a).$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x-a) + (r + \tilde{r})(x)(x-a).$$

Dabei ist die Summe  $r + \tilde{r}$  wieder stetig in  $a$  mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) \\ = & (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ = & f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ & + (f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ & + s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 12.12 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für  $x = a$ . (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar mit Ableitung 0 ist. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Da  $g$  nach Korollar 18.6 stetig in  $a$  ist, konvergiert für  $x \rightarrow a$  der linke Faktor gegen  $-\frac{1}{g(a)^2}$  und wegen der Differenzierbarkeit von  $g$  in  $a$  konvergiert der rechte Faktor gegen  $g'(a)$ . (5) folgt aus (2) und (4).  $\square$

Diese Regeln heißen *Summenregel* (1), *Produktregel* (2) und *Quotientenregel* (5).

**KOROLLAR 18.8.** *Eine Polynomfunktion*

$$f = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$$

*ist in jedem Punkt differenzierbar, und für die Ableitung gilt*

$$f'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots + (n-1)c_{n-1}z^{n-2} + nc_nz^{n-1}.$$

*Beweis.* Dies folgt für die Potenzen  $z^n$  durch Induktion über  $n$  aus der Produktregel und daraus mit Lemma 18.7.  $\square$

Die folgende Regel heißt *Kettenregel*.

SATZ 18.9. Es seien  $D$  und  $E$  offene Mengen in  $\mathbb{K}$  und seien

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g: E \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit  $f(D) \subseteq E$ . Es sei  $f$  in  $a$  differenzierbar und  $g$  sei in

$$b = f(a)$$

differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in  $a$  differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

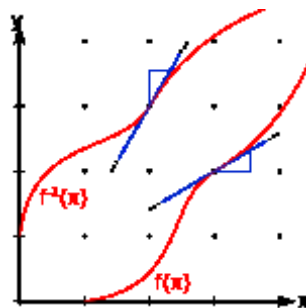
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x - a) \\ &\quad + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x - a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in  $a$  mit dem Wert 0. □



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

SATZ 18.10. Seien  $D$  und  $E$  offene Mengen in  $\mathbb{K}$  und sei

$$f: D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}: E \longrightarrow D$$

Es sei  $f$  in  $a \in D$  differenzierbar mit  $f'(a) \neq 0$ . Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  in  $b = f(a)$  differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Beweis.* Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für  $y \rightarrow b$  existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $E \setminus \{b\}$ , die gegen  $b$  konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f^{-1}$  konvergiert auch die Folge mit den Gliedern  $x_n := f^{-1}(y_n)$  gegen  $a$ . Wegen der Bijektivität ist  $x_n \neq a$  für alle  $n$ . Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert.  $\square$

BEISPIEL 18.11. Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  (eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_+$ ). Deren Ableitung in einem Punkt  $a$  ist  $f'(a) = 2a$ . Nach Satz 18.10 gilt daher für  $b \in \mathbb{R}_+$  die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Im Nullpunkt ist  $f^{-1}$  nicht differenzierbar.

Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$ . Deren Ableitung in  $a$  ist  $f'(a) = 3a^2$ , dies ist für  $a \neq 0$  von 0 verschieden. Nach Satz 18.10 ist für  $b \neq 0$  somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist  $f^{-1}$  nicht differenzierbar.

## Höhere Ableitungen

DEFINITION 18.12. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt  $a \in D$  die Ableitung  $f'(a)$  von  $f$  in  $a$  existiert. Die Abbildung

$$f': D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von  $f$ .

DEFINITION 18.13. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *differenzierbar* ist, wenn  $f$   $(n-1)$ -mal differenzierbar ist und die  $(n-1)$ -te Ableitung  $f^{(n-1)}$  differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die  $n$ -te *Ableitung* von  $f$ .

DEFINITION 18.14. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *stetig differenzierbar* ist, wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist und die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  stetig ist.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = Schema Règle produit.png , Autor = Benutzer ThibautLienart auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = FunktionUmkehrTangente.svg , Autor = Jonathan Steinbuch, Lizenz = CC-by-sa 3.0	6
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> ) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9