

Lineare Algebra und analytische Geometrie II**Arbeitsblatt 35****Übungsaufgaben**

AUFGABE 35.1. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann winkeltreu ist, wenn für alle $u, v \in V$, $u, v \neq 0$, die Gleichung

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \frac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|} \cdot \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} \cdot \langle u, v \rangle$$

gilt.

AUFGABE 35.2. Es seien U, V und W euklidische Vektorräume. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

- (1) Die Identität

$$\text{Id}_V: V \longrightarrow V$$

ist winkeltreu.

- (2) Die Verknüpfung von winkeltreuen Abbildungen

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

und

$$\psi: V \longrightarrow W$$

ist wieder winkeltreu.

- (3) Zu einer bijektiven winkeltreuen Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

ist auch die Umkehrabbildung winkeltreu.

AUFGABE 35.3. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge aller winkeltreuen Abbildungen

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine Untergruppe von $\text{GL}(V)$ ist.

AUFGABE 35.4.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix derart, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

winkeltreu ist. Zeige

$$M = E_n.$$

AUFGABE 35.5. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix. Zeige, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

genau dann winkeltreu ist, wenn $|d_{ii}|$ konstant und von 0 verschieden ist.

AUFGABE 35.6. Man gebe zu jedem r , $0 \leq r \leq n$, eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

vom Rang r an, die orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abbildet, aber keine winkeltreue Abbildung ist.

AUFGABE 35.7. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass φ winkeltreu ist.

AUFGABE 35.8. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorräumen V .
Zeige, dass es eine Isometrie

$$\psi: V \longrightarrow V$$

und eine Streckung

$$\sigma: V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi = \psi \circ \sigma$$

gibt.

AUFGABE 35.9.*

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ und der durch

$$3x - 7y = 8$$

gegebenen Geraden und den Lotpunkt des Punktes auf der Geraden.

AUFGABE 35.10. Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und
der durch

$$4x - 7y + 6z = 3$$

gegebenen Ebene im \mathbb{R}^3 .

AUFGABE 35.11. Bestimme den minimalen Abstand von $(4, 1, -5)$ zu einem
Punkt der Ebene E , die durch die Gleichung $2x - 7y + 3z = 0$ gegeben ist.

AUFGABE 35.12. Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

AUFGABE 35.13. Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die folgenden Aufgaben besprechen Abstände zwischen nichtlinearen Objekten.

AUFGABE 35.14. Es sei A der Kreis in \mathbb{R}^2 mit dem Mittelpunkt $(3, -4)$ und dem Radius 2 und B der Kreis in \mathbb{R}^2 mit dem Mittelpunkt $(7, 2)$ und dem Radius 3. Bestimme den Abstand zwischen den beiden Kreisen und an welchen Kreispunkten dieser angenommen wird.

AUFGABE 35.15. Es sei A der Kreis in \mathbb{R}^2 mit dem Mittelpunkt $(1, -3)$ und dem Radius 2 und B die durch

$$6x + 5y = 30$$

gegebene Gerade. Bestimme den Abstand zwischen dem Kreis und der Geraden und an welchen Punkten dieser angenommen wird.

AUFGABE 35.16. Bestimme den Abstand zwischen der Hyperbel

$$\{(x, y) \mid xy = 1\}$$

und dem Achsenkreuz

$$\{(x, y) \mid xy = 0\} .$$

AUFGABE 35.17. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M , wobei alle Folgenglieder verschieden seien. Es sei $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und P ein von allen Folgengliedern verschiedener Punkt aus M . Zeige, dass P genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn

$$d(A, P) = 0$$

ist.

Die folgende Aufgabe benötigt Analysis 1 (Extremabestimmung durch Ableiten).

AUFGABE 35.18. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 35.19. (2 Punkte)

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Isometrie ist, wenn für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq V$ die Gleichung

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$$

gilt.

AUFGABE 35.20. (4 Punkte)

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der durch

$$-6x + 3y = 11$$

gegebenen Geraden und den Lotpunkt des Punktes auf der Geraden.

AUFGABE 35.21. (5 Punkte)

Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

AUFGABE 35.22. (3 Punkte)

Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

AUFGABE 35.23. (4 Punkte)

Es seien zwei disjunkte Kreise K_1 und K_2 in der euklidischen Ebene mit den Mittelpunkten $M_1 \neq M_2$ und den Radien r_1 und r_2 gegeben. Zeige, dass der Abstand zwischen den beiden Kreisen in Punkten angenommen wird, die auf der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte liegen.