**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Elemente der Algebra

## Arbeitsblatt 27

### Übungsaufgaben

Aufgabe 27.1. Es sei $K$ ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass $K \subset L$ eine einfache, aber keine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 27.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung, deren Grad eine Primzahl sei. Zeige, dass dann eine einfache Körpererweiterung vorliegt.

Aufgabe 27.3. Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei $M$ die Menge der $n$-ten Einheitswurzeln in $K$. Zeige, dass $M$ eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^{\times}$ ist.

Aufgabe 27.4.*

Zeige, dass jede komplexe Einheitswurzel auf dem Einheitskreis liegt.

Aufgabe 27.5. Es sei $p$ eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/(p)$. Zeige, dass es in $K$ $p-1$ verschiedene $(p-1)$-te Einheitswurzeln gibt.

Finde für $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ primitive $(p-1)$-te Einheitswurzeln in $K$.

Aufgabe 27.6. Es sei $K$ ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient $b_1/b_2$ eine $n$-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und $\zeta$ eine $n$-te Einheitswurzel ist, so ist auch $\zeta b$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgabe 27.7. Bestimme das sechste Kreisteilungspolynom $\Phi_6$ und beschreibe die Primfaktorzerlegung von $X^6 - 1$.

Aufgabe 27.8.*

Es sei $p$ eine Primzahl. Finde die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^p - 1}$$

in $\mathbb{Q}(X)$.

Aufgabe 27.9. Bestätige folgende Aussagen.

(1) Die dritten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ sind $1$, $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $\eta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(2) Es ist $\epsilon^2 = \eta$ und $\eta^2 = \epsilon$.
(3) Es ist $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.
(4) Es ist $\epsilon + \epsilon^2 = -1$.

Aufgabe 27.10. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gruppe der $n$-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph sind.

Aufgabe 27.11. Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $j \in \mathbb{Z}$. Zeige

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ijk}{n}} = \begin{cases} n, & \text{falls } j \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 27.12.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es sei $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der $n$-ten komplexen Einheitswurzeln. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $F \in \mathbb{C}[X^n]$ (d.h., dass $F$ als Polynom in $X^n$ geschrieben werden kann) genau dann gilt, wenn für jedes $z \in \mu_n$ die Gleichheit

$$F(zX) = F(X)$$

gilt.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.13. (3 Punkte)

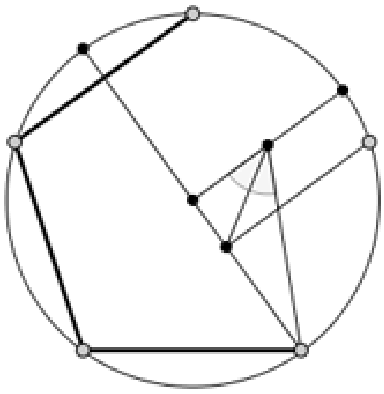
Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeige, dass der $n$-te Kreisteilungskörper mit dem $2n$-ten Kreisteilungskörper übereinstimmt.

Aufgabe 27.14. (4 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der fünften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 27.15. (3 Punkte)

Beschreibe die Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines regelmäßigen Fünfecks, wie sie in der folgenden Animation dargestellt ist.



Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal

Aufgabe 27.16. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche primitive Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(23)$.