二根ヲ有スルトキ p, q, r ノ關係如何. 14 明治專門

【354】 $x^3+px^2+qx+r=0$ ナル方程式ノ一根ガ 1 ニシテ他ノ二根ガ相等シキタメニハ p, q, r ノ間ニ如何ナル關係アルカ.

解　左邊ハ $x-1$ デ割切レテ而モソノ商ハ完全平方式デナクテハナラナイ.

$$
\begin{array}{r}
x^2+(p+1)x+(p+q+1) \\
x-1\overline{)x^3+px^2+qx+r} \\
x^3-x^2 \\
\hline
(p+1)x^2+qx+r \\
(p+1)x^2\pm(p+1)x \\
\hline
(p+q+1)x+r \\
(p+q+1)x-(p+q+1) \\
\hline
p+q+r+1
\end{array}
$$

此剩餘ハ 0 トナラナケレバナラナイ.

$\therefore$　$p+q+r=0$………………(1)

次ニ　$x^2+(p+1)x+p+q+1=0$　ハ等根ヲ有シナケレバナラナイ.

$\therefore$　$(p+1)^2-4(p+q+1)=0$

$\therefore$　$p^2-2p-4q-3=0$………………(2)

(1), (2) ガ求ムル關係式デアル.

【355】 $ax^2+bx+c=0$ ト $a'x^2+b'x+c'=0$ トガ二ツノ共通根ヲ有スルトキ係數間ノ關係如何.

【356】 $x^2+(m-3)x+2=0$ ト $x^2+mx-1=0$ トガ一根ヲ共有スルトキノ m ノ値ヲ求メヨ. 又共有ナラザル根ヲ求メヨ.

解　一ツノ共有根ヲ α トスレバ

$\alpha^2+(m-3)\alpha+2=0$………………(1)

$\alpha^2+m\alpha-1=0$………………(2)

(1)−(2)　　$-3\alpha+3=0$

$\therefore$　$\alpha=1$ 之ガ共通根デアル.

$\alpha=1$ ヲ (2) ニ代入スレバ　$m=0$.

而シテ共通ナラザル根ハ根ト係數トノ關係ヲ用ヒテ始メノ方程式ニテ 2 後ノ方程式ニテ -1.

【357】 二ツノ方程式 $x^2+px+q=0$ ト $x^2+qx+p=0$ トガ唯一ツノ共通根ヲ有スルトキ共通ナラサル根ノ和ハ -1 ニ等シキコトヲ證セヨ.

注意　根ト係數トノ關係ハ三次以上ノ方程式ニモ存在スルモノデアル. 今 α, β, γ 三數ヲ根トスル方程式ヲ作レバ

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$\therefore \quad x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)x-\alpha\beta\gamma=0$

之ト $ax^3+bx^2+cx+d=0$

トヲ比較スレバ三次方程式ノ根ト係數トノ關係ガ得ラレル.

第六章 二次方程式ノ根ノ吟味

77 判別式

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ノ中ニハ開法ノ計算ヲ含ンデ居ルカラ根號內ノ數 (b^2-4ac) ガ負數トナル場合ニハ根ハ虛數トナリ, 正數又ハ 0 トナル場合ニハ實數トナルノデアル. 即チ

(i) $b^2-4ac<0$ ナルトキ 二根ハ虛數 $\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

(ii) $b^2-4ac\nless 0$ ナルトキ 二根ハ實數

(1) $b^2-4ac>0$ ナルトキ 二根ハ相異ナル實數

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

(イ) b^2-4ac ガ完全平方數ナルトキ二根ハ有理數

(ロ) b^2-4ac ガ完全平方數ナラザルトキ二根ハ無理數

但 (イ)(ロ) 何レモ a, b, c ノ中ニ無理數ヲ含マナイモノトスル.

(2) $b^2-4ac=0$ ナルトキ二根ハ相等シキ實數

$$\frac{-b}{2a} \quad \text{(即等根)}$$

注意 $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ

(1) a, c ガ異符號ノトキハ b^2-4ac ハ正數トナルカラ根ハ必ズ實根デアル.

(2) 一根ガ實數ナラバ $b^2-4ac \nless 0$ ダカラ他ノ根モ實數デアル.

(3) 一根ガ有理數デアルコトガ分レバ $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ開キ切レルカラ他ノ根モ有理ダトイヘル. 勿論 a, b, c ハ有理數ナル場合デアル.

【358】 $2x^2-3x-3+k(x^2+x+2)=0$ ガ等根ヲ有スルトキ k ノ値ヲ求メヨ.

【359】 $m^2x^2+(m^2+m)ax+a^2=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ m ノ値如何.

要點 有スルタメニトアルノハ有スルトキト解シテ解ケバヨイ.

【360】 $2x^2+2(p+q)x+p^2+q^2=0$ ハ $p=q$ ナルニアラザレバ實根ヲ有セザル事ヲ證セヨ.

【361】 $(x-a)(x-b)=c^2$ ノ根ハ常ニ實數ナルコトヲ證セヨ.

【362】 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ ニ於テ a, b, c 及 x ガ何レモ實數ナル場合ニ於テ a, b, c ハ x ヲ公比トスル G.P. ナルコトヲ證セヨ. (再出)

【363】 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ガ等根ヲ有スルトキハ a, b, c ハ A.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【364】 次ノ聯立方程式ガ只一組ノ根ヲモツタメニ m ニ與フベキ正ノ數値ヲ求ム.

$3x^2+5y^2=30 \cdots\cdots\cdots(1) \qquad y-mx-6=0 \cdots\cdots(2)$

13 桐生高工

解 (2) ヨリ $y=mx+6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (1) ニ代入シテ $3x^2+5(m^2x^2+12mx+36)=30$

$\therefore \quad (3+5m^2)x^2+60mx+150=0 \cdots\cdots\cdots(4)$

サテ問題中ノ只一組ノ根トイフノヲ文字通リニ解釋スレバ (4) ガ只一ツノ根ヲモツテ居ナケレバナラナイノデアルガソレガタメニハ $3+5m^2=0$ ナルヲ要スル. 然シ之ヲ滿足スル m ノ正數値ハナイ. 從テ本問題ニハ答ハナイ.

恐ラク本問題ノ意味ハ (4) ガ等根ヲモツテ居リ從テ一組ノ等根ガ得ラレルトキ m ノ正數値ヲ求ムトイフノデアルト思ハレル. ソレナラバ

(4) ガ等根ヲ有スルヲ要スルカラ

$3600m^2-1800-3000m^2=0$

$\therefore\ m^2=3 \qquad \therefore\ m=\pm\sqrt{3} \qquad Ans.\ \sqrt{3}$

【365】 x, y ニ關スル次ノ聯立方程式ノ二組ノ根ガ相等シクナルタメニハ m ヲ如何ニ定ムベキカ.

$mx+y=5, \qquad x^2+2y+3m=0$ 　　13 德島高工

【366】 $y^2=12x,\ y=3x+m$ ニ於テ x ノ二根ヲシテ相等シカラシメントス. m ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ. 又ソノトキノ x, y ノ値如何.

【367】 $x^2+y^2-2ax-2by-c^2=0$ ノ x ノ二根ガ相等シキトキノ x 及 y ノ値ヲ求メヨ. 　　13 小樽高商

要點 x ノ二次方程式ト見レバ x ガ等根トナルノダカラ判別式ヲ 0 ニ等シト置イテ y ノ値ヲ求メテモヨイガ等根ノ公式 $\frac{-b}{2a}$ ヲ用フレバ $x=a$ トシテ x ノ値ガ先ヅキマル. 之ヲ代入シテ y ノ値ヲ求ムルガヨイ.

【368】 $x^2+(y-a)^2=25$ ノ y ノ兩根ガ相等シクナルトキノ x 及 y ノ値ヲ求ヨ.

【369】 $Ax^2+2Bx+C=0$ ト $ax^2+2bx+c=0$ トガ一ツノ共

通根ヲ有スルトキハ B^2-AC 及 b^2-ac ハ共ニ完全平方式ナルコトヲ證セヨ. 但係數ハ皆有理數トス.

解 一ツノ共通根ヲ α トスレバ

$A\alpha^2+2B\alpha+C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

α^2 ノ項ヲ消去スレバ $2(aB-Ab)\alpha+aC-Ac=0 \cdots\cdots (3)$

若シ $aB-Ab=0$ ナルトキハ $\frac{B}{A}=\frac{b}{a}$ 從テ

$-\frac{2B}{A}=-\frac{2b}{a}$ トナリ二根ノ和ガ等シイコトヽナルコレハ唯一根ヲ共有スル假設ニモトル. 故ニ

$aB-Ab\neq0$

$\therefore \quad \alpha=\frac{cA-Ca}{2(aB-Ab)} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4) ニヨツテ α ハ整數カ又ハ分數デアル. ($cA-Ca\neq0$ ナルコトハ $aB-Ab\neq0$ ト同樣ニ證明セラレル) 卽チ α ハ有理數デアル. 因テ兩方程式ノ判別式ハ完全平方式デアル. 卽チ $4B^2-4AC,\ 4b^2-4ac$ ハ完全平方式從テ $B^2-AC,\ b^2-ac$ モ完全平方式.

【370】 a, b ガ共ニ正ニシテ方程式 $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ガ三ツノ實根ヲ有スルトキハ $b\geqq3a$ ナルコトヲ證明セヨ. 　　14 南大專

78 根ノ符號

根ト係數トノ關係ヲ用フレバ方程式ヲ解カナイデ根ノ符號ヲ判斷スルコトガ出來ル．但正負ヲ考フル根ハ實根ニ限ル．

$ax^2+bx+c=0$ ニ於テ二根ヲ α,β トスレバ

(i) $\dfrac{c}{a}>0$ ナル場合 $\alpha\beta>0$ 故ニ二根ハ同符號．而シテ

(1) $-\dfrac{b}{a}>0$ ナルトキ $\alpha+\beta>0$　$\therefore$　$\alpha>0,\ \beta>0$

(2) $-\dfrac{b}{a}<0$ ナルトキ $\alpha+\beta<0$　$\therefore$　$\alpha<0,\ \beta<0$

(ii) $\dfrac{c}{a}<0$ ナル場合 $\alpha\beta<0$ 故ニ二根ハ異符號．而シテ

(1) $-\dfrac{b}{a}>0$ ナルトキ $\alpha+\beta>0$ 故ニ正根ノ方ガ絶對値大．

(2) $-\dfrac{b}{a}<0$ ナルトキ $\alpha+\beta<0$ 故ニ負根ノ方ガ絶對値大．

例(1) $3x^2+8x+4=0$ ノ根ノ符號ヲ判定セヨ．

判別式 $16>0$ 故ニ實根ヲ有ス．

$\alpha\beta=\dfrac{4}{3}>0$ 故ニ二根ハ同符號 $\alpha+\beta=-\dfrac{8}{3}<0$ 故ニ二根トモ負數．

(2) $2x^2+3x-2=0$ ノ根ノ符號ヲ判定セヨ．

判別式 $25>0$ 故ニ實根ヲ有ス．

$\alpha\beta=-1<0$ 故ニ二根ハ異符號．

$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}<0$ 故ニ負根ノ方ガ絶對値ハ大．

【371】a,b,c ハ共ニ正ノ實數ニシテ悉クハ相等シカラザルトキハ次ノ方程式ノ根ハ正ノ實數ナルコトヲ證セヨ．

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$　8 高校

79 二根ノ大小

大小ヲ比較シウル根ハ實根ニ限ルコト勿論デアル．

今 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α,β トシ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

但 $b^2-4ac\not<0$ トスレバ α,β ノ何レガ大デアルカ．

$$\alpha-\beta=\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

(i) $b^2-4ac=0$ ナルトキハ $\alpha=\beta$

(ii) $b^2-4ac>0$ ナルトキハ $\sqrt{b^2-4ac}>0$ 而シテ

(1) $a>0$ ナルトキハ（多クノ場合 a ハ正デアル）

$\alpha-\beta>0$　$\therefore$　$\alpha>\beta$

(2) $a<0$ ナルトキハ

$\alpha-\beta<0 \quad \therefore \quad \alpha<\beta$

根ノ大小比較ハ二次不等式解法ニ必要ナコトガアル.

第七章　二次三項式ノ因數分解

80 二次三項式ノ因數分解ト二次方程式解法トノ關係

例(1) $2x^2+5x-3=0$ ……………(1)

(i) (1)ノ左邊ハ容易ニ因數分解ガ出來ル. 之ニヨッテ(1)ヲ解クコトガ出來ル. 即チ

$(2x-1)(x+3)=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{2}$ 又ハ -3

(ii) 逆ニ (1) ノ二根ガ何等カノ方法デ $\frac{1}{2}$, -3 ナルコトガ分カッテ居ルナラバ, 之ニヨッテ(1)ノ左邊ノ二次三項式ヲ因數分解スルコトガ出來ル. 即チ

$2x^2+5x-3=2(x-\frac{1}{2})(x+3)=(2x-1)(x+3)$

(2) $x^2-4x+1=0$ ……………(1)

(i) (1) ノ左邊ハ視察デ因數分解スルコトハ出來ナイ. 因テ因數分解法ヲ應用シテ之ヲ解クコトハ出來ナイ.

(ii) (1) ノ根ヲ求ムルコトハ公式ヲ用フレバ常ニ出來ル. 即チ　$x=2\pm\sqrt{3}$, 之ヲ用ヒテ (1) ノ左邊ヲ因數分解スルコトガ出來ル. 即チ

$x^2-4x+1=\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$

上ノ例ノ示ス如ク方程式解法ヲ應用スレバ二次三項式ハ常ニ因數分解スルコトヲウルモノデアル.

例(1) $4x^2-20x+29$ ヲ因數分解セヨ.

$4x^2-20x+29=0$ ヲ解ケバ

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-116}}{4}=\frac{10\pm4i}{4}=\frac{5\pm2i}{2}$$

$$\therefore\ 4x^2-20x+29=4\left\{x-\frac{5+2i}{2}\right\}\left\{x-\frac{5-2i}{2}\right\}$$
$$=\{2x-(5+2i)\}\{2x-(5-2i)\}$$

(2) $15x^2-14xy+3y^2$ ヲ因數分解セヨ.

$15x^2-14xy+3y^2=0$ ヲ x ノ二次方程式トシテ解ケバ

$$x=\frac{7y\pm\sqrt{49y^2-45y^2}}{15}=\frac{(7\pm2)y}{15}=\frac{3}{5}y \text{ 又ハ } \frac{1}{3}y$$

$$\therefore\ 15x^2-14xy+3y^2=15\left(x-\frac{3}{5}y\right)\left(x-\frac{1}{3}y\right)$$
$$=(5x-3y)(3x-y)$$

(3) x^3-y^3 ヲ一次因數ニ分解セヨ.

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

更ニ x^2+xy+y^2 ヲ因數分解スルタメニ

$x^2+xy+y^2=0$ ヲ解ケバ

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2-4y^2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}y=\omega y \text{ 又ハ } \omega^2y$$

$$\therefore\ x^3-y^3=(x-y)(x-wy)(x-w^2y)$$

【372】 $x^3-\frac{20}{33}x^2y+\frac{1}{11}xy^2$ ヲ因數分解セヨ. 14 大阪高工

【373】 $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$

【374】 $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$ (再出)

【375】 $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25$ (再出)

81 二次三項式因數分解ノ吟味

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α,β トスレバ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a\left\{x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

此因數分解ニ於テ若シ α,β ガ虛數デアルナラバ分解シタ因數モ虛數ヲ含ミ又 α,β ガ實數ナル場合ニモ若シソレガ無理數ヲ含ムナラバ分解シタ因數ニモ無理數ヲ含ム譯デアル.
ソレデ ax^2+bx+c ガ如何ナル因數ニ分解セラルヽカハ

$ax^2+bx+c=0$ ガ如何ナル根ヲ有スルカニヨツテキマル．即チ判別式 b^2-4ac ノ符號ニヨツテキマルノデアル．特ニ $b^2-4ac=0$ ナル場合ニハ ax^2+bx+c ハ完全平方式トナルコトハ注意ヲ要スル點デアル．

因數分解ノ問題デハ特別ノ要求ガナイ限リ虚數ヤ無理數ヲ含ム因數ヲ得ル場合ニハ因數分解シナイデ二次式ノマヽデ置クノガ普通デアル．而シテ二次三項式ヲ因數分解シテ如何ナル因數ガエラレルカハ常ニ b^2-4ac ノ符號ヲ見レバ分ルノデアル．

【376】 x ニ關スル一元二次式 $(x+k)(2x+a+b)+(x+a)(x+b)$ ガ完全平方式ナルタメノ k ノ値如何．
但 a, b ハ既知ノ實數ニシテ又 k ハ實數ナリ．

【377】 $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$ ガ完全平方式ナルトキハ $a=b=c$ ナルコトヲ證セヨ．
14　長崎高商

【378】 $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ ガ x 及 y ニ關スル一次式ノ平方ノ形ニテ表ハシ得ルトキハ $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ ハ A.P. ヲナスコトヲ證セヨ．

【379】 k ガ如何ナル値ヲ有スルトキ $x^2-y^2+3x-7y+k$ ヲ二ツノ一次因數ニ分解シウルカ．　12　陸上

解　$x^2-y^2+3x-7y+k=0$ ヲ x ニ就テ解ケバ

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4y^2+28y-4k}}{2}$$

與ヘラレタル式ガ x, y ノ一次因數ニ分解スルコトヲウルニハ根號内ノ式ガ完全平方式デナクテハナラナイ．
而ルニ $4y^2+28y-4k+9$ ハソノ判別式
$28^2+16(4k-9)$ ガ 0 ナルトキニ完全平方式トナル．
即チ　$28^2+16(4k-9)=0$　$\therefore\ k=-10.$

注意　本題ハ未定係數法デモ解ケル．

【380】 $kx^2+5xy+x+y^2+y-2$ ガ x, y ニツキテ二ツノ一次因數ニ分解サレルタメニハ k ノ値如何．

第八章 不等式

82 不等式ノ解法

不等式ノ性質及不等式ノ證明ニ付テハ既ニ第四編ニ於テ說イタノデ今コヽニハ條件附不等式ノ解法ヲ說明シヤウ.

83 一次不等式ノ解法

例(1) $4x+18>7x-3$ ヲ解ケ.

解 移項シテ $-3x>-21$

兩邊ヲ -3 デ割ツテ $x<7$ 之ガ求ムル解デアル.

(2) $9x+13>7x+17$ ヲ解ケ.

解 移項シテ $2x>4$

兩邊ヲ 2 デ割レバ $x>2$ 之ガ求ムル解デアル.

84 一次式ノ値ノ變化

$ax+b$ ナル x ノ一次式ガ x ガ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデ變化スルトキソノ値ガ如何ニ變化スルカヲ明カニスルコトハ二次以上ノ不等式ヲ解ク上ニモ極メテ重要ナ事デアル.

例(1) $x-3$ ノ値ノ變化如何.

方程式 $x-3=0$………(1) ニ於テハ $x-3$ ガ特殊ノ値 0 トナル場合ヲ考究スルノデアツテ $x-3$ ノ變

化全體カラ見レバ極メテ一小部分ノ考究ニ過ギナイ譯デアル. 更ニ不等式 $x-3>0$……(2) 及 $x-3<0$……(3) ヲ解イテ始メテ $x-3$ ノ値ノ變化ノ全範圍ニ觸レタコトニナルノデアル. 今 (1),(2),(3) ヲ解イタ結果ヲ用ヒテ $x-3$ ノ値ノ變化ヲ表記スレバ

x		$-\infty$	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	…	$+\infty$
$x-3$	値	$-\infty$	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…	$+\infty$
	符號	$-$	…	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	…	$+$

上ノ表ニヨツテ明カデアル如ク $x-3$ ハ之ヲ 0 ナラシムル x ノ値 3 ヲ境トシテ x ガ 3 ヨリモ小ナルトキハ負トナリ, x ガ 3 ヨリモ大ナルトキハ正トナル. 而シテ x ガ 3 ヨリモ小トナレバナル程 $x-3$ ノ値ハドコマデモ小トナリ, 又 x ガ 3 ヨリモ大トナレバナル程 $x-3$ ノ値ハドコマデモ大トナツテ行ク. 從テ $x-3$ ニハ極大極小ハナイ. 一次式ハ皆同樣デアル.

上ノ符號ノ變化ハ二次以上ノ不等式解法ノ基礎トナルモノデアル.

注意 式ノ値ノ變化及不等式ニ關スルコトハ**グラフ**ヲ用フレバ其意義ヲ明瞭ナラシメルニ便デアル.

例(2)　$2x+5$ ノ値ノ變化如何.

$$2x+5=2\left\{x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$$

x		$-\infty\cdots\cdots-4\ -3\ -\frac{5}{2}\ -2\ -1\ 0\ 1\cdots+\infty$
$2x+5$	値	$-\infty\cdots\cdots-3\ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 3\ 5\ 7\cdots+\infty$
	符號	$-\cdots\cdots\cdots\ -\ -\ \ 0\ \ +\ \ +++\cdots\ +$

85　二次以上ノ不等式ノ解法

不等式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ $P>0$ 又ハ $P<0$ ナル形ニ變ジタ場合ニ P ガ一次因數ニ分解シ得ラレルナラバ何次ノ不等式デモ同ジ方法デ解クコトガ出來ル. ソコデ不等式解法ニハ因數分解ガ先決問題デアル.

例(1)　$(x+2)(x-1)(x-5)>0$　ヲ解ケ.

要點　各因數ノ符號ガ分レバ積 $(x+2)(x-1)(x-5)$ ノ符號ガ分ル. 各因數ノ符號ハ各ヲ 0 ナラシメル x ノ値ヲ境トシテ負カラ正ニ變ルモノデアルカラ各因數ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ大サノ順ニ列ベテ各因數ノ符號ヲ表記シ積ノ符號ヲ求ムレバ

x	$\cdots\cdots-2\cdots\cdots\ 1\cdots\cdots\ 5\cdots\cdots$
$x+2$	$-\ \ 0\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +$
$x-1$	$-\ \ -\ \ -\ \ 0\ \ +\ \ +\ \ +$
$x-5$	$-\ \ -\ \ -\ \ -\ \ -\ \ 0\ \ +$
$(x+2)(x-1)(x-5)$	$-\ \ 0\ \ +\ \ 0\ \ -\ \ 0\ \ +$

依テ　$(x+2)(x-1)(x-5)>0$ トナルノハ $-2<x<1$ ナルトキ又ハ $5<x$ ナルトキデアル. 依テ之ガ求ムル解デアル.

例(2)　$\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-x-6}<0$　ヲ解ケ.

要點　x^2-x-6 ハ符號ガ不明デアルカラ之ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂フコトハ出來ナイ. 强イテ分母ヲ拂フ必要ガアル場合ニハ $(x^2-x-6)^2$ ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂フコトガ出來ルノデアルケレドモ不等式ヲ解クニハ分母ヲ拂フ必要ハナイ.

解　分母分子ヲ一次因數ニ分解スレバ

$$\frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)(x+2)}<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

分母分子ノ各因數ノ符號ガ分レバ分數全體ノ符號ガ分ル. ソレデ各因數ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ大サノ順

ニ列ベテ各因數ノ符號ノ變化ヲ表記シ因テ (1) ノ左邊ノ符號ノ變化ヲ求ムレバ

x	……	-2	……	-1	……	3	……	7	……
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)(x+2)}$	$+$	$\frac{9}{0}$	$-$	0	$+$	$\frac{-16}{0}$	$-$	0	$+$

之ニ依ツテ (1) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ

$-2<x<-1$　又ハ　$3<x<7$ デアルコトガ分ル.

例(3)　$2x^2+x-3>0$　ヲ解ケ.

要點　例 (1)(2) デ說イタ一般的方法ヲ用ヒテ解ケルケレドモ二次不等式ニ於テハ次ノヨウナ解法ヲ用フルコトモアル.

解　$(2x+3)(x-1)>0$

因テ $\begin{cases}2x+3>0\\x-1>0\end{cases}$　ナルカ又ハ $\begin{cases}2x+3<0\\x-1<0\end{cases}$

$\therefore$　$\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\x>1\end{cases}$　又ハ　$\begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\x<1\end{cases}$

$\therefore$　$x>1$　又ハ　$x<-\frac{3}{2}$　之ガ求ムル解デアル.

例(4)　$2x^2+x-3<0$　ヲ解ケ.

解　前例ト同樣ニ

$(2x+3)(x-1)<0$

因テ $\begin{cases}2x+3>0\\x-1<0\end{cases}$　ナルカ又ハ $\begin{cases}2x+3<0\\x-1>0\end{cases}$

$\therefore$　$\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\x<1\end{cases}$　又ハ　$\begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\x>1\end{cases}$

然ルニ一ツノ數ガ $-\frac{3}{2}$ ヨリ小ナルト同時ニ 1 ヨリ大ナルコトハ出來ナイ. 因テ後ノ場合ハ不能デアル.

$\therefore$　$-\frac{3}{2}<x<1$ 之ガ求ムル解デアル.

注意　例(3) デハ二ツノ因數ヲ 0 ナラシムル x ノ値ノ小ナルモノヨリモ小ナルカ又ハ大ナルモノヨリモ大ナル範圍ガ答トナリ, 例(4) デハソノ中間ノ範圍ガ答トナツテ居ル. 此結果ハ記憶シテ置クガヨイ.

又例(3)ノ答ヲ例(4)ノ答ノヨウニ $1<x<-\dfrac{3}{2}$ ト書クノハヨク見ル誤デアル. 特ニ注意ヲ要スル.

例(5) $x^2-4x+7>0$ ヲ解ケ.

要點 左邊ヲ因數分解スレバ虚數ヲ含ム因數ガエラレルコトハソノ判別式ガ -14 トナッテ負數デアルコトカラ分ル. コンナ場合ニハ次ノヨウニ取扱フ.

解 $x^2+4x+7=x^2+4x+4+3=(x+2)^2+3$

因テ與ヘラレタ不等式ハ

$(x+2)^2+3>0$ 之ハ明カニ絶對的不等式デアル.

即チ x ノ總テノ値ニ對シテ成立スル.

注意 $x^2+4x+7<0$ ハ如何.

【381】 $3x^2-4x>7$ ヲ解ケ. (以下 解ケ ヲ略ス)

【382】 $x^2+7x+12<0$　【383】 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$

【384】 $6+5x-x^2>0$　【385】 $(x-2)(x+3)(4-x)>0$

【386】 $x^3+10x^2+31x+30<0$　【387】 $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2-x-2}<0$

【388】 $x(x-5)>0$　【389】 $x^2>36$

【390】 $x^2-6x+9>0$　【391】 $x^2-x+1<0$

【392】 $x^2+2(p+1)x+6p+5=0$ ノ根ガ虚數ナルタメニ p ノ採ルベキ値ノ限界如何.

【393】 $x^2-2(x-1)x+7-m=0$ ノ根ガ實數ナルタメニ m ニ如何ナル制限ヲ附スベキカ.

【394】 二ツノ式 $2x^2-5c^2+x-6c+3$, $x^2-4c^2-3x-9c+1$ ガ相等シク且 x ガ實數ナルトキハ c ハ 1 ト 2 トノ間ニアル能ハザルコトヲ證セヨ. 13 大阪高工

【395】 x ガ實數ナルトキハ $x+\dfrac{1}{x}$ ハ -2 ト 2 トノ間ノ値ヲトリ能ハザルコトヲ證セヨ.

【396】 x ガ實數ナルトキハ $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ノ値ハ常ニ $\dfrac{1}{3}$ ト 3 トノ間ニアルベキコトヲ證セヨ.

【397】 x ガ實數ナルトキハ $\dfrac{x^2-4}{x^2+2ax-1}$ ノ値ノ限界ヲ求ム.

【398】 $x^2-6x+8>0,\ x^2-9x+18<0$ ヲ同時ニ滿足スル x ノ範圍ヲ求ム.

【399】 聯立方程式 $x+y=a,\ x^2+y^2=5$ ガ實根ヲ有スルトキ a ノ範圍如何. 13 廣島高師

【400】 次式ヲ滿足スル x, y ノ實數値ガトリウル値ノ限界ヲ求ム. $9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$

86 二次方程式ノ根ト他ノ與ヘラレタル數トノ比較

方程式 $x^2-9x+14=0$………(1) ノ左邊ニ於テ $x=5$ ヲ代入スレバ $25-45+14=-6<0$ トナルカラ二次不等式解法ノ結果ニ照シテ 5 ハ (1) ノ二根ノ中間ノ大サヲ有スル數ナルコトヲ知ルコトガ出來ル. カク二次不等式解法ノ結果ヲ應用スレバ二次方程式ヲ解カズシテソノ根ト他ノ與ヘラレタ數トノ大小ヲ比較スルコトガ出來ルモノデアル.

今 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシ, (但 $\alpha<\beta$ トスル)與ヘラレタ數ヲ r トシ, α, β ヲ求ムルコトナクシテ r ト α, β トノ大小ヲ比較スル方法ヲ述ベヤウ. (α, β, r ハ實數ナル場

合ニ限ルコト勿論デアル)

左邊ニ $x=r$ ヲ代入スレバ ar^2+br+c

(i) $a>0$ ナル場合

(1) $ar^2+br+c<0$ ナルトキ $\alpha<r<\beta$

(2) $ar^2+br+c=0$ ナルトキ

r ハ α, β ノ何レカニ等シイ. ソノ何レニ等シイカハ $2r$ (即チ $r+r$) ト $\alpha+\beta$ 即チ $-\dfrac{b}{a}$ トノ大小ヲ比較シテ見レバ分ル.

$2r<-\dfrac{b}{a}$ ナルトキ $r=\alpha$

$2r>-\dfrac{b}{a}$ ナルトキ $r=\beta$

(3) $ar^2+br+c>0$ ナルトキ $r>\alpha$ 或ハ $\beta<r$

ソノ何レナルカハ $2r$ ト $\alpha+\beta$ 即チ $-\dfrac{b}{a}$ トノ大小ヲ比較スレバ分ル.

$2r<-\dfrac{b}{a}$ ナルトキ $r<\alpha$

$2r>-\dfrac{b}{a}$ ナルトキ $r>\beta$

(ii) $a<0$ ナル場合

(i) ノ場合ノ (1) ト (3) トヲ取リ換エタ結果トナル.

【401】 $x^2-5x-2=0$ ヲ解カズシテソノ根ト 2 及 -3 トノ大小ヲ比較セヨ.

【402】 $x^2-2x+m=0$ ノ二根ガ何レモ 3 ヨリ小ナルトキ m ノ値ノ限界如何.

【403】 $(m-2)x^2+2mx-5=0$ ノ一根ハ 1 ヨリモ大ニシテ一根ハ 1 ヨリモ小ナル樣ニ m ノ値ヲ決定セヨ.

要點 根ガ實根デナクレバナラナイコト, 1 ハ二根ノ中間ノ數ナルコト, 此二ツノ條件カラ m ノ値ヲ決定スレバヨイ.

第九章 極大極小

87 二次式ノ極大極小

x ノ一次式ニハ極大モ極小モナク x ノ値ガ漸次增シツヽ變化スルニ伴ツテ一次式ノ値ハ單調ニ增シツヽ又ハ減リツヽ變化スルモノデアル. 然ルニ x ノ二次式ニ於テハ x ガ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデ變化スルニ伴ツテ或部分デハ式ノ値ハ增加シ或部分デハ式ノ値ハ減少スルモノデアツテ變化ガ單調デナイ. 式ガ增加ヨリ減少ニ移ル時ノ値ヲ極大値, 減少ヨリ增加ニ移ルトキノ値ヲ極小値トイフ. 本章ニ於テハ主トシテ二次式ノ極大値, 極小値ヲ說クコトヽスル.

注意 極大値, 極小値ヲ略シテ單ニ極大, 極小トイフ.

例(1) $(x-2)^2+5$………(1) ノ極小値ヲ求メヨ.

解 x ハ實數ダカラ $x-2$ ハ實數

$\therefore\ (x-2)^2\geqq 0$

$\therefore\ (x-2)^2+5\geqq 5$………(2)

(2) ニヨツテ (1) ノ値ハ $x=2$ ナルトキ 5 ニ等シクナルコトハアルケレドモソノ他ノ場合ニハ常ニ 5 ヨリ大デアツテ決シテ 5 ヨリモ小ナルコトハナイ.

ソレデ (1) ハ $x=2$ ナルトキ極小トナリ, ソノ極小値ハ 5 デアル.

注意　x ガ 2 ヨリモ小サクナッテモ又大キクナッテモ 2 ヨリ遠ザカレバ遠ザカル程イクラデモ (1) ノ値ハ増加シテ限リガナイ．ソレデ (1) ニハ極大ハナイ．

例(2)　$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$………(1)　ノ極小値ヲ求ム．

解　前例ト同様ニシテ　$x=-\frac{1}{2}$　ナルトキ (1) ノ値ハ $-\frac{4}{5}$ トナルケレドモ x ガソノ他ノ値ヲトルトキハ常ニ　$-\frac{5}{4}$ ヨリハ大ナル値ヲトル．

因テ $x=-\frac{1}{2}$ ナルトキ (1) ハ極小トナリ，ソノ極小値ハ $-\frac{5}{4}$ デアル．

x ノ二次三項式ハ前二例ノ式ノ様ナ形ニ改ムルコトガ出來レバ容易ニソノ極小値ヲ求ムルコトガ出來ル．

例(3)　$3x^2+15x+10$　ノ極小値ヲ求ム．

解　$3x^2+15x+10=3\left\{x^2+5x+\frac{25}{4}\right\}-3\times\frac{25}{4}+10$

$=3(x+\frac{5}{2})^2-\frac{35}{4}$

而ルニ　$3(x+\frac{5}{2})^2\geqq 0$

故ニ與ヘラレタ式ハ $3(x+\frac{5}{2})^2=0$ ナルトキ即チ

$x=-\frac{5}{2}$ ナルトキ極小トナリ極小値ハ $-\frac{35}{4}$ デアル．

例(4)　$5-(x-2)^2$　ノ極大値ヲ求メヨ．

解　$(x-2)^2\geqq 0$　　$\therefore$　$5-(x-2)^2\leqq 5$

故ニ與式ハ $(x-2)^2=0$ ナルトキ極大トナリ，ソノ極大値ハ 5 デアル．

例(5)　$7-4x-x^2$　ノ極大値ヲ求ム．

解　$7-4x-x^2=11-(x^2+4x+4)=11-(x+2)^2$

而ルニ　$(x+2)^2\geqq 0$

$\therefore$　$7-4x-x^2\leqq 11$

故ニ與式ノ極大値ハ 11 デアル．

注意(1)　極大極小ト最大最小トハ同ジデナイケレドモ二次三項式ノ場合デハ同ジダト思ッテヨイ．

(2)　二次式デハ極大値カ極小値カ何レカ一方ヲ有スルモノデアル．モット高次ノ式ハ両方共モッテ居タリ又ハ各ヲ幾ツモモッテ居タリスルモノデアル．

(3) 二次式ガ極大値, 極小値ノ何レヲ有スルカハ二次ノ項ノ係數ノ符號デ判斷ガ出來ル.

(4) 極大極小問題デハ二ツノ事ガ問題トナリウル.

(イ) x ガ如何ナル値ヲトルトキ式ガ極大又ハ極小トナルカ.

(ロ) 極大値又ハ極小値ハ何デアルカ.

【404】次式ノ極大値又ハ極小値ヲ求メヨ.

$x^2+3x-4,$　$6-x-x^2,$　$5x^2-2x+7,$　$4x^2+4x,$

$5x^2-14,$　$7-3x^2,$　$x^2-6x+9.$

例(6) $7x^2-x+6$ ノ極小値ヲ求メヨ.

解　極大極小ヲ求ムルニ今一ツ他ノ方法ガアル.

$7x^2-x+6=k$ ト置ケバ

$7x^2-x+6-k=0\cdots\cdots\cdots(1)$

與式ニ於テ x ニ實數値ヲ代入シタ値ガ k デアルカラ (1) ヲ滿足スル x ノ値ハ實數デナクテハナラナイ. 依テ (1) ノ判別式ヲ作レバ

$1-4\times7(6-k)\geqq0$ 之ヲ解イテ $k\geqq\dfrac{167}{28}\cdots\cdots\cdots(2)$

(2) ニ依ツテ k ノ極小値ハ $\dfrac{167}{28}$ デアルコトガワカル.

此時ノ x ノ値ヲ求ムルニハ $k=\dfrac{167}{28}$ ナルトキ判別式ハ 0 トナリ (1) ハ等根ヲ有スルカラ等根ノ公式ヲ用ヒテ　$x=\dfrac{1}{14}$

分數式ノ極大極小ヲ求ムルニハ此方法ニヨルノデアル.

【405】次式ノ極大極小ヲ求メヨ.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

【406】次式ノ數値ノ制限ヲ求ム.　$\dfrac{x^2+3}{x-1}$

【407】次式ヲ滿足セシムベキ x 及 y ノ極大及極小ノ數値ヲ求メヨ.　$x^2+y^2=6x-8y$

【408】聯立方程式 $x^2+xy+y^2=9,$ $x^2+y^2=k$ ハ k ノ値ガ如何ナル限界內ニアルトキ實根ヲ有スルカ.

【409】$x,\ y$ ガ $x^2+xy+y^2=9$ ヲ滿足セシムルトキ x^2+y^2 ノ極大及極小ノ値ヲ求メヨ.

【410】 ax^2+bx+c ノ數値ガ $x=1,\ 2,\ 3$ ナルトキ夫々 4, 2, 12 ナレバソノ極小ナル數値如何.

【411】 x ニツキテノ二次式 $y=x^2+px+q$ ニテ $x=1$ ノトキ $y=3$ ナル極小値ヲトルトイフ. p 及 q ノ値ヲ求メヨ.　14 熊本醫大

【412】 x ニ適當ナル實數ヲ與フルトキ二次式 x^2-3x+8 ノ取リウル 10 未滿ノ整數値ヲ求メヨ.　14 甲南高校

【413】 正ノ實數二個ノ和不變ナルトキハソノ積ハソノ各ノ數ガ相等シキトキ最大ナルコトヲ證セヨ.

解　二數ヲ $x,\ y$, ソノ不變ノ和ヲ a トスレバ

$x+y=a\qquad\therefore\ y=a-x$

$\therefore\ xy=x(a-x)=ax-x^2=\dfrac{a^2}{4}-\left(\dfrac{a^2}{4}-ax+x^2\right)$

$=\dfrac{a^2}{4}-\left(\dfrac{a}{2}-x\right)^2$

而ルニ $\left(\dfrac{a}{2}-x\right)^2\geqq 0$

故ニ xy ハ $x=\dfrac{a}{2}$ ナルトキ極大トナリソノ極大値ハ $\dfrac{a^2}{4}$ デアル. 而シテ $x=\dfrac{a}{2}$ ナルトキハ

$y=a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\qquad\therefore\ x=y$

別解　$xy=\dfrac{1}{4}(x+y)^2-\dfrac{1}{4}(x-y)^2=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{1}{4}(x-y)^2$

而シテ $\dfrac{1}{4}(x-y)^2\geqq 0$

故ニ xy ハ $x=y$ ナルトキ極大トナリソノ極大値ハ $\dfrac{a^2}{4}$ デアル.

【414】 二ツノ正數ノ積ガ一定ナルトキハソノ和ハ二數ガ相等シキトキ極小トナル.

解　二數ヲ $x,\ y$, ソノ不變ノ積ヲ a トスレバ

$xy=a\qquad\therefore\ y=\dfrac{a}{x}$

$\therefore\ x+y=x+\dfrac{a}{x}=\left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{a}$

而ルニ $x>0,\ a>0$ 故ニ $\sqrt{x},\ \sqrt{a}$ ハ實數

$\therefore\ \left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2\geqq 0$

故ニ $x+y$ ハ $\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ ナルトキ極小トナル.

而シテ $\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ ナルトキ $x=\sqrt{a}$

$\therefore\ y=\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\qquad\therefore\ x=y$

別解 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4a$

而ルニ $(x-y)^2\geqq 0$ 故ニ $(x+y)^2$ ハ $x=y$ ナルトキ極小トナル. 而ルニ $x+y>0$ 故ニ $x+y$ ハ $(x+y)^2$ ガ極小ナルトキ極小トナル. 故ニ $x+y$ ハ $x=y$ ナルトキ極小デアル.

注意 前二問ノ別解ハ記憶シテ置クガヨイ.

【415】一邊ノ長サ a ナル正方形ニ面積ノ最モ小ナル正方形ヲ内接セヨ.

【416】底邊 a 尺高サ b 尺ナル三角形ニ内接シ, 一邊ガ三角形ノ底邊上ニアル矩形ノ面積ヲ最大ナラシムルニハソノ二邊ヲ如何ナル長サトスベキカ.

【417】無稅ニテ輸入スル物品アリ. 今之ニ p 割ノ稅ヲ課スルノ結果ハソノ輸入額ニ於テ $5p$ 割ヲ減ズルモノトスレバ最多額ノ稅金ヲ得ルニハ幾割ノ稅ヲ課スベキカ.　　13 仙臺高工

【418】45 哩ヲ隔タリタル A 及 B ノ二地アリ. 又 A ヲ通ル或方向ニ一直線ニ設ケタル鐵道線路 XAY アリ. B ヨリ此線路ニ至ル距離ハ 27 哩ナリ. 今 AB 間ニ貨物運搬ノタメ B ヨリ鐵道線路 XAY ノ或點 C ニ向テ一直線ニ新道ヲ開カントスルニ貨物ノ運賃ヲナルベク少ナカラシメントスレバ點 C ハ A ヨリ幾哩ノ距離ニ設クベキカ. 但シ新道ニ於テノ運賃ハ鐵道ニ於テノ運賃ノ二倍ヲ要スルモノトス.　　13 名古屋高商

88 二次三項式ノ値ノ變化

例(1) x^2-5x+6 ノ値ノ變化

$x^2-5x+6=0$

$x^2-5x+6>0$

$x^2-5x+6<0$

ヲ解イタ結果ヲ綜合スレバ

x	…………	2	…………	3	…………
x^2-5x+6	…+…	0	…−…	0	…+…

コレデ x^2-5x+6 ノ符號ノ變化ヲ知ルコトガ出來ルノデアルガ更ニ

$$x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$ トナルカラ

x^2-5x+6 ハ $x=\frac{5}{2}$ ナルトキ極小トナリ, ソノ極小値ハ $-\frac{1}{4}$ デアツテ x ノ値ガ $\frac{5}{2}$ ヨリ大キクナツ

テモ又小サクナッテモ式ノ値ハ $-\frac{1}{4}$ ヨリ大キクナル. 且 x ノ値ガ $\frac{5}{2}$ カラ遠ザカレバ遠ザカル程式ノ値ハドコマデモ增加シテ行クコトガ分ル.

即チ x ガ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデ變化スル間ニ

x^2-5x+6 ハ $+\infty$ カラ漸次減少シテ $x=2$ ナルトキ 0 トナリ x ガ 2 ヨリ大トナレバ x^2-5x+6 ハ負數トナリ, $x=\frac{5}{2}$ ナルトキ最小値 $-\frac{1}{4}$ トナリ, ソレカラ減少ガ變ジテ增加トナリ, $x=3$ ノトキ再ビ 0 トナリ, 又正數トナッテ x ガ增セバ增ス程式ノ値モ增シテ行ク. 此ノ變化ハ**グラフ**ヲ用フレバ最モ明瞭ナラシメルコトガ出來ル.

注意 $x=\frac{5}{2}$ ハ $x=2$ ト $x=3$ トノ中央ノ値ナルコトヲ注意セヨ.

例(2) x^2+6x+9 ノ變化

$x^2+6x+9=0$ 　ノ根　$x=-3$　(等根)

$x^2+6x+9>0$ 　ノ解　$x<0$ 又ハ $0<x$

$x^2+6x+9<0$ 　ノ解　ナシ

此等ノ結果ヲ綜合スレバ

x ……………… -3 ………………

x^2+6x+9…… + …… 0 …… + ………

次ニ $x^2+6x+9=(x+3)^2$ ダカラソノ極小値ハ0, 故ニ x^2+6x+9 ハ $x=-3$ ナルトキ極小値 0 トナリ, x ガ -3 ヨリ大トナッテモ小トナッテモソノ値ハ正トナリ, x ノ値ガ -3 カラ遠ザカレバ遠ザカル程ソノ値ハ如何程デモ大トナル.

例(3) $2x^2+x+3$ ノ變化

$2x^2+x+3=0$ 　ノ根　$x=\frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{4}$

即チ $2x^2+x+3$ ヲ 0 ナラシムル x ノ實數値ハナイ

$2x^2+x+3>0$ 　ノ解　絕對的不等式

$2x^2+x+3<0$ 　ノ解　ナシ

$2x^2+x+3=2(x+\frac{1}{4})^2+2\frac{7}{8}$ ヨリ

$2x^2+x+3$ ノ極小値ハ $2\frac{7}{8}$

故ニ $2x^2+x+3$ ハ 0 トナルコトモナク負トナルコトモナク常ニ正デアル. 而シテ $x=-\frac{1}{4}$ ノトキ極小ノ値 $2\frac{7}{8}$ トナリ, x ガ $-\frac{1}{4}$ カラ遠ザカレバ其値ハ如何程デモ增加スル.

上ノ三ツノ例ニヨツテ二次三項式ハ或場合ニハ正, 0, 負ノ値ヲトリ或場合ニハ正, 0 ノ値ヲトリ或場合ニハ正ノミノ値ヲトルモノデアルコトガ分ル. 即チ

$ax^2+bx+c=0$ ガ

(i) 相異ナル實根 α, β ヲ有スルトキ 但 $\alpha<\beta$ トス

$$\begin{array}{l} x \cdots\cdots\cdots\cdots \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots \beta \cdots\cdots\cdots \cdots\cdots \\ ax^2+bx+c \cdots + \cdots\cdots 0 \cdots\cdots - \cdots\cdots 0 \cdots\cdots + \cdots\cdots \end{array}$$

(ii) 相等シキ實根 α ヲ有スルトキ

$$\begin{array}{l} x \cdots\cdots\cdots\cdots \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax^2+bx+c \cdots\cdots + \cdots\cdots 0 \cdots\cdots + \cdots\cdots \end{array}$$

(iii)虚根ヲ有スルトキ

ax^2+bx+c ハ常ニ正

以上ハ x^2 ノ係數ヲ正トシテ論ジタノデアルガ $a<0$ ナル場合ハ讀者之ヲ考究セヨ.

【419】 $x^2-6x+12$ ハ x ニ如何ナル値(實數)ヲ與フルモ決シテ負數トナルコトナシ. ソノ證如何. 12 廣嶋高師

解 $x^2-6x+12=(x-3)^2+3$

而ルニ x ハ實數ナル故 $x-3$ モ實數

$\therefore\ (x-3)^2\geqq 0 \qquad \therefore\ (x-3)^2+3>0$

故ニ $x^2-6x+12$ ハ負數トナルコトナシ.

別解 $x^2-6x+12=k$ トスレバ $x^2-6x+12-k=0$ ....(1)

(1) ノ根ハ實數 $\therefore\ 36-4(12-k)\geqq 0$

$\therefore\ k\geqq 3$..................(2)

因テ k ノ極小値ハ 3, 故ニ k ハ負數トナルコトハナイ.

【420】 m ニ如何ナル値ヲ與フルトキ次ノ二次式ハ x ノ値ノ如何ニ拘ハラズ常ニ正ノ數値ヲ有スルカ.

$3x^2+7x+m$

【421】 $x^2+px+\dfrac{p}{2}$ ガ x ノ値ノ如何ニ關セズ常ニ正ナルタメニ p ニ與フベキ値ノ限界ヲ求ム.

【422】 二次三項式 Ax^2+Bx+C ガ x ノ値ノ如何ニ關セズ x^2 ノ係數ト同符號ナルタメニハ $B^2-4AC<0$ ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ.

解 $Ax^2+Bx+C=A\left\{\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2-\dfrac{B^2-4AC}{4A}\right\}$

Ax^2+Bx+C ガ A ト同符號ナルタメニハ

$\left\{\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2-\dfrac{B-3AC}{4A}\right\}>0$ ナルヲ要スル.

而ルニ $\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)\geqq 0$ ナルヲ以テ上ノ不等式ヲ常ニ成

立セシメルニハ $-\dfrac{B^2-4AC}{4A}>0$ ナラシムルヲ要スル. $\left\{(x+\dfrac{B}{2A})^2=0\right.$ ナル場合ニモナホ上ノ不等式ヲ成立セシムルタメデアル.$\left.\right\}$

因テ $B^2-4AC<0$ デナケレバナラヌ.

別解 $Ax+Bx+C=k$ ヲ滿足スル x ハ實數ナルヲ以テ

$B^2-4A(C-k)\geqq 0 \qquad \therefore\ 4Ak\geqq-(B^2-4AC)$

$A,\ k$ ガ同符號即チ $Ak>0$ ナルタメニハ $B^2-4AC<0$

第十章　分數方程式

$\boxed{89}$ $\dfrac{A}{B}$ ニ於テ A ハ 0 トナルコトヲ得ルケレドモ B ハ 0 トナッテハイケナイ.

$\dfrac{A}{B}=0$ トナルノハ $A=0$ 且 $B\neq 0$ ナルトキデアル.

分數方程式 $\dfrac{A}{B}=0$ ノ根トハ A ヲ 0 ナラシメ且 B ヲ 0 ナラシメナイ未知數ノ値ノコトデアル.

分數方程式ハ移項シテ一ツノ分數ニ纒ムレバ常ニ $\dfrac{A}{B}=0$ ナル形ニ化スコトガ出來ル.

分數方程式 $\dfrac{A}{B}=0$ ヲ解クニハ

(i) 先ヅ $A=0$ ヲ滿足スル未知數ノ値ヲ求メ

(ii) 次ニ若シソノ中ニ B ヲ 0 ナラシメルモノガアレバ之ヲ捨テ, B ヲ 0 ナラシメナイモノダケヲトレバソレガ $\dfrac{A}{B}=0$ ノ根デアル.

分母ヲ拂ッテ一邊ニ集メルノハ $A=0$ ナル方程式ヲ作ル手段ナノデアル.

注意 $A=0$ ノ根ノ中 B ヲ 0 ナラシメルモノデモ捨テナイデ根トスル場合ガアルケレドモ今ハ皆捨テルコトニ定メテ置ク.

【423】 $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$ ヲ解ケ. (以下解ケヲ略ス)

要點 $\dfrac{x-1}{x+1}-1+\dfrac{x+5}{x+7}-1=\dfrac{x+1}{x+3}-1+\dfrac{x+3}{x+5}-1$ トシテカラ分母ヲ拂ヘバイクラカ簡單ニナル.

【424】 $\dfrac{2x-3}{x-1}-\dfrac{3x-8}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=0$

【425】 $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2$

【426】 $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$

【427】 $\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}=3x$

【428】 $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3$

【429】 $\dfrac{1}{x^2+x-1}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+x-1}}=12$

【430】 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$

【431】 $x^2-\dfrac{1}{x^2}=a^2-\dfrac{1}{a^2}$

【432】 $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{2}{2+3x}+\dfrac{3}{3+4x}=\dfrac{4}{4+5x}$

【433】 $x-\dfrac{1}{x}+x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

要點 $x-\dfrac{1}{x}$ ヲ一團トシテ解ケ.

【434】 $(x-\dfrac{1}{x})^2+2(x+\dfrac{1}{x})=4$

【435】 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{10}{3}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$

【436】 $x^2+x+\dfrac{1}{x^2+x}=2\dfrac{1}{2}$

第十一章 無理方程式

90 無理方程式ヲ解クニハ先ヅ方程式中ノ根號ヲ取除ク工夫ヲシナケレバナラナイ．之ヲナスニハ兩邊ヲ二乘三乘等スルコトヲ要スルノデアルガ，方程式ノ兩邊ヲ二乘三乘等スルコトハ方程式ノ根ニ如何ナル影響ヲ及ボスモノデアルカ，先ヅ之ヲ明カニシテ置カナクテハナラナイ．

定理 方程式 $A=B$ ノ兩邊ヲ n 乘シテ $A^n=B^n$ トスルコトハ $A=B$ ノ兩邊ニ $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}$ ヲ掛ケルコトニナル．

證 $A^n=B^n \qquad \therefore\ A^n-B^n=0$

$$\therefore\ (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})=0$$

$$\therefore\ A(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$$
$$=B(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$$

此定理ニヨツテ

$$A^n=B^n \text{ ハ } \begin{cases} A=B \\ A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}=0 \end{cases}$$

ト同値デアル．故ニ $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}=0$ ガ根ヲ有スル場合ニハ $A=B$ ハ兩邊ヲ n 乘スルコトニヨツテソレダケ餘分ノ根ヲ增スコトニナル．若シ之ガ根ヲ有シナイトキハ兩邊ヲ n 乘シテモ方程式ノ根ニ變化ハナイ．

例(1) $A^2=B^2$ ハ $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=0 \end{cases}$ ト同値デアル．

(2) $A^3=B^3$ ハ $\begin{cases} A=B \\ A^2+AB+B^2=0 \end{cases}$ ト同値デアル．

(3) $\sqrt{x^2+3x+5}=3$ ノ兩邊ヲ二乘シテ $x^2+3x+5=9$

トスレバ之ハ $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+5}=3 \\ \sqrt{x^2+3x+5}=-3 \end{cases}$ ト同値デアル．

而ルニ $\sqrt{x^2+3x+5}=-3$ ハ根ヲ有シナイカラ此例デハ兩邊ヲ二乘シテモ根ニ變化ガナイ．

斯ク方程式ノ兩邊ヲ二乘三乘等スルコトハ特別ノ場合ヲ除ク外餘分ノ根ヲ導入スルモノデアルケレドモ無理方程式ヲ解クニハ兩邊ヲ二乘三乘等スルコトヲ避ケルコトハ出來ナイノデアルカラ始メカラ餘分ノ根ヲ得ルコトヲ承知ノ上デ二乘三乘等シテ根ヲ求メ，然ル後餘分ノモノヲ捨テル工夫ヲシナケレバナラナイ．之ガ無理方程式解法ニ於テ得ラレタ根ヲ一々原方程式(二乘三乘等スル前ノ方程式)ニ代入シテ驗シヲスル必要アル所以デアル．

兩邊ヲ二乘三乘等スルニハ豫メ適當ニ移項スルコトヲ考ヘナケレバナラヌ．

例 $\sqrt{7x-4}+\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}\cdots\cdots(1)$

之ヲ移項シテ　13 明大

$\sqrt{7x-4}-\sqrt{4x-1}=\sqrt{4x-2}-\sqrt{7x-5}\cdots\cdots(2)$

$\sqrt{7x-4}-\sqrt{4x-2}=\sqrt{4x-1}-\sqrt{7x-5}\cdots\cdots(3)$

$(1)^2\cdots 14x-9+2\sqrt{7x-4}\sqrt{7x-5}$

$=8x-3+2\sqrt{4x-1}\sqrt{4x-2}$

$(2)^2\cdots 11x-5-2\sqrt{7x-4}\sqrt{4x-1}$

188

$=11x-7-2\sqrt{4x-2}\sqrt{7x-5}$

$(3)^2\cdots 11x-6-2\sqrt{7x-4}\sqrt{4x-2}$

$=11x-6-2\sqrt{4x-1}\sqrt{7x-5}$

此結果ヲ比較スレバ(1), (2), (3)何レガ最モ便利デアルカガ明カデアラウ.

【437】 $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$ ヲ解ケ.　11 神戸商船

【438】 $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$　(以下解ケトイフ言葉ヲ略ス)　13 東京高師

【439】 $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+6}=1$　12 廣島高師

【440】 $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$

【441】 $2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=1$

【442】 $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1$　13 和歌山高商

【443】 $\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2-5x+3}=x+1$　13 明治專門

【444】 $(x^2+ax+b^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-ax+b^2)^{\frac{1}{2}}=2a$ 但 $a>b>0$ トス.

【445】 $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$

【446】 $(x^3+11x^2+40x+49)^{\frac{1}{3}}-x=4$

【447】 $x^2-10x-4\sqrt{x^2-10x+45}=-23$

【448】 $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$

【449】 $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$　13 東京商大

【450】 $(1+x)^{\frac{2}{3}}+4(1-x)^{\frac{2}{3}}=5(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$

【451】 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0$

【452】 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$

【453】 $\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x+28}-\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+28}+\sqrt{2x+4}}$

第十二章 聯立方程式

91 聯立方程式ノ意義

$2x-y=3$ ....(1)

$2x+2y=8$ ....(2)

(1), (2) ヲ別々ニ考フルトキハ何レモ無數ノ解ガアッテ不定デアル. 然ルニ若シ x, y ガ兩方程式ニ於テ同ジ數ヲ表ハスモノトスレバ x, y ハ唯一組ノ數ダケヲ表ハスコトヽナル.

定義 一組ノ方程式ニ於テ同ジ文字ハ何レノ方程式ニ於テモ同ジ數ヲ表ハスモノトスルトキ此一組ノ方程式ヲ聯立方程式トイフ.

92 聯立方程式ノ同値

定理(1) 次ノ三組ノ聯立式ハ同値デアル.

(1) $\begin{cases}A=B\\C=D\end{cases}$ (2) $\begin{cases}A=B\ (\text{又ハ}\ C=D)\\mA+nC=mB+nD\end{cases}$

(3) $\begin{cases}mA+nC=mB+nD\\m'A+n'C=m'B+n'D\end{cases}$ 但 m, n, m', n' ハ 0 ニアラザル常數デ且 $mn'-m'n\neq 0$ トスル.

證(i) (1), (2) ノ同値

(1) ノ根ハ明カニ (2) ヲ滿足スル.

(2) ノ根ハ $A=B$ ナラシメ從テ $mA=mB$ ナラシメ

ルカラ第二ノ方程式カラ $nC=nD$ ナラシメ從テ $C=D$ ナラシメル. 因テ (1) ヲ滿足スル. 卽チ (1), (2) ハ同値デアル.

(ii) (1), (3) ノ同値

(1) ノ根ハ明カニ (3) ヲ滿足スル. 次ニ

$$(3')\begin{cases}mm'A+m'nC=mm'B+m'nD\\mm'A+mn'C=mm'B+mn'D\end{cases}$$

トスレバ (3) ノ根ハ (3′) ヲ滿足スル, 從テ $(m'n-mn')C=(m'n-mn')D$ ナラシメル.

而ルニ $m'n-mn'\neq 0$ ダカラ $C=D$ ナラシメル. 從テ又 $A=B$ ナラシメル. 卽チ (3) ノ根ハ (1) ヲ滿足スル. 因テ (1), (3) ハ同値デアル.

注意 $mn'-m'n=0$ ナル場合ハ例ヘバ

$$\begin{cases}6A+5C=6B+5D\\12A+10C=12B+10D\end{cases}$$

ノヨウナ場合デアル. 之ハ一ツノ方程式ト同ジデアル.

例 $2x-y=3\cdots\cdots\cdots A=B\cdots\cdots\cdots(1)$

$3x+2y=8\cdots\cdots C=D\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\times 2+(2)\cdots\cdots\cdots 7x=11\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ト (1) トヲ解ケバヨイ.

卽チ $\begin{cases}A=B\\2A+C=2B+D\end{cases}$

ヲ解クコトヽナル.

上ノ解法ハ加減法トイフノデアルガ, 此外ニナホ代入法, 等置法等ノ解法ガアル. 然シ何レモ皆上ノ定理ニ基クモノデアル. 代入法デ上ノ例ヲ解ケバ

(1) ヨリ $y=2x-3\cdots\cdots\cdots(4)$

(4) ヲ (2) ニ代入スレバ $3x+2(2x-3)=8\cdots\cdots(5)$

(4) ト (5) ヲ解ケバヨイ.

(5) ハ (4) ヲ $2x-3=y\cdots\cdots\cdots\cdots(4')$ トシ

$(4')\times 2+(2)$ トシテ得ラレタモノニ外ナラヌ. ヨツテ代入法ハ加減法ノ特別ノ形ダトイヘル. 等置法ニ付テモ同様デアル.

定理(2) 聯立方程式$\begin{cases}A=B\\CD=0\end{cases}$ ト二組ノ聯立方程式

$\begin{cases}A=B\\C=0\end{cases}$, $\begin{cases}A=B\\D=0\end{cases}$ トハ同値デアル.

但 $CD=0$ ガ分數方程式ナルトキハ例外ノ場合ガ起ルコトガアル.

證 始ノ根ハ後ノ二ツノ何レカヲ滿足シ.

後ノ方程式ノ根ハ始メノヲ滿足スルコト明カデアル.

例 $\left\{\begin{array}{l} 4x-y=7 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-5xy+6y^2=0 \cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヨリ $(x-3y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x-3y=0$ 又ハ $x-2y=0.$

故ニ $\left\{\begin{array}{l} 4x-y=7 \\ x-3y=0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 4x-y=7 \\ x-2y=0 \end{array}\right.$

ノ二組ノ聯立方程式ヲ解ケバヨイ.

定理(3) 次ノ二組ノ聯立方程式ハ同値デアル.

(1) $\left\{\begin{array}{l} A=B \\ C=D \end{array}\right.$ (2) $\left\{\begin{array}{l} A=B \\ mA^2+nC=mB^2+nD \end{array}\right.$

次ノ二組ノ聯立方程式ハ一般ニ同値デナイ.

(3) $\left\{\begin{array}{l} A=B \\ C=D \end{array}\right.$ (4) $\left\{\begin{array}{l} C=D \\ mA^2+nC=mB^2+nD \end{array}\right.$

但 m, n ハ 0 ニアラザル常數デアル.

證(i) (1), (2) ノ同値ナルコト.

(1) ノ根ハ (2) ヲ滿足スルコトハ明カデアル.

(2) ノ根ハ $A=B$ ナラシメ従テ $mA^2=mB^2$ ナラシメ従テ第二ノ方程式カラ $nC=nD$ ナラシメ $C=D$ ナラシメル. 因テ (2) ノ根ハ (1) ヲ滿足スル. 故ニ (1) (2) ハ同値デアル.

(ii) (3), (4) ノ同値ナラザルコト.

(3) ノ根ハ明カニ (4) ヲ滿足スル.

(4) ノ根ハ $C=D$ ナラシメ $nC=nD$ ナラシメ従テ第二ノ方程式カラ $mA^2=mB^2$ ナラシメ $A^2=B^2$ ナラシメル. 因テ (4) ハ $\left\{\begin{array}{l} C=D \\ A^2=B^2 \end{array}\right.$ ト同値デアル. 故ニ一般ニ (3) ト同値デナイ.

例 $x+y=2 \cdots\cdots\cdots(1) \cdots\cdots\cdots 2-y=x \cdots\cdots\cdots(1') \cdots\cdots A=B$

$x^2+y^2=10 \cdots\cdots(2) \cdots\cdots\cdots C=D$

(1′) ヲ (2) ニ代入シテ

$4-4y+y^2+y^2=10 \cdots\cdots\cdots A^2+C=B^2+D$

$\therefore\ y^2-2y-3=0$

$\therefore\ (y-3)(y+1)=0$

$\therefore\ y=3$ 又ハ $-1 \cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ト (1) トヲ組合ハセテ解ケバ

$\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

若シ (3) ト (2) トヲ組合ハセテ解ケバ

$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

此中二ツハ餘分ノ根デアル.

注意 方程式ヲ平方シテ用ヒタラ平方シナイ元ノマヽノ形デ今一度用ヒナケレバナラナイモノト思ッテ居レバヨイ.

系 次ノ二組ノ聯立方程式ハ同値デアル.

(1) $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ (2) $\begin{cases} A=B \\ EA+nC=EB+nD \end{cases}$

次ノ二組ノ聯立方程式ハ一般ニ同値デナイ.

(3) $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ (4) $\begin{cases} C=D \\ EA+nC=EB+nD \end{cases}$

但 E ハ未知數ヲ含ム式デ n ハ 0 ニアラザル常數デアル.

證(i) (1), (2) ガ同値デアルコトノ證明ハ本定理ニ於ケル場合ト同樣ニシテデキル.

(ii) (3), (4) ガ同値ナラザルコト.

(3) ノ根ハ明カニ (4) ヲ滿足スル.

(4) ノ根ハ $C=D$ ナラシメ $nC=nD$ ナラシメ從テ第二ノ方程式カラ $EA=EB$ ナラシメル. 然ルニ E ハ未知數ヲ含ムカラ之カラ直チニ $A=B$ トスルコトハ出來ナイ. 即チ (4) ハ $\begin{cases} C=D \\ EA=EB \end{cases}$ ト同値デ之ハ又 $\begin{cases} C=D \\ E=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} C=D \\ A=B \end{cases}$ ト同値デアル. 因テ (3),(4) ハ同値デナイ.

例 $x-2y=1$………(1)……$2y+1=x$ ……(1′)……$A=B$

$x^2-3xy+y^2=-1$………(2)………$C=D$

(1′) ヲ (2) ニ代入スレバ

$4y^2+4y+1-6y^2-3y+y^2=1$………(3)…

……$A^2-3yA+C=B^2-3yB+D$

$\therefore\ y^2-y-2=0 \qquad \therefore\ (y-2)(y+1)=0$

$\therefore\ y=2$ 又ハ -1………(4)

(1′)ト(4)トヲ解ケバ……$\begin{cases} A=B \\ A^2-3yA+C=B^2-3yB+D \end{cases}$

$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(2)ト(4)トヲ解ケバ……$\begin{cases} C=D \\ A^2-3yA+C=B^2-3yB+D \end{cases}$

$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

此中二ツハ無緣根デアル.

93 未知數ノ數ト方程式ノ數

(i) 聯立方程式ニ於テ方程式ノ數ガ未知數ノ數ヨリ少ナイ場合ニハソノ聯立方程式ハ一般ニ不定デアル.

例 $2x+3y+4z=0$

$3x-2y-6z=11$

ニ於テ z ニ或値ヲ與フルトキソレニ對シテノx, yノ値ガ一組ダケ得ラレル．然ルニ z ニハ無數ノ相異ナル値ヲ與フルコトガ出來ルノデアルカラ，ソレニ對スルx, yノ値モ亦無數ニ得ラレル譯デアル．即チ方程式ハ不定デアル．

(ii) 聯立方程式ニ於テ方程式ノ數ガ未知數ノ數ヨリ多イ場合ニハ一般ニソノ聯立方程式ニハ解ガナイ．

例 $a'x+b'y+c'=0$………(1)

$a''x+b''y+c''=0$………(2)

$a'''x+b'''y+c'''=0$………(3)

(1), (2)ヲ解イテ $x=\dfrac{b'c''-b''c'}{a'b''-a''b'}$, $y=\dfrac{c'a''-c''a'}{a'b''-a''b'}$

此 x, y ノ値ハ (3) ニハ全然無關係ニ求メラレタモノデアルカラ一般ニ (3) ヲ滿足スル譯ガナイ．

若シ a''', b''', c''' ノ値ガ丁度

$$a'''\times\frac{b'c''-b''c'}{a'b''-a''b'}+b'''\times\frac{c'a''-c''a'}{a'b''-a''b'}+c'''=0$$

ヲ成立セシムル場合ニ限ツテ上ノ聯立方程式ハ解ガアルノデアル．

ソレデコンナ場合ニソノ中ノ幾ツカノ方程式カラ未知數ノ値ガ決定サレタラ，ソレガ殘リノ方程式ヲ滿足スルカ否カヲ驗スコトヲ忘レテハナラナイ．

(iii) 聯立方程式中ノ一個ノ方程式ガ他ノ殘リノ方程式カラ導キ出サレルモノデアツタラ，ソレハ一個ノ方程式トシテ數フル價値ガナイ．

注意 $\begin{cases}3x+2y=4\\3x+2y=10\end{cases}$ ノ如キ矛盾シタ方程式ガ聯立シナイコトハ勿論デアル．

【454】 $\begin{cases}x^2+y^2-40=0\\3x-y=0\end{cases}$ ヲ解ケ．(以下解ケトイフ言葉ヲ略ス)

要點 一次ノ方程式カラ一未知數ヲ出シテ二次ノ方程式ニ代入シ，得ラレタ値ヲ一次ノ方程式ニ代入スレバヨイ．(二次ノ方ニ代入シテハイケナイ)二次以上ノ聯立方程式ハ此場合ニ歸セシメテ解ク場合ガ甚ダ多イ．

【455】 $\begin{cases}3x+y=14\\x^2-2xy+2y^2=29\end{cases}$ 【456】 $\begin{cases}\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=3\\5(x-1)=3(y+2)\end{cases}$

【457】 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 \\ \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=a+b \end{cases}$

【458】 $\begin{cases} xy+x=3 \\ 3xy-2y=2 \end{cases}$

要點 先ヅ xy ノ項ヲ消去スレバヨイ.

【459】 $\begin{cases} x^2+4y^2=(x+2y-1)^2 \\ 4x^2+9y^2=(2x-3y+2)^2 \end{cases}$ 7 海兵

【460】 $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{3}{x}=4 \end{cases}$

【461】 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{9}{20} \end{cases}$

【462】 $\begin{cases} x^2-3y^2+2y=3 \\ 2x^2-7xy+6y^2=0 \end{cases}$

要點 之ハ $A=B,\ CD=0$ トナル場合デ $\begin{cases} A=B \\ C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=B \\ D=0 \end{cases}$ ヲ解ケバヨイ.

【463】 $\begin{cases} 2xy-x^2=3 \\ x^2+4xy+3x=40-6y-4y^2 \end{cases}$

要點 第二方程式ハ $CD=0$ ナル形ニ化スコトガ出來ル.

【464】 $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3 \\ x^2-y^2-2x+1=0 \end{cases}$

【465】 $\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ x^2+y^2=61(x-y)^2 \end{cases}$ ノ實根ヲ求ム.

【466】 $\begin{cases} 7(x^2+y^2)=25(x^2-y^2) \\ xy=48 \end{cases}$

【467】 $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{15}{2} \end{cases}$ 7 高校

【468】 $\begin{cases} 3x^2-4xy+3y^2=2 \\ 2x^2-2xy+5y^2=5 \end{cases}$

要點 常數項ヲ消去シテ $CD=0$ ナル方程式ヲ作ルカ又ハ第二ノ方程式ノ兩邊ハ 0 デナイカラソレデ第一方程式ノ兩邊ヲ割ツテソレカラ $CD=0$ ナル方程式ヲ作リ之ト第一第二何レカト組合ハセテ解ケバヨイ.

【469】 $(x^2+y^2-3xy-3)^2+(2x^2+y^2-6)=0$ ノ實根ヲ求メヨ.

【470】 $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

要點 一次ト二次トノ聯立方程式ダカラ代入法ニヨッテ解ケルノデアルケレドモ次ノヨウナ特別ノ解法ガアル.

解 $x+y=8\cdots\cdots\cdots(1)$ $x^2+y^2=34\cdots\cdots(2)$

$(1)^2$ $x^2+2xy+y^2=64\cdots\cdots\cdots(3)$

$(3)-(2)$ $2xy=30$ $\therefore$ $xy=15\cdots\cdots(4)$

(1), (4) ヨリ求ムル x, y ノ値ハ次ノ方程式ノ二根デアル.

$t^2-8t+15=0$ $\therefore$ $(t-3)(t-5)=0$

$\therefore$ $t=3$ 又ハ 5

$\therefore$ $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

【471】 $\begin{cases} x+y=a+b+c \\ xy=bc+ca \end{cases}$

【472】 $\begin{cases} \dfrac{ab}{xy}=8 \\ \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=20 \end{cases}$

要點 $\dfrac{a}{x}=X$, $\dfrac{b}{y}=Y$ トセバ $XY=8, X^2+Y^2=20$ トナル

【473】 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

要點 $x+y=X$, $xy=Y$ トセヨ.

【474】 $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=4 \\ (x+y)^2-3xy=1 \end{cases}$

【475】 $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=43 \\ 7xy=10(x+y) \end{cases}$

【476】 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ x^2y^2+x+y=8xy-9 \end{cases}$

【477】 $\begin{cases} x+y=5+\sqrt{x}+\sqrt{y} \\ (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=6 \end{cases}$

要點 $x-\sqrt{x}=X$, $y-\sqrt{y}=Y$ トスレバ第一ノ方程式ハ $X+Y=5$ トナル.

【478】 $\begin{cases} x-y+xy=51 \\ (x-y)xy=308 \end{cases}$

要點 $x-y=X,\ xy=Y$ トシテ解ケバ

$$\begin{cases} x-y=44 \\ xy=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=7 \\ xy=44 \end{cases}$$

ヲ得ル. 因テ又 $-y=z$ トスレバ

$$\begin{cases} x+z=44 \\ xz=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=7 \\ xz=-44 \end{cases}$$

トナルカラ之ヲ解ケバヨイ.

【479】 $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=32 \\ (x^2+y^2)(x-y)=87 \end{cases}$

【480】 $\begin{cases} 2(x+y)^2-9(x+y)=18\cdots\cdots\cdots(1) \\ (x-y)^2+(x-y)=6\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

要點 $x+y$ ト $x-y$ トヲ求メテ解ク.

解 (1)$\cdots\cdots\cdots x+y=-\dfrac{3}{2}$ 又ハ 6

(2)$\cdots\cdots\cdots x-y=-3$ 又ハ 2

因テ次ノ四組ノ方程式ヲ解ケバヨイ.

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{2} \\ x-y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{2} \\ x-y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

之ヲ解イテ $\begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

【481】 $\begin{cases} (x+y)(x+y+1)=30 \\ (x-y)(x-y-2)=15 \end{cases}$ 【482】 $\begin{cases} (x+y)^2+4(x-y)=37 \\ xy+4(x-y)=16 \end{cases}$

【483】 $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}=30 \end{cases}$ 【484】 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3} \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

【485】 $\begin{cases} x+y=13\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=559\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

要點 (1) ノ兩邊ハ 0 デナイカラ之デ (2) ノ兩邊ヲ割レバヨイ.

【486】 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^3-y^3=9 \end{cases}$ 【487】 $\begin{cases} x^3+y^3=91 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$

【488】 $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$

【489】 $\begin{cases} x+y=35 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ 【490】 $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=12 \\ x^3+y^3=189 \end{cases}$

【491】 $\begin{cases} x^3+4xy+y^3=38 \\ x+y=2 \end{cases}$ 【492】 $\begin{cases} (x-7)^3+(5-y)^3=9 \\ x-y=5 \end{cases}$

【493】 $\begin{cases} (x^2+y^2)(x^3+y^3)=455\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

要點 (1)ヨリ $\{(x+y)^2-2xy\}(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=455\cdots(3)$
(2) ヲ (3) ニ代入シテ xy ヲ求メテ解ケ.

【494】 $\begin{cases} x+y=4 \\ x^4+y^4=82 \end{cases}$

【495】 $\begin{cases} x^2+y^2=41\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$

要點 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\left\{(\sqrt{x+y})^4+(\sqrt{x-y})^4\right\}$

因テ $\sqrt{x+y}=X$, $\sqrt{x-y}=Y$ トスレバ (1) ハ

$\dfrac{1}{2}(X^4+Y^4)=41$

【496】 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^5+y^5=33 \end{cases}$ 【497】 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \\ x^4+x^2y^2+y^4=481 \end{cases}$

【498】 $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$ 【499】 $\begin{cases} x^3-y^3=26 \\ x^2y-xy^2=6 \end{cases}$

【500】 $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3} \\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ 【501】 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

【502】 $\begin{cases} yz=20\cdots\cdots\cdots(1) \\ zx=15\cdots\cdots\cdots(2) \\ xy=12\quad\cdots\cdots(3) \end{cases}$

要點 $(1)\times(2)\div(3)$ トシテ z ヲ求メヨ.

【503】 $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2 \\ (z+c)(x+a)=b^2 \\ (x+a)(y+b)=c^2 \end{cases}$ 【504】 $\begin{cases} (x+y)(y+z)=10 \\ (y+z)(z+x)=14 \\ (z+x)(x+y)=35 \end{cases}$

【505】 $\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(z+x)=9 \\ z(x+y)=8 \end{cases}$　　【506】 $\begin{cases} y+z=\dfrac{5}{x} \\ z+x=\dfrac{9}{y} \\ x+y=\dfrac{8}{z} \end{cases}$

【507】 $\begin{cases} yz+5zx-5xy=10 \\ 2yz-3zx+xy=5 \\ 3yz-2zx-xy=10 \end{cases}$　　【508】 $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$

【509】 $\begin{cases} x+y+z=24 \cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2=z^2 \cdots\cdots\cdots (2) \\ xy=48 \cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

解　$(2)+(3)\times 2 \cdots\cdots\cdots (x+y)^2=z^2+96 \cdots\cdots\cdots (4)$

$(1) \cdots\cdots\cdots x+y=24-z \cdots\cdots\cdots (5)$

(5) ヲ (4) ニ代入スレバ　$(24-z)^2=z^2+95$

$\therefore\ 576-48z+z^2=z^2+96 \qquad \therefore\ z=10 \cdots\cdots (6)$

(6) ヲ (5) ニ代入スレバ　$x+y=14 \cdots\cdots (7)$

(3) ト (7) トヲ解イテ　$\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$　又ハ　$\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

因テ答ハ　$\begin{cases} x=6 \\ y=8 \\ z=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} x=8 \\ y=6 \\ z=10 \end{cases}$

【510】 $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x^2+y^2+z^2=38 \\ xy=6 \end{cases}$

【511】 $\begin{cases} x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2+z^2=5 \cdots\cdots\cdots (2) \\ yz-zx+xy=2 \cdots\cdots (3) \end{cases}$

要點　(3) ヲ $-z(x-y)+xy=2$ トシテ工夫セヨ．

【512】 $\begin{cases} x+y+z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ yz+zx+xy=-4 \cdots\cdots (2) \\ yz=2x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

要點　(2) ヲ $yz+x(y+z)=-4$ トシテ之ニ (1), (3) ヲ代入セヨ．

【513】 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ yz-zx+xy=7 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ xy-yz-zx=47 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

要點　(2), (3) ヨリ $yz=-20$, $y-z=\dfrac{27}{x}$ ヲ求メ (1) ト組合セテ解ケ．又ハ (1) ト (2) 若クハ (3) トカラ $x-y+z$ 若クハ $x+y-z$ ヲ求メルモヨイ．

【514】 $\begin{cases} z^2-xy-7=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z+2=0 \end{cases}$　　【515】 $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{7} \\ x^2-y^2+z^2=18 \end{cases}$

【516】 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{xyz}{x+y+z}$

【517】 $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ yz+y+z=29 \\ zx+z+x=23 \end{cases}$

要點 $xy+x+y+1=20$ トシ $(x+1)(y+1)=20$ 等トスル．

【518】 $\begin{cases} xy+x+y+3=0 \\ yz+y+z+7=0 \\ zx+z+x-11=0 \end{cases}$　　11 高校

【519】 $\begin{cases} x(x+y)=a^2 \\ y(x+y)=b^2 \end{cases}$

要點 邊々加ヘテ解ケ．

【520】 $\begin{cases} x(x+y+z)=2 \\ y(x+y+z)=4 \\ z(x+y+z)=3 \end{cases}$

【521】 $\begin{cases} z=y-2z \\ zx=6z-x \\ xy=x-y \end{cases}$

要點 各方程式ノ兩邊ヲ夫々 yz, zx, xy デ割ツテ解ク．ソレデ先ヅ觀察ニヨツテ

(1) $x=0$, $y=0$, $z=0$ ノ根ガアルコト，

(2) $x=0$, $y=0$, $z\neq 0$ 又ハ $x=0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ ノ如キ根ハナイコト，

ヲ見，次ニ $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ ナル根ヲ求ムルタメニ各方程式ヲ夫々 yz, zx, xy デ割ツテ解ク．

【522】 $\begin{cases} xy=a(x+y) \\ yz=b(y+z) \\ zx=c(z+x) \end{cases}$　　【523】 $\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \\ 4y=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z} \\ 5z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \end{cases}$

【524】 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=c^3 \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2+z^2=c^2 \cdots\cdots(2) \\ x+y+z=c \cdots\cdots(3) \end{cases}$　　12 神戸高商

要點 (1) ト (3) トヨリ $(y+z)(z+x)(x+y)=0$ ヲ
(1) ト (2) トヨリ $xy+yz+zx=0$ ヲ導イテ解ケ．

【525】 $\begin{cases} x^2=ax+by \\ y^2=ay+bx \end{cases}$

【526】 $\begin{cases} x^2-xy=2x+5 \\ xy-y^2=2y+2 \end{cases}$

【527】 $\begin{cases} x^2+xy=4x-2 \\ y^2+xy=4y-1 \end{cases}$

【528】 $\begin{cases} x^2y^2+a^2b^2=2b^2y^2 \\ xy+ab=2ax \end{cases}$

【529】 $\begin{cases} x(1+x)=y(4+y)\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+4y=(x+y)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$ 12 東京商船

解 (1)$\cdots\cdots\cdots x-4y=-x^2+y^2\cdots\cdots\cdots(3)$

$x+y\neq 0$ ナルトキ

$(3)\div(2)\cdots\cdots\cdots\dfrac{x-4y}{x+4y}=-\dfrac{x-y}{x+y}$

$\therefore\ x^2-3xy-4y^2=-x^2-3xy+4y^2$

$\therefore\ x^2=4y^2\quad\therefore\ x=\pm 2y$ 以下略

$x+y=0$ ナルトキハ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ナル根ガアル.

【530】 三數アリ. 何レノ二ツノ相乘積モ殘リノ一ツニ等シトイフ. 各數ヲ求メヨ. 12 東京商大

【531】 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 12 明治專門

【532】 $\dfrac{yz}{y+z}=a,\quad \dfrac{xz}{x+z}=b,\quad \dfrac{xy}{x+y}=c$ 12 金澤高工

【533】 聯立方程式 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3,\quad x^2+y^2+1=2x$ ヲ滿足スル x, y ノ實數値ハ存在セザルコトヲ證シ, 然ル後此方程式ヲ解ケ. 12 高校

【534】 $s=500,\ u=180,\ t=5$ ナルトキ次ノ聯立方程式ニ適スル u ト a トノ値ヲ求メヨ.

$v=u+at,\quad v^2=u^2+2as$ 12 東京高工

【535】 $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3 \end{cases}$ 12 大分高商

要點 特別ノ解法ガアルケレドモ之ハ三元一次方程式ダカラ平凡ニ解イテ置ク方ガムシロヨイ.

【536】 $x+2\sqrt{x+y}=3-y$

$2x-5\sqrt{x-2y}=4y+3$

【537】 $y\sqrt{2-4x^2}-x\sqrt{2-4y^2}=\sqrt{1-2x^2}\sqrt{1-2y^2}-2xy=1$

13 陸士

【538】 x ニ就テ二次ノ有理整式アリ. x ガ $0, 1, 2$ ナル値ヲ取ルトキ，其式ノ値ハ夫々 $\dfrac{1}{c}$, $\dfrac{1}{c+1}$, $\dfrac{1}{c+2}$ ニ等シトイフ. $x=c+2$ ナルトキ其式ノ値ヲ求メヨ.

14 東京高工

【539】 x, y ガ次ノ三ツノ方程式ヲ滿足スル樣ニ m ノ値ヲ定メヨ.　$x^2+y^2=9,\ x+y+2xy=3,\ x+my=0$

14 神戸商船

第十三章　方程式應用問題

94　方程式應用問題ヲ解クニハ次ノ四ツノ段階ガ必要デアル.

(i)　未知數ヲ撰定スルコト.

(ii)　未知數ノ數ダケノ獨立方程式ヲ作ルコト.（場合ニヨツテハ方程式ノ數ガ少ナクテヨイコトモアル）

(iii)　方程式ヲ解クコト.

(iv)　求メ得タ方程式ノ根ガ問題中ノ實際ノ事實ニ適當ナルカ否カヲ判斷スルコト.

然シナガラ問題ノ實際ニ當ツテ見レバ未知數ヲ定メルコトモ方程式ヲ作ルコトモ簡單ニハ出來ナイ場合ガアル. ソンナ場合ニハ如何ニシテ之ヲ解クベキカヲ考フル前ニ先ヅ問題中ノ事實ノ關係ガ如何ニナツテ居ルカヲ明確ニ握ムコトガ肝要デアル. 問題ヲ再三讀返シ圖形等ヲ用ヒテ事實ノ關係ヲ明カニスレバ未知數ヲ定メルコトモ方程式ヲ作ルコトモ自ラ出來ルモノデアル.

【540】 A ト B トハ 40 哩ヲ隔ツル二ツノ停車場ナリ. 一貨車 A ヨリ B ニ向ツテ一定ノ速度ニテ發車セリ. 夫ヨリ 30 分後一客車又 A ヨリ B ニ向ツテ發車シ，B ニ達スル 30 分前ニソノ貨車ヲ追越セリ. 此客車ハ貨車ヨリモ一時間ニツキ 20 哩速キ速度ヲ有ス. 客車

ノ速度ヲ求ム. 12 東京商船

【541】東地ヨリ西地ニ向フ甲乙丙三人アリ. 乙ハ甲ヨリ 4 分後レテ出發シ, 5 分ノ後甲ニ追付キ, 丙ハ乙ヨリ 7 分後レテ出發シ, 7 分ノ後甲ニ追付キタリ, 然ラバ尚ホ幾分ヲ經テ丙ハ乙ニ追付クカ. 13 東京高師

【542】甲ハ A 地ヨリ 7 哩先キノ B 地ニ向ッテ出發シ, 乙ハ毎時 4 哩ノ速サニテ甲ヨリ 20 分後レテ同地ヲ出發シ甲ニ追付キ直チニ引返シ A 地ニ歸着セリ. ソレト同時刻ニ甲ハ B 地ニ着セリトイフ. 甲ノ毎時ノ速サ如何. 13 水產

【543】甲乙丙三人同時ニ A 地ヲ出發シ 6 里ヲ隔ツル B 地ニ向ヒシニ, ソノ速サ甲ハ最大, 丙ハ最小ナリ. 而シテ出發後二時間ヲ經タルトキ丙ハ甲ニ後ルヽコト一里ナリシガ之ヨリ後丙ハソノ速サヲ二倍ニシタルヲ以テ甲ト丙トハ同時ニ B 地ニ到着シ, 乙ハ此時 B 地ノ手前 $1\frac{2}{3}$ 里ノトコロニアリタリトイフ. 出發時ニ於ケル三人ノ速サ各如何.

【544】A, B, C 三臺ノ飛行機アリ. 甲市ヨリ乙市ニ飛行シタルトキ A ハ B ヨリ毎時間 21 哩大ナル速度ヲ以テ飛行シ B ハ C ヨリ毎時間 9 哩大ナル速度ヲ以テ飛行シタルニ A ハ B ヨリ 1 時間 30 分早ク, B ハ C

ヨリ 45 分早ク到着シタリトイフ. 兩市ノ距離ヲ求ム.

【545】甲乙丙三人自轉車ニテ A 地ヨリ B 地ニ至ルアリ. 甲ガ A 地ヲ出發シテ後 40 分ヲ經テ乙ハ同地ヲ出發シソノ後更ニ 40 分ヲ經テ丙モ同地ヲ出發シタルニ三人同時ニ B 地ニ到着セリ. 今丙ノ速サハ毎時 15 哩ニシテ, 乙ハ甲ヨリ毎時 2 哩速シトスレバ A, B 間ノ距離及甲乙二人ノ速サ各幾許ナルカ.

【546】甲地ヨリ乙地ヘ向ケ 10 時間ニテ達スル豫定ヲ以テ A ナル使者ヲ發シ之ト同時ニ又甲地ヨリ乙地ヘノ方向ト反對ノ方向ニ甲地ヲ距ル $3\frac{3}{4}$ 里ナル丙地ヨリ乙地ヘ向ケ B ナル使者ヲ發セリ. B ガ A ト同時ニ乙地ニ達スルニハ B ガ一里ヲ行クニ要スル時間ハ A ガ一里ヲ行クニ要スル時間ヨリハ 8 分少ナカラザルベカラズトイフ. 甲乙兩地間ノ距離如何.

【547】甲乙丙三人同時ニ同地ヲ出發シテ 10 里以上ノ若干距離ヲ競走セントス. 豫想セラレタル速サヲ聞クニ甲ハ毎時 $1\frac{4}{5}$ 里ニシテ, 乙ハ丙ヨリ毎時 $\frac{3}{10}$ 里多シ. 而シテ此速サニテ走ルモノトセバ甲ハ乙ヨリ一時三十分早ク決勝點ニ着クベク, 又乙ハ丙ヨリ一時間早ク決勝點ニ着クベシトイフ. 此距離幾里ナルカ.

【548】甲乙兩人 A 地ヲ出發シテ B 地ニ向ヒ, B 地ニ到着スルヤ直チニ A 地ニ引返スモノトス. 今甲ハ乙ヨリ一時間遲レテ出發セシモ B ヨリ 2 粁ノ所ニテ追付キソノ後 36 分間ヲ經テ相會シ甲ガ A ニ歸着セルトキ乙ハ尙ホ A ヨリ 4 粁ノ所ニアリシトイフ. AB 兩地間ノ距離如何. 14 高校

【549】10 哩ノ競爭ニ於テ甲ハ乙ヨリ 5 分後レテ出發セシガ 25 分目ニ乙ニ追付キ, 乙ヨリ 7 分早ク決勝點ニ入レリトイフ. 兩人ノ每時ノ速サ各幾哩ナルカ.

【550】A, B ナル二人ノ旅客アリ. B ガ乙地ヲ發スルト同時ニ A ハ乙地ヲ經テ B ト同ジ道ヲ行ク目的ヲ以テ甲地ヲ發セリ. A ガ B ニ追付キタルトキマデニ兩人ガ行キシ路程ハ 30 里ニシテ A ハ此時ヨリ 4 時間前ニ乙地ヲ通過セリ. 若シ B ガ甲地ヨリ發シテ此所ニ達センニハ 9 時間ヲ要スベシトイフ. 甲乙兩地間ノ距離如何.

【551】250 哩ヲ距ツル兩市間ヲ走ルニ要スル急行列車ノ時間ト普通列車ノ時間トノ比ハ 2:3 ノ如シ. 但此內途中停車ノタメニ通常列車ハ 50 哩ヲ走ルニ要スル時間(停車セズニ)ヲ費ヤシ, 急行列車ハ普通列車ガ 25 哩ヲ走ルニ要スル時間(停車セズニ)ヲ費ヤス. 又急行列車ハ

普通列車ヨリ每時 15 哩多ク走ルトイフ. 急行列車每時ノ速サ幾何.

【552】急行列車ハ甲驛ヲ午後一時ニ發シ乙驛ニ向ヒ, 普通列車ハ午前十一時四十五分ニ乙驛ヲ發シ甲驛ニ向ヒテ發車セリ. 急行列車ト普通列車トハ夫々乙驛ト甲驛トヘ共ニ午後六時ニ到着セリトイフ. 何時ニ兩列車ハ搢違ヒシカ. 41 高校

【553】第一列車ハ每時 30 哩ノ速サニテ甲驛ヨリ乙驛ニ向ヒテ出發シ, ソレヨリ 12 分後レテ第二列車ガ每時 40 哩ノ速サニテ乙驛ヨリ甲驛ニ向ヒテ出發シタルニ, 兩驛ノ中央ヨリ $\frac{1}{2}$ 哩ヲ距タル地點ニ於テ兩列車ハ相會セリトイフ. 然ラバ甲乙兩驛間ノ距離何哩ナルカ. 12 神戶高商

要點 二ツノ場合ヲ考フル必要アリ.

【554】甲ハ自轉車ニテ東地ヨリ, 乙ハ徒步ニテ西地ヨリ相向ツテ同時ニ出發シ, 途中相會シテヨリ甲ハ 5 分ニシテ西地ニ達シ, 乙ハ 125 分ニシテ東地ニ達セリトイフ. 甲ガ東地ヨリ西地ニ達スルマデニ要シタル時間ヲ求メヨ.

【555】甲乙二人ノ旅人アリ. 甲ハ午後一時ニ東地ヲ發シテ西地ニ向ヒ, 乙ハ同時刻ニ西地ヲ發シテ東地ニ向ヒタリ.

然ルニ午後三時ニ至リ兩人ハ東地ヲ距ルコト 24 哩ノ所ニテ出會ヒ，乙ガ東地ニ到着セシトキ甲ハ尙ホ西地ニ達セザルコト 20 哩ノトコロニアリタリトイフ．甲乙ノ速サ及ビ東西兩地ノ距離ヲ求ム．

【556】甲列車ハ A 地ヨリ，乙列車ハ B 地ヨリ同時ニ相向ヒテ發車シ，兩列車ノ出會ヒタルトキソノ走リシ距離ノ差 63 哩トナレリ．夫ヨリ甲列車ハ 4 時間ヲ經テ B 地ニ着シ，乙列車ハ 9 時間ヲ經テ A 地ニ着セリトイフ．A, B 兩地間ノ距離及各列車ノ速度ヲ求ム．

【557】甲乙兩地間ノ距離ハ 385 哩ナリ，A 號飛行機ハ甲地ヲ發シテ乙地ニ向ヒタル後一時間ヲ經テ B 號飛行機ハ乙地ヲ發シテ甲地ニ向ヘリ．而シテ途中行違ヒタル後 A 號ハ 2 時 55 分間ニテ乙地ニ着シ，B 號ハ 3 時間ニテ甲地ニ着セリ．兩機ノ速サ毎時幾哩ナルカ．

12 高校

【558】同方向ニ走ル甲乙二個ノ自動車アリ．ソノ速サ毎時甲ハ 18 哩乙ハ 16 哩ニシテ甲ハ乙ノ前方 30 哩ニ在リシトキ先方ヨリ來レル丙自動車ニ出會ヒ，乙ハ夫ヨリ 50 分後丙ニ出會ヒタリ．然ラバ丙ガ甲ヨリ測リテ甲乙間ノ距離ノ $\frac{2}{3}$ ノ位置ニ在リシハ甲ニ出會ヒテヨリ幾分後ナリシカ．

14 海兵

【559】甲乙丙丁四人ノ自轉車乘アリ．甲乙二人ハ A 地ヨリ B 地ニ向ヒ，丙丁二人ハ B 地ヨリ A 地ニ向ヒ四人同時ニ出發シタリシニ甲ハ A ヨリ 5 哩ノ地ニテ丙ニ會シ，B ヨリ 4.5 哩ノ地ニテ丁ニ會シ，乙ハ兩地ノ中央ニテ丁ニ會シ，A ヨリ 3.6 哩ノ所ニテ丙ニ會セリトイフ．兩地間ノ距離幾許ナルカ．

【560】甲ハ東地ヨリ西地ニ向ヒ，乙ハ西地ヨリ東地ニ向ヒテ同時ニ出發シ各均等ナル速サニテ進行セリ．甲ハ m 時間ニテ西地ニ着シ，乙ハ n 時間ニテ東地ニ着シタリ．但兩人出會ヒシ後要セシ時間ハ甲ハ a 時間，乙ハ b 時間ナリシトイフ．然ルトキ a, b, m, n ノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證セヨ．$a:b=m^2:n^2$

【561】7 里ヲ距ツル甲乙兩地間ヲ往復スル人アリ．往路ニハ 5 時 42 分ヲ要シ，復路ニハ 6 時間ヲ要ス．此人上リ路ハ一時間 $\frac{5}{6}$ 里，下リ路ハ一時間 $1\frac{2}{3}$ 里，平地ハ一時間 $1\frac{1}{3}$ 里ノ割合ニテ步行ストセバ甲乙兩地間ノ平地ハ幾里ナルカ．

【562】舟ニテ川ヲ上下セルニ，上リニハ甲地ヲ發シテヨリ乙地ニ着スルマデソノ距離ノ後半ハ前半ヨリ毎時 9 町少ナキ速度ニテ行キ十一時間ニテ乙地ニ着セリ．下リ

ニハ上リノ前半ヲ行キシトキヨリ毎時二分ノ一里ダケ多キ速サニテ下リ 7.5 時間ニテ甲地ニ着セリ. 甲乙兩地間ノ距離及上リ前半ヲ行キシ速度如何.

【563】甲驛ヨリ乙驛ニ向ツテ出發セル汽車ガ兩驛間ノ距離ノ $\frac{3}{5}$ ヲ進ミシトキ機關ニ故障ヲ生ゼシタメ速サヲ毎時 10 哩減ジ乙驛ニ到着シタルニ平均ノ速サハ最初ノ速サヨリモ毎時 6 哩少ナキコトヲ見タリトイフ. 最初ノ速サハ毎時何程ナルカ.

【564】等速度ニテ進行スル列車アリ. 某所ヲ通過シテヨリ t 時間後ニ機關ニ故障ヲ生ジ速サソノ $\frac{1}{n}$ ヲ減ゼシタメ豫定ヨリ a 分ノ延着ヲ來セリ. モシコノ故障ガ尙ホ b 哩進ミタル後ニ起リタランニハ此延着時間ハ c 分ダケ少ナキヲ得タルナラントイフ. 某所ヨリ到着點マデノ道程ヲ問フ.

【565】川ニ沿フテ 8 里距タレル甲乙二村間ヲ往復スル定速度ノ汽船アリ. 平時ニ於テ汽船ガ二村間ヲ往復スルニ 5 時 20 分ヲ要ス. 或日水勢增シテソノ速サ平時ノ $\frac{6}{5}$ トナリタルタメ二村間ヲ往復スルニ 6 時 15 分ヲ要セリ平時ニ於ケル水流ノ速サ如何.

【566】或人流レヲ 10 里漕ギ下リタル後直チニ引返シ漕上リテ出發點ニ達シタルニ十時間ヲ要セリ. 又三里漕下ルニ要スル時間ハ二里漕上ルニ要スル時間ニ等シトイフ此人ガ十里ヲ漕ギ下ルニ要セシ時間如何. 又流レノ速サヲ求メヨ.

【567】河ニ沿フテ A, B ナル二村アリ. ソノ距離 B 村ハ A 村ノ下流 2 里 8 町ノ所ニアリトス. 今甲乙二人 A 村ヲ發シ各別々ノ船ニテ B 村ニ漕ギ下リ, 丙ハ B 村ヲ發シ A 村ニ漕上ルトシ, 三人同時ニ出發スルモノトス. 途中丙ハ甲ニ出會ヒテヨリ上ルコト 10 町ニシテ乙ニ出會ヒ, 甲ガ B 村ニ着キタルトキ丙ハ A 村ノ下流 32 町ノ所ニアリシトイフ. 水速ハ一時間 14 町ニシテ, 甲乙一時間ニ靜水ヲ漕グ速サノ差 24 町ナリトセバ甲乙丙一時間ニ靜水ヲ漕グ速サ各何程ナルカ.

12 山口高商

【568】甲乙二人池ノ周圍ヲ一周スルニ同時ニ同一點ヨリ反對ノ向キニ出發シ甲ハ三時間ニシテ一周ヲ終リ, 乙ハ途中甲ニ出會ヒテヨリ 4 時間ニシテ出發點ニ歸着セリトイフ. 乙ガ池ヲ一周スルニ要シタル時間ヲ問フ.

【569】或人 1670 米ヲ距テタル的ヲ射擊セシニ發射後 7 秒ヲ經テ丸ガ的ニ中リシ音ヲ聞ケリ. 又發射點ヨリ 998 米, 的ヨリハ 2000 米ヲ距タリ立テル人ハ發射ノ音ヲ聞キタルヨリ 5 秒ヲ經テ丸ガ的ニ中リシ音ヲ聞ケリトイ

フ．丸ノ速サ及音ノ速サ各一秒間ニ幾米ナルカ．

【570】風速毎秒 20 米ノ順風ナルトキハ打杭工事ノ打込ヲ目撃シテヨリ $1\frac{3}{5}$ 秒，同風速ノ逆風ナルトキハ $1\frac{4}{5}$ 秒ヲ隔テヽ音響ヲ聞ク．然ラバ無風ノトキハ幾秒ノ後音響ヲ聞クベキカ． 7 高校

【571】沖ニ向ツテ進行セル船アリ．ソノ船上ニテ汽笛ヲ鳴シタルニ二秒ノ後海岸ヨリノ反響ヲ聞ケリ又第一ノ汽笛ヲ鳴シテヨリ二分ノ後第二ノ汽笛ヲ鳴シタルニソレヨリ 5 秒ノ後ソノ反響ヲ聞ケリトイフ．船ノ速サ幾ノットナルカ．但音ノ速サハ毎秒 1120 呎，一ノットハ毎時 6080 呎ノ速サヲ表ハス．

【572】馬車アリ後輪ノ周圍ハ前輪ノ周圍ヨリ 2.1 尺長シ．15 町行ク間ノ前輪ノ廻轉數ハ 20 町行ク間ノ後輪ノ廻轉數ヨリ 40 回多シ．前輪ノ周圍如何． 13 明治專門

【573】黄銅ハ銅ト亞鉛トノ合金ナリ．今銅 80 亞鉛 4 錫 16 ナル割合ヨリナル青銅ト或割合ニ混ジテ熔シタルニ銅 74 亞鉛 16 錫 10 ナル割合ノ合金ヲ得タリ．然ラバ黄銅ヲ組成スル銅ト亞鉛トノ割合如何． 11 神戸高商

【574】甲乙兩槽アリ．甲ニ酒精一石五斗，水五斗ノ混合液アリ．乙ニハ酒精五斗，水一石五斗ノ混合液アリ．今甲乙兩槽ヨリ等量ノ液ヲ汲出シ之ヲ混和シテ等分シ甲乙二槽ニ戻シタルニ兩槽ノ酒精ノ比ハ 13 ト 7 ノ如シ．各槽ヨリ汲出シタル液ノ量如何．

【575】酒精若干アリ．之ニ水 2 升ヲ混合シ，其中 3 升ヲ汲出シ更ニ水一升二合ヲ混合セシニ酒精ト水トガ 3 ト 5 トノ割合トナレリトイフ．最初ノ酒精ノ量如何．

12 京都府立醫大

【576】甲乙二個ノ送水管ヲ有スル水槽アリ．之ニ水ヲ充タスニ甲管ハ乙管ヨリ二時間早ク，甲乙兩管ヲ同時ニ用フルトキハ $1\frac{7}{8}$ 時間ヲ要ストイフ．甲管乙管ヲ單獨ニ用フルトキハ水槽ヲ充タスニ幾時間ヲ要スルカ．

【577】甲乙二管ヲ以テ水槽ニ水ヲ充タスニ甲管ノミヲ用フレバ 14 時間ヲ要シ，乙管ノミヲ用フレバ 6 時間ヲ要ス．然ルニ初メニ甲管ノミヲ使用シ若干時ノ後甲管ヲ止メ乙管ノミヲ使用シテ此水槽ニ水ヲ充タスニ合計 8 間時ヲ要シタリ．各管ヲ使用シタル時間ヲ求メヨ．

【578】甲乙二人アリ．或仕事ノ半分宛ヲ分擔シ，甲ハ乙ヨリ 2 時 30 分早ク仕事ヲ始メ，正午マデニ兩人ニテ丁度全業ノ半分ヲ了セリ．午後ハ兩人トモ一時ヨリ仕事ヲ始メ乙ハ六時ニ，甲ハ六時十二分ニ完了セリトイフ．甲乙各人ノ仕事ヲ始メシ時刻如何． 14 熊本高工

【579】或仕事ヲナスニ甲一人ニテハ乙丙協力シテナス日數ノ

m 倍ヲ要シ，乙一人ニテハ甲丙協力シテナス日數ノ n 倍ヲ要シ，丙一人ニテハ甲乙協力シテナス日數ノ p 倍ヲ要ストイフ．$m, n, p,$ ノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ．$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$

11　東京商大專門

又各人單獨ニテ此仕事ヲ完成スルニ要スル日數ノ割合ハ　$m+1:n+1:p+1$ ナルコトヲ證セヨ．

【580】漏ル水桶アリ．之ニ水ヲ充タスニ甲管ニテハ二時間，乙管ニテハ三時間，甲乙二管ニテハ一時間ヲ要ストイフ．今此水桶ヲ漏ラザル樣ニシテ甲乙二管ヲ用フルトキハ何時間ニテ滿水スベキカ．　13　商大專門

【581】梨，林檎合セテ 160 個アリ．之ヲ若干人ノ子供ニ梨 6 個 林檎 4 個ヅツヲ分與セントスルニ梨ハ 12 個餘リ，林檎ハ 2 個不足ストイフ．梨，林檎各幾個ナルカ．

14　商大

【582】或人若干金ヲ以テ甲乙二書合セテ 32 部ヲ購求シタリ．然レドモ若シ此金額ヲ以テ甲書ノミヲ購ヘバ 30 部ヲ得ベク，乙書ノミヲ購ヘバ 36 部ヲ得ベシトイフ．此人ノ購入シタル甲乙二書各幾部ナルカ．

【583】商人アリ．甲乙二種ノ品物ヲ 625 圓ニテ買ヒ，甲ヲ 455 圓ニテ賣リ，乙ヲ 180 圓ニテ賣リタルニ，甲ニヨリテ得タル利益ノ步合ハ乙ニヨリテ失ヒタル損失ノ步合ト相等シトイフ．各品ノ原價何程カ．

【584】定價ニテ賣レバ 4 個ニツキ金 9 圓ノ利益アル品物アリ．今此品物 6 個ヲ定價ノ一割五步引ニ賣リテ得ル利益ハ 10 箇ヲ一割八步引ニ賣リテ得ル利益ニ等シトイフ．此品物一個ノ原價何程．　12　東京[illegible]

【585】果物商アリ．林檎 10 箱ヲ買ヒ運賃 6 圓ヲ拂ヘリ．而シテ 5% ノ腐ヲ生ズルモ六割ノ利益アル見込ニテ一箇 16 錢ヅツニ賣リシニ 78 箇ノ腐リヲ生ゼシタメ結局四割ノ利益ヲ得タリトイフ．一箱ノ原價何程ナルカ．但箱ハ全部ニテ 48 錢ニ賣ルモノトス．　11　東京商大豫科

【586】奸商アリ．甲乙二個ノ不正ノ秤ヲ作リ，商品ヲ買フトキニハ甲，賣ルトキニハ乙ヲ用ヒ，相場ニテ買入値段ノ一割ノ利益ヲ得ル外奸手段ニヨリテ不當ノ利益ヲ得ントセリ．然ルニ誤リテ買フトキニ乙，賣ルトキニ甲ヲ用ヒシニヨリ一割二分ノ損ヲナセリ．奸手段ニヨリテ幾割ノ利益ヲ得ント企テタルカ．　13　山口高商

【587】三位ノ整數アリ．ソノ數字ノ和ハ 15 ニシテ百位ノ數字ト一位ノ數字トノ差ハ 5 ナリ．又此三數字ヲ逆ノ順序ニ排列シテ得ル數ハ原ノ數ノ三倍ヨリ 39 ダケ小ナリ．原ノ數ヲ求ム．

【588】三桁ノ整數アリ，ソノ數ヲ組立ツル數字ノ和ハ 18 ニシテ，百位ノ數字ハ十位ノ數字ノ三倍ヨリ大ナリ．此要件ニ適スル最小數ヲ求メヨ．

【589】某分數アリ．ソノ分子ニ 1 ヲ增シ，分母ヨリ 1 ヲ減ズルトキハソノ分數ノ値ハ $\frac{2}{3}$ トナリ，又分母子ノ差ヲ分子トシ，分母子ノ和ヲ分母トセル分數ノ値ハ $\frac{2}{5}$ トナルトイフ．某分數トハ如何．

要點　二ツノ場合ヲ考ヘナケレバナラヌ．

【590】或六桁ノ數ノ左端ノ數字ハ 2 ニシテ之ヲ右端ニ移シテ得ル數ハ元ノ數ノ三倍ナリトイフ．原ノ數如何．

12　陸士

【591】或五桁ノ整數ノ右端ノ二桁ヲソノマヽ消シテウル數ハ消シタル二桁ノ數ノ 32 倍ニ等シク又右方ノ二桁ヲソノマヽ左端ニ移シテ得ル數ノ三倍ハ原ノ數ヨリ 2415 ダケ小ナリ．原ノ數如何．

【592】5 ニテ割切レル三位ノ整數アリ．之ヲ組立ツル三ツノ數字ノ和ハ 17 ナリ．又ソノ數字ヲ逆ノ順序ニ列ベテウベキ三位ノ數ハ原數ヨリモ 198 多シ原數如何．

13　海兵

【593】甲乙ノ病院ニ於ケル收容患者數ノ比ハ $A:B$，ソノ中入院中死亡セルモノヽ數ノ比 $a:b$，退院セルモノヽ數ノ比 $c:d$ ナリトイフ．各病院ニ於ケル死亡者ト退院者トノ數ノ比ヲ求メヨ．但死亡者以外ノモノハ退院セルモノトス．

【594】甲乙一年間ノ所得ノ比ハ 5:3 ニシテ支出ノ比ハ 7:4 ナリ．而シテ各毎年 300 圓ヲ貯蓄ストイフ．甲乙一年ノ所得各幾許ナルカ．

【595】或國ニ於テ茶ハ珈琲ノ三倍ノ需用アリ．今茶ノ需用ヲ $a\%$ 增シ珈琲ノ需用ヲ $b\%$ 減ズレバ全體トシテ需用ハ $2c\%$ ノ增加トナリ，又茶ヲ $3b\%$ 減ジ珈琲ヲ $5a\%$ 增セバ全體トシテ $3c\%$ ノ減少トナル．a ト b トノ比ヲ求メヨ．

12　和歌山高商

【596】甲乙二人ノ競走者アリ．甲ノ 3 歩ハ乙ノ 4 歩ト其間隔相等シク，而シテ甲ガ 4 歩進ム間ニ乙ハ 5 歩進ム．今甲乙二人 2 町 40 間ノ競走ヲナスニ甲先着シテヨリ乙ハ 20 歩ニシテ到着セリトセバ甲乙各一歩ノ長サ如何．

12　商大豫科

【597】甲乙ノ競走者アリ．甲ガ一時間ニテ走リウル距離ヲ乙ハ 59 分 42 秒間ニ走リ得トセバ 3 里ノ競走ニ於テ甲ハ何間何尺後ルヽカ．

12　明治專門

【598】直角三角形アリ．周圍ハ 6 尺ニシテ面積ハ 1.2 平方尺ナリ．各邊ノ長サヲ求メヨ．

13　廣島高師

【599】直角三角形ノ地面アリ．ソノ面積ハ 2 段ニシテ斜邊ノ長サハ 50 間ナリ．他ノ二邊ノ長サヲ求メヨ．

【600】直角三角形ノ斜邊ノ長サガ他ノ二邊ノ和ヨリ短キコト 4 寸ニシテ此三角形ノ面積ハ 30 平方寸ナリトイフ．三邊ノ長サ各幾許ナルカ．

【601】直角三角形アリ．ソノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サノ差ハ 5 尺ニシテ三邊ノ長サノ和ハ 60 尺ナリ．此三邊ノ長サ各幾尺ナルカ．

【602】三角形ノ二邊ノ和 5 寸，底邊 4 寸，高サ 1 寸 2 分ナルトキ二邊ノ長サ各幾許ナルカ． 12 東京商船

【603】半徑 a 寸ノ圓ニ內接スル二等邊三角形アリ．ソノ面積ガ底邊及之ニ平行ナル直徑ヲ二邊トスル梯形ノ面積ニ等シキトキ此三角形ノ面積ヲ求メヨ． 11 高校

【604】一邊ノ長サ a ナル與ヘラレタル正方形ニ一邊ノ長サ b ナル正方形ヲ內接セシムルトキ與ヘラレタル正方形ノ邊ガ內接正方形ノ頂點ニヨリテ分タルヽ兩部分ヲ求メヨ．而シテ本題ガ成立スルタメニ $a>b>\frac{1}{\sqrt{2}}a$ ナル關係ヲ要スルコトヲ證セヨ． 11 廣島高工

【605】矩形ノ地面アリ．短邊ハ對角線ヨリ 15 米ヲ減ジタル長サノ半分ニ等シク，短邊ト長邊トノ和ハ對角線ヨリモ20 米長シ，短邊長邊及對角線ノ長サヲ求メヨ，

【606】一邊ノ長サ a 寸ナル正方形ニ內接シ．且ツコレト一頂點ヲ共有スル正三角形ノ一邊ノ長サ幾許ナルカ． 11 東京高師

【607】AOB, COD ハ O 點ニ於テ直交スル二ツノ直線ナリ．今甲ハ AB 上ヲ A ヨリ B ニ向ヒ毎分 5 尺ノ速サ，乙ハ CD 上ヲ C ヨリ D ニ向ヒ毎分 12 尺ノ速サニテ進行シ，甲ガ B ニ達シタルトキ乙ハ D ニ達シタリ．而シテ OB, OD ハ孰レモ $\frac{50}{7}$ 尺ナリ．然ラバ何時何處ニテ甲ト乙トノ距離ガ 10 尺トナルカ． 8 陸士

【608】一點 O ニ於テ直交スル二直線上ヲ O 點ニ向ヒ等速度ヲ以テ進行スル A, B 二ツノ球アリ．ソノ半徑ハ各 2.5 糎ニシテソノ速度ノ比ハ(Aノ速度):(Bノ速度)=3:2 ナリ．今 A ノ中心ガ O ヨリ 33 糎ノトコロニアルトキ B ノ中心ハ O ヨリ 24 糎ノトコロニアリ．A, B ガ O 點ノ手前ニ於テ相衝突スルトキ A, B ノ各中心ハ O ヨリ幾許ノ距離ニアルカ． 4 東京高工

【609】一直線ヲナセル海岸ノ點 A ヨリ之ニ直角ノ方向ニ一町ヲ隔ツル海上ノ一小舟中ニアル人ガ A ヨリ 7 町ヲ隔ツル海岸ノ一點 B ニ丁度 5 分ニテ到着セントス。今舟ナラバ毎分 1 町，陸ナラバ毎分 2 町ノ速サニテ進ムモノトセバ何處ニ上陸スベキカ． 10 海兵

【610】直角三角形アリ．ソノ斜邊ト他ノ一邊トノ長サノ和ハ 15 寸ニシテ殘ル一邊ノ長サハ 9 寸ナリトイフ．然ラバソノ內接圓ノ半徑ハ幾何ナルカ．

【611】對角線ノ長サ 3 寸ナル矩形 $ABCD$ ヲ二等分スル直線ガ BC ト E ニ交ハリ，AB ノ延長ト F ニ於テ交ハル．$BE=1$寸 $BF=3$寸 ナラバ此矩形ノ二邊ノ長サハ各何寸何分ナルカ． 13 陸士

【612】大中小三ツノ立方體アリ．ソノ體積ノ和ハ 153 立方寸ニシテ三個ヲ積重ネタル高サハ 9 寸ナリ．而シテ大ノ邊ト小ノ邊トノ和ハ中ノ邊ノ二倍ナリ．各立方體ノ邊ノ長サヲ求ム． 13 朝鮮帝大豫科

第十四章 不定方程式ノ問題

95 方程式 $x+y=6$ ハ不定方程式デアッテ無數ノ解ヲ有スル．然シナガラ x, y ガ若シ正ノ整數デアルトイフ條件ガアッタトシタラ解ノ數ハ自ラ制限セラレル．卽チ

$$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$$

ナル五ツノ解ダケトナル．更ニ又若シ x ガ y ヨリ大ナル數デアルトイフ條件デモアッタトシタラ解ハ

$$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$$

ノ二ツダケトナル．

斯クノ如ク或種ノ方程式應用問題ヲ解クニ當ッテ不定方程式ガ得ラレル場合（方程式ノ數ガ未知數ノ數ダケ得ラレナイデ）ニモソノ問題中ニ含マルヽ條件ノ爲ニ問題ノ解ハ有限個ダケ得ラレルコトガアル．

【613】或日氣溫ヲ檢セシニ攝氏 5 度ヨリモ高ク，華氏ノ示度ハ攝氏ノ示度ノ整數倍ニシテ，兩者ノ示度モ亦整數ナリキトイフ．攝氏何度ナリシカ．

解 求ムル氣溫ヲ攝氏 x 度トシ，華氏ノ示度ハ此ノ y 倍ナリトスレバ

$$\frac{9}{5}x+32=yx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{華氏ノ示度}$$

$\therefore\ x=\dfrac{160}{5y-9}$

而ルニ $x>0$ $\therefore\ 5y-9>0$ $\therefore\ y>\dfrac{9}{5}$ ………(1)

又 $\dfrac{160}{5y-9}>5$ 且 $5y-9>0$ $\therefore\ 160>25y-45$

$\therefore\ 205>25y$ $\therefore\ y<\dfrac{41}{5}$ ……………(2)

(1) ト (2) トヨリ

$1\dfrac{4}{5}<y<8\dfrac{1}{5}$ ……………………(3)

y ハ正ノ整數デアルカラ(3)ヨリ y ハ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ノ中ノ何レカノ値ヲトラナケレバナラナイ.

而シテ y ガ順次ニ此等ノ値ヲトルトキ x ハ夫々 160, $\dfrac{160}{6}$, $\dfrac{160}{11}$, 10, $\dfrac{160}{21}$, $\dfrac{160}{26}$, $\dfrac{160}{31}$ トナル. 而ルニ x モ正ノ整數ダカラ $x=160$ 又 10 デナケレバナラヌ. 然ルニ 160° ハ氣温トシテハ不適當デアルカラ結局 $x=10$ ダケヲトル. 答 10 度

【614】兵卒 360 人ヲ並ベテ中空正方形ヲ作ルニソノ仕方ハ幾通リアルカ. 12 陸士

*【615】小數ニ化スルトキ 0.41……… トナル如キ分數ノ中ニテ分子ガ 79 ナルモノヲ求メヨ. 12 東京商大豫科

【616】$x^2-y^2=17$ ヲ滿足スル x, y ノ値ヲ求ム. 但 x, y ハ

倶ニ正ノ整數ナリトス. 13 北海帝大豫科

【617】數字ノ和ノ三倍ニ等シキ二位ノ數ヲ求ム. 13 三重高農

【618】正ナル二數アリ. ソノ和ハ 128400 ニシテ, ソノ G.C.M. ハ 8025 ナリトイフ. 斯クノ如キ二數ハ幾通リアルカ. 13 高校

【619】$13x^2+18x+10$ ヲ $(ax+b)^2+(cx+d)^2$ ナル形ニ變ゼヨ. 但 a, b, c, d ハ正ノ整數トス.

【620】二數ノ和ト積トガ相等シキ二ツノ正ノ整數ハ一組アリテ唯一組ナルコトヲ證セヨ. 14 商大

* 165 ハ不定方程式ノ問題デハナイ

第六編　比及比例

第一章　求比及證明問題

96　$x=my$ ナルトキハ $\frac{x}{y}=m$ 依テ $x:y$ ヲ求ムルニハ $x=my$ ナル關係ヲ作レバヨイ.

例　$3x^2+4y^2=8xy$ ナルトキ $x:y$ ヲ求メヨ.

解　$3x^2-8xy+4y^2=0$　$\therefore\ (3x-2y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x=\frac{2}{3}y$ 又ハ $2y$　$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ 又ハ 2

【261】$ax+by=c$ 及 $bx-ay=d$ ナルトキ x, y ノ値ヲ別々ニ求ムルコトナク $\frac{x}{y}$ ヲ求メヨ.　12 廣島高師

要點　常數項ヲ消去セヨ.

【622】x 及 y ハ正數ニシテ x ハ y ヨリ小ナリトシ方程式 $x+y=4\sqrt{xy}$ ヨリ $\sqrt{\frac{x}{y}}$ ノ値ヲ求メヨ.
(最簡ナル方法ヲ考ヘヨ)　12 愛知醫大豫科

【623】$6x^2+4y^2=11xy$ ナルトキ $x^2+3xy+y^2$ ト $x^2-3xy+y^2$ トノ比ノ値ヲ求メヨ.　10 商船

【624】$3x^2-5xy+y^2$, $x^2-6xy+4y^2$ ニ於テ x, y ノ間ニ如何ナル關係アルトキ此二式ガ相等シキカ.　13 朝鮮帝大豫科

【625】$x^3-2x^2y-xy^2+2y^3=0$ ナルトキ $2x-3y:3x-2y$ ノ値如何.　13 商大豫科

97　$x=mz,\ y=nz$ ナルトキハ $x:y:z=mz:nz:z=m:n:1$ 因テ $x:y:z$ ヲ求ムルニハ $x=mz,\ y=nz$ ナル關係ヲ求ムル工夫ヲスレバヨイ.

【626】$\frac{z+2x}{3y}=\frac{x+y+z}{2(x+y)}=\frac{x+z}{2x+y}$ ナルトキ比 $x:y:z$ ノ値ヲ求ム.　12 山口高商

【627】一ツノ三角形ノ二邊ノ和ト他ノ一邊トニテ包ム三ツノ矩形ノ面積ノ比ガ $27:32:35$ ニ等シキトキ三邊ノ長サノ比ヲ求メメヨ.　12 海兵

【628】$2(x+y)=3(y+z)=4(z+x)$ ナルトキハ $\frac{6x+5z}{y}$

ノ値如何.

【629】 $5x+7y+6z=13x+y=16y-x$ ナルトキ $\dfrac{z}{x+y+z}$ ノ値ヲ求メヨ.　13 彦根高商

98 比例式ノ取扱ニ必要ナル諸定理

(1) $a:b=c:d$ ナルトキハ $ad=bc$

(2) $ad=bc$ ナルトキハ $a:b=c:d$ 等

(3) $a:b=c:d$ ナルトキハ $\begin{cases} a:c=b:d \cdots\cdots\cdots\cdots \text{内項交換} \\ d:b=c:a \cdots\cdots\cdots\cdots \text{外項交換} \\ b:a=d:c \end{cases}$

(4) $a:d=c:d$ ナルトキハ $\begin{cases} \dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d} \\ \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d} \\ \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d} \end{cases}$

注意 上ノ諸定理ハ總テ逆定理ガ成立ツ. 例ヘバ

$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ ナルトキハ $a:b=c:d$

(5) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots=\dfrac{pa+qb+rc+\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots}=\dfrac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}$

但 $pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots\neq 0,\ a'+b'+c'+\cdots\cdots\neq 0$ トス

注意 $pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots=0$ ナルトキハ $pa+qb+rc+\cdots\cdots=0$ トナル.

今各比ヲ k トスレバ

$pa+qb+rc+\cdots\cdots=(pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots)k$ トナルカラデアル.

(6) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots=\dfrac{\sqrt[n]{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots\cdots}}{\sqrt[n]{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots\cdots}}$

注意 此定理ハ少シク一般性ニ缺グルトコロガアル. 例ヘバ

$\dfrac{-2}{3}=\dfrac{-6}{9}=\dfrac{\sqrt{5\times(-2)^2+3\times(-6)^2}}{\sqrt{5\times 3^2+3\times 9^2}}=\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt{288}}=\dfrac{2}{3}$

ハ明カニ成立シナイカラデアル. 故ニ符號ニ注意ヲ要スル.

【630】 $a:b=c:d$ ナルトキハ $a^2+b^2:c^2+d^2=ab:cd$ ナルコトヲ證セヨ.

【631】 $a:b=c:d$ ナルトキハ $\dfrac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$ ナルコトヲ證セヨ.

【632】 $a:b=c:d$ ナルトキハ

$\dfrac{a+c}{a-c}:\dfrac{b+d}{b-d}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【633】 $a:b=b:c$ ナルトキハ $(a+c)b$ ハ a^2+b^2 ト b^2+c^2 トノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

要點 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$ トシ $b=ck,\ a=ck=ck^2$ トシテ證セヨ.

【634】 $a:b=b:c$ ナルトキハ

$a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$ ナルコトヲ示セ.

【635】 $a:b=b:c=c:d$ ナルトキハ

$(a^3+b^3+c^3):(b^3+c^3+d^3)=a:d$ ナルコトヲ示セ.

注意 $a:b=b:c=c:d$ ナルトキ $a,\ b,\ c,\ d$ ハ連比例ヲナストイフ.

【636】 $a:b=b:c=c:d$ ナルトキハ

$(b+c)(b+d)=(a+c)(c+d)$ナルコトヲ證セヨ.

【637】 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{a}$ ナルトキ $\dfrac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ ノ値如何.

12　東京商大專門

【638】 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ナルトキ $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$

ナルコトヲ證セヨ.

【639】 $x:y:z=a:b:c$ ナルトキ

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{y-b}{y+b}-\frac{2(z^2-c^2)}{z^2+c^2}=\frac{8(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{(x+y+z)^4-(a+b+c)^4}$$

ナルコトヲ示セ.

【640】 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ナルトキハ

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$ ナルコトヲ證セヨ.

12　神戸商船

【641】 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ナルトキハ

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$ ナルコトヲ證セヨ.

【642】 $x:y=(x+z)^2:(y+z)^2$ ニシテ $x\neq y$ ナルトキ z ハ $x,\ y$ ノ比例中項ナリ.

【643】 $(b+c+d):(c+a+d)=(a+b+d):(a+b+c)$ ナルトキハ $\dfrac{a^3-d^3}{a-d}=\dfrac{b^3-c^3}{b-c}$ ナルコトヲ證セヨ.

【644】 $2x+3y:3y+4z:4z+5x=4a-5b:3b-a:2b-3a$ ナルトキ $7x+6y+8z=0$ ナルコトヲ證セヨ.

【645】 $\dfrac{a^{n+1}}{x^n}=\dfrac{b^{n+1}}{y^n}=\dfrac{c^{n+1}}{z^n}=x+y+z$ ナルトキコノ各ノ比ハ

$(a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

【646】 $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$, $ax^2+by^2+cz^2=1$, $l^2+m^2+n^2=1$ ナルトキ $(al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=1$ ナルコトヲ證セヨ.

(647】 $x-z:y-z=x^2:y^2$ ナレバ $x+z:y+z$

$=\dfrac{x}{y}+2:\dfrac{y}{x}+2$ ナルコトヲ證セヨ. 但 $x\neq y$ トス.

12　東京商船

【648】 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキハ

$\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$ ナルコトヲ證セヨ.

【649】 $a(y-z)=b(z-x)=c(x-y)$ ナルトキ

$\dfrac{y-z}{a(b+c)}=\dfrac{z-x}{b(c+a)}=\dfrac{x-y}{c(a+b)}$ ナルコトヲ證セヨ.

【650】 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ ナルトキ

$\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{y-z}{b-c}=\dfrac{z-x}{c-a}$ ナルコトヲ證セヨ.

【651】 $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ ナルトキ $a:b=c:d$ ナルコトヲ證セヨ.

【652】 $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$

$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$ ナルトキハ

$bc:ad=ps:qr$ ナルコトヲ證セヨ.　13　京都府醫大

【653】 $ma+nc:pa+qc=mb+nb:pb+qd$ ナルトキハ a, b, c, d 又ハ m, n, p, q ガ比例ヲナスコトヲ證セヨ.

【654】 $\dfrac{a}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{c}{b^2+bc+c^2}$ ナルトキ b ハ常ニ a, c ノ比例中項ナリヤ.

13　商大專門部

【655】 a, b, c, d ハ皆正ニシテ且 b, c ハ共ニ a ヨリモ大ナリトス. $a:b=c:d$ ナルトキハ $a+d>b+c$ ナルコトヲ示セ.

13 海兵

【656】 $\dfrac{p}{a^2-bc}=\dfrac{q}{b^2-ca}=\dfrac{r}{c^2-ab}$ ナルトキハ

$\dfrac{a}{p^2-qr}=\dfrac{b}{q^2-rp}=\dfrac{c}{r^2-pq}$ ナルコトヲ示セ.

14 商大專

【657】 $\dfrac{x+y}{cx+ay}=\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}$ ナルトキハ各分數ハ $\dfrac{3}{a+b+c}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

【658】 $x:y:z=a:b:c,\ bcx+cay+abz=1$ ヲ解ケ.

第二章 量ノ比

99 互ヒニ比例スル量

例 米一立ノ價ヲ 25 錢(k 錢)トスレバ

桝高(y立)	代價(x錢)		
1立	25錢	因テ $25=25\times 1$	又ハ $1=\dfrac{1}{25}\times 25$
2	50	$50=25\times 2$	$2=\dfrac{1}{25}\times 50$
3	75	$75=25\times 3$	$3=\dfrac{1}{25}\times 75$
4	100	$100=25\times 4$	$4=\dfrac{1}{25}\times 100$
5	125	$125=25\times 5$	$5=\dfrac{1}{25}\times 125$
6	150	$150=55\times 6$	$6=\dfrac{1}{25}\times 150$
7	175	$175=25\times 7$	$7=\dfrac{1}{25}\times 175$

因テ一般ニ $x=ky$ 又ハ $y=k'x$

但シ $k=25,\ k'=\dfrac{1}{25}$ デアッテ常數

上ノ例ノ x, y ノ如ク互ヒニ相伴ッテ變化スル二ツノ變數ノ間ニ常ニ $x=ky$ 又ハ $y=k'y$ ナル關係ガ成立スルトキハ x, y ニテ表ハス二ツノ量ハ互ヒニ比例スル量デアルトイヒ

一方ガ二倍三倍等ニ變レバ他モ亦二倍三倍等ニ變ル. x, y ガ互ヒニ比例スルトキ $x \propto y$ 又ハ $y \propto x$ ト記ス. 之ハ夫々 $x=ky$, $y=k'x$ ト同ジ意味ヲ有スルモノデアル.

注意 年齢ト身長ノ如キハ相伴ツテ變化スルケレドモ互ヒニ比例スル量デハナイ.

今 x ノ種々ノ値 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots$ ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 $b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots\cdots$ トスレバ $x \propto y$ 卽チ $x=ky$ ナル關係ハ次ノ三通リニ書キ表ハサレル.

(i) $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \cdots\cdots = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : \cdots\cdots$

(ii) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{a_4}{b_4} = \cdots\cdots = k$

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}, \quad \dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{b_2}{b_3}, \quad \dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{b_3}{b_4}, \cdots\cdots$

100 互ヒニ反比例スル量

一定ノ金額ヲ以テ或物品ヲ求ムルニソノ一個ノ價ガ變レバ求メ得ラレル個數モ從テ變ル. 今一定ノ金額ヲ 24 圓(k 錢)トシテ之ヲ例示スレバ

單價(x 錢) 個數(y 個)

50錢 $\dfrac{2400}{50}=48$ 因テ $50 \times 48 = 2400$

100 $\dfrac{2400}{100}=24$ $100 \times 24 = 2400$

150 $\dfrac{2400}{150}=16$ $150 \times 16 = 2400$

因テ一般ニ $y=\dfrac{k}{x}$ 從テ $xy=k$

比例ノ x, y ノ如ク互ヒニ相伴ツテ變化スル二ツノ變數ノ間ニ常ニ $y=\dfrac{k}{x}$ (又ハ $x=\dfrac{k}{y}$) 又ハ $xy=k$ ナル關係ガ成立スルトキハ x, y ニテ表ハサルヽ二量ハ互ヒニ反比例スル量デアルトイヒ一方ガ二倍三倍等ニ變化スレバ他ハ $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ 等ニ變化スル.

注意 x, y ガ互ヒニ反比例スルトキ $y=\dfrac{k}{x}=k \times \dfrac{1}{x}$

因テ y ハ $\dfrac{1}{x}$ ニ比例スルトイツテヨイ.

今 x ノ種々ノ値 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ トスレバ $y=\dfrac{k}{x}$ 從テ $xy=k$ ナル關係ハ次ノ三通リニ書キ表ハサレル.

(i) $b_1 : b_2 : b_3 : \cdots\cdots = \dfrac{1}{a_1} : \dfrac{1}{a_2} : \dfrac{1}{a_3} : \cdots\cdots$

(ii) $\dfrac{b_1}{\dfrac{1}{a_1}} = \dfrac{b_2}{\dfrac{1}{a_2}} = \dfrac{b_3}{\dfrac{1}{a_3}} = \cdots\cdots = k$

(iii) $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = \cdots\cdots = k$

101 複比例

布ノ代價ハ長サガ一定ナルトキハソノ單位長サノ代價ニ比例シ，又單位長サノ代價ガ一定ナルトキハ，ソノ長サニ比例スルモノデアルコトハ明カデアル．然ラバ單位長サノ價モ，長サモ共ニ變ズルトキ代價ガ如何ニ變ズルカ．

今代價ヲ x 圓，單位長サノ價ヲ y 圓，長サヲ z 米トシ，此等ノ對應スル値ヲ次ノヨウニスレバ

	x	y	z
(i)	a_1	b_1	c_1
(ii)	a_2	b_2	c_2
(iii)	a_3	b_3	c_3

(i) ヨリ (ii) ヘノ變化ハ次ノ二段ニ分カッテ考フルコトガ出來ル．

(1)	a_1	b_1	c_1
(2)	a_1'	b_2	c_1
(3)	a_2	b_2	c_2

(1) ヨリ (2) ヘノ變化ニ於テ $\dfrac{a_1}{a_1'}=\dfrac{b_1}{b_2}$ …………(A)

(2) ヨリ (3) ヘノ變化ニ於テ $\dfrac{a_1'}{a_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ …………(B)

$(A)\times(B)$　$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1c_1}{b_2c_2}$　　$\therefore$　$\dfrac{a_1}{b_1c_1}=\dfrac{a_2}{b_2c_2}$

同様ニシテ　$\dfrac{a_2}{b_2c_2}=\dfrac{a_3}{b_3c_3}$

$\therefore$　$\dfrac{a_1}{b_1c_1}=\dfrac{a_2}{b_2c_2}=\dfrac{a_3}{b_3c_3}=\cdots\cdots\cdots=k$ 但 k ハ常數

故ニ一般ニ　$\dfrac{x}{yz}=k$　　$\therefore$　$x=kyz$

定理　x ハ z ガ一定ナルトキハ y ニ比例シ，y ガ一定ナルトキハ z ニ比例スルナラバ y, z 共ニ變ズルトキハ x ハ yz ニ比例スル．

系　x ハ z ガ一定ナルトキ y ニ比例シ，y ガ一定ナルトキ z ニ反比例スルナラバ y, z 共ニ變ズルトキ x ハ $\dfrac{y}{z}$ ニ比例スル．

注意　$x=kyz$ ナルトキ　$y=\dfrac{1}{k}\times\dfrac{x}{z}$ トナルカラ x ガ y ト z トニ比例スルトキ y ハ x ニ比例シ z ニ反比例スルモノデアル．

【659】 $x\propto y$, $y\propto z$ ナルトキハ $x\propto z$ ナルコトヲ證セヨ．

解　$x\propto y$　　$\therefore$　$x=ky$

$y\propto z$　　$\therefore$　$y=k'z$　但 k, k' ハ常數

$\therefore$　$x=kk'z$　　　kk' ハ常數

故＝　$\propto z$.

【660】$\propto y$ ナルトキ $x^2+y^2 \propto xy$ ナルコトヲ證セヨ.

【661】$x^2-y^2 \propto x^2+y^2$ ナルトキ $x-y \propto x+y$ ナルコトヲ證セヨ.

解　$x^2-y^2 \propto x^2+y^2$　∴　$x^2-y^2=k(x^2+y^2)$　但 k ハ常數

$$\therefore\quad (1-k)x^2=(1+k)y^2 \qquad \therefore\quad x^2=\frac{1+k}{1-k}y^2$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\,y$$

$$\therefore\quad \frac{x-y}{x+y}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}-1}{\pm\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}+1}$$

但複號ハ同順ノモノヲトル.

$$\therefore\quad x-y=\frac{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}-1}{\sqrt{\frac{1+k}{1+k}}+1}\times(x+y)$$

又ハ　$x-y=\dfrac{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}+1}{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}-1}\times(x+y)$

何レノ場合モ $x+y$ ノ係數ハ常數

故＝　$(x-y)\propto(x+y)$

【662】$x+y \propto x-y$ ナルトキ $x^2+y^2 \propto xy$ ナルコトヲ證セヨ.

【663】y ハ x ニ付テノ二項式ニシテ一項ハ x ニ正比例シ他項ハ x ノ平方ニ反比例ス. 今 $x=1, 2$ ナル値ヲ與フルトキハ y ハ夫々 6, 5 トナルトイフ. ソノ式ヲ求メヨ.

【664】y ハ二數ノ和ニシテ一數ハ x ニ比例シ, 他ハ x ニ反比例ス. 今 $x=2$ ナラバ $y=7$, $x=1$ ナラバ $y=-1$ ナルトキ $y=5x-\dfrac{6}{x}$ ナルコトヲ證セヨ.

【665】一平面ニ垂直ニ風ガ當ルトキ平面ガ受クル壓力ハ風ノ速度ノ平方ト面ノ廣サトニ比例ス. 風ノ速度ガ一秒一米ナルトキ一平方米ノ平面ガ受クル壓力ハ 80 瓦ニ等シイトイフ. 然ラバ一時間ニ 72 粁ノ速度ノ風ガ 24 平方米ノ平面ニ垂直ニ當ルトキソノ面ノ受クル壓力ハ幾瓩ナルカ.

【666】汽車ガ走ルニ要スル時間ハ距離ニ比例シ，速度ニ反比例ス．速度ハ一哩ヲ走ニ要スル石炭ノ量ノ平方根ニ比例シ，ソノ連結スル車輛ノ數ニ反比例ス．今車輛 20 輛ヲ連ネタル汽車ガ 36 哩ノ距離ヲ一時間ニ走ルニ石炭 900 封度ヲ要ストセバ同ジ車輛ヲ連ネタル汽車ガ 30 哩ノ距離ヲ 45 分間ニ走ルニハ石炭何程ヲ要スルカ．　12 神戸高商

【667】燈台ノ光ガ濃霧ノタメニ妨ゲラレ光源ヨリ x 尺ニ於ケル光ノ强サハ a^{-x} ニ比例スルトイフ．但 a ハ或一定ノ數ナリ．光源ヨリノ距離ガ A.P. ヲナス地點ニ於テハ光ノ强サハ G.P. ヲナスコトヲ證明セヨ．又 5 尺ヲ隔テタル地點ニ於テ光ノ强サガ半減セラルヽトキニハ强サガ $\dfrac{1}{16}$ ニ減ズル地點ハ光源ヨリ幾尺ノ距離ニアルベキカ．　11 東京高工

【668】$z-30$ ハ t ニ比例スル一數ト t^2 ニ比例スル一數トノ和ナリ．今 $t=3$ ナルトキ $z=84$ ニシテ $t=4$ ナルトキ $z=110$ ナリトイフ．z ヲ最小ナラシムル t ノ實數値及ソノ z ノ最小値ヲ求メヨ．　13 高校

【669】某汽船ガ航行中ニ要スル石炭料ハ其速サノ二乘ニ比例シ，毎時 10 浬ニテ進ムトキハ毎時 50 圓ノ石炭ヲ費ヤストイフ．尙航行中ソノ速サノ如何ニ關セズ毎時 50 圓ノ雜費ヲ要ストセバ總費用 1200 圓ニテ 100 浬ヲ航行センニハソノ速サヲ何程ニ定ムベキカ．　14 海兵

第七編 級 數

第一章 等差級數 一名算術級數 *A.P.*

$\boxed{102}$ 等差級數ニ關スル重要事項

(1) 初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ第 n 項ハ $a+(n-1)d$

(2) 末項ヲ l, 公差ヲ d トスレバ終リカラ第 n 項ハ $l-(n-1)d$

(3) 初項ト末項トカラ數ヘテ同ジ番目 (m) ノ項ノ和ハ初項ト末項トノ和ニ等シイ.

$\{a+(m-1)d\}+\{l-(m-1)d\}=a+l$

項數ガ奇數 $(2m+1)$ ナルトキハ中央項ノ二倍ハ初項ト末項トノ和ニ等シイ.

中央項ハ兩端カラ第 $m+1$ 番目ダカラ $a+md$ 又ハ $l-md$

$\therefore\ \{a+md\}+\{l-md\}=a+l$

(4) 初項ト末項トノ和ノ半分 $\dfrac{a+l}{2}$ ハ總テノ項ノ相加平均數ニ等シイ.

項數ガ奇數ナルトキハ中央項ガ總テノ項ノ相加平均數デアル.

(5) a, b ノ間ニ n 個ノ等差中項ヲ挿入スレバ, b ハ第 $(n+2)$

項トナルカラ公差ヲ d トスレバ $b=a+(n+1)d$ コレカラ d ヲ求メ, 因テ中項ヲ求ムルコトガ出來ル.

(6) a, b ノ間ニ唯一個ノ等差中項ヲ挿入スルトキ之ヲ x トスレバ $x=\dfrac{a+b}{2}$

個數ヲ示サズシテ唯二數ノ等差中項トアルトキハ唯一個ノ等差中項ヲ示ス.

(7) a, b, c ガ *A.P.* ヲナスコトヲ證スルニハ $b-a=c-b$ ナルコト卽チ $2b=a+c$ ナルコトヲ證スレバヨイ.

(8) 總和ノ公式 $S=\dfrac{n(a+l)}{2}=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

此等ノ公式ノ作リ方ニ注意セヨ.

【670】 初項 5 公差 -3 ナル *A.P.* ニテ -61 ハ第何項カ.

【671】 第十四項ハ 100 第二十項ハ 148 ナル *A.P.* ノ初項及公差ヲ求ム.

【672】 *A.P.* ノ初項ト第十項トノ和ハ7又第二項ノ平方ト第九項ノ平方トノ和ハ $27\dfrac{2}{9}$ ナリ. コノ級數ノ初項ト公差トヲ求メヨ.

【673】 $A.P.$ ニ於テ第 m 項ヲ α, 第 n 項ヲ β トスルトキ第 $(m+n)$ 項ヲ最モ簡單ナル形ニテ表ハセ.

解 初項ヲ a 公差ヲ d 第 $(m+n)$ 項ヲ γ トスレバ

$\alpha=a+(m-1)d$ ………………(1)

$\beta=a+(n-1)d$ ………………(2)

$\gamma=a+(m+n-1)d$ ………………(3)

(1)−(2) $\alpha-\beta=(m-n)d$

$\therefore\ d=\dfrac{\alpha-\beta}{m-n}$ …………(4) 但 $m-n\neq0$ トス.

(1) ト (3) トヨリ $\gamma=a+nd$ …………(5)

(4), (5) ヨリ $\gamma=\alpha+\dfrac{n(\alpha-\beta)}{m-n}=\dfrac{m\alpha-n\beta}{m-n}$

【674】 $A.P.$ アリ. ソノ $(p+q)$ 番目ノ項ハ α ニシテ $(p-q)$ 番目ノ項ハ β ナルトキ p 番目及 q 番目ノ項ヲ α, β, p, q ニテ表ハセ.

【675】 $(2m+1)$ 項ヨリナル $A.P.$ ノ中央項ガ p ナルトキソノ總和ヲ求ム. 14 大阪高工

【676】 36 ト −10 トノ間ニ 22 個ノ等差中項ヲ挿入スルトキソノ第七番目ノ中項ヲ求ム.

【677】 24 ト 48 トノ間ニ若干項ノ等差中項ヲ挿入シタルニ第三番目ノ中項ハ 32 トナレリ. 中項ノ數如何.

【678】 $A.P.$ 五項ノ和 35 ニシテソノ平方ノ和ハ 335 ナリ. 此等ノ數ヲ求メヨ.

要點 $A.P.$ ヲナス三數ノ和ハ云々トイフ問題デハ此等ノ數ヲ次ノ様ニ表ハスガ便利デアル.

三數ノトキ $a-d,\ a,\ a+d$

五數ノトキ $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$

四數ノトキ $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$

但偶數個ノトキハ公差ハ $2d$ デアル.

【679】 $A.P.$ ヲナス四ツノ整數アリ. ソノ平方ノ和ハ 120 ニシテ第二數ト第四數トノ積ハ第一數ト第三數トノ積ノ二倍ヨリ大ナルコト 8 ナリ. 此四ツノ整數ヲ求メヨ. 11 高校

【680】 $A.P.$ ヲナス三數アリ. ソノ平方ノ和ハ 332 ニシテ第一數ト第三數トノ比ハ 3:7 ニ等シ. 此三數ヲ求ム.

【681】 各三數ヨリナル二ツノ $A.P.$ アリ. ソノ和ハ何レモ

15 ナリ. 第一級數ノ公差ハ第二級數ノ公差ヨリ大ナルコト 1 ニシテ前者ノ積ト後者ノ積トノ比ハ 7:8 ナリトイフ. コノ二組ノ級數ヲ求ム..

【682】 1 ヨリ始メテ n ニ至ル整數ノ和ヲ求メヨ.

【683】 1, 3, 5,……… ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.

【684】 三桁ノ整數ノウチ 13 ノ倍數ハ幾ツアルカ. 又ソノ和ヲ求メヨ.

【685】 1 ヨリ 100 マデノ整數ニシテ 3 ニテ整除シエザルモノヽ總和ヲ求ム.

【686】 200 ト 700 トノ間ノ數ニテ 13 ニテ割レバ 7 殘ル總テノ數ノ和ヲ求メヨ.

【687】 $A.P.$ $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, ……… ノ第十六項ヨリ第二十五項マデノ和ヲ求ム.

【688】 $A.P.$ $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, ……….., 4 ノ和ヲ求メヨ.

【689】 12, 10, 8,………… ノ幾項ノ和ガ 36 トナルカ.

【690】 初項ハ 15 ニシテ 8 項マデノ和ハ 40 ナル $A.P.$ ノ末項(第八項)及公差ヲ求ム.

【691】 20 項ヨリナル $A.P.$ アリ. ソノ和ハ 1080 ニシテ末項ハ 160 ナリトイフ. 初項ト公差トヲ求メヨ.

【692】 公差 -3, 末項 -39, 總和 -264 ナル $A.P.$ ノ初項ト項數トヲ求ム.

【693】 第 m 項ガ α, 第 n 項ガ β ナル $A.P.$ ノ第 p 項マデノ和ヲ求メヨ.

【694】 初項ガ a, 第二項ガ b, 末項ガ c ナル $A.P.$ ノ總和ヲ求ム.

【965】 級數 $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, ………… ノ n 項マデノ和ヲ求ム.

【696】 $A.P.$ 2, 5, 8, ……., 200 及 2, 7, 12,……., 202

ニ於テ相合致スル項ノ數如何. 又ソノ和ヲ求ム.

要點 第一級數ノ第 m 項 $2+(m-1)\times 3$

第二級數ノ第 n 項 $2+(n-1)\times 5$

因テ $(m-1)\times 3=(n-1)\times 5$ ナルトキ

卽チ 3 ノ倍數ト 5 ノ倍數トガ相等シキトキ双方ノ項ハ合致スル. 換言スレバ 2 ニ 3 ト 5 トノ公倍數ヲ加ヘタモノガ合致スル項デアル. 而シテ 2 ノ次ニ始メテ合致スル項ハ 2 ニ 3 ト 5 トノ最小公倍數 15 ヲ加ヘタモノデアル. 因テ合致スル項ハ 2 ヲ初項トシ 15 ヲ公差トスル A.P. ヲナシ末項ハ 200 ヨリ大ナラザルモノデアル.

【697】 或 A.P. ノ第 n 項ガ n ノ値ノ如何ニ拘ハラズ $3n+1$ ナルトキ此級數ヲ決定セヨ.

要點 此種ノ問題ノ題意ヲヨク了解シテオカナケレバナラナイ. 第 n 項ガ n ノ値ノ如何ニ拘ハラズ $3n+1$ デアルトイフコトハ $3n+1$ ニ於テ

$n=1$ トスレバ $3\times 1+1$ ハ第一項

$n=2$ トスレバ $3\times 2+1$ ハ第二項

$n=3$ トスレバ $3\times 3+1$ ハ第三項

以下皆同様デアルコトヲ示シテ居ルノデアル.

恰モ第 n 番目ノ奇數ハ $2n-1$, 第 n 番目ノ偶數ハ $2n$

トイフノト同ジ意味デアル.

【698】 第 n 項ガ $\dfrac{5}{2}-3n$ ナル級數ノ初メノ十項ノ和ヲ求メヨ.

要點 問題ニハ級數ノ種類ヲ言ツテナイカラシテ先ヅ此級數ガ A.P. ヲナスコトヲ言ハナケレバナラナイ.

【699】 或 A.P. ノ初メノ n 項ノ和ハ n ノ値ニ拘ハラズ $n(5n-4)$ ナリトイフ. 初項ト公差トヲ求ム.

要點 前々題ト同ジク $n(5n-4)$ ニ於テ

$n=1$ トスレバ $1\times(5\times 1-4)$ ハ第一項

$n=2$ トスレバ $2\times(5\times 2-4)$ ハ第二項マデノ和

$n=3$ トスレバ $3\times(5\times 3-4)$ ハ第三項マデノ和

以下同様

若シ又例ヘバ第十項ヲ求ムル必要ガアルナラバ

$n=10$ トシテ 第十項マデノ和 (S_{10}) ヲ求メ

$n=9$ トシテ 第九項マデノ和 (S_9) ヲ求メ

$S_{10}-S_9$ ヲ求ムレバ第十項ガエラレル

【700】 A.P. アリ. 初メノ n 項ノ和ガ n ノ如何ニ拘ハラズ n^2 ナルトキソノ級數ヲ求ム.

【701】初メノ n 項ノ和ガ n^2+n ナル級數ヲ決定セヨ.

【702】或級數ノ始メノ n 項ノ和ガ $p+qn^2$ ナルトキ此級數ノ第 k 項ヲ求ム.

【703】a, b, c ガ A.P. ヲナストキハ $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ モ亦 A.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【704】a^2, b^2, c^2 ガ A.P. ヲナストキハ $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ モ亦 A.P. ヲナスコトヲ證セヨ.(又ハ $b+c$, $c+a$, $a+b$ ハ H.P. ヲナス)

【705】$\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$, $\dfrac{1}{d}$ ガ A.P. ヲナストキハ(又ハ a, b, c, d ガ H.P. ヲナストキハ)
$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$ ナルコトヲ證セヨ.

8 陸士

【706】1, 3, 5, ………… ナル連續奇數 $(2m+1)$ 個ノ中ニテ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和トノ比ハ $m+1:m$ ナルコトヲ證セヨ.

【707】A.P. ノ第一項第四項ノ比例中項ガソノ第二項ニ相當スルトキハ第六項ハ第四項第九項ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

【708】A.P. ノ初項ヨリ p 項マデノ和ガ初項ヨリ q 項マデノ和ニ等シキトキハ, 初項ヨリ $p+q$ 項マデノ和ハ 0 ニ等シキコトヲ證セヨ.

【709】二數ノ等差中項ノ平方ガ各數ノ平方ノ和ノ半分ニ等シキトキコノ二數ハ相等シキコトヲ證セヨ.

12 海兵

【710】初項 a 二項 b ナル A.P. アリ. $\dfrac{a}{a-b}$ ガ正ノ整數ナラバソノ級數ノ中ニハ 0 ニ等シキ項アルコトヲ證セヨ.

12 東京高工

解 公差ヲ d トスレバ $d=b-a$

今 $\dfrac{a}{a-b}=m$ トスレバ 但 m ハ正ノ整數

$a=m(a-b)=-md \qquad \therefore \ a+md=0 \quad \cdots\cdots(1)$

(1) ノ左邊ハ此 A.P. ノ第 $(m+1)$ 項ヲ表ハス. 故ニ第 $(m+1)$ 項ガ 0 トナル.

【711】 a, b, c, d ガ A.P. ヲナストキハ $a^2+d^2>b^2+c$ ナルコトヲ證セヨ. 13 神戸商船

【712】 A.P. ノ初メノ五項ノ和ト次ノ五項ノ和トノ比ハ 3:4 ニ等シキトキ初項ト公差トトノ比ヲ求ム.

【713】 二ツノ A.P. アリ. n 項マデノ和ノ比ハ $\dfrac{7n+2}{5n-2}$ ナリトイフ. 第十三項ノ比ヲ求ム 13 小樽高商

解 初項ヲ夫々 a, a' 公差ヲ夫々 d, d' トスレバ

$$\frac{\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}}{\frac{n}{2}\left\{2a'+(n-1)d'\right\}}=\frac{7n+2}{5n-2}$$ 左邊ノ兩項ヲ n デ割ツテ

$$\frac{a+\frac{n-1}{2}d}{a'+\frac{n-1}{2}d'}=\frac{7n+2}{5n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $\dfrac{n-1}{2}=12$ トスレバ $n=25$ トナル

因テ (1) ニ於テ $n=25$ トスレバ 25 項マデノ和ノ比ヲ求ムルコトヲウルト同時ニソレハ第十三項ノ比トナルコトハ左邊ノ形カラ明カデアル 即チ

$$\frac{a+12d}{a'+12d'}=\frac{7\times25+2}{5\times25-2}=\frac{177}{123}=\frac{59}{41}$$

因テ求ムル第十三項ノ比ハ

【714】 項數 $2m$ ナル A.P. アリ. ソノ中央ノ二項ノ平方ハ $x^2-2px+q=0$ ノ二根ニ等シ. 此級數ノ公差及總和ヲ最簡單ナル形ニテ表ハセ. 13 旅順工大豫科

【715】 100, 97, 94, ………… 及 120, 117, 114, ハ幾項マデ正ナルカ.

【716】 初項 17, 第十項 10 ナル A.P. ノ項ハ幾番目マデ正數ナルカ.

又此級數幾項マデノ和ガ正數ナルカ.

【717】 A.P. 1000, 997, 994,………… ニ於テ負號ヲトル最初ノ項ハ第何項ナルカ.

【718】 (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10),………… ノ第 p 番目ノ群ノ總テノ數ノ和ヲ求ム.

【719】(1, 2), (3, 4, 5, 6), (7, 8, 9, 10, 11, 12), ノ第 n 番目ノ群ノ總テノ數ノ和ヲ求ム.

【720】二ツノ方程式 $x^2-x+a=0,\ x^2-x+b=0$ ノ四ツノ根ガ初項 $\frac{1}{4}$ ナル A.P. ヲナス如ク a, b ノ値ヲ定メヨ.

13 商大

解 $x^2-x+a=0$ ノ二根ヲ α, β トシ $(\alpha<\beta)$

$x^2-x+b=0$ ノ二根ヲ γ, δ トス $(\gamma<\delta)$

$\alpha+\beta=1,\quad \gamma+\delta=1 \quad \therefore\ \alpha+\beta=\gamma+\delta$

然ルニ一般ニ A, B, C, D ガ A.P. ヲナストキ

$A+D=B+C,\quad A+B\doteqdot C+D,\quad A+C\doteqdot B+D$

何トナレバ今公差ヲ R トスレバ (但 $R\doteqdot 0$ トス)

$A+D=2A+3R=B+C,\quad A+B=2A+R,$

$C+D=2A+5R,\ A+C=2A+2R,\ B+D=2A+4R$

トナルカラデアル. 然ルニ $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ ダカラ

$\alpha=\frac{1}{4}$ デ $\alpha, \gamma, \delta, \beta$ ガ A.P. ナル場合ト

$\gamma=\frac{1}{4}$ デ $\gamma, \alpha, \beta, \delta$ ガ A.P. ナル場合トノ二ツノ場合ガ起コル

(i) $\alpha=\frac{1}{4}$ ナルトキ $\beta=\frac{3}{4}$ 今公差ヲ d トスレバ

$$\frac{1}{4}+3d=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ d=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \gamma=\frac{5}{12},\qquad \delta=\frac{7}{12}$$

$$\therefore\ a=\alpha\beta=\frac{3}{16},\qquad b=\gamma\delta=\frac{35}{144}$$

(ii) $\gamma=\frac{1}{4}$ ナルトキハ同様ニシテ $a=\frac{35}{144},\quad b=\frac{3}{16}$

【721】初項正ナル A.P. ノ第三項マデノ和ト第十一項マデノ和ト相等シキトキ第 n 項マデノ和ハ n ノ如何ナル値ニ對シテ最大トナルカ.

13 仙臺高工

【722】$3n$ 項ノ A.P. アリ. 最初ノ n 項ノ和ヲ A, 次ノ n 項ノ和ヲ B, 最後ノ n 項ノ和ヲ C トセバ

$B^2-AC=\left(\frac{A-C}{2}\right)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

13 旅順工大豫科

【723】$3x+2,\ x+4,\ 2x-3$ ガ A.P. ヲナストキソノ公差如何.

【724】$a+3a+5a+\cdots\cdots$ ナル $4n$ 項ノ A.P. アリ. 此級

數ノ中ノ或ル相隣ル二項ノ間ニ $4n$ 項ノ等差中項ヲ挿入シテ此挿入項ノ和ヲ原級數ノ和ノ半分ニ等シカラシメントス．中項ヲ挿入スベキ相隣ル二項如何．

14 旅順工大

要點 一般ニ a, b ノ間ニ n 個ノ等差中項ヲ挿入シテソノ和ヲ求ムレバ $\dfrac{n(a+b)}{2}$ トナル．

第二章 調和級數 $H.P.$

$\boxed{103}$ 調和級數ニ關スル重要ナル事項

(1) 一般ノ形 $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a+d}, \dfrac{1}{a+2d}, \cdots\cdots, \dfrac{1}{a+(n-1)d}$

(2) 初メノ二項ヲ知リテ第 n 項ヲ求ムルコト．

初項ヲ a, 第二項ヲ b トスレバ

$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}$ ハ $A.P.$ ノ初項，第二項デアル．ソノ公差ハ

$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$, 因テソノ第 n 項ハ $\dfrac{1}{a}+(n-1)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$,

因テ $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+(n-1)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}$ ハ $H.P.$ ノ第 n 項．

(3) 二數 a, b ノ間ニ n 個ノ調和中項ヲ挿入スルコト．

$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}$ ノ間ニ n 個ノ等差中項ヲ挿入シソノ逆數ヲ求ムレバヨイ．

(4) 二數 a, b ノ間ニ唯一個ノ調和中項ヲ挿入スルコト．

中項ヲ x トスレバハ

$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{b}$ ハ $A.P.$

$$\therefore \quad \frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$x=\frac{2ab}{a+b}$$

(5) 調和級數ニハ和ヲ求ムル公式ガナイ.

注意 調和級數ニ關スル問題ハ多クハ等差級數ニ引直シテ解クモノデアル.

【725】 H.P. $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{3}$, ……… ヲ六項マデ書ケ.

【726】 10 ト 5 トノ間ニ四個ノ調和中項ヲ挿入セヨ.

【727】 H.P. ノ第二項ト第四項トガ夫々 $\frac{4}{5}$, -4 ナルトキ第三項如何.

【728】 H.P. ノ第 m 項ガ n ニシテ第 n 項ガ m ナルトキ第 $(m+n)$ 項ヲ求ム. 14 京都府立醫大豫科

【729】 二數ノ等差中項ハ 4 ニシテ調和中項ハ $\frac{16}{5}$ ナルトキソノ二數如何.

【730】 a, b, c ガ H.P. ヲナストキ $a:c=a-b:b-c$ ナル

コト及 $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$ モ亦 H.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【731】 a, b, c, d ガ比例ヲナシ a, b, c ガ A.P. ヲナストキハ b, c, d ハ H.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【732】 A, B, C, D ガ調和列點ナルトキハ AC, AB, AD ハ H.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

第三章 等比級數 一名幾何級數 G.P.

104 **等比級數ニ關スル重要ナル事項**

(1) 公比ハ通常虚數トナル場合ヲ除外スル.

(2) 初項 a, 公比 r ヲ知リテ 第 n 項ヲ表ハス式 ar^{n-1}

(3) a, b 二數ノ間ニ n 項ノ等比中項ヲ挿入スルコト.

公比ヲ r トスレバ b ハ第 $(n+2)$ 項ニ當ルカラ

$b=ar^{n+1}$

之ニ依ツテ r ヲ求メ, 中項ヲ求ムルコトガ出來ル.

(4) a, b 二數ノ間ニ唯一個ノ中項ヲ挿入スルコト.

中項ヲ x トスレバ

$x^2=ab \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{ab}$

注意 個數ヲ言ハズニ只等比中項ト云フ場合ハ唯一個ノ中項ヲ意味シテ居ルモノデ比例中項ト同ジデアル.

(5) a, b, c ガ G.P. ヲナスコトヲ證スルニハ $b^2=ac$ ヲ證スレバヨイ.

(6) 和ノ公式 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a-lr}{1-r}$

注意 最後ノモノハ項數ヲ用ヒナイ.

(7) 無限等比級數ノ和ノ極限 $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$

但 $-1<r<1$

(8) 循環小數ヲ分數ニ化ス法

$0.\dot{3}6\dot{4}=\dfrac{364}{999}$

$3.25\dot{1}\dot{6}=\dfrac{32516-32}{9990}$

此等ノ結果ヲ導クニ二ツノ方法ガアル. 教科書ニ付テ復習シテ置クガヨイ.

(9) 等比級數 a, ar, ar^2, ………

ノ逆數 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{r^2}$, ………

ハ又一ツノ等比級數ヲナス. 初項ハ $\dfrac{1}{a}$, 公比ハ $\dfrac{1}{r}$.

【733】 初項 -5, 第五項 -80 ナル G.P. ノ公比ヲ求ム.

【734】 G.P. ノ初項ガ 6, 公比ガ 3 ナルトキ 486 ハ第何項カ.

【735】 第五項ガ 112, 第八項ガ 896 ナル G.P. ノ第十項ヲ求ム.

【736】 初項ガ $\dfrac{5}{27}$, 公比ハ 3 ナル G.P. ニ於テ 405 ハ第何項ナルカ.

【737】 G.P. ノ第 $(p+q)$ 項ハ x, 第 $(p-q)$ 項ハ y ニ等シキトキ第 p 項及第 q 項ヲ求ム.

【738】 G.P. ノ第 n 項ト第 $2n$ 項トノ和ハ x ニシテ第 $2n$ 項ト第 $3n$ 項トノ和ハ y ナルトキソノ公比如何.

【739】 729 ト 64 トノ間ニ 5 個ノ等比中項ヲ插入スルトキソノ第四項如何.

【740】 $24a$ ト $192a^4$ トノ間ニ二個ノ等比中項ヲ入レヨ.

【741】 G.P. ヲナセル三數アリ. ソノ和ハ 35 ニシテソノ平方ノ和ハ 525 ナリ. 三數ヲ求ム.

【742】 G.P. ノ四項ノ和 225 ニシテ兩端ノ項ノ和 135 ナリ. 此級數ヲ求メヨ.

【743】 項數ハ 8, 偶數番目ノ項ノ和ハ 510, 奇數番目ノ項ノ和ハ 255 ナル G.P. ヲ定メヨ. 14 熊本醫大豫科

【744】 G.P. ヲナス三數ノ和ハ 21, 積ハ 216 ナルトキ三數

如何.

【745】 G.P. アリ. 第一第二第三項ノ和ハ 26 ニシテ, 第一第三第五項ノ和ハ 182 ナリトイフ. 初項及公比如何

【746】 182 ヲ G.P. ヲナス三數ニ分カチ, 第一第三ノ數ノ和ガ中央ノ數ノ二倍半ナルヨウニセヨ.

【747】 G.P. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ………, $\frac{16}{243}$ ノ和ヲ求メヨ.

【748】 G.P. $\sqrt{3}-3+3\sqrt{3}-\cdots\cdots\cdots$ ノ第十項マデノ和ヲ小數第一位マデ正シク計算セヨ.

【749】 $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{10+6\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots$ ノ第四項マデノ和ヲ最モ簡單ナル形ニテ表ハセ. 12 大阪高工

【750】 $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+16\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots$ ノ第二十項マデノ和ヲ求メヨ.

ヲ乘ジタルタメ積ニ於テ 1 ノ差ヲ生ジタリ. ソノ數如何. 12 名古屋高工

【764】 $a+b+c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$ ガ r ヲ公比トスル G.P. ナルトキハ $r^3+r^2+r-1=0$ ナルコトヲ證セヨ.

【765】 a, b, c, d ガ G.P. ヲナストキハ
$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

【766】 x, y, z, w ガ G.P. ヲナストキハ
$(y-z)^2+(z-x)^2+(w-y)^2=(x-w)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

【767】 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ ガ總テ實數ニシテ G.P. ヲナサバ
$(l_1l_2+l_2l_3+\cdots\cdots+l_{n-1}l_n)^2=(l_1^2+l_2^2+\cdots\cdots+l_{n-1}^2)$
$(l_2^2+l_3^2+\cdots\cdots+l_n^2)$

【768】 初項 a, 公比 r ナル G.P. n 項ノ積ハ $a^nr^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【769】 初項 a ニシテ第 n 項 l ナル G.P. アリ. 此級數ノ

初項ヨリ第 n 項マデノ項ノ連乘積ハ $(al)^{\frac{n}{2}}$ ナルコトヲ證セヨ.

【770】 G.P. アリ. 項數ヲ n, 總テノ項ノ積ヲ P, 總テノ項ノ和ヲ S 總テノ項ノ逆數ノ和ヲ R トセバ
$P^2R^n=S^n$ ナルコトヲ證セヨ. 14 高校

【771】 a, b, c, d ハ何レモ實數ニシテ且
$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ ナルトキハ
a, b, c, d ハ G.P. ヲナスコトヲ證セヨ. 11 高校

【772】 $2,\ 2+4,\ 2+4+6, \cdots\cdots$ ノ始メヨリ第二十五項マデノ總和ヲ求ム. 12 熊本醫大豫科

【773】 各項ガ正ナル無限比級數ニ於テ公比ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ小ナルトキハソノ和ハ初項ノ二倍ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ. 12 東京高師

【774】 初項 1, 公比 $\sqrt{2}$, 項數 $2n-1$ ナル G.P. ニ於テ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和ト何レガ大ナルカ. 13 愛知醫大豫科

【751】 $(x+x^2+x^3+\ +x^{2n+1})(x-x^2+x^3-\cdots\cdots\cdots+x^{2n+1})$ ヲ計算セヨ.

【752】 G.P. アリ. ソノ初項ヨリ n 項マデノ和ハ p ニシテ $2n$ 項マデノ和ハ q ナリトイフ. シカルトキハ $3n$ 項マデノ和ヲ求メ之ヲ p, q ニテ表ハセ.

【753】 G.P. ノ初項ヨリ第 n 項, 第 $2n$ 項, 第 $3n$ 項マデノ和ヲ夫々 a, b, c トスルトキハ $a^2+b^2=a(b+c)$ ナルコトヲ證セヨ. 14 東京高師

【754】 G.P. アリ. 公比ハ 3, 末項ハ 486, ソノ和ハ 728 ナリ. 初項ヲ求メヨ.

【755】 G.P. アリ. 初項ハ 7, 末項ハ 448, 和ハ 889 ナリ. 公比ヲ求ム.

【756】 G.P. アリ. 初項ハ 3, 末項ハ 96. 和ハ 189 ナルトキ項數如何.

【757】 次ノ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求ム.

$$5+\frac{5}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

【758】 G.P. $(\sqrt{2}-1)+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+\cdots\cdots\cdots$ ノ和ノ極限ヲ求ム.

【759】 G.P. ノ無限項ノ和ガ 4 ニシテソノ初項ト第二項トノ相乘積ハ第四項ノ 24 倍ニ等シトイフ. ソノ級數如何.

【760】 初項ガ夫々 a, b ナル公比相等シキ二ツノ G.P. アリ. 第一級數ノ無限項ノ和ノ平方ハ第二級數ノ無限項ノ和ニ等シトイフ. 公比如何.

【761】 G.P. ノ初メヨリ n 項ノ和ハ p ニシテ 第 $(n+1)$ 項ヨリ無限項ニ至ル和ハ q ナルトキ初メヨリ $2n$ 項ノ和ヲ p, q ニテ表ハセ. 12 山口高商

【762】 $2.1\dot{4}8\dot{6}$ ヲ分數ニ化セ.

【763】 一數アリ. 之ニ$0.3\dot{1}2\dot{5}$ ヲ乘ズベキヲ誤リテ 0. 3125

ヲ乘ジタルタメ積ニ於テ 1 ノ差ヲ生ジタリ. ソノ數如何. 12 名古屋高工

【764】 $a+b+c,\ \ b+c-a,\ \ c+a-b,\ \ a+b-c$ ガ r ヲ公比トスル G.P. ナルトキハ $r^3+r^2+r-1=0$ ナルコトヲ證セヨ.

【765】 a, b, c, d ガ G.P. ヲナストキハ

$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

【766】 x, y, z, w ガ G.P. ヲナストキハ

$(y-z)^2+(z-x)^2+(w-y)^2=(x-w)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

【767】 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ ガ總テ實數ニシテ G.P. ヲナサバ

$(l_1l_2+l_2l_3+\cdots\cdots+l_{n-1}l_n)^2=(l_1^2+l_2^2+\cdots\cdots+l_{n-1}^2)$
$(l_2^2+l_3^2+\cdots\cdots+l_n^2)$

【768】 初項 a, 公比 r ナル G.P. n 項ノ積ハ $a^nr^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【769】 初項 a ニシテ第 n 項 l ナル G.P. アリ. 此級數ノ

初項ヨリ第 n 項マデノ項ノ連乘積ハ $(al)^{\frac{n}{2}}$ ナルコトヲ證セヨ.

【770】 G.P. アリ. 項數ヲ n, 總テノ項ノ積ヲ P, 總テノ項ノ和ヲ S 總テノ項ノ逆數ノ和ヲ R トセバ

$P^2R^n=S^n$ ナルコトヲ證セヨ. 14 高校

【771】 a, b, c, d ハ何レモ實數ニシテ且

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ ナルトキハ

a, b, c, d ハ G.P. ヲナスコトヲ證セヨ. 11 高校

【772】 2, 2+4, 2+4+6,……… ノ始メヨリ第二十五項マデノ總和ヲ求ム. 12 熊本醫大豫科

【773】 各項ガ正ナル無限比級數ニ於テ公比ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ小ナルトキハソノ和ハ初項ノ二倍ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ. 12 東京高師

【774】 初項 1, 公比 $\sqrt{2}$, 項數 $2n-1$ ナル G.P. ニ於テ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和ト何レガ大ナルカ. 13 愛知醫大豫科

【775】第 n 項マデノ和ガ 3^n+a ナル級數ハ G.P. ヲナスヤ否ヤ. 12 商大豫科

解 $n=1$ トスレバ $3+a$……初項

$n=2$ トスレバ 3^2+a……第二項マデノ和

$n=3$ トスレバ 3^3+a……第三項マデノ和

$\vdots$

$n=m-2$ トスレバ $3^{m-2}+a$……第$(m-2)$項マデノ和

$n=m-1$ トスレバ $3^{m-1}+a$……第$(m-1)$項マデノ和

$n=m$ トスレバ 3^m+a…… 第 m 項マデノ和

因テ

初項 $3+a$

第二項 $3^2-3=2\times3$

第三項 $3^3-3^2=2\times3^2$

$\vdots$

第$(m-1)$項 $3^{m-1}-3^{m-2}=2\times3^{m-2}$

第 m 項 $3^m-3^{m-1}=2\times3^{m-1}$

因テ $3+a=2$ ナルトキ卽チ $a=-1$ ナルトキハ此級數ハ初項 2, 公比 3 ナル G.P. ヲナシ, $a\neq-1$ ナルトキハ G.P. ヲナサズ.

【776】x, y, z ガ G.P. ナルトキハ $x^2+y^2+z^2$ ハ二ツノ一次因數ニ分解セラルヽコトヲ證セヨ. 12 東京高工

【777】長サ a ナル物アリ. 初メソノ $\frac{1}{3}$ ヲ切取リ, 次ニソノ殘ノ $\frac{1}{3}$ ヲ切取リ, 次ニ又ソノ殘リノ $\frac{1}{3}$ ヲ切取リ, 次第ニカクノ如クシテ際限ナク進ムトキハ切取リタル部分ノ長サノ總和幾尺ナルカ.

【778】半徑 r ナル圓ニ內接スル正方形ヲ書キ, 更ニ此正方形ニ內接スル圓ヲ書キ, 更ニ此圓ニ內接スル正方形ヲ書キ, 追テ此作圖ヲ續ケ行フ事際限ナケレバ此等ノ圓及正方形ノ面積ノ和各如何.

【779】一邊ノ長サ a ナル正六邊形アリ. コレヲ始メトシテ次ニソノ頂點ヲ一ツ置キニ結ブ六ツノ直線ニヨリテ作ラルル正六邊形ノ如ク, 次第ニ作ラルヽ正六邊形ノ面積ノ總和ヲ求ム.

以下雜題

【780】A.P. ヲナス三數アリ. ソノ和ハ 24 ニシテ此三數ニ夫々 1, 2, 12 ヲ加フレバ G.P. ヲナスベシトイフ. コノ三數ヲ求ム.

【781】 A.P. アリ. 始メノ十三項ノ和ハ次ノ六項ノ和ヨリモ 1 少ナク, 第三項第五項第八項ハ G.P. ヲナス. コノ級數ヲ求ム.

【782】 二數アリ. ソノ等差中項ハ等比中項ノ n 倍ナリトイフ. コノ二數ノ比ヲ求メヨ.

【783】 十五項ヨリナル A.P. ト G.P. トアリテ A.P. ノ初項ト末項トガ G.P. ノ初項ト末項トニ等シク且 A.P. ノ第九項ガ G.P. ノ第八項ニ等シキトキハソノ G.P. ノ公比如何.

【784】 a, b, c ガ A.P. ヲナシ $a, a-b, c$ ハ G.P. ヲナストキハ比 $a:c$ ノ値如何. (小數第三位マデ算出)

【785】 a, b, c ナル三數アリテ; a ハ b, c ノ等差中項, c ハ a, b ノ調和中項ナルトキハ b ハ a, c ノ等比中項ナルコトヲ證シ, b 及 c ヲ各 a ニテ表ハセ.

【786】 四ツノ正數ガ G. P. ヲナストキハ第一項ト第四項トノ差ノ絶對値ハ他ノ二項ノ差ノ絶對値ノ三倍ヨリ小ナラズ. ソノ證ヲ問フ.

【787】 四ツノ實數 a, b, c, d ガ G.P. ヲナストキ $a+b>0$ ナラバ $a+d$ ト $b+c$ ト何レガ大ナルカ. 14 濱松高工

【788】 四ツノ正數 a, b, c, d ガ G.P. ヲナストキハ $a+d>b+c$ ナルコトヲ證セヨ. 14 長崎高商

【789】 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求ム.

(A) $\dfrac{1}{a+b},\ \dfrac{1}{a(a+b)^2},\ \dfrac{1}{a^2(a+b)^3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

(B) $p^2+2q,\ p^4+4q,\ p^6+6q,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

【790】 a, b, c ハ G.P. ヲナシ, p ハ a, b ノ等差中項, q ハ b c ノ等差中項ナルトキハ $2=\dfrac{a}{p}+\dfrac{c}{q}$ ナルコトヲ示セ.

【791】 a, b, c ハ A.P., a, x, b ハ G. P., b, y, c ハ G.P. ナルトキ x^2, b^2, y^2 ハ A.P. ナルコトヲ證セヨ.

【792】 $\log_a x,\ \log_a y,\ \log_a z$ ガ A.P. ナルトキ x, y, z ハ

G.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【793】 $\dfrac{1}{b-a},\ \dfrac{1}{2b},\ \dfrac{1}{b-c}$ ガ A.P. ナルトキハ a, b, c ハ G.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【794】 $(13),\ (14+15),\ (16+17+18),\ \cdots\cdots\cdots\cdots$ ノ第 n 項ノ和ヲ簡單ナル形ニテ表ハセ.

【795】 $a^2,\ b^2,\ c^2$ ガ A.P. ナルトキ $b+c,\ c+a,\ a+b$ ハ H.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【796】 a, b, c ガ H.P. ヲナストキ $2a-b,\ b,\ 2c-b$ ハ G.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

【797】 a, b, c ガ A.P., b, c, d ガ H.P. ナルトキ $a:b=c:d$ ナルコトヲ證セヨ.

【798】 a, b, c ガ A.P., b, c, d ガ G.P., c, d, e ガ H.P. ナルトキ $a:c=c:e$ ナルコトヲ證セヨ.

【799】 P, Q, R ガ A.P. ノ第 p 項第 q 項第 r 項ナルトキ

$P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$

P, Q, R ガ G.P. ノ第 p 項第 q 項第 r 項ナルトキ

$P^{q-r}\times Q^{r-p}\times R^{p-q}=1$

P, Q, R ガ H.P. ノ第 p 項第 q 項第 r 項ナルトキ

$QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$

【800】 p, a, b, q ハ A.P., p, c, d, q ハ G.P., p, e, f, q ハ H.P. ナルトキ $pq=cd=af=be$ ナルコトヲ證セヨ.

【801】 十三項ノ實數ヨリナル A.P. ト G.P. トアリ. ソノ初項ハ正ニシテ相等シク, 且末項モ相等シキトキハ中央項ハ何レガ大ナルカ. 13 千葉醫大

【802】 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求ム. 13 神戸高商

解 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}\cdots\cdots(1)$ トスレバ

$xS=\quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\cdots\cdots(2)$

$(1)-(2)\quad (1-x)S=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots x^{n-1}-nx^n$

$=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$ 但 $1-x\neq 0$ トス

$\therefore\quad S=\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$

【803】 $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求ム.

13 北海帝大豫科

【804】 $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+\cdots\cdots\cdots$ ノ和ノ極限ヲ求ム.

14 高松高商

要點 $\dfrac{1}{3}=x$ トシテ工夫セヨ.

【805】 次ノ級數ノ八項マデノ和ヲ求ム. 0.3, 0.33, 0.333,…

又 n 項マデノ和ハ $\dfrac{1}{27}(9n-1+10^{-n})$ ナルコトヲ

證セヨ.

解 $$S=0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots\cdots\cdots+0.\overbrace{333\cdots\cdots3}^{8\text{桁}}\cdots\cdots(1)$$

$$10S=3+3.3+3{,}33+\cdots\cdots\cdots\cdots+3.\overbrace{333\cdots\cdots3}^{7\text{桁}}\cdots\cdots(2)$$

$$(2)-(1)\quad 9S=\overbrace{3+3+3+\cdots\cdots+3}^{8\text{項}}-0.\overbrace{333\cdots\cdots3}^{8\text{桁}}$$

$$=3\times8-0.33333333$$

$$=23.66666667$$

$$\therefore\quad S=\frac{23.6666667}{9}=2.62962963$$

同樣ニシテ n 項マデノ和 S' ハ

$$9S'=3\times n-0.\overbrace{333\quad\cdot3}^{n\text{桁}}$$

$$\therefore\quad 27S'=9n-0.\overbrace{999\cdots\cdots9}^{n\text{桁}}$$

$$=9n-(1-0.\overbrace{000\cdots\cdots01}^{n\text{桁}})$$

$$=9n-1+10^{-n}$$

$$\therefore\quad S'=\frac{1}{27}(9n-1+10^{-n})$$

別解 $0.3=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{30},\quad 0.33=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{300},\quad 0.333=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3000},$

以下同樣ニシテ求ムル八項マデノ和ヲ S トセバ

$$S=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times10}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times10^2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times10^3}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times10^8}\right)$$

$$=\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{3\times10}+\frac{1}{3\times10^2}+\frac{1}{3\times10^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3\times10^8}\right)$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{\frac{1}{30}\left(1-\frac{1}{10^8}\right)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{8}{3}-\frac{\frac{1}{3}(1-10^{-8})}{9}$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{0.11111111}{3}=\frac{7.88888889}{3}=2.62962963$$

同樣ニシテ n 項マデノ和 S' ハ

$$S=\frac{n}{3}-\frac{\frac{1}{30}(1-10^{-n})}{1-\frac{1}{10}}=\frac{n}{3}-\frac{1-10^{-n}}{27}$$

$$=\frac{1}{27}(9n-1+10^{-n})$$

【806】次ノ級數 n 項マデノ和ヲ求メヨ.

$0.7,\ \ 0.77,\ \ 0.777,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

要點 第二解法ヲ用フル場合ニハ $0.7=\frac{7}{9}-\frac{7}{90}$ 等トセヨ.

【807】$4+44+444+\cdots\cdots\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.

【808】$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ヲ證セヨ.

解 $x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$ ハ恒等式デアル. 因テ

$x=1$ トスレバ $1^3-0^3=3\times1^2-3\times1+1$

$x=2$ トスレバ $2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1$

$x=3$ トスレバ $3^3-2^3=3\times3^2-3\times3+1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$x=n-1$ トスレバ $(n-1)^3-(n-2)^3=3\times(n-1)^2-3\times(n-1)+1$

$x=n$ トスレバ $n^3-(n-1)^3=3\times n^2-3\times n+1$

此等ノ等式ヲ邊々加フレバ

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$

$$\therefore\ \ 3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)=n^3+3\times\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore\ \ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$$

【809】$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ヲ證セヨ.

要點 $\{(x+1)x\}^2-\{x(x-1)\}^2=4x^3$ ナル恒等式ヲ應用シテ前問ト同様ニ解ケ.

第八編　對數及歩合算

第 一 章　一 般 對 數

105 對數ノ意義

對數

$3^4=81$　　　記法　$log_3 81=4$

底數　眞數

底數對數眞數ニ次ノ制限ガアル.

正,零,負　　　　　　正

$a^n=b$　　　卽チ　$log_a b=n$ ……正,零,負

正　正　　　　　　　正

但 $a \neq 1$　　　　　但 $a \neq 1$

先ヅ $a>0$ (但 $a \neq 1$) ナル制限ヲ置ケバ指數ハ正デモ 0 デモ又負デモ眞數ハ常ニ正數トナルモノデアル. 例ヘバ

$$3^2=9>0,\quad 3^0=1>0,\quad 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}>0$$

因テ對數ヲ求ムルコトヲウル數ハ正數ニ限ル. コレハ忘レテナラナイ事柄デアル.

【810】次ノ各式ヨリ x ヲ求メヨ.

$$log_{\sqrt{8}}512=x,\qquad log_{3\sqrt[3]{3}}243=x,\quad log_x 64=4$$

要點　$(\sqrt{8})^x=512$ トシテ兩邊ヲ同ジ數ノ冪ニ化セ.

106 對數ノ性質

對數ノ性質トイフノハ指數ノ法則ヲ對數記號ニ飜譯シタモノデアル. 今双方ヲ對照スレバ

(1) $log_a 1=0$　　　　$a^0=1$

(2) $log_a a=1$　　　　$a^1=a$

(3) $log_a mn=log_a m+log_a n$　　　$mn=a^x a^y=a^{x+y}$

(4) $log_a \frac{m}{n}=log_a m-log_a n$　　　$\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

(5) $log_a m^r=r\,log_a m$　　　$m^r=(a^x)^r=a^{rx}$

(6) $log_a \sqrt[r]{m}=log_a m^{\frac{1}{r}}=\frac{1}{r}log_a m$

$$\sqrt[r]{m}=m^{\frac{1}{r}}=(a^x)^{\frac{1}{r}}=a^{\frac{x}{r}}$$

例ヘバ (3) ヲ言葉デ述ブレバ

右方ハ……同ジ數ノ冪デ表ハストキ積ノ指數ハ各因數ノ指數ノ和ニ等シイ.

左方ハ……同ジ底數ヲ用フルトキ積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シイ.

卽チ同一內容ノ事實ヲ別ノ記號ヲ以テ表ハシタモノニ過ギナイ事ガ分ル. ソレデ對數ノ取扱ニハ常ニ夫ガ指數ノ別名デアル事ヲ考ヘ, 指數ヲ取扱フ積リデ居レバ理解シヤスイモノデ

アル. 唯 $81=3^4$ ニ於テ $4=\log_3 81$ トナルカラ簡單ナ 4 ト云フ指數ガ複雜ナ形 $\log_3 81$ デ表ハサレルノデ何ダカ同一物ダト考ヘニクイカモ知レナイガ此複雜ナ記號ハ 3 ノ肩ニツク指數デアルトイフコトヲ念頭ニ持ツテ居ナケレバナラナイ.

即チ $3^{\log_3 81}=81$ デアル.

尙ホ上ノ性質ハソノ證明法ヲ復習シテ置クガヨイ. 今(3)ヲ一ツダケ證明シテ置カウ.

$\log_a m=x$ トスレバ $a^x=m$

$\log_a n=y$ トスレバ $a^y=n$

$\therefore\ mn=a^x a^y=a^{x+y}$

$\therefore\ \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$

【811】 $\log_a b\times\log_b a=1$ ヲ證セヨ.

要點 $\log_a b=x,\ \log_b a=y$ トシテ $xy=1$ ヲ導ケ.

【812】 $\log_a b=\dfrac{\log_n b}{\log_n a}$ ヲ證セヨ.

要點 $\log_n a=x,\ \log_n b=y$ トシ $\log_a b=\dfrac{y}{x}$ ヲ導ケ.

【813】 $\log_2 3=a,\ \log_3 11=b$ トシテ $\log_{66}44$ ヲ a,b ニテ表ハセ.

【814】 $a^{\log_m b}=b^{\log_m a}$ ヲ證セヨ.

【815】 $y=10^{\frac{1}{1-\log x}},\quad z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ナルトキハ

$x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$ ナルコトヲ證セヨ. (但 $\log x$ 等ハ 10 ヲ底トス)

【816】 $P,\ Q,\ R$ ヲ G.P. ノ第 p 項, 第 q 項, 第 r 項トスルトキハ $(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0$ ヲ證セヨ. (但 $\log P$ 等ハ 10 ヲ底トス)

第二章 常用對數

107 10 ヲ底數トスレバ

$1=10^0$ 因テ $log1=0$

$10=10^1$ $log10=1$

$100=10^2$ $log100=2$

$1000=10^3$ $log1000=3$

⋮ ⋮

10 ノ冪デナイ其他ノ總テノ數ノ對數ハ小數又ハ帶小數トナル. 例ヘバ

$3=10^{0.4771}$ 因テ $log3=0.4771$

$235=10^{2.3711}$ $log235=2.3711$

此等ノ小數ハ實ハ無理數ノ近似値デアツテ從テ此等ノ等式ハ嚴密ニ正確ナモノデハナイ.

108 10 ヲ底數トスレバ 235, 2350, 2.35 等ノ如ク小數點ノ位置ダケヲ異ニスル數ノ對數ノ差ハ常ニ整數デアル.

從テ其小數部分ハ何レモ同一デアル.

$$log2350=log235\times10=log235+log10=log235+1$$

$$log2.35=log\frac{235}{100}=log235-log100=log235-2$$

ソレデ $log235=2.3711$ ガ知ラレテ居レバ

$$log2350=2.3711+1=3.3711$$

$$log2.35=2.3711-2=0.3711$$

トスルコトガ出來ル. 之ガ 10 ヲ底トスル常用對數ノ便利ナ點デアル. 斯ク小數點ノ位置ノミガ異ナル數ニアツテハ其ノ對數ノ小數部分ハ何レノ數モ同一デ唯整數部分ノミガ異ナルモノデアルカラ對數デハソノ小數部分ト整數部分トヲ別々ニ考フルノデアル. 從テ假數指標ノ名稱モ必要ニナルノデアル.

109 **指標**

(i) 1 ヨリ大ナル數ノ對數

(イ) 必ズ正數

(ロ) 指標ハ整數部分ノ桁數ヨリ 1 ダケ少ナイ數

$100=10^2$

$235=10^{2.\cdots\cdots}$ 即チ 3 桁ノ數ノ對數ハ 2 ト 3 トノ

$1000=10^3$ 間ノ數ダカラ 2.……

(ii) 1 ノ對數 0

(iii) 1 ヨリ小ナル數ノ對數

(イ) 必ズ負數

$\frac{m}{n}$ ニ於テ $m<n$ ナルトキハ

$$log\frac{m}{n}=logm-logn<0$$

（ロ） 小數第 n 位カラ始メテ有効數字ガ表ハレル數ノ對數ノ指標ハ $\bar{n}$

$log235=2.3711$ ………(1)

$log23.5=1.3711$ ………(2)

$log2.35=0.3711$ ………(3)

$log0.235=0.3711-1=-0.6289$ ………(4)

$log0.0235=0.3711-2=-1.6289$ ………(5)

$log0.00235=0.3711-3=-2.6289$ ……(6)

(4) 以下ハ 1 ヨリ小ナル數ノ對數デアルカラ負數トナル. 且 (4) 以下ノモノハ (3) マデノモノト小數部分ガ違ツテ居ル. コレデハ常用對數ノ便利ナ點ガ失ハレルカラ此等ハ計算シナイデ 0.3711−1, 0.3711−2, 等トシテ置ク. 然シ之デハ取扱ニ不便ダカラ $\bar{1}.3711$, $\bar{2}.3711$ ト記スノデアル. ツマリ指標ガ 0 トナル (3) ノ場合ノ眞數ヲ例ヘバ 100 デ割レバ小數第二位カラ有効數字ガ始マルコトヽナリ, ソノ數ノ對數ハ (3) ノ對數カラ 100 ノ對數 2 ヲ引クコトヲ表ハシテ置ケバヨイノデアル. ソレデ上ノ指標ノ規則ガアル.

注意 $\bar{7}.5632\div3=(\bar{9}+2.5632)\div3=\bar{2}.8544$

110 餘對數

對數ノ計算ニ於テ一ツノ對數ヲ引ク代リニ或數ヲ加ヘテ引算ヲシタノト同ジ結果ヲ得ル樣ニ工夫シタモノガ餘對數デアル. ソノ基クトコロハ吾々ガ日常ノ取引ニ於テ例ヘバ 370 錢ノ支拂ヲナス場合ニ 4 圓ヲ出シテ 30 錢ヲ受取ルノト同ジデアル. 餘對數ノ作リ方ハ次ノ三ツノ場合ヲ理解シテ置ケバヨイ.

(i) $5.6-3.7=5.6+\bar{4}.3$　　$3+1$ ノ符號ヲ變エテ $\bar{4}$

(ii) $5.6-0.7=5.6+\bar{1}.3$　　$0+1$　　〃　　$\bar{1}$

(iii) $5.6-\bar{2}.7=5.6+1.3$　　$\bar{2}+1$　　〃　　1

(iii) ノ場合及多クノ對數ヲ同時ニ加減スル場合ニ餘對數ニヨル計算ガ便利デアル.

【817】 $log2=0.3010$ ヲ知リテ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ.

$$log\,5,\quad log\frac{\sqrt[4]{5}\sqrt[10]{2}}{\sqrt[8]{2}},\quad log\frac{28}{15}-2log\frac{3}{14}+3log\frac{6}{7}$$

【818】 2^{30} ハ幾桁ノ數カルカ. 又 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ハ小數第何位ヨリ有効數字ガ始マルカ. 但 $log2=0.3010$

【819】 $4\times4^2\times4^3\times\cdots\cdots$ ガ 1000000 ヲ越ユルニハ幾ツノ

因數ヲトルベキカ. 但シ $log2=0.30103$ トス.

【820】 $log2=0.3010$, $log2718=3.4343$ トシテ $log_{2.718}2$ ヲ小數四位マデ計算セヨ. 13 東京高工

【821】 $(1.08)^x$ ノ整數部分ガ二位ノ數トナルタメニ x ノトリウル値ノ限界如何. 但 x ハ整數ニシテ, $log2=0.30103$, $log3=0.47712$ナリトス.

【822】 對數表ヲ用ヒテ次式ヲ計算セヨ.

$\sqrt[8]{\dfrac{43.24\times 1.7^2}{475}}$ 14 桐生高工

$\sqrt[11]{\dfrac{3.428^2\times 0.02463^3}{6.3228}}$ 14 神戸高商

【823】 級數 $1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\cdots\cdots$ ノ和ガ 396 ヨリモ大トナルハ少クトモ何項ヲトルベキカ.

但 $log2=0.3010$

第三章 對數方程式及指數方程式

111 對數方程式ヲ解クニ當ツテ注意スベキ事ハ無理方程式ノ場合ト同ジク驗ガ必要デアルトイフコトデアル. 對數ヲ求ムルコトヲ得ル數ハ正數ニ限ルノデアルカラ對數ヲ求メテアル式ノ値ヲ負數ナラシメ又ハ 0 ナラシメル未知數ノ値ハ之ヲ捨テナケレバナラナイ.

【824】 $\frac{1}{2}log(2x+2)+\frac{1}{2}log(3x+4)=1+log2$ ヲ解ケ.

要點 $log\sqrt{2x+2}\sqrt{3x+4}=log20$ トシテ解ケ.

【825】 $log(2x+1)+log(2x-3)-2log(x-1)=log5$ ヲ解ケ.

【826】 $x^{logx}=1000x^2$ ヲ解ケ.

要點 兩邊ノ對數ヲ求メ $logx\, logx=3+2logx$ トセヨ.

【827】 $log_{10}x+log_{10}y=2$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=3$ ヲ解ケ.

14 大阪高工

112 指數ニ未知數ヲ有スル方程式ハ指數方程式デアル.

【828】 $5^{3-2x}=2^{x+1}$ ヲ解ケ. 但 $log2=0.3010$

【829】 $2^{2x+1}-16\times2^x+32=0$ ヲ解ケ

【830】 $9^x-10\times3^x+9=0$ ヲ解ケ.

【831】 $2^x=8^{y+1}$, $9^y=3^{x-9}$ ヲ解ケ.

【832】 $x^y=y^x$ 及 $x^a=y^b$ ナルトキ x 及 y ヲ簡單ナル形ニテ求メヨ. 但 $x>0$, $y>0$ トス.

第四章　步合算

113 本章ニ於テハ步合算ノ中對數計算ノ應用ニ屬スル部分即チ複利及年賦金ニ關スル事項ノ復習ニトヾメル事トスル.

114 **複利法ノ公式**

今元金ヲ a, 一期間ノ利率ヲ r, 期間ヲ n, 元利合計ヲ A トスレバ

$$A=a(1+r)^n \quad \therefore \quad logA=loga+nlog(1+r)\cdots(1)$$

$$\therefore \quad a=\frac{A}{(1+r)^n} \quad \therefore \quad loga=logA-nlog(1+r)\cdots(2)$$

$$又 \quad 1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}} \quad \therefore \quad \begin{cases} log(1+r)=\dfrac{1}{n}\left\{logA-log\,a\right\}(3) \\ n=\dfrac{logA-loga}{log(1+r)} \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

(1) ニヨッテ元利合計ヲ, (2) ニヨッテ元金(現價)ヲ, (3) ニヨッテ利率ヲ, (4) ニヨッテ期間ヲ求ムルコトガ出來ル. 然シ總テハ (1) カラ導カレルノデアルカラ (1) ヲ一ツ記憶シテ置ケバヨイ.

【833】 年利率六分一年毎ノ複利ニテ元利合計ガ初メテ元金ノ五倍以上トナルハ幾年後ナルカ.

但　$log 2=0.30103$,　$log 106=2.02531$

【834】年利率 6 分一年毎ノ複利ニテ 10 年後ノ元利合計ガ 1 萬圓トナルベキ元金如何.

【835】年利率 7 分一年毎ノ複利ニテ元金 5000 圓ノ元利合計ガ 10000 圓トナルハ幾年後ナルカ.

【836】或人金 2000 圓ヲ預金シ 1 年後ニ 1000 圓ヲ引出シタルニ 2 年後ニ於ケル預金額元利合計 1115 圓トナレリトイフ. 此預金ノ年利率如何. 但利息ハ滿一年毎ニ元金ニ繰込ムモノトス.

115 年賦積立金ノ公式

年賦積立金ヤ年賦償還ノ公式ハ之ヲ記憶スルヨリモ寧ロ之ヲ導ク方法ヲヨク理解シ置クベキ性質ノモノデアル. 從テ問題ヲ解クニモ公式ヲ用ヒズ公式ヲ導クノト同ジ方法デ初メカラ解クコトヲ勸メル.

【837】年利率 r 一年毎ノ複利ニテ毎年始メニ金 a 圓ヲ預クルトキハ第 n 年後ノ元利合計如何.

要點　年々ノ積立金ノ元利合計ヲ別々ニ求メテ之ヲ加フレバヨイ譯デアル.

解

		n 年後ノ元利合計
第一年ノ始メニ積立タル	a 圓	............$a(1+r)^n$圓
第二年	〃	............$a(1+r)^{n-1}$
第三年	〃	............$a(1+r)^{n-2}$
⋮		⋮
第 n 年	〃	............$a(1+r)$

求ムル元利合計ヲ A 圓トセバ

$$A=a(1+r)+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^n$$

右邊ハ G.P. ノ和ナル故

$$A=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

【838】年利率 7 分一年毎ノ複利ニテ毎年始メニ 500 圓宛ヲ預クルトキハ 10 年後ノ元利合計何程トナルカ.

116 年賦償還ノ公式

【839】或年ノ始メニ金 A 圓ヲ年利率 r ニ, 一年毎ノ複利ニテ借入レ毎年末ニ各等額ノ年賦金ヲ支拂ヒ n 年ノ終リニ至リ皆濟セントス. 年賦金如何.

解　年賦金ヲ a 圓トスレバ

第一年後ノ元利合計　$A(1+r)$圓
第二年目ノ元金　$\{A(1+r)-a\}$
第二年後ノ元利合計　$\{A(1+r)-a\}(1+r)$
第三年目ノ元金　$\{A(1+r)^2-a(1+r)-a\}$
第三年後ノ元利合計　$\{A(1+r)^2-a(1+r)-a\}(1+r)$
⋮
第n年後ノ元利合計　$\{A(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\cdots\cdots-a\}(1+r)$

最後ニ a 圓ヲ拂ヘバ n 年後ノ元利合計ハ 0 トナル.

$$\therefore\quad A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\cdots\cdots-a(1+r)=a$$

$$\therefore\quad A(1+r)^n=a+a(1+r)+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-1}$$
$$=\frac{\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

$$\therefore\quad a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$$

第二ノ形ハ計算上幾ラカ便利デアル.

【840】或年ノ始メニ 20000 圓ヲ借リテ毎年末ニ等額ノ年賦金ヲ支拂ヒ 10 年後ニ皆濟セントス年利率 7 分一年毎ノ複利ニテ年賦金何程ナルカ.

117 年金

年賦償還ヲ銀行ノ側ニ立ッテ考フレバ A 圓ヲ貸シテ n 年間

毎年 a 圓宛ヲ受取ルコトヽナル.カヽル場合ニ n 年間 a 圓ノ年金ヲ受ケルトイフ.年賦償還ノ公式ハソノマヽ年金ノ公式デアッテ A ヲ年金ノ現價トイフ.

【841】年利率ヲ r トシ n 年間毎年ノ終リニ支拂フベキ年金 P ノ現價ヲ求メヨ.

要點　年賦償還ノ公式ニ於テ $a=P$ トシテ A ヲ求ムルカ又ハ毎年ノ年金 P 圓ノ現價 $\dfrac{P}{1+r}$, $\dfrac{P}{(1+r)^2}$, ……, $\dfrac{P}{(1+r)^n}$ ノ和ヲ求メテモヨイ.

年賦償還ノ公式ニ於テ $n\to\infty$ トスレバ $(1+r)^{-n}=\dfrac{1}{(1+r)^n}\to 0$

依テ $(1+r)^{-n}$ ヲ無視スレバ $a=Ar$…………(1)

之ハ永久年金ノ公式デアッテ今若シ A 圓ヲ銀行ニ預ケタトシタラ利率ガ變ラナイ限リ永久ニ毎年 a 圓ヲ受取ルコトガ出來ル.(1) ヨリ又 $A=\dfrac{a}{r}$ 之ハ永久年金ノ現價ヲ與フル公式デアル.

第九編　グラフ

118　常數と變數

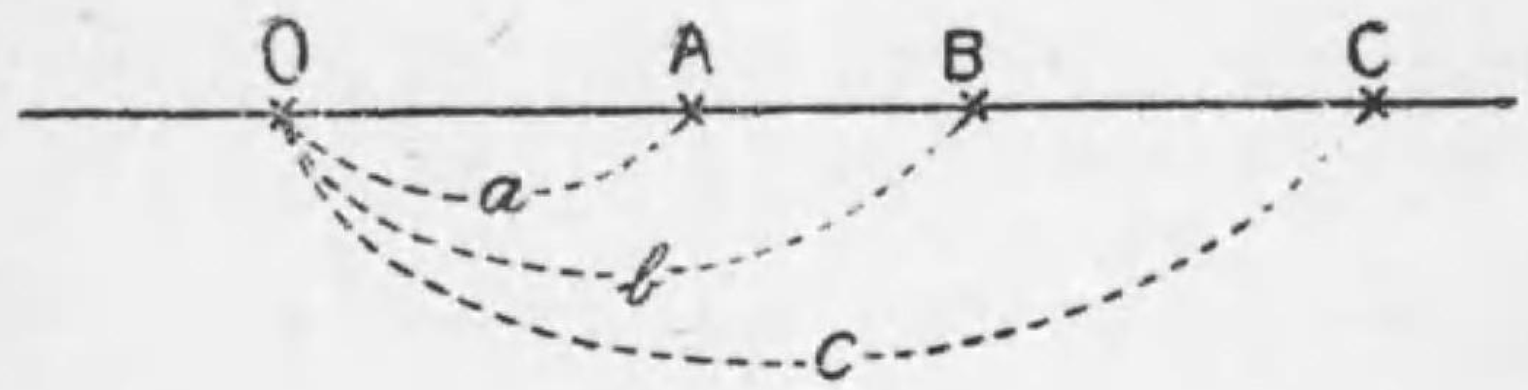
或ル山ノ高サトイフトキハ確定不變ノ數ヲ思ヒ，或日ノ氣溫トイフトキハ絶エズ變動スル數ヲ思フデアラウ．元ヨリ山ノ高サト雖モ歴史的ニ見レバ時ニ高低ガアルデアラウシ，一日ノ氣溫モ亦或時間一定ノ高サニ止ルコトモアルデアラウケレドモ或ル山ノ高サ H 米トイフトキハ H ハ定マレル數ヲ表ハシ，一日ノ氣溫ヲ T デ表ハストキハ T ハ時刻ニヨツテ變動スル數ヲ表ハスト見ルノガ普通デアル． H ノ如キ數ヲ常數トイヒ，T ノ如キ數ヲ變數トイフ．

119　變數ノ特質

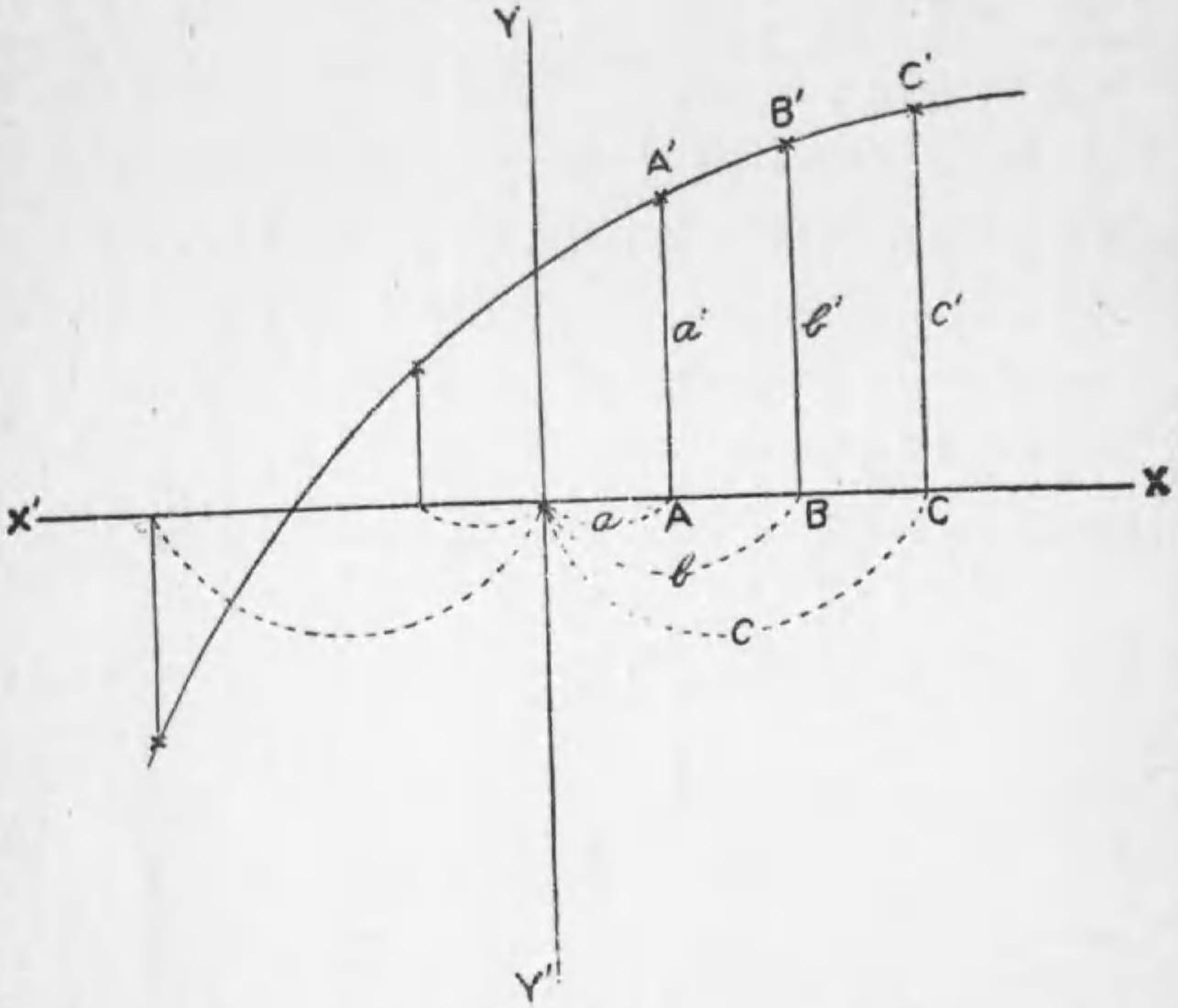
山ノ高サ 2700 米トイヘバソレダケデ意味ニ缺グルトコロハナイ．然シ或日ノ氣溫 18°c. トイツタノデハ未ダ物足リナイ．一日中ノ如何ナル時刻ニ於テノ氣溫デアルカヾ同時ニ分ツテ居ナケレバ意味ガ完成シナイ．氣溫ハ時刻ト共ニ相伴ツテ變動スルノデ，ソノ双方ノ變動ガ同時ニ示サレテ始メテ意味ガ完成スルノデアル．カヽル二變數ノ間ノ關係ヲ函數關係トイヒ，一方ヲ獨立變數ト見ルトキ他ハソノ函數デアル．

120　函數變化ノ圖表示

幾ツカノ常數 $a, b, c, \cdots\cdots$ ヲ比較スルニハ一直線上ニ一點 0 ヲ定メ，ソノ點ヨリ各數ヲ數値トスル線分ヲ各數ノ符號ニヨツテ右方又ハ左方ニトリ，他端ヲ $A, B, C, \cdots\cdots$ トスレバ $A, B, C, \cdots\cdots$ ノ位置ニヨツテ各數ノ大小關係ヲ表ハスコトガ出來ル．



然ルニ一ツノ變數(函數) y ノ變化 $a', b', c', \cdots\cdots$ ヲ圖示スルニハ之ニ先ダツテ變動スル變數 (獨立變數) x ノ對應スル値 $a, b, c, \cdots\cdots$ ヲ同時ニ圖示シナケレバ其意味ヲ完カラシムル事ガ出來ナイ．之ガ爲メニ先ヅ獨立變數ノ變化ヲ一直線 $X'OX$ 上ノ點 $A, B, C,$ ノ位置ヲ以テ表ハシ，此等ノ點ニ於テ $X'OX$ ニ垂直ナル直線ヲ引キ，ソノ上ニ $a', b', c', \cdots\cdots$ ヲ數値トスル線分 $AA', BB', CC', \cdots\cdots$ ヲ各數ノ正負ノ符號ニヨツテ上方又ハ下方ニトレバ $A', B', C', \cdots\cdots$ ノ配列ニヨツテ二變數ガ相伴ツテ變動スル狀態ヲ直觀スルコトガ出來ル．



AA', BB', CC' ハ必ズシモ $X'OX$ ニ垂直ナルヲ要シナイノデ皆一定ノ方向ニ平行シテ居レバヨイノデアル. 此方向ハ O ヲ過ギル直線 YOY' デ表ハス. 多クノ場合ニハ YOY' ハ $X'OX$ ニ垂直ノ方向ニ取ルノガ便利デアル.

又 A', B', C', …… ハ程ヨイ線デ順次ニ之ヲ連結スレバ一層ソノ配列ヲ見易クスルコトガ出來ル. カク函數變化ノ狀態ヲ圖示シタモノヲ函數ノ**グラフ**トイフ.

A', B', C', …… ノ各點ハソノ位置ニヨッテ常ニ二ツノ大サヲ表ハス. A' ハ OA, AA'; B' ハ OB, BB'; …… 此等ハ卽チ點ノ横坐標, 縱坐標デアル. **グラフ**ノ本質ハ實ハ此曲尺形ヲナス坐標ニアルノデアルガ, **グラフ**ヲ書クニハ方眼紙ヲ用フルノデ一々垂線ヲ立テルコトヲシナイタメニ自然各點ノ連結線ニノミ注意ヲ奪ハレル傾キガアル. 連結線ハ只坐標ノ一端ノ境界ヲ示スモノデアッテ**グラフ**ノ本質ハ坐標ニアルモノナルコトヲ忘レテハナラナイ. **グラフ**ヲ見ルニモ又之ヲ書クニモ先ヅ第一ニ曲尺形ヲナシタ多クノ坐標ヲ念頭ニ浮ベ $X'OX$ 上ノ點ノ移動ニ伴フ垂線ノ伸縮ニ眼ヲ向ケナケレバナラヌ.

121 グラフノ書キ方

先ヅ二ツノ變數ノ相對應スル値ヲ適當ノ組數ダケ計算スル. 但シ二次曲線以上デハ獨立變數ノ値ハ間ガアマリ飛ンデハイケナイ. 次ニ各組ノ二ツノ値ヲ以テ曲尺形ノ坐標ヲ作リ, ソノ符號ニヨッテ適當ノ向キニ置キ, 依ッテ得ラレタ多クノ點ヲ連結スレバヨイ. 多クノ場合獨立變數ヲ横坐標, ソノ函數ヲ縱坐標トスルノガ普通デアル.

又兩坐標ニ於ケル單位ハ必ズシモ同ジモノデナクテモヨイ. 然シ例ヘバ圖ノ**グラフ**ヲ書ク場合ナドニハ單位ガ同ジデナイ

ト楕圓形ガ得ラレル.

---

122 グラフノ讀方

グラフノ讀方ノ要點ハ一方ノ變數ノ一定値ニ對スル他ノ變數ノ値ヲ求ムルコトニ歸着スル. 此場合ニモ一變數ノ一ツノ値ヲ一邊トスル曲尺形ガ何處ニ又幾ツダケ出來ルカ又他ノ邊ノ大サハドウデアルカヲ見レバヨイ. コノタメニハ坐標軸ニ平行ナル直線ヲ利用スル.

【842】次ノ一次函數ノ**グラフ**ヲ書ケ.

$x+3,\quad 2x-5,\quad 5-2x$

【843】次ノ方程式ノ**グラフ**ヲ書ケ.

$y=x,\quad y+2x=0,\quad 3x+2y=12,$

$x=2,\quad y=-3,\quad \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{7}=1$

注意 $x=2$ ニ於テ x ハ一ツノ確定値ヲ表ハシテ少シモ變化ヲ許サナイノデアルガ然シ此場合ニハ x, y 二變數ヲ考ヘテ居ルモノト假定シテ居ルノデアツテ唯 $x=2$ トアルノハ y ハ全ク任意ノ値ヲトルモノ卽チ不定デアルト云フ意ガ含マレテ居ルノデアル. ソレデ $x=2$ ハ

$\begin{cases} x=2 \\ y\cdots\cdots 不定 \end{cases}$ ヲ意味シテ居ル. 從テ此等ヲ坐標トスル點ガ無數ニ得ラレルノデアル.

【844】**グラフ**ニヨリ次ノ方程式ノ根ヲ求メヨ.

$3x-7=0,\quad 5x+6=0$

【845】$3x-10,\quad 5-2x$ ナル二函數ノ**グラフ**ヲ畫キ次ノ解ヲ求メヨ.

$3x-10>5-2x,\quad 3x-10=5-2x,\quad 3x-10<5-2x$

【846】次ノ二次函數ノ**グラフ**ヲ書ケ.

$x^2,\quad -3x^2,\quad x^2+3x+1,\quad 5-4x-x^2$

注意 x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ二次式ノ値ヲ計算スルニハ次ノ樣ニ變形スレバ計算上幾ラカ便利デアル.

$5-4x-x^2=9-(x+2)^2$, 卽チ極大極小ヲ求メルトキト同樣ノ變化.

【847】次ノ方程式ノ**グラフ**ヲ書ケ. (二次曲線)

$x^2+y^2=25,\quad (x-2)^2+(y-5)^2=16$

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1,\quad \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1,\quad y=\dfrac{4}{x},\quad y=\dfrac{1}{x^2}$

【848】 $4x^2-8x-21$ ノ**グラフ**ヲ書キ次ノ解ヲ求メヨ.

$4x^2-8x-21>0$, $4x^2-8x-21=0$,

$4x^2-8x-21<0$, $4x^2-8x-21$ ガ極小ナルトキノ x ノ値

【849】 $x^2-10x+21$, x^2+4x+4, $-\ {}^2+2x-4$ ノ**グラフ**ヲ書キ次ノ方程式ノ根ヲ吟味セヨ.

$x^2-10x+21=0$, $x^2+4x+4=0$, $-x^2+2x-4=0$

【850】 次ノ聯立方程式ノ解ヲ**グラフ**ニヨツテ求メヨ.

$$\begin{cases} y=x-2 \\ x+5y=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

【851】 **グラフ**ニヨツテ $2x^3-x^2-7x+6=0$ ヲ解ケ.

【852】 次ノ方程式ノ**グラフ**ヲ書ケ.

$$y=x^3,\quad y=\frac{x+5}{x-3},\quad y=\frac{(x-2)(x-7)}{x+1}$$

【853】 $2-x-x^2$ ノ**グラフ**ヲ書ケ.　　12　北海帝大

【854】 $(x+1)(x-3)$ ノ**グラフ**ヲ書キ, 之ヲ利用シテ

$(x+1)(x-3)$ ガ負ナルベキ x ノ範圍ヲ決定セヨ.

12　東京商大豫科

【855】 $y=2x^2+18x+16$ ノ**グラフ**ガ x 軸ト P, Q ニ於テ出會フトキハ $OP.OQ=8$ ナルコトヲ證セヨ. 但シ O ヲ x 軸 y 軸ノ交點トス.

【856】 **グラフ**ヲ書キテ $x^3-10x-10=0$ ノ根ヲ求メヨ. (但小數一位マデ)　　11　大阪醫大

【857】 一ツノ量 y ガ他ノ一ツノ量 x ノ平方ニ反比例スルトハ如何ナル意味ナリヤ. 又其關係ヲ表ハス**グラフ**ノ大體ノ形ヲ書ケ.　　14　廣島高師

【858】 關係式 $y=log_{10}(x^2)$ ニ於テ x ガ 1 ヨリ 10 マデノ値ヲトルトキ x, y ノ關係ヲ對數表ヲ用ヒ附屬方眼紙上ニ**グラフ**トシテ表ハセ.　　14　神戸高工

問題解法ノヒント

37 $4^{2n}-1=16^n-1^n$ 一般ニ x^n-y^n ハ $x-y$ デ割切レル

因テ今 $x=16,\ y=1$ トスレバ 16^n-1^n ハ $16-1$ デ割切レル.

41 $x^2-(p+1)x+p=(x-1)(x-p)$ 因テ $x=1,\ x=p$ ヲ與式ニ代入セヨ.

43 $x^2-(ay+bz)x+abyz=(x-ay)(x-bz)$ 因テ與式ニ

$x=ay,\ x=bz$ ヲ代入スレバ $a^ny^n+py^n+qz^n=0,\ b^nz^n+py^n+qz^n=0$

$\therefore\ (a^n+p)y^n=-qz^n\cdots\cdots\cdots(1),\qquad py^n=-(b^n+q)z^n\cdots\cdots\cdots(2)$

(2) ノ兩邊ヲ 0 ナラズト假定シテ之ニテ (1) ノ兩邊ヲ割レ.

49 $(x-\alpha)(x-\beta)$ デ割ツタ商ヲ Q, 剩餘ヲ $mx+n$ トスレバ與式ハ

$(x-\alpha)(x-\beta)Q+mx+n\cdots\cdots(1)$, (1)ニ於テ $x=\alpha,\ x=\beta$ ヲ代入スレバ

$0\times Q+m\alpha+n=R\cdots\cdots\cdots(2),\qquad 0\times Q'+m\beta+n=S\cdots\cdots\cdots(3)$

(2), (3) ヲ解イテ $m,\ n$ ヲ定メヨ.

51 x ノ一次ノ公因數ヲ $x+k$ トスレバ

$k^2+3k+2=0\cdots\cdots\cdots(1),\qquad k^2-km+4=0\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)−(2) $(3+m)k-2=0\qquad \therefore\ k=\dfrac{2}{3+m}\cdots\cdots(3)$ 但 $3+m\neq 0$ トス

(3) ヲ (1) 又ハ (2) ニ代入セヨ.

65(iii) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ トシ

$x^2-yz=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$ 等トセヨ.

107 剩餘定理及齊次式ノ性質ヲ應用シテ次ノ結果ヲ導クコトガ出來ル.

與式 $=(b-c)(c-a)(a-b)(la^2+mb^2+nc^2+pab+qbc+rca)\cdots\cdots\cdots(1)$

但 $l,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r$ ハ未定ノ係數, (1) ハ恒等式ナル故次ノ各項ノ係數ヲ比較シテ未定係數ヲ決定スルコトガ出來ル.

$a^4b\cdots\cdots l=0,\quad ab^4\cdots\cdots m=0,\quad bc^4\cdots\cdots n=0,\quad a^2b^2\cdots\cdots 1=l-p\cdots\cdots p=-1,$

$b^2c^2\cdots\cdots 1=m-q\cdots\cdots q=-1,\qquad c^2a^2\cdots\cdots 1=n-r\cdots\cdots r=-1$

108 前問ト全ク同樣.

110 假設ヨリ $(b+c)(c+a)(a+b)=0$ 次ニ $a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5$ ガ $(b+c)(c+a)(a+b)$ ナル因數ヲ有スルコトヲ見レバヨイ.

111 前問ノ解ニ倣ヘ.

112 假設ヨリ $(b+c)(c+a)(a+b)=0$ ヲ導ケ.

113 前問ト同樣ニシテ $(b+c)(c+a)(a+b)=0$

因テ $(1-a)(1-b)(1-c)=0$ ヲ導ケ.

120 二數ヲ $A,\ B$ トシ $A=a\times 119,\ B=b\times 119$ トスレバ

$714=A+B=(a+b)\times 119$

$\therefore\ a+b=6$ $a,\ b$ ニ公約數ナキ樣ニ 6 ヲ二ツニ分カテ.

123 $L\div G=ab$ 因テ與ヘラレタ L.C.M. ヲ G.C.M デ割リ商ヲ二ツノ一次因數ニ分解シ, 各因數ヲ G.C.M. ニ掛ケヨ.

127 $(x^2+ax+b)\div(x+f)=x+p$ トシ未定係數法ニヨリテ $p=a-f$ ヲ求メ L.C.M.$=(x+a-f)(x^2+mx+n)$ トシ 尙ホ $f^2-af+b=0,\ f^2-mf+n=0$ ナル條件ヲ用ヒテ所要ノ形ニ變セヨ.

145 $x-y$ ガ偶數ナラバ $x+y$ モ亦偶數トナルベシ.

146 $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$ 三因數ノ性質ヲ考ヘヨ.

a^2-b^2 ニ於テ $a=2n+1,\ b=2n'+1$ トスレバ

$(2n+2n'+2)(2n-2n')=4(n+n'+1)(n-n')$ 因テ

$n,\ n'$ ガ共ニ奇數又ハ共ニ偶數ナルトキハ $n-n'$ ガ偶數トナリ $n,\ n'$ ガ一ツハ奇數他ハ偶數ナルトキハ $n+n'+1$ ガ偶數トナリ, 何レニシテモ與式ハ 8 ニテ整除セラル.

148 $a^3-a=a(a-1)(a+1)$ 然ルニ $a-1,\ a,\ a+1$ ハ連續セル三ツノ整數デアル. (但 a ハ整數トス)

149 $n^2-1=(n-1)(n+1)$ 今 $n-1,\ n,\ n+1$ ハ連續セル三數デ n ハ 3 ノ倍數デナイカラ $n-1,\ n+1$ ノ何レカガ 3 ノ倍數.

150 前同ノ如クシテ n ハ偶數デナイカラ $n-1,\ n+1$ ハ相隣レル偶數.

151 $n^3+5n=n(n^2+5)=n(n^2-1+6)=n(n-1)(n+1)+6n$ トセヨ.

154 連續セル五整數ノ積ニ化スルコトガ出來ル.

156 $a^3b-ab^3=a^3b-ab+ab-ab^3=ab(a^2-1)-ab(b^2-1)$ トセヨ.

157 最小數ヲ x, 最大數ヲ y トスレバ, 一度モ端數ヲ生セザルモノガ最小數デアルカラ $x\div2^n=1$ ∴ $x=2^n$

次ニ別ニ最後ノ商ガ 2 トナル如キモノヽ中ノ最小數ヲ x' トスレバ上ト同樣ニシテ $x'\div2^n=2$ ∴ $x'=2^{n+1}$

因テ $y=x'-1=2^{n+1}-1$.

159 $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)(n-1+n+2)=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$

193 $x=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ ヲ代入スレバ $(a+\dfrac{b}{x})^2+(b+cx)^2=a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2+b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2$

云々.

194 $a>0$ ∴ $a=(ab)^{\frac{z}{x}}$ 又 $b>0$ ∴ $b=(ab)^{\frac{z}{y}}$ ∴ $ab=(ab)^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}$

云々.

199 初メノ分數ハ $\dfrac{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}{1-4x^2}$ トナル. 而ルニ假設ヨリ $1-x^2>0$, $4x^2-1>0$ 故ニ $\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}=\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$ 云々.

【若シ $\sqrt{1-x^2}\,(1-4x^2)$ トセバ誤】

200 $a>0,\ x>0$ トセン. $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$ ……(1)

∴ $x=\dfrac{(a-1)^2}{a}$ ……(2) ∴ $x+2=\dfrac{a^2+1}{a}$,

$4x+x^2=x(x+4)=\dfrac{(a-1)^2(a+1)^2}{a}$

$a>0$ 及ビ (1) ヨリ $a-1>0$ ∴ $\sqrt{4x+x^2}=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a}$

$$∴\ 與式=\frac{\dfrac{a^2+1}{a}+\dfrac{a^2-1}{a}}{\dfrac{a^2+1}{a}-\dfrac{a^2-1}{a}}=a^2.$$

224 $a=1.414,\ b=1.732$ ∴ $a+b=3.146$ トスレバ $a,\ b$ ノ誤差ハ各 0.0005 ヨリ大デナイカラ $a+b$ ノ誤差ハ 0.001 ヨリ大デハナイ.

ソレデ小數第二位マデハ全ク正シイ.

225 二數ヲ $a,\ b$ トスレバ $25.5\leqq a\leqq26.4$ $82.5\leqq b\leqq83.4$

$26\times83-25.5\times82.5=54.25,\quad 26.4\times83.4-26\times83=43.76$

因テ ab ト 26×83 トノ差ハ 54.25 ヨリ大デハナイ.

234 第二ニ第一ヲ代入シタル結果ト第一トヨリ $x=\dfrac{m+n}{2m}$ ヲ得.

之ヲ第一ニ代入セヨ.

236 第三方程式ハ $(x+y+z)\left[\dfrac{1}{2}\left\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\right\}\right]=c^3$ トナル.

238 第一方程式ヨリ $\dfrac{x+y+z}{y+z}=a+1$ ∴ $\dfrac{y+z}{x+y+z}=\dfrac{1}{a+1}$

他ノ二ツヨリ同樣ノ結果ヲ導イテ邊々相加ヘヨ.

245 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ ヨリ

$a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2(a^2b^2-2abcd+c^2d^2)=0$ トセヨ.

249 $3a^2+2a(x-u)+x^2+2y^2+2z^2+u^2=2(xy+yz+zu)$ ヨリ

$3a^2+2a(x-y+y-z+z-u)+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-u)^2=0$

$a^2+2a(x-y)+(x-y)^2+a^2+2a(y-z)+(y-z)^2+a^2+2a(z-u)+(z-u)^2=0$

トセヨ.

250 $a^2x^2-2abx+b^2+b^2x^2-2bcx+c^2=0$ トセヨ.

251 $(a-d)^2+(b-c)^2>0$ ∴ $a^2+b^2+c^2+d^2-2(ad+bc)>0$ トセヨ.

258 第一方程式ヲ平方スレバ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{2xyz}{abc}\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\right)=1$

259 假設ヨリ $a+b+c=0$ 又ハ $x+y+z=0$ ヲ得.

$a+b+c=0$ ナルトキ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコト明カデアル.

次ニ $x+y+z=0$ ト假設トヨリ y, z ヲ消去スレバ

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ ヲ得テ $a^3+b^3+c^3=3abc$ トナル.

264 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xyz}(x+y+z)$.

272 $\frac{x}{x+y+z}=\frac{k}{a}$ 等トシテ邊々相加ヘヨ.

273 第二分數ノ分母子ニ a ヲ第三分數ノ分母子ニ ab ヲ掛ケヨ.

275 第一, 第二方程式ヨリ y ヲ求メ, 第一ノ兩邊ニ $ny+3$ ヲ加ヘヨ.

277 假設ノ分母ヲ拂フテ一邊ニ集メ $x-y$ デ割レバ $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$

トナル. 次ニ $\frac{yz-x^2}{y+z}-\frac{xy-z^2}{x+y}$ 及 $\frac{yz-x^2}{y+z}-(x+y+z)$ ヲ纏ムレバ分子

ハ $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy$ ナル因數ヲ有スベシ.

278—281 277 ト全ク同樣ニシテ解ケル.

282 $n=a^2-x^2=b^2-y^2=c-(x+y)^2$ ∴ $n-a^2=-x^2\cdots(1)$, $n-b^2=-y^2\cdots(2)$

∴ $4(n-a^2)(d-b^2)=4x^2y^2\cdots\cdots(3)$ 又 $n=c^2-x^2-2xy-y^2\cdots\cdots(4)$.

(4) ニ (1) (2) ヲ代入シテ $n=c^2+n-a^2-2xy+n-b^2$

∴ $2xy=n-a^2-b^2+c^2$ ∴ $(n-a^2-b^2+c^2)^2=4x^2y^2\cdots\cdots\cdots(5)$

(3), (5) ヨリ $(n-a^2-b^2+c^2)^2=4(n-a^2)(n-b^2)$

283 $x=cy+bz\cdots\cdots(1)$ $y=az+cx\cdots\cdots(2)$ $z=bx+ay\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (1) 及 (2) ニ代入スレバ $(1-b^2)x=(c+ab)y\cdots\cdots(4)$

$(1-a^2)y=(c+ab)x\cdots\cdots(5)$, (5) ノ兩邊ヲ 0 ニアラズトシテ

(4)÷(5) $\frac{(1-b^2)x}{(1-a^2)y}=\frac{y}{x}$ ∴ $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}$ 云々.

286 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}\right]$ 云々.

287 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, $\frac{c+d}{2}>\sqrt{cd}$

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+a}{2}}{2}\geqq\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}}>\sqrt{(\sqrt{ab})(\sqrt{cd})}$$ 云々.

288 $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$

トシテ 286 ヲ用ヒヨ.

291 與式$=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}-2+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}-1=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\times\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a+b)}$

云々.

293 三邊ヲ $a, 2a, b$ トシ $a+2a+b=p$ トスレバ

$2a-a<b<2a+a$ 即 $a<b<3a$

因テ最短邊ハ a デ且 $a+2a+a<p<a+2a+3a$

故ニ $4a<p<6a$ 各項ハ皆正數ダカラ

$\frac{1}{4}>\frac{a}{p}>\frac{1}{6}$

294 三數アリテ何レノ二ツノ和モ殘リノモノヨリ大デアルトキハソノ三數ハ三

角形ノ邊ヲ表ハストイヘル.

312 $x(9x^2-1)-(3x+1)=0$ トセヨ.

333 二根ノ差ハ 1

339 $\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}=$公差$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$ ヨリ γ ヲ求メ

$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}=$公差$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$ ヨリ δ ヲ求メテ解ケ.

343 假設ノ分母ヲ拂ヘバ $2x_1x_2+2y_1y_2-(x_1+x_2)(y_1+y_2)=0$ トナル

355 二根ノ和ト積トガ何レモ相等シ.

370 先ヅ左邊ヲ因數分解セヨ.

371 判別式ヲ作リテ根ガ實數ナルコトヲ見, 次ニ二根ノ和ト積トノ符號ニヨツテ二根ガ正ナルコトヲ見ヨ.

395 $x+\dfrac{1}{x}=k$ トシテ k ノ値ノ限界ヲ求メヨ.

400 x ガ實數ナルタメノ條件ト y ガ實數ナルタメノ條件トヲ求メ二ツノ不等式ヲ解ケ.

401 判別式$=33>0$ 故ニ二根ハ實數. 今左邊ニ 2 ヲ代入スレバ $-6<0$ 因テ 2 ハ二根ノ中間ノ數. 次ニ左邊ニ -3 ヲ代入スレバ $22>0$ 因テ -3 ハ二根ノ小ナルモノヨリ小ナルカ又ハ大ナルモノヨリモ大. 而ルニ二根ノ和ハ 5. 故ニ -3 ハ二根ノ小ナルモノヨリ小ナルヲ知ル.

402 3 ハ大ナル根ヨリモ大.

407 400 ト同樣ニ.

408 二式ヨリ $x+y=\pm\sqrt{13-k}$ $x-y=\pm\sqrt{3k-18}$

和ト差ト何レモ實數ナルトキ二數ハ實數トイヘルカラ上ノ二式ヨリ k ノ限界ヲ求ムルコトガ出來ル.

410 先ヅ a, b, c ヲ決定セヨ.

411 $y=(x+\dfrac{p}{2})^2-\dfrac{p^2-4q}{4}$ トナリ $x=\dfrac{p}{2}$ ナルトキ極小値$-\dfrac{p^2-4q}{4}$トナル云々.

412 先ヅ極小値ヲ求メヨ.

417 現在輸入額 A 圓トスレバ p(割)課稅後ノ輸入額ハ $A(1-5p)$圓. 關稅收入 $A(1-5p)p$圓. 因テ $p-5p^2$ ノ極大ヲ考ヘヨ.

418 AC ヲ x 哩トシ鐵道一哩ノ運賃ヲ a 錢トスレバ

運賃總額 $c\{x+2\sqrt{27+(36-x)^2}\}$ 錢

因テ $x+2\sqrt{27^2+(36-x)^2}=k$ トシテ k ノ極小値ヲ求メヨ.

435 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{16}{x^2}=(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x})^2+\dfrac{8}{3}$ ナルコトヲ用ヒヨ.

445 $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ナル故兩邊ヲ三乘スレバ

$37+x-x-3\sqrt[3]{37+x}\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x})=1$

$\therefore$ $36=3\sqrt[3]{37+x}\sqrt[3]{x}$ 云々.

500 $\dfrac{1}{x}(y+\dfrac{1}{y})=\dfrac{20}{3}$, $x(y+\dfrac{1}{y})=\dfrac{5}{3}$ トナル.

523 各方程式ヲ夫々 x, y, z デ割レ.

526 $x-y$ ヲ求ムル工夫セヨ.

532 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$ トシテ $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}$ 等トセヨ.($a=0$ トスレバ不定トナル.)

533 第二方程式ハ $(x-1)^2+y^2=0$ 之ヲ滿足スル實數値ハ $x=1$, $y=0$ ノ外ニナイ. 然ルニ之ハ第一方程式ヲ滿足セズ.

535 加減法ニヨツテ消去スレバヨイ. 特別ノ解法トシテハ

$X^3-zX^2+yX-x=0$ ハ $X=a$, $X=b$, $X=c$ ニヨツテ滿足サレル.

因テ $(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-zX^2+yX-x$ トナリ之ハ恒等式デナクテハナラナイ. 云々.

541 甲乙丙ノ毎分ノ速サヲ夫々 x 米 y 米 z 米 トシ t 分後丙ハ乙ニ追付クモノトセバ $9x=5y$……(1) $(4+7+7)x=7z$……(2)

$(7+7+t)y=(7+t)z$……(3). (1), (2) ヨリ $10y=7z$……(4) 云々.

544 兩市ノ距離ヲ x 哩, A ノ速サヲ毎時 y 哩トスレバ B ノ速サハ毎時 $(y-21)$ 哩, C ノ速サハ毎時 $(y-30)$ 哩トナル. 因テ

$\dfrac{x}{y-21}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$……(1), $\dfrac{x}{y-30}-\dfrac{x}{y-21}=\dfrac{3}{4}$……(2)

(1)÷(2) トシテ x ヲ消去セヨ.

553 兩驛間ノ距離ヲ $2x$ 哩トセバ

$\dfrac{x+\frac{1}{2}}{30}=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{40}+\dfrac{1}{5}$ 又ハ $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{30}=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{40}+\dfrac{1}{5}$

559 求ムル距離ヲ x 哩, 速サヲ毎時甲 y 哩 乙及丁 z 哩, 丙 w 哩トスレバ

$\frac{5}{y}=\frac{x-5}{w}$……(1), $\frac{x-3.6}{w}=\frac{3.6}{z}$……(2), $\frac{4.5}{z}=\frac{x-4.5}{y}$……(3)

(1)×(2)×(3) トシテ兩邊ヨリ y, z, w ヲ除クヲウベシ.

567 甲丙ノ靜水ヲ漕グ速サヲ夫々毎時 x 町, y 町トスレバ乙ハ毎時 $(x-24)$ 町トナル.

$\frac{80}{x+14}=\frac{48}{y-14}$………(1) 又

甲丙相會スルマデノ時間 $\frac{80}{(x+14)+(y-14)}$時$=\frac{80}{x+y}$時

乙丙相會スルマデノ時間 $\frac{80}{(x-24+14)+(y-14)}$時$=\frac{80}{x+y-24}$時

∴ $\frac{8(y-14)}{x+y-24}=\frac{80(y-14)}{x+y}+10$………(2)

571

船ノ速サヲ毎秒 x 呎トセバ

$AB+AC=2\times1120$. $BC=2x$ ∴ $2AB=2\times1120-2x$, $AB=1120-x$.

同様ニシテ $AD=2800-\frac{5}{2}x$ ∴ $BD=AD-AB=1680-\frac{3}{2}x$

∴ $120x=1680-\frac{3}{2}x$ 云々.

573 黄銅ヲ組成スル銅ト亞鉛トノ割合ヲ $x:1$ トシ混ジタル青銅ト黄銅トヲ y 瓦, z 瓦トスレバ

青銅中ノ錫 $\frac{16}{100}y$瓦. 新合金中ノ錫 $\frac{10}{100}(y+z)$瓦

∴ $\frac{16}{100}y=\frac{10}{100}(y+z)$ ∴ $y=\frac{5}{3}z$………(1)

又青銅中ノ亞鉛 $\frac{4}{100}y$ 瓦 黄銅中ノ亞鉛 $\frac{1}{x+1}\times z$ 瓦

新合金中ノ亞鉛 $\frac{16}{100}\times(y+z)$ ∴ $\frac{4}{100}y+\frac{1}{x+1}\times z=\frac{16}{100}(y+z)$……(2)

(1) ヲ (2) ニ代入スレバ $\frac{z}{15}+\frac{z}{x+1}=\frac{4}{25}\times\frac{8}{3}z$

∴ $\frac{1}{15}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{25}\times\frac{8}{3}$ ∴ $x=\frac{16}{9}$ 答 $\frac{16}{9}:1$ 即 16:9

(算術的ニ解ケバモツト簡單ニ解ケル)

586 甲ニテ y (歩合) ダケ誤魔化スモノトスレバ買價 x 圓ノモノハ $\frac{x}{1-y}$ 圓トナル. 次ニ乙ニテ z (歩合) ダケ誤魔化スモノトスレバ原價 X 圓ノモノハ $X(1+z)$ 圓トナル. 依テ甲乙ヲ使用スレバ買價 x 圓ノモノハ $\frac{x}{1-y}\times(1+z)$ 圓ノモノトナリ. 歩合ニ於テ $\frac{1+z}{1-y}-1$ ノ利益トナル.

然ルニ甲乙取違エテ使用シ且ツ價格ニテ一割ノ利ヲ見込メバ

$x\times\frac{1-y}{1+z}\times(1+0.1)=(1-0.12)x$ ∴ $\frac{1-y}{1+z}=\frac{0.88}{1.1}=0.8$

∴ $\frac{1+z}{1-y}=1.25$ ∴ $\frac{1+z}{1-y}-1=0.25$

590 六桁ノ數ヲ x トスレバ

$(x-200000)\times10+2=3x$ 云々.

592 5 ノ倍數ナル故右端ノ數字ハ 0 又ハ 5 然ルニ逆順ノ數ハ原數ヨリ大ナル故右端ノ數字ハ 5 云々.

593 收容患者數ヲ Ax, Bx 死亡者數ヲ ay, by トシ

$\frac{Ax-ay}{Bx-by}=\frac{c}{d}$ ヨリ x ヲ y デ表ハシ $\frac{ay}{Ax-ay}$ 及 $\frac{by}{Bx-by}$ ニ代入セヨ.

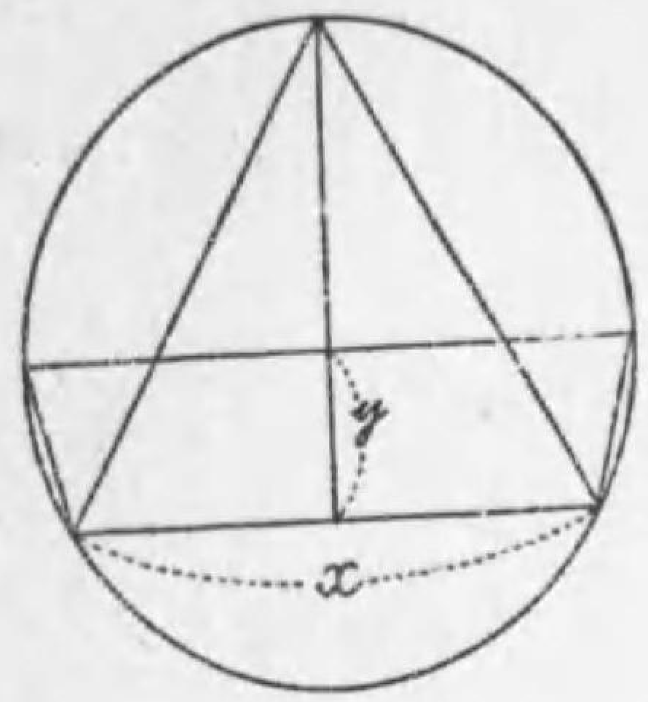
594 所得ヲ $5x$ 圓, $3x$ 圓 支出ヲ $7y$ 圓, $4y$ 圓トセヨ.

596 歩幅ヲ甲 x 尺乙 y 尺トスレバ $3x=4y$.

又甲乙速サノ比ハ $\frac{4x}{5y}$ 云々.

603 二ツノ場合ガアル.

甲圖ノ場合



二等邊三角形ノ底邊ヲ x 寸トシ梯形ノ高サヲ y 寸トスレバ

$\frac{1}{2}(a+y)x=\frac{1}{2}(2a+y)x$

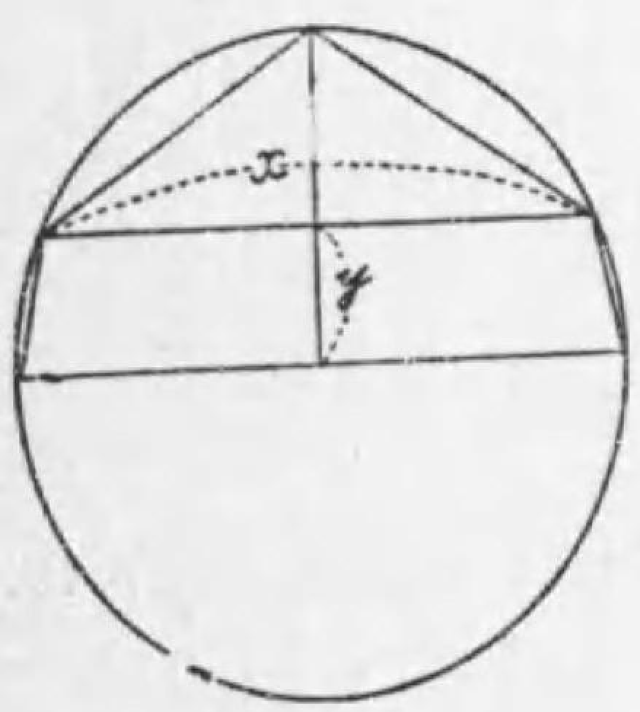
$\therefore\ x=2y\cdots\cdots\cdots(1)$

而ルニ $(\frac{x}{2})^2+y^2=a^2\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ヲ (2) ニ代入シテ $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$

ヲウ. 云々.

乙圖ノ場合



$\frac{1}{2}(a-y)x=\frac{1}{2}(2a+x)y$

$\therefore\ ax-xy=2ay+xy\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $(\frac{x}{2})^2+y^2=a^2$

$\therefore\ x^2+4y^2=4a^2\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ヨリ $2xy=ax-2ay\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)-(3)\times 2$

$x^2-4xy+4y^2=4a^2-2ax+4xy$

$\therefore\ (x-2y)^2+2a(x-2y)-4a^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore\ x-2y=-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}=-a\pm\sqrt{5}a=(-1\pm\sqrt{5})a$

又 (4) ヨリ $2a(x-2y)=4a^2-(x-2y)^2$ 此右邊ハ正ナルコト明カニシテ

且 $a>0$ ナル故 $x-2y>0$ 　$\therefore\ x-2y=(-1+\sqrt{5})a.$

$\therefore\ x=2y+(\sqrt{5}-1)a\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(5) ヲ (2) ニ代入シテ $4y^2+4(\sqrt{5}-1)ay+(6-2\sqrt{5})a^2+4y^2=4a^2$

$\therefore\ 4y^2+2(\sqrt{5}-1)ay-(\sqrt{5}-1)a^2=0$

$\therefore\ y=\frac{-(\sqrt{5}-1)a\pm\sqrt{(6-2\sqrt{5})a^2+4(\sqrt{5}-1)a^2}}{4}$

$=\frac{-(\sqrt{5}-1)a\pm\sqrt{(2+2\sqrt{5})a^2}}{4}$

正値ノ方ヲ採リテ $y=\frac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}\times a$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}\times a$

因テ所要ノ面積

$=\frac{1}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}\times a\times\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}\times a$

$=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}a^2$

(乙圖ノ場合ガ考慮サレタラ恐ラク本問題ハ試驗問題トシテ提出セラルヽコトハナカツタラウ)

614 外側ノ一列ノ人數ヲ x 人トシ. 四方各 y 列宛列ベルモノトスレバ

$4(x-y)y=360$ 　$\therefore\ (x-y)y=90\cdots\cdots\cdots(1)$

然ルニ $x>2y$ 　$\therefore\ x-y>y$

故ニ (1) ヨリ $x-y$ 及 y ハ次ノ値ヲトリウベシ.

$y\cdots\cdots\ \begin{cases}1,\\90,\end{cases}\ \begin{cases}2,\\45,\end{cases}\ \begin{cases}3,\\30,\end{cases}\ \begin{cases}5,\\18,\end{cases}\ \begin{cases}6,\\15,\end{cases}\ \begin{cases}9\\10\end{cases}$
$x-y\cdots\cdots$

之ヨリ六通リノ x, y ヲ決定シ得ベク從テ答ハ六通リ.

615 $0.41>\frac{79}{x}>0.42$ ナル x ヲ求ムレバヨイ.

$\therefore\ \dfrac{1}{0.41}>\dfrac{x}{79}>\dfrac{1}{0.42}\quad \therefore\ \dfrac{79}{0.41}>x>\dfrac{79}{0.42}\quad \therefore\ 187.6<x<192.6$

x ハ正ノ整數ダカラ　$x=188,\ 189,\ 190,\ 191,\ 192$　云々.

916　$(x-y)(x+y)=17.$

$x-y,\ x+y$ ハ何レモ正ノ整數デ從ッテ　$x-y<x+y$

$\therefore\ x-y=1,\ x+y=17$　デナクテハナラヌ. 云々.

619　$13x^2+18x+10=(ax+b)^2+(cx+d)^2$ トスレバ

$a^2+c^2=13\cdots\cdots(1)\quad 2(ab+cd)=18\cdots\cdots(2)\quad b^2+d^2=10\cdots\cdots(3)$

(1) ヲ滿足スル $a,\ c$ ノ正整數値ハ $a=2,\ c=3;\ a=3,\ c=2$

(3) ヲ滿足スル $b,\ d$ ノ正整數値ハ $b=1,\ d=3;\ b=3,\ d=1.$

此中ヨリ (2) ヲ滿足スルモノヲ求ムレバ $a=2,\ c=3,\ b=3,\ d=1$ 又ハ

$a=3,\ c=2,\ b=1,\ d=3$　故ニ答ハ　$(2x+3)^2+(3x+1)^2.$

622　$(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=0.\quad \therefore\ \left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2-4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1=0$ 云々

[$x>0,\ y>0$ ナルトキ $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$ 及 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$]

937　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{a}=\dfrac{a+b+c+d}{b+c+d+a}=1$　但 $a+b+c+d\neq 0$ トス

$\therefore\ a=b=b=d\qquad \therefore\ \dfrac{a+b+c+d}{a+b+c-d}=\dfrac{4a}{2a}=2$

若シ　$a+b+c+d=0$　ナルトキハ　$a+b+c-d=-2d$

$\therefore\ \dfrac{a+b+c+d}{a+b+c-d}=\dfrac{0}{-2d}=0$　　但　$d\neq 0$

643　假設ノ各邊ヲ abc デ割レバ　$\dfrac{y+z}{bc}=\dfrac{z+x}{ca}=\dfrac{x+y}{ab}=\dfrac{y+z-z-x}{bc-ca}$　云々.

650　假設ヲ變形シテ　$c(y-z)-b(y-z+x-y)+c(x-y)=0$

$\therefore\ (a-b)(y-z)-(b-c)(x-y)=0$　云々.

656　$\dfrac{p}{a^2-bc}=\dfrac{q}{b^2-ca}=\dfrac{r}{c^2-ab}=k$　トスレバ

$\dfrac{p^2}{(a^2-bc)^2}=\dfrac{qr}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\dfrac{p^2-qr}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$

$=\dfrac{p^2-qr}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}=k^2$　但　$a(a^3+b^3+c^3-3abc)\neq 0$　トス.

$\therefore\ \dfrac{p^2-qr}{a}=k^2(a^3+b^3+c^3-3abc)$　云々.

657　$\dfrac{x+y}{cx+ay}=\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}=\dfrac{x+y+y+z-z-x}{cx+ay+ay+bz-bx-cx}=\dfrac{1}{a}$

同樣ニシテ　$\dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$　ニモ等シ. 云々.

633　時間ヲ t 時, 距離ヲ S 哩, 速 v 毎時哩, 一哩ニ要スル石炭 P 封度,
車輛數 n, 30 哩ニ要スル石炭 x 封度トスレバ

$t=k\times\dfrac{s}{v},\quad v=k'\times\dfrac{\sqrt{P}}{n}$　　但　$k,\ k'$ ハ常數

$\therefore\ t=\dfrac{k}{k'}\times\dfrac{sn}{\sqrt{P}}\qquad \dfrac{k}{k'}$ ハ常數

$\therefore\ 1=\dfrac{k}{k'}\times\dfrac{36\times 20}{\sqrt{\dfrac{900}{36}}}\qquad \therefore\ \dfrac{k}{k'}=\dfrac{1}{144}$

$\therefore\ \dfrac{45}{60}=\dfrac{1}{144}\times\dfrac{30\times 18}{\sqrt{\dfrac{x}{30}}}\qquad \therefore\ \sqrt{\dfrac{x}{30}}=5\qquad \therefore\ x=750$

667　(I) 光ノ强サヲ l トスレバ　$l=k\times\dfrac{1}{a^x}$　　但 k ハ常數

今 x ノ種々ノ値トシテ　$p,\ p+d,\ p+2d,\cdots\cdots$(尺ヲ單位トス) ヲトリ
ソノ各ノ距離ニ於ケル光ノ强サヲ夫々　$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots\cdots$ トスレバ

$l_0=k\times\dfrac{1}{a^p},\quad l_1=k\times\dfrac{1}{a^{p+d}}=k\times\dfrac{1}{a^p}\times\dfrac{1}{a^d}$

$l_2=k\times\dfrac{1}{a^{p+2d}}=k\times\dfrac{1}{a^p}\times\left(\dfrac{1}{a^d}\right)^2,\ \cdots\cdots$

故ニ　$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots\cdots$ ハ G.P. ヲナス.

(II) 光源ノ光ノ強サヲ L トスレバ $L=k\times\frac{1}{a^0}=k$

$\therefore\ \frac{L}{2}=\frac{k}{2}=k\times\frac{1}{a^5}$ $\therefore\ a^5=2$ $\therefore\ a=2^{\frac{1}{5}}$

今 L ノ $\frac{1}{16}$ ノ強サトナル距離ヲ y トスレバ $\frac{L}{16}=\frac{k}{16}=k\times\frac{1}{a^y}$

$\therefore\ 16=2^{\frac{y}{5}}$ $\therefore\ 2^4=2^{\frac{y}{5}}$ $\therefore\ y=20.$

669 石炭料毎時 x 圓, 速サ毎時 v 浬トスレバ

$x=kv^2$ 但 k ハ常數 $\therefore\ 50=k\times10^2$ $\therefore\ k=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\times v^2$…………(1)

又 $(x+50)\times\frac{100}{v}=1200$…………(2) (1) ヲ (2) ニ代入シテ

$(\frac{1}{2}v^2+50)\times\frac{100}{v}=1200$ $\therefore\ v^2-24v+100=0$

$\therefore\ v=12\pm\sqrt{44}=12\pm6.63\cdots\cdots=18.63\cdots\cdots$ 又ハ $5.36\cdots\cdots$

714 中央ノ二項ハ第 m 項, 第 $m+1$ 項. 之ヲ夫々 α, β トスレバ

$\alpha^2+\beta^2=2p$………(1) $\alpha^2\beta^2=q$ $\therefore\ \alpha\beta=\pm\sqrt{q}$………(2)

(1)(2) ヨリ $\alpha+\beta=\pm\sqrt{2p\pm2\sqrt{q}}$, $\beta-\alpha=\pm\sqrt{2p\mp2\sqrt{q}}$…公差

今初項ヲ a 末項ヲ l, 公差ヲ d トスレバ

$\alpha=a(m-1)d$, $\beta=l-(m-1)d$ $\therefore\ \alpha+\beta=a+l$

而シテ求ムル總和ハ $\frac{2m}{2}(a+l)=m(\alpha+\beta)=\pm m\sqrt{2p\pm2\sqrt{q}}$

749 $\frac{1}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1}{4+2\sqrt{3}}$ 等

750 $(2+4+8+\cdots\cdots)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots)$ トセヨ.

752 初項ヲ a. 公比ヲ r トスレバ

$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=p$……(1) $\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=q$ $\therefore\ \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=q$……(2)

今 $\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}=x$ トスレバ $\frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}=x$…………(3)

(2)÷(1) $1+r^n=\frac{q}{p}$. $\therefore\ r^n=\frac{q-p}{p}$ $\therefore\ r^{2n}=\frac{(q-p)^2}{p^2}$

$\therefore\ 1+r^n+r^{2n}=\frac{pq+(q-p)^2}{p^2}$………(4)

(1) (3) (4) ヨリ $p\times\frac{pq+(q-p)^2}{p^2}=x$

$\therefore\ x=\frac{p^2-pq+q^2}{p}$

768 $a\times ar\times ar^2\times\cdots\cdots\times ar^{n-1}=a^nr^{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}$ 云々.

776 $y^2=xz$, $x^2+y^2+z^2=x^2+2xz+z^2-y^2$ 云々.

800 $p, a, b\ q$ ハ A.P. $\therefore\ 3(a-p)=q-p$………(1)

$\frac{1}{p}, \frac{1}{e}, \frac{1}{f}, \frac{1}{q}$ ハ A.P. $\therefore\ 3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$………(2)

(1)÷(2) $\frac{3(a-p)}{3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{f}\right)}=\frac{q-p}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ $\therefore\ (a-p)qf=-pq(f-a)$

$\therefore\ aqf=pq^2$ $\therefore\ af=pq$ 但 $q\neq0$.

又 $3(q-b)=q-p$………(3) $3\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$…………(4)

上ト同様ニシテ (3) (4) ヨリ $be=pq$

又 p, c, d, q ハ G.P. $\therefore\ \frac{c}{p}=\frac{q}{d}$ $\therefore\ cd=pq$ 云々.

823 $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n-1}{\frac{5}{4}-1}>396$ ヲ滿足スル n ノ限界ヲ求ムレバ

$\left(\frac{5}{4}\right)^n>100$ $\therefore\ n\ lag\frac{5}{4}>2$ $\therefore\ n\log\frac{10}{8}>2$

$\therefore\ n(1-3\log 2)>2 \qquad \therefore\ n>\dfrac{2}{0.0970}$ 云々.

832 $x>0 \qquad \therefore\ x=y^{\frac{b}{a}} \qquad \therefore\ (y^{\frac{b}{a}})^y=y^x \qquad \therefore\ \dfrac{b}{a}y=x$

$\therefore\ \left(\dfrac{by}{a}\right)^a=y^b \qquad \therefore\ \left(\dfrac{b}{a}\right)^a=y^{b-a} \qquad \therefore\ y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}}$

但 $y>0$. 云々.

[$(-5)^4=25^2 \qquad \therefore\ -5 = 25^{\frac{2}{4}}$ トスルナエズ.]

答

7	$a=3,\ b=-2,\ c=4$	13	$p=4,\ q=2,\ r=-16$
15	$a=-6,\ b=1$	17	$a=2,\ b=2$
18	$m=3,\ n=3,\ p=2$	20	$A=-2,\ B=-20,\ C=28$
24	$p=13,\ q=6$ 又ハ $p=5,\ q=-6$	25	$\pm(3x^3-x^2-2x+1)$
26	x^2-2x+1	29	2
31	$\dfrac{17}{2}$	32	-32
42	$a=24,\ b=2$	43	$5x+2$
49	$\dfrac{R-S}{\alpha-\beta}x+\dfrac{S\alpha-R\beta}{\alpha-\beta}$	10	$a=1,\ b=7$
51	$4,\ 5$	53	$(x+1)(x-2)(x+5)$
54	$(x+2)(x+3)(x+5)(x-4)$	55	$a=-2,\ b=-5,\ c=9$
56	$(x^2-xy-y^2)(x^2+xy-y^2)$	57	$(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$
58	$(x^n+1)(x^n+x-1)$	59	$(1-ab-a-b)(1-ab+a+b)$
60	$(a-1)^2(b-1)^2$	61	$(x^2+3xy+y^2)^2$
62	$\{x+b(a-2)\}\{x-a(b+2)\}$	63	$(x+2y)(x-y-1)$
64	$(2x-y+5)(x-2y-5)$	65	$(ab-ac+bc)(ab+ac-bc)$
63	$(a-3b+c)(a+b-3c)$	67	$(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$
71	$(x^2-xy+y^2+1)(x^2+xy+y^2+1)$	72	$(a^2+3b^2)(3a^2+b^2)$
74	$(4x^2+16x+11)$	75	$(a^2+5ab+5b^2)$
75	$(2x+15)(x+8)(2x^2+35x+120)$	77	$(x^2+15x+24)(x+4)(x+6)$
78	$-(b-c)(c-a)(a-b)$	79	$(b+c)(c+a)(a+b)$
80	$-(b-c)(c-a)(ab)-$	81	$h)-z)(z-x)(x-y)$
82	$(x+y+z)(xy+yz+zx)$	83	$-(b-c)(c-a)(a-b)$

84 同上　　85 $(x-z)(x^2+xz+z^2+xy-yz)$

86 $(p-2q)(p+2q)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

87 $-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)$　　88 $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x+a)(x^2-ax+a^2)$

89 $(4x+3y-1)(16x^2+9y^2+1-12xy+4x+3y)$

91 0　　92 $3(x-a)(x-b)(x-c)$

96 $6(3x-4y)(2y-1)(3x+2)$　　97 $3(5a-1)(b+1)(5a-b)$

98 $24abc$

99 $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

100 $5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$　　102 $(x+1)(x-2)(x^2-4x+2)$

103 $(b+c)(c+a)(a+b)$　　104 $3(b+c)(c+a)(a+b)$

107 $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$

108 $-(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$

115 $-1,\ -2$　　116 0

117 $47,\ 123$　　118 $x^2-2x+3,\ 3x^2-x+1,\ x^2-3x+7,$

119 $3x^2-7x+2$　　120 $119\quad 595$

121 $x^6-2ax^5+2a^2x^4-2a^3x^3+2a^4x^2-2a^5x+a^6$

$x^5+x^4+x^3+5x^2+x-3$　　98532

122 975

123 $(x-3)(x^2+3x+2),\ (x+5)(x^2+3x+2)$

124 $(x+1)(x-1),\ (x^2+3x+1)(x-1)$

125 $(x-3)(x-2),\ (x+1)(x-2)$

126 $x-1$　　131 $4,\ 5$

135 $m=6,\ n=7$　　136 $\dfrac{3}{2}$

137 -1　　138 -1

139 $\dfrac{7}{5},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\ ;\ \dfrac{7}{5},\ -\dfrac{1}{2},\ -2$

140 $0,\ \dfrac{7}{2}$　　143 $0,\ 7\ ;\ 0,\ 9$ 叉ハ $5,\ 2\ ;\ 5,\ 4$

160 (i) 否 (ii) 正　　161 $\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

162 $\dfrac{3x-1}{2x-1}$　　163 $\dfrac{x^2+7x}{x^2+7x+26}$

164 -3　　165 a^4-b^4

166 $\dfrac{-4a(a^3+b^3)}{b(a-b)^3}$　　167 $\dfrac{2ax}{x^2+a^2}$

168 2　　169 $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$

171 $\dfrac{2}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$　　172 $\dfrac{8a^7}{x^8-a^8}$

173 $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$　　174 $\dfrac{1}{abc}$

175 0　　176 $\dfrac{y}{x+y}$

177 x^2　　178 1

179 1　　180 2

181 1　　182 1

183 bc　　184 $\dfrac{b}{a}$

185 $a^{-\frac{1}{12}},\ a$　　186 $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$

187 $a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$

188 x^6+2+x^{-6}　　189 x^2-x^{-2}

190 x^{-1}　　191 1

192 $3+\dfrac{6a}{x-a}>0$ ナルトキ $\dfrac{3x+3a}{x-a}$, $3+\dfrac{6a}{x-a}<0$ ナルトキ $\dfrac{3x+3a}{a-x}$

193 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

195 $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$

196 2^n, 2^{-n}

197 3

198 $b-a$

199 0

200 a^2 但 $x>0$, $a>0$ トス.

201 $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}}{a^2-b^2}$

202 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

203 $\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}{2}$

204 $\dfrac{\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{9}}{3}$

205 $\sqrt[3]{2}-1$

206 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{2}$

207 $2-\sqrt{3}$

208 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

209 (1) $\dfrac{x+\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{y}$, (2) 1.93

210 12

211 1

212 $6\sqrt{3}$

213 $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

214 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

215 $5+\sqrt{3}$

216 $3+\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$

217 $3+\sqrt{5}$

218 $\dfrac{2\sqrt{5}}{7}$

219 $\sqrt{2}$

221 $\pm(4+3i)$, $\pm(1-2i)$

223 0.71

224 第二位マデ正確

225 54.25

227 $\frac{1}{3}$, -1

231 $b^2-4ac=0$

233 $q+2=p^2$

234 $m^4+4m^2-n^2=0$

235 $(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)=8$

236 $a(3b^2-a^2)=2c^3$

237 $\dfrac{2c^3-a(3b^2-a^2)}{6}$

238 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2$

240 $-5+12i$, $21-20i$, $2i$, $-2i$, $31-i$

241 -1, $-i$, 1, i, -1, $-i$, 1

242 2, $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{6}$

252 $(b+c)(c+a)(a+b)$

275 1

289 $bm-an\neq0$ ナルトキ $\dfrac{m^2}{a}+\dfrac{n^2}{b}>\dfrac{(m+n)^2}{a+b}$

$bm-an=0$ ナルトキ $\dfrac{m^2}{a}+\dfrac{n^2}{b}=\dfrac{(m+n)^2}{a+b}$

相等シキタメノ條件 $bm-an=0$.

298 $m=0$, $n=0$ ノトキ不定；$m-n=0$, $n\neq0$ ノトキ不能；

$m-n\neq0$ ノトキ $x=\dfrac{-n^2}{m-n}$

299 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ ナルトキ 不定

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\neq0$ ナルトキ $x=\dfrac{a+b+c}{3}$

300 $p-q=0$ ナルトキ不定；$p+q=0$ ナルトキ不能

$p-q\neq0$, $p+q\neq0$ ナルトキ $x=\dfrac{pq}{p+q}$

301 $m+n=0$ ナルトキ不定，$m+n\neq0$ ナルトキ $x=\dfrac{m-n}{m+n}$

302 2.26, -0.38

303 $\sqrt{2}+1$, 1

304 $2a-3b$, $-a+3b$

305 7, -3

307 a, $\dfrac{-1-a^2}{2a}$

308 $a=b$ ナルトキ不定，$a\neq b$ ナルトキ $x=\pm(a-b)$

309 44.888 又ハ 9.111

310 -44 又ハ -85

312 $-\frac{1}{3},\ \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ 313 $\frac{1+\sqrt{41}}{4}\ \left(-\frac{5}{2},\ -1,\ \frac{1-\sqrt{41}}{4}\right)$

314 $0,\ -5,\ \frac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}$ 315 $-5,\ 4,\ \frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

316 $\pm a,\ \pm\frac{1}{a}$ 317 $\pm 4.162,\ \pm 2.162$

318 $\frac{3\pm\sqrt{19}\,i}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ 319 $-5,\ 1,\ -1,\ -2$

320 $4,\ -2\pm\sqrt{27}\,i$ 321 $-1,\ \frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

322 $-5,\ 1,\ 9$ 323 $a=2,\ b=-9,\ x=\frac{5}{2}$

324 $\pm 1,\ \pm 3$ 325 $\pm i,\ \frac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$

326 $-1,\ \frac{1}{2},\ 2$ 327 3

328 $a=2,\ b=3$ 329 a^3+b^2

335 $x^2+9x+14=0$ 336 $acx^2-b^2x+b^2=0$

337 $p^2x^2-p^2(p^2-3q)x+q^3=0$ 338 $(6p^2+q)x^2-(3p^2-2q)x+q=0$

339 $(2b^2+ac)x^2+9bcx+9c^2=0$ 340 $x^2+(p-2h)x+q-hp+h^2=0$

341 $x^2-(p^2-2q+2p+2)x+(q+p+1)^2=0$

344 $3b^2=16ac$ 347 $0,\ 15$

350 $ab>0$ ナルトキ $m=0$；$ab\not>0$ ナルトキ解ナシ

351 $9ac+(a+b)(a-2b)=0$ 352 $\frac{-6647}{27},\ -245$

353 $pq=r$ 355 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

358 $\frac{11}{7},\ -3$ 359 $-3,\ 1$

365 $5,\ -2$ 366 $m=1,\ x=\frac{1}{3},\ y=2$

367 $a,\ b\pm\sqrt{b^2+a^2+c^2}$ 368 $5,\ a$；$-5,\ a$

372 $(x-\frac{3}{11}y)(x-\frac{1}{3}y)$ 373 $(x-2y-a)(2x-y+a)$

374 $(a-3b+c)(a+b-3c)$ 315 $(x-2y-5)(2x-y+5)$

376 $k=a=b$ 380 $6\ (k\neq 0)$

381 $x<-1$ 又ハ $\frac{7}{3}<x$ 382 $-4<x<-3$

383 $-1<x<2$ 384 $-1<x<6$

385 $x<-3$ 又ハ $2<x<4$ 386 $x<-5$ 又ハ $-3<x<-2$

387 $-5<x<-1$ 又ハ $2<x<7$ 388 $x<0$ 又ハ $5<x$

389 $x<-6$ 又ハ $6<x$ 390 $x<3$ 又ハ $3<x$

391 不能 392 $2-2\sqrt{2}<p<2+2\sqrt{2}$

393 $8\geqq m$

397 $k\leqq\frac{5-\sqrt{9-16a^2}}{2(a^2+1)}$ 又ハ $\frac{5+\sqrt{9-16a}}{2(a^2+1)}\leqq k$ 但 $-\frac{3}{4}\leqq a\leqq\frac{3}{4}$

398 $4<x<6$ 399 $-\sqrt{10}\leqq a\leqq\sqrt{10}$

400 $1\leqq y\leqq 10,\ 3\leqq x\leqq 6$

401 2 ハ二根ノ中間ノ數. 3 ハ小ナル根ヨリ小ナリ

402 $-3<m\leqq 1$ 403 $2<m<2\frac{1}{3}$

404 極小値 $-6\frac{1}{4}$, 極大値 $6\frac{1}{4}$, 極小値 $6\frac{4}{5}$, 極小値 -1

極小値 -14, 極大値 7, 極小値 0

405 極小値 $\frac{1}{3}$, 極大値 3 $(\frac{1}{3}\leqq k\leqq 3$ トナル$)$

406 極大値 -2, 極小値 6 $(m\leqq -2,\ 6\leqq m$ トナル$)$

407 $-9\leqq y\leqq 1,\ -2\leqq x\leqq 8$

408 極小値 6, 極大値 18 $(6\leqq k\leqq 18)$

409 前問ニ同ジ

410 極小値 $\frac{4}{3}$

411 $p=-2,\ q=4$

412 6, 7, 8, 9 (極小値 $5\frac{3}{4}$)

415 原正方形ノ頂點ヨリ内接正方形ノ頂點マデノ距離ヲ x トスレバ $x=\frac{a}{2}$ ナルトキ内接正方形ハ最小トナル.

416 高サ及底邊ガ夫々三角形ノ高サ及底邊ノ半分ニ等シキトキ内接矩形ノ面積ハ最大トナル.

417 1 割

418 20.5 哩強

420 $m>\frac{49}{12}$

421 $0<p<2$

423 -4

424 $\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}$

425 $y\neq0,\ b\neq0$ ナルトキ $x=c$, $a\neq b$ ナルトキ $x=\frac{2c-a-b}{2}$

426 $0,\ a+b$, $a+b\neq0$ ナルトキ $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

427 $\frac{-5\pm\sqrt{193}}{12}$

428 3又ハ $\frac{11}{2}$

429 $\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}$

430 不能

431 $\pm a,\ \pm\frac{i}{a}$

432 $\frac{-19\pm\sqrt{3}\,i}{13},\ 0$

433 $\pm1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

434 $-2\pm\sqrt{3}$, 1 (等根)

435 $6,\ -2,\ 3\pm\sqrt{21}$

436 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ -2,\ 1$

437 2

438 5

439 不能

440 4

441 5

442 0

443 $\frac{9+4\sqrt{3}}{3}$

444 不能

445 $27,\ -64$

446 $-3,\ -5$

447 $1,\ 9$

448 $6,\ -3$

449 $-\frac{2}{3},\ 2$

450 $0,\ \frac{63}{65}$

451 3

452 2

453 4

454 $-2,\ -6\ ;\ 2,\ 6$

455 $3,\ 5\ ;\ \frac{121}{25},\ \frac{-13}{25}$

456 $4,\ 3\ ;\ \frac{22}{15};\ -\frac{11}{9}$

457 $a,\ b\ ;\ \frac{a(3b-a)}{a+b},\ \frac{b(3a-b)}{a+b}$

458 $1,\ 2\ ;\ 2,\ \frac{1}{2}$

459 $\frac{7\pm\sqrt{57}}{4},\ \frac{21\pm\sqrt{57}}{48}$

460 $\frac{5}{4},\ \frac{8}{5}\ ;\ \frac{3}{2},\ 2$

461 $3,\ 2\ ;\ 2,\ 3$

462 $2,\ 1\ ;\ -6,\ -3\ ;\ 2+i\sqrt{5},\ \frac{4+2\sqrt{5}\,i}{3}\ ;\ 2-i\sqrt{5},\ \frac{4-2\sqrt{5}\,i}{3}$

463 $1,\ 2\ ;\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4}\ ;\ \frac{-4-\sqrt{10}}{2},\ \frac{-12+\sqrt{10}}{4}\ ;\ \frac{-4+\sqrt{10}}{2},\ \frac{-12-\sqrt{10}}{4}$

464 $2,\ 1\ ;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}$

465 $6,\ 5\ ;\ -6,\ -5$

466 $8,\ 6\ ;\ -8,\ -6\ ;\ 8i,\ 6i\ ;\ -8i,\ -6i$

467 $-1,\ 2\ ;\ 1,\ -2\ ;\ 2,\ 1\ ;\ -2,\ -1$

468 $x=y=\pm1\ ;\ \frac{5}{\sqrt{109}},\ \frac{11}{\sqrt{109}}\ ;\ \frac{-5}{\sqrt{109}},\ \frac{-11}{\sqrt{109}}$

469 $\sqrt{3},\ 0\ ;\ -\sqrt{13},\ 0\ ;\ \sqrt{\frac{3}{19}},\ 6\sqrt{\frac{13}{19}}\ ;\ -\sqrt{\frac{3}{19}},\ -6\sqrt{\frac{13}{19}}$

471 $a+b,\ c\ ;\ c,\ a+b$

472 $\frac{a}{2},\ \frac{b}{4}\ ;\ \frac{a}{4},\ \frac{b}{2}\ ;\ -\frac{a}{4},\ -\frac{b}{2}\ ;\ -\frac{a}{2},\ -\frac{b}{4}$