Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2017/2018

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 16

Die Determinante

Kann man einer quadratischen $n \times n$-Matrix „auf einen Blick“ ansehen, ob sie invertierbar ist? Gibt es einen Ausdruck in den n^2 Einträgen der Matrix, mit dem man dies entscheiden kann? Diese Frage wird positiv durch die Determinante beantwortet.

Definition 16.1. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

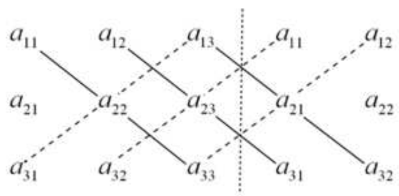
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Die in der Definition auftretenden Matrizen nennt auch *Streichungsmatrizen*. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 16.2. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 16.3. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Lemma 16.4. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n.$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix $\det E_n = 1$.

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

Multilineare und alternierende Abbildungen

Wir führen zwei Begriffe ein, die wir im Moment hauptsächlich zum weiteren Verständnis der Determinante brauchen.

Definition 16.5. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ mit $v_j \in V_j$ die induzierte Abbildung

$$V_i \longrightarrow W,\ v_i \longmapsto \Phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

K-linear ist.

Bei $n = 2$ spricht man auch von *bilinear*. Beispielsweise sind die Multiplikation in einem Körper K, also die Abbildung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x, y) \longmapsto xy,$$

und zu einem K-Vektorraum V mit Dualraum V^* die Auswertungsabbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\, (v,f) \longmapsto f(v),$$

bilinear.

Lemma 16.6. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K Es sei*

$$\Phi\colon\ V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung und es seien $v_{1j}, \ldots, v_{m_j j} \in V_j$ und $a_{ij} \in K$. Dann ist

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}v_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m_n} a_{in}v_{in}\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,m_n\}} a_{i_1}\cdots a_{i_n}\Phi\left(v_{i_1 1}, \ldots, v_{i_n n}\right)$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.16. □

Definition 16.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\Phi\colon\ V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow W$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: Falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist

$$\Phi(v) \,=\, 0.$$

Bei einer alternierenden Abbildung muss an jeder Stelle der gleiche Vektorraum stehen.

Lemma 16.8. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei*

$$\Phi\colon\ V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-mal} \longrightarrow W$$

eine alternierende Abbildung. Dann gilt

$$\Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) = -\,\Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_n).$$

D.h. wenn man zwei Vektoren vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen.

Beweis. Aufgrund der Definition von alternierend und Lemma 16.6 gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r + v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r + v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) \\ &= \Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) \\ &\quad +\Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

□

Die Determinante ist eine alternierende Abbildung

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine multilineare und alternierende Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \,\cong\, (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

Satz 16.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

gilt.

Beweis. Seien

$$M := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, M' := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{M} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge und die Streichungsmatrizen analog bezeichnen. Insbesondere ist also $u = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ und $w = (a'_{k1}, \ldots, a'_{kn})$. Wir beweisen die Aussage des Satzes durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Für $i \neq k$ ist $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} = a'_{i1}$ und

$$\det \tilde{M}_i = \det M_i + \det M'_i$$

nach Induktionsvoraussetzung. Für $i = k$ ist $M_k = M'_k = \tilde{M}_k$ und es ist $\tilde{a}_{k1} = a_{k1} + a'_{k1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det \tilde{M} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{i1} \det \tilde{M}_i \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (\det M_i + \det M'_i) \\
&\quad + (-1)^{k+1} (a_{k1} + a'_{k1})(\det \tilde{M}_k) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_k + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k,}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i \\
&= \det M + \det M'.
\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation beweist man ähnlich, siehe Aufgabe 16.21. ☐

SATZ 16.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

alternierend

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n, wobei es für $n = 1$ nichts zu zeigen gibt. Sei also $n \geq 2$ und $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{ij}$. Die relevanten Zeilen seien v_r und v_s mit $r < s$. Nach Definition ist $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i$. Nach Induktionsvoraussetzung sind dabei $\det M_i = 0$ für $i \neq r, s$, da ja dann zwei Zeilen übereinstimmen. Damit ist

$$\det M = (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s,$$

wobei $a_{r1} = a_{s1}$ ist. Die beiden Matrizen M_r und M_s haben die gleichen Zeilen, allerdings tritt die Zeile $z = v_r = v_s$ in M_r als die $(s-1)$-te Zeile und in M_s als die r-te Zeile auf. Alle anderen Zeilen kommen in beiden Matrizen in der gleichen Reihenfolge vor. Durch insgesamt $s - r - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen kann man M_r in M_s überführen. Nach der Induktionsvoraussetzung und Lemma 16.8 unterscheiden sich daher die Determinanten um den Faktor $(-1)^{s-r-1}$, also ist $\det M_s = (-1)^{s-r-1} \det M_r$. Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s \\ &= a_{r1} \left((-1)^{r+1} \det M_r + (-1)^{s+1} (-1)^{s-r-1} \det M_r \right) \\ &= a_{r1} \left((-1)^{r+1} + (-1)^{2s-r} \right) \det M_r \\ &= a_{r1} \left((-1)^{r+1} + (-1)^{r} \right) \det M_r \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Durch die Eigenschaft, alternierend zu sein, vereinfacht sich das Berechnen der Determinante. Insbesondere kann man gut üerblicken, wie sich die Determinate bei elementaren Zeilenumformungen verhält. Wenn man eine Zeile mit einer Zahl s multipliziert, so muss man die Determinante auch mit s multiplizieren. Wenn man Zeilen vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Wenn man eine Zeile (oder ein Vielfaches davon) zu einer anderen Zeile hinzuaddiert, so ändert sich die Determinante nicht.

Satz 16.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4) $\operatorname{rang} M = n$.

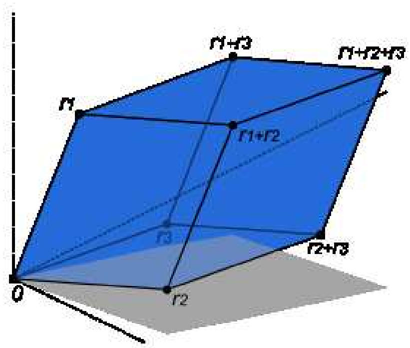
Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 12.16 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$$

ist. Dann ist nach Satz 16.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von 0 verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinante der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □



Bemerkung 16.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n | \, s_i \in [0,1]\}.$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen" Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\mathrm{vol}\, P = |\det(v_1, \ldots, v_n)|,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

Für einen Beweis der eben genannten Beziehung zwischen Determinante und Volumen siehe Satz 67.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)).

Abbildungsverzeichnis